MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXIX 1922)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO I.

B. MORPURGO e A. RABBENO

SULL'ADATTAMENTO AL CLIMA ED AL LAVORO IN ALTA MONTAGNA

NEL PERIODO DELL'INVOLUZIONE SENILE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Sull'adattamento al clima e al lavoro in alta montagna nel periodo dell'involuzione senile [1]

Memoria del Corrisp. dott. B. MORPURGO e del dott. A. RABBENO

presentata nella seduta del 7 maggio 1922.

Con queste ricerche intendiamo di iniziare uno studio metodico sui processi di adattamento al clima ed al lavoro progressivamente aumentato in alta montagna, in un organismo sano, sulla soglia del periodo di involuzione.

Negli anni venturi ci proponiamo via via di seguire le eventuali modificazioni di quei processi, in rapporto col crescere dell'età, sul medesimo soggetto.

La persona scelta per gli esperimenti è uno di noi due (B. M.), uomo sano, dell'età di 60 anni all'epoca dell'inizio delle esperienze, di peso di kgr. 70, dell'altezza di m. 1.66, con musculature discretamente robuste ma non sviluppate con metodici esercizi sportivi, discretamente bradicardico (50 pulsazioni al minuto), senza alcun precedente morboso nè difetti fisici all'infuori di un breve accorciamento della gamba destra, dipendente da frattura avvenuta 22 anni or sono, vivente a Torino nell'esercizio dell'insegnamento universitario, buon camminatore ma non alpinista provetto.

Prima della partenza per l'alta montagna, il soggetto non aveva fatta alcuna preparazione di allenamento.

Metodo di ricerca.

Gli esperimenti sono stati eseguiti in tre periodi di tempo: a Torino (276 m. s. m.) dal 14 al 24 luglio 1921, al Col d'Olen (2900 m. s. m.) dal 31 luglio al 28 agosto, nell'inverno successivo (11, 18 dicembre, 4 gennaio) di nuovo a Torino. Le determinazioni sono state fatte a Torino, alla mattina fra le ore otto e le dieci (dopo una tazza di caffè nero e dopo una breve passeggiata in bicicletta) al Col d'Olen fra le ore cinque e le sette prima della colazione (caffè-latte, pane e marmellata).

(1) Lavoro eseguito nei laboratorii scientifici A. Mosso sul Monte Rosa (Direttore prof. A. Aggazzotti.

Al Col d'Olen oltre che dell'acclimatazione sono stati seguiti i fenomeni relativi all'allenamento e perciò sono state ripetute le varie prove fatte allo stato di riposo, dopo il ritorno dalle escursioni.

Abbiamo raccolto i seguenti dati:

Peso del corpo.

Temperatura del corpo.

Numero delle pulsazioni.

Forma del polso.

Pressione arteriosa.

Numero dei corpuscoli rossi.

Frequenza del respiro. Capacità vitale. Ventilazione polmonare.

Ricambio respiratorio (volume di ossigeno assorbito e di anidride carbonica eliminata in cinque minuti primi; quoziente respiratorio). Produzione di calore.

Quantità, peso specifico e reazione potenziale delle urine emesse nelle 24 ore.

Oltre a ciò, fu confrontata, per opera del prof. Aggazzotti (1), la tolleranza al glucosio a Torino nell'inverno e al Col d'Olen.

Crediamo opportuno di indicare alcuni particolari sul metodo seguito. Il *peso del corpo* era misurato con una bilancia *a bascule* con l'approssimazione sino a 5 gr. a Torino, sino a 100 gr. all'Olen. La *temperatura del corpo*, interna (rettale) esterna (ascellare) veniva misurata a letto alle 7 del mattino ed alle 22 della sera. Il *numero delle pulsazioni* erano contate nel riposo, seduto. Alcune determinazioni sono state eseguite durante le escursioni, dopo 15-20 minuti di riposo. La *forma del polso* veniva determinata con uno sfigmografo a contropressione pneumatica, con cuscinetto elastico applicato nel cavo popliteo di sinistra. Il cuscinetto era fatto di sottile lamina di para, attaccato ad una striscia di robusta tela poco estensibile; la pressione registrata con un manometro scrivente del *Ludwig*. Le onde pulsatorie erano trasmesse ad un tamburo scrivente per mezzo di uno sfigmoscopio tipo *Marey* lievemente modificato (palloncino di gomma elastica molto sottile, introdotto in una sfera di vetro). Gli sfigmogrammi furono tracciati ad una pressione corrispondente all'ampiezza massima delle oscillazioni sfigmiche (pressione minima). Si ebbe cura di arrivare a questa pressione da una di poco superiore alla minima. Per la misura della *pressione arteriosa* fu usato l'oscillometro del *Pachon*, col metodo delle pressioni decrescenti. La pressione massima fu letta nel momento in cui le oscillazioni dell'indice incominciavano ad aumentare di ampiezza, la minima quando le oscillazioni cominciavano a diminuire.

Il *conteggio dei globuli rossi* fu fatto colla camera del Bürker (4) su 80 quadretti; in questo modo il limite d'errore non superava il 5 %.

La *capacità vitale* era misurata con un contatore a gas, che permetteva la lettura di 12 cmc.; si eseguivano tre determinazioni e si teneva conto della media.

La misura della *ventilazione polmonare* fu fatta per cinque minuti.

Ricambio respiratorio: la raccolta dell'aria veniva fatta da seduto entro un sacco impermeabile del tipo *Douglas*, munito di valvole dello *Zuntz*. L'aria del sacco veniva misurata col contatore da gas: un campione, raccolto su mercurio, serviva per l'analisi che fu eseguita coll'apparecchio di *Haldane*. Durante l'esperimento si teneva aperta la finestra dell'ambiente. Furono determinate: la *quantità in volume dell'anidride car-*

bonica eliminata e dell'ossigeno assorbito in 5' e calcolato il quoziente respiratorio. Per il calcolo ci siamo attenuti alle seguenti percentuali della composizione dell'aria atmosferica (Haldane) (2): O_2 20,93 %, CO_2, 0,03 %, N 79,04 %. Per la capacità vitale e la ventilazione polmonare sono indicati nelle tabelle i valori bruti e quelli ridotti a 0° e 760 mm. Hg, per il CO_2 emesso e l'O_2 assorbito solo i valori ridotti.

Il *numero delle calorie prodotte* (per kgr. di peso del corpo e per ora) fu calcolato in base al quoziente respiratorio osservato ed alla quantità di ossigeno assorbito. Al quoziente respiratorio di 0,707 corrisponde per ogni litro di O_2 assorbito, una produzione di 4.686 Cal.; al quoziente 1.0 una produzione di 5.047 Cal. A variazioni del quoziente respiratorio entro i valori riportati, corrisponderanno variazioni proporzionali della produzione di calore. Per un aumento del quoziente respiratorio di 0.01 si avrà un aumento di $\frac{0.361}{29.3} = 0.0123$ Calorie. (Zuntz e coll. [3] pag. 96).

Se indichiamo con Q il valore del quoziente respiratorio trovato, con O i litri di ossigeno consumati per ora e con C il numero delle Calorie prodotte per ora avremo:

$$[4.686 + (Q - 707)\, 0.0123]\, O = C$$

Urina: La raccolta delle urine fu eseguita ogni mattina alle ore 8, il peso specifico fu determinato alla temperatura di 15°, la reazione potenziale fu titolata con soluzione 0.1 N di Na OH (fenoftaleina).

Prima di passare all'esame dei risultati sperimentali esponiamo in succinto i valori medii riguardanti le condizioni metereologiche osservate al mattino nei tre periodi di ricerca; e per comodità di esposizione introduciamo questi dati riguardanti il clima dell'Olen nel diario del soggiorno in alta montagna.

A Torino, nell'estate, la temperatura del laboratorio è stata in media di 24°, il giorno più caldo è stato il 22 luglio (temp. ambiente 26°, massima all'aperto + 30°, minima + 19°). Pressione atmosferica in media 745 mm. Hg, il cielo sereno. Nell'inverno la temperatura ambiente + 7° la pressione atmosferica 743 mm., il cielo coperto, fitta nebbia.

Diario al Col d'Olen.

I *giornata* (30 luglio 1921). Partenza al mattino da Torino per Alagna, dopo breve pasto, prosecuzione del viaggio per il Col d'Olen a piedi, arrivo all'istituto alle ore 20.30. Ore di marcia 5, molto caldo, molto sudore, stanco.

II *giornata.* Riposo. Temp. ambiente 15.5°. (1) Pressione atm. 545 mm. Cielo sereno.

III *giornata.* Al mattino escursione alla cresta Nord del Ghiacciaio dell'Indren (3500 m.), ritorno all'Istituto alle ore 12.30. Ore di marcia 3.30. Temp. ambiente 13°. Pressione atm. 546 mm. Cielo sereno.

(1) La temperatura ambiente del laboratorio e la pressione atmosferica furono misurate fra le ore 5 e le 7 del mattino.

IV *giornata*. Al mattino escursione alla capanna Gnifetti (3620 m.) ritorno all'Istituto alle ore 12. Neve buona. Ore di marcia 5.45'. Temp. ambiente 10°. Pressione atm. 544 mm. Cielo sereno.

V *giornata*. Riposo. Temp. ambiente 12°. Pressione atm. 545 mm. Cielo sereno.

VI *giornata*. Escursione a Gressoney Trinità (1627 m.), ritorno al Col d'Olen alle ore 20.25. Ore di marcia 8.10'. Giornata mite. Temp. ambiente 13°.

VII *giornata*. Mattina riposo ; pomeriggio passeggiata al Colle delle Pisse. Temp. ambiente 16°. Pressione atm. 544 mm. Sereno.

VIII *giornata*. Mattino riposo, pomeriggio passeggiata di circa 4 ore (discesa al Sasso del Diavolo e ritorno). Temp. ambiente 16°. Pressione atm. 545 mm. Sereno.

IX *giornata*. Escursione a Gressoney Trinità, ritorno al laboratorio alle ore 17. Giornata molto calda. Gita faticosa. Ore di marcia 8.15'. Temp. ambiente 15°. Pressione atm. 545 mm.

X, XI *giornata*. Riposo. Temp. ambiente 14°, 17°. Pressione atm. 544 mm. Nebbia.

XII *giornata*. Al mattino passeggiata di circa 3 ore nei dintorni dell'Istituto.

XIII *giornata*. Riposo. Temp. ambiente 13°. Pressione atm. 538 mm. Pioggia e neve.

XIV *giornata*. Al mattino riposo, nel pomeriggio circa 4 ore di marcia, con bufera di neve nei dintorni dell'Istituto. Temp. ambiente 10.5°. Pressione atm. 535 mm.

XV *giornata*. Nel mattino escursione al Ghiacciaio dell'Indren (3500 m.), 4 ore di marcia ; nel pomeriggio discesa al lago del Gabiet (2339 m.), ritorno all'Istituto alle ore 18. 3.30' ore di marcia. Temp. ambiente 11°, Pressione atm. 536 mm. Cielo mezzo coperto.

XVI *giornata*. Al mattino riposo. Ore 13.40 partenza dal Col d'Olen per l'Alpe Taglie ove arriva alle ore 17.40, 4 ore di marcia. Pernottamento nella baita.

XVII *giornata*. Ore 3.30 partenza dall'Alpe Taglie, arrivo alla Cengia del Pujo, Corno Bianco, (circa 3300 m.) alle ore 8.15. Tempo molto freddo nebbioso. Inizio della discesa alle ore 9, Alpe Taglie ore 13.30, riposo di 15', ritorno all'Istituto alle ore 21, dopo 16.20' ore di cammino, le ultime in mezzo alla nebbia e alla neve. Molto stanco. In mezz'ora si rimette e mangia con appetito.

XVIII *giornata*. Riposo. Temp. ambiente 6°. Pressione atm. 536 mm. Nebbia e neve.

XIX *giornata*. Al mattino passeggiata al ghiacciaio dell'Indren (3500 m.), nel pomeriggio al lago del Gabiet (2339 m.) circa 7 ore di marcia. Temp. ambiente 5.5° Pressione atm. 538 mm. Nebbia.

XX. *giornata* Mattino breve uscita. Pomeriggio 5 ore di marcia nei dintorni dell'Istituto.

XXI, XXII *giornata*. Riposo. Temp. ambiente 8°, 5.5 °, Pressione atm. 540-536. Neve.

XXIII *giornata*. Mattina riposo. Pomeriggio discesa al Sasso del Diavolo e ritorno.

XXIV *giornata*. Escursione a Gressoney Trinità, ritorno all'Istituto alle ore 16. Ore di marcia 7.5'. Temp. ambiente 6.5°, Pressione atm. 536. Sereno.

XXV *giornata*. Riposo. Temp. ambiente 8°. Pressione atm. 538. Cielo coperto.

XXVI-XXVII *giornata*. Riposo. Persiste il cattivo tempo.

XXVIII *giornata.* Nel mattino escursione alla capanna Gnifetti. Ritorno alle ore 12.30. Ore di marcia 4.50'. Neve molle. Molto caldo sul ghiacciaio. Marcia molto faticosa. Sudato assai. All'arrivo all'Istituto poco appetito, senso di stanchezza muscolare, dolori alle articolazioni del piede e del ginocchio.

Risultati sperimentali.

Peso del corpo.

Riguardo alla influenza che il clima alpino esercita sul peso del corpo, Mosso (5, pag. 393) trovò in alcuni dei componenti la spedizione sul Monte Rosa, una diminuzione di peso, in altri un aumento. Cohnheim e Kreglinger (6) determinarono la perdita di peso del corpo, durante la notte, sotto le coltri e videro una maggior perdita di peso in montagna che in pianura.

Galeotti e Signorelli (7), in ricerche sul bilancio dell'acqua, notarono che in condizioni normali, le oscillazioni giornaliere del peso del corpo, durante il riposo, furono molto piccole e in senso positivo al Col d'Olen, mentre quelli stessi soggetti avevano perduto di peso a Napoli.

Durante le escursioni in montagna, si hanno perdite di peso considerevoli; Cohnheim e Kreglinger (6), Galeotti e Collaboratori (8) dopo ascensioni sul gruppo del Monte Rosa, trovarono diminuzioni del peso del corpo da 1000 a 5800 gr.; le variazioni erano in rapporto colle condizioni metereologiche della giornata e colle condizioni fisiche dei soggetti.

Nel giorno seguente alle ascensioni, si ha forte ritenzione di acqua, che riporta il peso del corpo al suo valore primitivo (Galeotti e Signorelli, l. c.).

Nei nostri esperimenti (cfr. tab. I e II, colonna 5) il peso del corpo fu in media a Torino in estate, di kgr. 69.955; in inverno kgr. 69.121, con minime variazioni giornaliere. Nel periodo di soggiorno all'Olen il peso del corpo ricavato da pesate fatte nei giorni di riposo, non si modificò notevolmente: la media è risultata di kgr. 69.724.

Influenza delle escursioni sul peso del corpo.

Numero	Escursioni	Prima della escursione	Dopo della escursione	Il mattino successivo	Differenza fra prima e dopo l'escursione	Differenza fra il mattino della escursione e quello successivo
III	Ghiacciaio Indren....	69.620	68.520	69.920	— 1.100	+ 300
IV	Capanna Gnifetti....	69.920	68.620	70.070	— 1.300	+ 150
VI	Gressoney Trinità (¹)	70.020	68.420	69.620	— 1.600	— 400
IX	Gressoney Trinità (²)	69.820	66.820	68.520	— 3.000	— 1300
XVI	Corno bianco........	69.020	—	68.720	—	— 300
XXIV	Gressoney Trinità (¹)	69.420	68.020	69.420	— 1.400	± 0

(1) Giornata mite.

(3) Giornata molto calda, molto sudore.

La perdita di peso osservata nelle escursioni, variò fra un minimo di gr. 1100 ed un massimo di gr. 3000, verificatosi quest'ultimo nella seconda escursione a Gressoney (n. IX), durante la quale, per le condizioni metereologiche della giornata, si ebbe una forte perdita di acqua da parte dell'organismo.

Nel mattino seguente alle escursioni brevi, il peso del corpo presentò un piccolo aumento, in quello seguente alle escursioni più lunghe e faticose persistette una certa diminuzione, ma questa fu in ogni caso di molto minore di quella verificata subito dopo il ritorno. Al terzo giorno il peso del corpo ritornò alla norma o superò di poco questi valori.

Temperatura del corpo.

Secondo Zuntz e collaboratori (l. c. pag. 404) in alta montagna si ha un indubbio aumento della temperatura rettale, tanto al mattino che alla sera; questo aumento si manifesta nelle diverse persone a differenti altezze, compare al primo giorno e persiste durante tutta la dimora a grandi altezze (Vetta del monte Rosa, spedizione del 1901). Al Col d'Olen fu trovato in uno dei soggetti (Müller) un piccolo aumento della temperatura del corpo: a Brienz (576 m.) 36.3°, al Col d'Olen (2900 m.) 36.6°, Waldenburg non presentò alcuna variazione. Nel 1903 Zuntz trovò i seguenti valori:

A Todmoos (800 m.) 2 giorni 36.5° 36.5°
Al Col d'Olen . . . . 4 giorni 36.8° 36.45° 36.65° 36.5°.

Durig e Kolmer (9) affermarono che in alta montagna durante il riposo, la temperatura era più elevata e che il regime calorico in quelle condizioni era più labile, in modo da provocare oscillazioni irregolari nella temperatura. Secondo le ricerche di Fuchs (10) al Col d'Olen e quelle di Durig e Zuntz (11) a Teneriffa, la temperatura del corpo non presenta importanti variazioni in montagna.

Nelle salite in montagna furono osservati aumenti notevoli della tempratura del corpo. Mosso (l. c., pag. 28) vide che la temperatura interna può toccare i 39.5° per la fatica di una piccola ascensione. Durig (9) osservò su sè stesso nella salita da Alagna al Col d'Olen, un aumento nella temperatura di + 0.° 9.

Mosso fece eseguire ad un robusto portatore una medesima marcia in salita quando era allenato e dopo alcuni mesi di riposo; da queste ricerche e da altre fatte su tre studenti e su alcuni soldati, conchiuse che l'allenamento tende a mantenere la temperatura nei limiti fisiologici.

In Zuntz e collaboratori (l. c., pag. 403) la temperatura del corpo nel riposo raramente sorpassò i 37°; alla fine delle piccole marce i massimi da loro osservati, oscillarono fra 38.2° e 39°, dopo le grandi marce fra 37.9° e 39.1° notarono forti differenze individuali, il più allenato (Kolmer) ed il più giovane (Waldenburg, 21 anni) presentarono i minori aumenti di temperatura. Coll'allenamento diminuirono i forti aumenti osservati nelle prime marce. Osservarono inoltre che la temperatura saliva di più in quelli che più sudavano. Nelle ricerche di Galeotti e collaboratori (l. c.) la temperatura del corpo è sempre aumentata di qualche decimo di grado dopo le escursioni.

Dalle cifre riportate nelle tabelle I e II, colonne 6–9, risultano i seguenti valori medii per il riposo:

	Temperatura ascellare		Temperatura rettale	
	Mattino	Sera	Mattino	Sera
A Torino nel Luglio...	36.3	36.6	36.6	37.0
A Torino nel Dicembre	—	—	36.8	—
Al Col d'Olen	36.4	36.7	36.8	37.0

La temperatura del corpo, misurata in condizioni di riposo a letto, non presentò alcuna variazione.

INFLUENZA DELLE ESCURSIONI SULLA TEMPERATURA DEL CORPO.

N.ro	Escursioni	Mattino prima della escursione	Sera dopo la escursione	Mattino seguente	Differenza tra prima e dopo l'escursione	Differenza tra il mattino precedente e quello seguente
VI	Gressoney ...	36.6	37.3	37	+ 0.7	+ 0.4
IX	Gressoney [1].	36.6	36 8	36 8	+ 0.2	+ 0.2
XVI–XVII	Corno Bianco	36.6	37.0	36.6	+ 0.4	0
XXIV	Gressoney ...	36.7	36.9	36.7	+ 0.2	0

(1) Giornata molto calda, sudò assai.

La temperatura rettale della sera, nelle giornate di marcia, presentò un piccolo aumento su quella del mattino; nella giornata più calda l'aumento fu minore. Le variazioni rimasero entro i limiti fisiologici.

Dopo l'allenamento, diminuì l'incremento della temperatura osservato alla sera, ed al mattino seguente alla escursione la temperatura ritornò ai valori normali.

LA FREQUENZA DEL POLSO.

Secondo le ricerche della massima parte degli Autori [Mosso (5), A e I. Loewy, L. Zuntz (12), N. Zuntz e coll. (3). Fuchs (10), Hasselbalch e Lindhard (13), Durig e Zuntz (11), Schneider e Sisco (14) nei primi giorni di dimora in alta montagna si ha un aumento della frequenza del polso, al quale segue una graduale diminuzione, con ritorno ai valori del piano od a questi di poco superiori al terzo o al quarto giorno.

Riguardo alla frequenza del polso nel lavoro in montagna; Mosso nel 1895, determinando il numero delle pulsazioni nella corsa su di un breve tratto di terreno in salita presso Gressoney; vide in sè stesso, (all'età di 49 anni e col peso di 74 kgr.) aumentare la frequenza del polso da 60 a 114, in Borsalino (18 anni, peso kgr. 58) da 76 a 150, nella guida Lochmatter (28 anni, peso kgr. 75) da 71 a 140.

Kronecker (citato da Zuntz (3) pag. 339) salendo da Zermatt (1600 m.) al Breithorn (3750 m.) osservò in diverse persone di varia età le seguenti frequenze del polso:

	A Zermatt	Sul Breithorn
Ragazzo di 10 anni, di Zermatt.........	84	120
Prof. S. (30 anni).........................	94	106
Prof. Kr. (50 anni).......................	64	80
P. (70 anni) di Zermatt..................	70	80

A Loewy (12) osservò su di sè stesso, in salite in montagna, una frequenza del polso di 160–176; I. Loewy e L. Zuntz a Gressoney videro salire il polso a 150–160.

Nel lavoro continuato in montagna diminuisce l'aumento della frequenza. Dalle ricerche di Zuntz e collaboratori, risulta che in due delle persone in esperimento (Caspari e Waldenburg) nelle prime marce a Brienz, la frequenza del polso fu di 150–175, nelle successive solo di 120–130. Il lavoro muscolare a grandi altezze fa aumentare il numero delle pulsazioni di più che non al piano, però quest'azione dell'altezza può essere attenuata dall'allenamento.

Con l'età sembra, dalle poche ricerche comparative fin'ora eseguite, che l'aumento nella frequenza del polso vada diminuendo.

L'aumento è tanto minore quanto maggiore è la capacità al lavoro delle persone in esperimento; si notano variazioni individuali, un breve riposo è sufficiente a ricondurre alla norma o quasi il numero delle pulsazioni aumentato per gravi fatiche. Douglas e collaboratori (15) nei loro studi fatti al Pike's Peak (Colorado) osservarono che sebbene nel riposo l'aumento della frequenza fosse piccolo, il lavoro produceva un aumento assai maggiore che non a livello del mare. Dagli esperimenti di Galeotti e colleghi (8) si vede che dopo una escursione, il polso si trovò aumentato e che questi aumenti furono da 3 a 28 pulsazioni al minuto. Al mattino il polso era, in generale, normale e mai superiore alle cifre medie comuni. Schneider e Sisco (14) osservarono che una fatica moderata a 4700 metri, cagiona nel primo giorno un aumento molto grande della frequenza del polso e nella seconda e terza giornata un aumento minore.

Nei nostri esperimenti, eseguiti in pianura durante il riposo, nelle ore del mattino (cfr. tabelle II e III, col. 10), il numero delle pulsazioni fu nel mese di luglio, in media di 53; nel mese di dicembre di 50.5. Il mattino successivo all'arrivo al Col d'Olen, si notò un aumento di frequenza (59); il ritorno ai valori del piano si ebbe al terzo giorno, poi, al mattino seguente ad una escursione faticosa, si notò un leggero aumento della frequenza che fu massimo (65) dopo l'escursione al Corno Bianco. Per escursioni medie (Gressoney) l'azione dell'allenamento si manifestò colla mancanza dell'aumento di frequenza al mattino seguente alla gita. Se si considerano i dati relativi alla frequenza del polso dopo un giorno di completo riposo (cfr. tabella II, Esp. III, VI, XI, XII, XIV, XIX, XXII, XXIV) risulta una diminuzione progressiva, per quanto lieve della frequenza (da 55 a 49).

È opportuno qui notare che accanto all'acclimatazione, può avere avuto influenza anche la diminuzione della temperatura dell'aria, accentuatasi gradualmente durante gli ultimi giorni della dimora all'Istituto Mosso.

In alcuni nostri esperimenti, abbiamo raccolto qualche dato relativo al numero delle pulsazioni dopo passeggiate e dopo ascensioni: una breve marcia, su terreno quasi piano produsse all'inizio del soggiorno in alta montagna, un aumento della frequenza del polso (83) superiore a quello verificatosi al 17° giorno dopo un'escursione molto lunga e faticosa (80). Dieci minuti dopo un'ascensione a 3600 metri, al terzo giorno, la frequenza fu di 92, e dopo un'eguale ascensione al 28° giorno fu di 88, sebbene questa seconda marcia fosse stata molto più faticosa della prima, per il gran caldo sul ghiacciaio e la mollezza della neve.

Frequenza del polso alla sera dopo un'escursione.

Numero	Escursione	Tempo dopo l'arrivo all'Istituto Ore Minuti	Numero del Polso
I	Salita da Alagna.	1.30	76
IV	Capanna Gnifetti.	6.—	65
VI	Gressoney........	2.30	71
IX	Gressoney........	5.—	68
XV	Ghiacciaio Indren. Lago Gabiet.....	4.—	65
XVI	Corno Bianco....	2.—	70
XXIV	Gressoney........	2.—	58
XXVIII	Capanna Gnifetti.	6.—	63

L'allenamento cagiona un minore aumento della frequenza del polso dopo le ascensioni.

Forma del polso.

Chauveau nel 1866 e Lortet nel 1869 (citati da Mosso, (5) pag. 72) scrissero i primi tracciati del polso collo sfigmografo sulla vetta del M. Bianco. Lortet disse che tali tracciati rassomigliavano al polso della febbre tifoide. Mosso nel 1885 prese alcuni tracciati del polso collo sfigmografo del Marey in una ascensione da Alagna alla vetta della piramide Vincent (4215 m.) e vide che la forma del polso era divenuta simile a quella che si produce artificialmente in un braccio riscaldandolo, forma caratteristica della febbre. Mosso, da molte osservazioni eseguite collo idrosfigmografo su diverse persone, trasse la conclusione che la diminuita pressione barometrica non modifica le condizioni fisiologiche dei vasi sanguigni per l'altezza di 4560 metri, ma la fatica rende il cuore più debole e meno attiva la circolazione. Conway (16), sull'Imalaia ad altezze di 4000-7000 metri, osservò che durante il riposo gli sfigmogrammi non sono diversi da quelli registrati in pianura; le modificazioni cominciano durante la fatica e allora appaiono i caratteri del *polso di stanchezza*. Ad analoghi risultati giunsero Zuntz e Schumburg (17), Zuntz e collaboratori (l. c. pag. 350). Il polso della fatica compare più facilmente in montagna che in pianura. Galeotti e collaboratori (l. c.) notarono che dopo le escursioni, non ostante il riposo della notte il polso diveniva più celere, più forte e pieno, altre volte più debole più piccolo e con onda dicrota in basso. Spesso, dopo l'escursione, scompariva il dicrotismo constatato nello stato di riposo.

I dati relativi alla forma del polso, nei nostri esperimenti, furono ricavati dalle figure prevalenti nello sfigmogramma, figure le quali erano quasi sempre eguali in tutto lo sfigmogramma [1].

A *Torino : in luglio*, in media P. Min. 103, grandezza celerità medie, e. d. molto evidente, media; platea con piccola incisione (fig. 1).

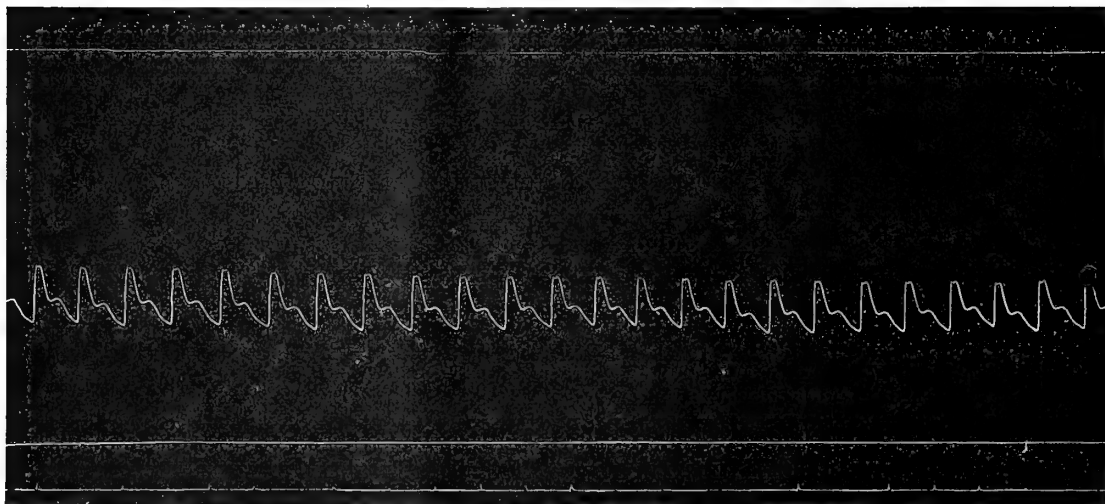



Fig. 1. — Sfigmogramma della Poplitea. Tempo 1″. Pressione Minima 102 mm. Hg. Torino 21 Luglio 1921 ore 9.

In dicembre : in media P. Min. 116, grandezza e celerità maggiori che nell'estate, e. d. media (fig. 2).

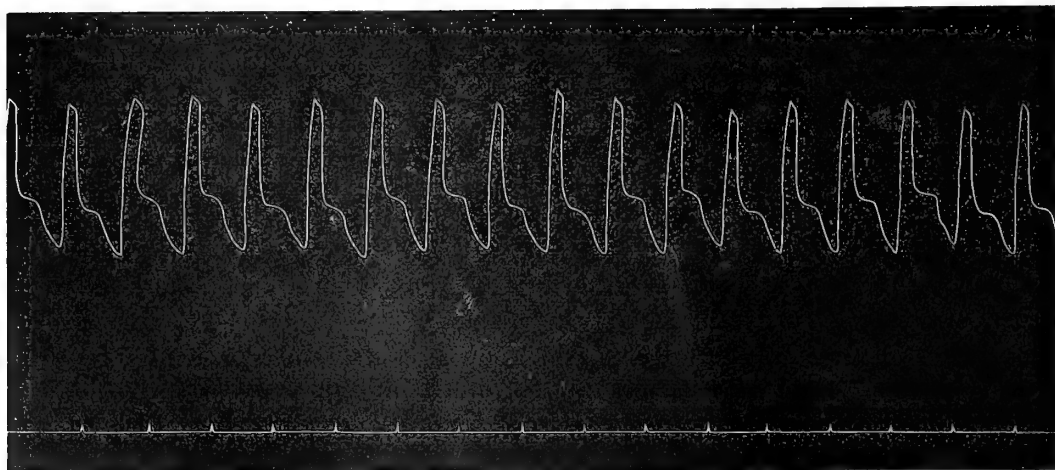



Fig. 2. — Sfigmogramma della Poplitea. Tempo 1″. Pressione Minima 116 mm. Hg. Torino 18 Dicembre 1921 Ore. 9.

[1] Per brevità indicheremo con P. Min. la pressione minima, alla quale fu preso il tracciato, con *e. d.* l'elevazione dicrota. Diciamo l'elevazione dicrota *alta* quando è situata nella metà superiore, *media* nel terzo medio, e *bassa* nel terzo inferiore della fase discendente dell'elevazione principale.

Al *Col d'Olen* - IV giorno, ore 5, a riposo ; P. Min. 114, polso piccolo, piuttosto lento, e. d. alta. Sei ore dopo il ritorno dalla Capanna Gnifetti, P. Min. 114. più grande del mattino più celere, e. d. media, polso eguale a quello di Torino nell'estate.

V giorno, ore 8 a riposo, un poco più grande del mattino precedente, e. d. alta, P. Min. 126. Ore 18, a riposo, più grande che al mattino, e. d. media. P. Min. 130.

VI giorno, ore 22, un'ora e mezzo dopo il ritorno da Gressoney, P. Min. 130, polso di grandezza media, con qualche irregolarità, un po' lento, e. d. bassa.

VII e VIII giorno, ore 9 a riposo, elevazione primaria normale, e. d. bassa.

IX giorno. ore 5,30. P. Min. 112, polso più grande e di eguale forza e celerità che a Torino, e. d. media. Ore 17,30 dopo 30' dal ritorno da Gressoney (gita molto faticosa

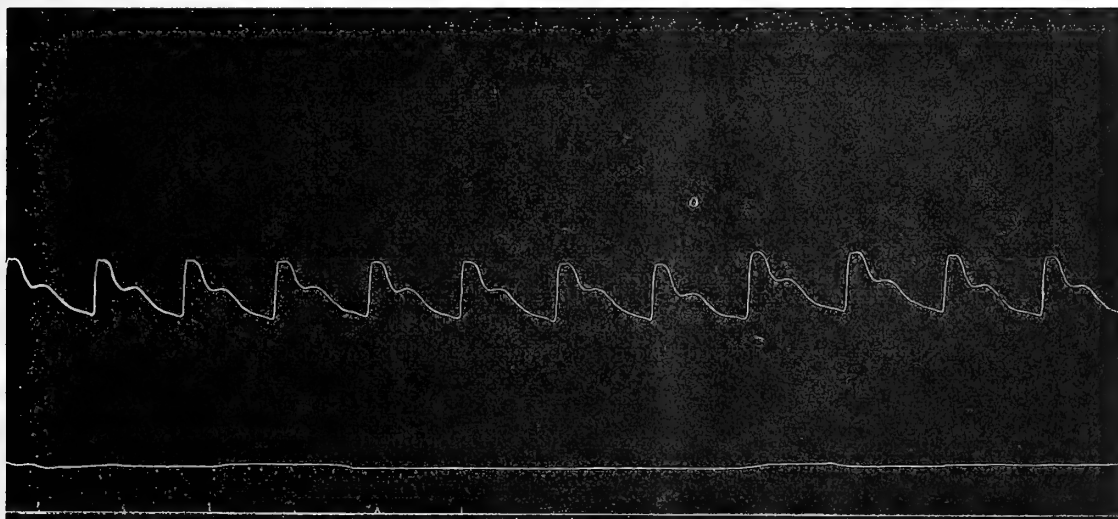



Fig. 3. — Sfigmogramma della Poplitea. Tempo 1''. Pressione Minima 116 mm. Hg. Olen. 13 Agosto 1921. Ore 7. Riposo.

per il gran caldo) polso ampio, più debole e più lento che al mattino, e. d. bassissima. P. Min. 82.

X. giorno. Le caratteristiche del polso sono eguali a quelle del mattino precedente, solo si nota che in alcuni gruppi di circa dieci pulsazioni, l'elevazione dicrota va gradatamente spostandosi lungo la fase discendente, dapprima avvicinandosi al vertice dell'onda principale e poi allontanandosene. P. Min. 108.

XI e XII giorno. Ore 7. Polso più grande, di eguale forza e celerità che a Torino, e. d. alta, P. Min. 108.

XV giorno, ore 7. Polso meno grande, notevolmente meno forte, di eguale celerità del mattino precedente, e. d. alta, P. Min. 115 (fig. 3).

Ore 18,20. Venti minuti dopo il ritorno dall'escursione, il polso è meno ampio più debole più celere, e. d. molto bassa ed appena percettibile. P. Min. 100 (fig. 4).

XVIII giorno, successivo all'escursione al Corno Bianco, ore 7. Il polso è meno ampio, più basso del normale, celerità normale, e. d. media P. Min. 118.

XIX, XXI, XXII giorno, ore 7. Polso meno ampio, più basso, di media celerità, e. d. alta. P. Min. 118-116-120.

XXIV giorno. Ore 16.30. Mezz'ora dopo il ritorno dall'escursione a Gressoney. Ampiezza ed altezza minori del normale, maggiore celerità, elevazione dicrota sotto la media ; in alcuni gruppi di pulsazioni è bassa. P. Min. 98.

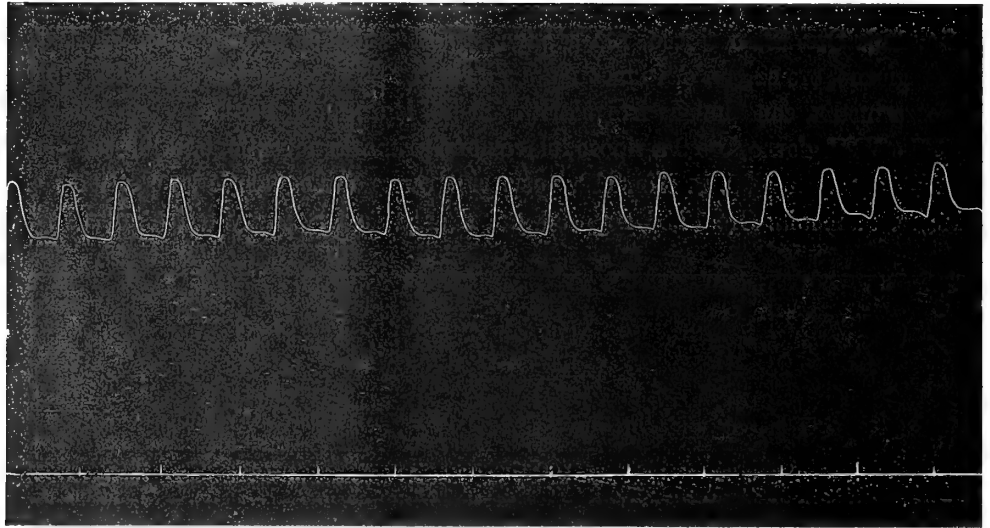



Fig. 4. — Sfigmogramma della Poplitea. Tempo 1''. Pressione Minima 100 mm. Hg.
Olen. 13 Agosto 1921. Ore 18,20.
Venti minuti dopo il ritorno dall'escursione al Lago del Gabiet.

XXV giorno. Ore 7. Le caratteristiche del polso sono eguali a quelle del XIX giorno.

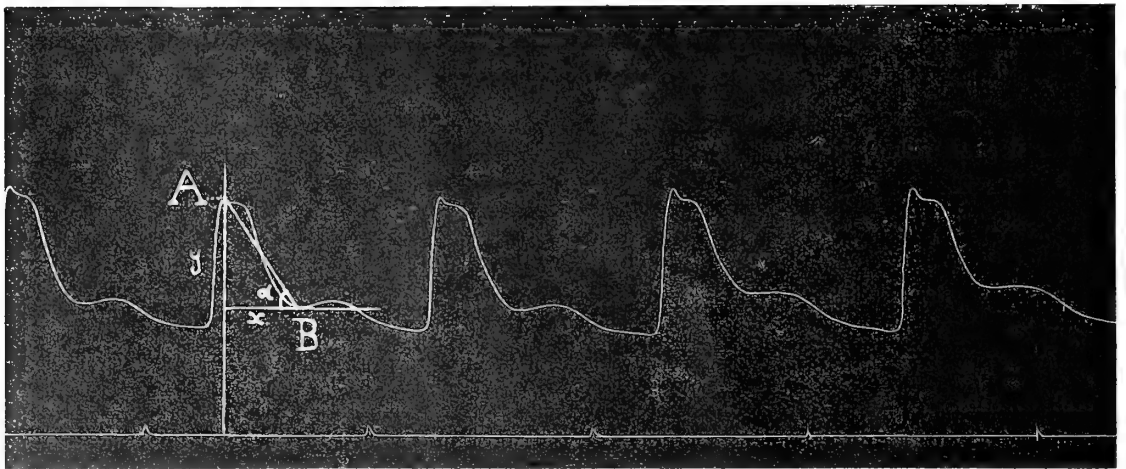



Fig. 5. — Sfigmogramma della Poplitea. Tempo 1''.
Torino. 11 Dicembre 1921. Ore 9. Posizione dell'elevazione dicrota.

XXVIII giorno. Ore 18.30. Sei ore dopo il ritorno dall'escursione alla Capanna Gnifetti: l'elevazione primaria è meno ampia, di minore altezza, più celere della norma; e. d. sotto la media. P. Min. 124.

Per stabilire la posizione dell'elevazione dicrota, eseguimmo alcune misurazioni della distanza intercorrente fra il vertice della elevazione principale e quello dell'elevazione dicrota.

Supponendo che l'asse delle ordinate passi per il vertice dell'elevazione principale e quello delle ascisse per il vertice dell'elevazione dicrot ed indicando con AB la distanza fra questi due punti e con x, y, rispettivamente, i valori me ii (in mm.) delle misure eseguite sull'ascissa e sull'ordinata, sarà:

$AB = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\frac{y}{x} = tg\,\alpha$, cioè dell'angolo formato tra il segmento A B e l'ascissa (fig. 5).

Nella seguente tabella sono riunite le cifre di queste misurazioni:

	x	y	$tg\,\alpha$	$\sqrt{x^2+y^2}$
A Torino 21 luglio 1921......	1,5	4.0	2.66	4.3
» » 18 dicembre 1921......	2.5	14.3	5 72	5.1

Col d'Olen	Prima della escursione				Dopo della escursione			
	x	y	$tg\,\alpha$	$\sqrt{x^2+y^2}$	x	y	$tg\,\alpha$	$\sqrt{x^2+y^2}$
IV giornata	1.5	2.8	1.8	3.3	2.2	10	4.54	10.2
IX »	2.4	5.0	2.0	5.5	4.0	7.4	1.85	8.4
XV »	2.2	3.7	1.6	4.3	3.0	7.0	2.33	7.6
XXII »	1.5	3.5	2.3	3.9	—	—	—	—
XXIV »	—	—	—	—	2.5	7.6	3.04	9.2

I risultati ottenuti si possono così riassumere: i tracciati del polso scritti a Torino in estate e quelli scritti al Col d'Olen, dopo il riposo della notte, sono fra loro simili per ampiezza, altezza e posizione dell'elevazione dicrota; a Torino nell'inverno il polso è più ampio e più celere che nell'estate, la posizione dell'elevazione dicrota non muta. Al Col d'Olen, nel riposo, dopo il quarto giorno, il polso è più ampio e più alto che al piano, senza variazioni di celerità nè di posizione dell'elevazione dicrota. Dopo la decima giornata, in coincidenza col riposo forzato per più giorni in causa del cattivo tempo e ad onta della temperatura abbassata, il polso ritornò alle caratteristiche di Torino, con qualche variazione di poco conto, e tale rimase anche nei giorni seguenti, quando il tempo si rimise al bello, pur restando freddo.

Dopo le escursioni, la forma del polso presenta notevoli variazioni: diminuzione dell'ampiezza e dell'altezza, abbassamento della elevazione dicrota, che compare verso la fine della catacrote, e che è caratterizzato da un aumento del segmento AB, mentre il valore dell'angolo α non presenta una variazione costante. Ciò dipende da un lato dal fatto che il tempo intercorrente tra il vertice principale e l'elevazione dicrota non varia in modo costante, mentre in alcuni casi (IX, XV giornata) si allunga dopo l'escursione, altre volte rimane nei limiti dei valori trovati durante il riposo; dall'altro lato, la differenza d'altezza dei due vertici (y) aumenta in modo costante dopo l'escursione, in modo da assumere, in tutti i casi, valori superiori ai massimi delle giornate di riposo. Solo nel-

l'inverno si sono avuti valori superiori a questi. *Tutto ciò dimostra che la catacrote si svolge più rapidamente nella fatica.*

Queste variazioni, attenuate, durano fino al giorno seguente, quando la stanchezza è stata notevole ; se l'escursione si è svolta senza grande fatica e in giornata non molto calda, il polso ritorna normale in poche ore e ciò tanto nelle prime che nelle ultime gite.

Le variazioni trovate dopo il lavoro corrispondono tutte alle note figure del polso « da stanchezza ».

Pressione arteriosa.

I risultati degli studî eseguiti dai diversi Autori sulle variazioni della pressione arteriosa nell'alta montagna sono poco concordanti. Trovarono una diminuzione Veraguth (18) e Kronecker (19); non videro alcun cambiamento Löwy (20), Fränkel e Geppert (21).

Mosso (l. c.) collo sfigmomanometro vide che la pressione del sangue sul monte Rosa conservava il medesimo valore che a Torino ; Oliver (22) e Bayeux (23) trovarono aumenti della pressione del sangue in montagna, Lazarus e Schimunski (24) ora aumenti ora diminuzioni. Fuchs (10) usò il metodo Riva-Rocci e non notò alcuna importante variazione della pressione del sangue durante il riposo in alta montagna (Col d'Olen e Capanna Margherita); Schneider e Hedblom (25) collo sfigmomanometro Erlanger trovarono che le grandi altezze provocavano una diminuzione della pressione « diastolica e sistolica », altezze moderate non avrebbero avuto influenza apprezzabile; vi erano notevoli differenze individuali. Douglas e collaboratori (15) negli esperimenti eseguiti sul Pike's Peak trovarono una lieve diminuzione della pressione sistolica relativamente alla pianura ; le variazioni erano incostanti. Negli esperimenti eseguiti a Teneriffa Durig e Zuntz (11). trovarono al Alta Vista (3260 m.) un aumento in Zuntz, Durig e Schrötter, nessuna variazione in Douglas, una diminuzione in Carrière. Al Col d'Olen gli stessi autori osservarono aumenti della pressione del sangue, sopratutto dopo il pasto, mentre a digiuno non vi erano variazioni. Schneider e Sisco (14) da numerose ricerche eseguite nel risposo a Colorado Springs e al Pike's Peak, collo sfigmomanometro Erlanger, conchiusero che nella maggioranza degli uomini sani il soggiorno a grandi altezze non ebbe influenza sulla pressione arteriosa. In una certa percentuale dei soggetti, si dimostrò una caduta della pressione e in casi eccezionali un aumento.

Secondo le ricerche fatte da Basch, Maximowitsch, Rieder ed Oertel (citati da Mosso (5) la pressione del sangue crescerebbe durante le ascensioni. Mosso osservò nella fatica muscolare una contrazione dei vasi sanguigni alla superficie del corpo. Fuchs (10) vide che dopo un eguale lavoro faticoso si ha in alta montagna una diminuzione della pressione sanguigna più forte e più duratura che al piano. Durig e Kolmer (3) si valsero del metodo di Gärtner ed ebbero risultati poco uniformi : in tre persone all'altitudine di 3000 metri nessuna variazione, in una un aumento della pressione del sangue; dopo l'ascensione alla Capanna Regina Margherita notarono una diminuzione in tutti e tre i soggetti. Un lavoro eseguito a grande altezza e al riparo dall'azione della luce non produsse diminuzione della pressione del sangue. Galeotti e collaboratori (8) determinarono la pressione massima e minima coll'oscillografo del Pachon. Dopo le escursioni la pressione

massima era in genere diminuita, e precisamente 24 volte diminuita, 7 volte aumentata, 6 volte rimasta uguale; la minima era pure in genere diminuita, ma meno e in minor numero di volte; 16 volte diminuita, 11 volte aumentata, 10 volte rimasta eguale. Le diminuzioni della pressione massima oscillarono tra 5 e 20 mm. Hg., eccezionalmente 30 mm.; quelle della minima tra 5 e 15 mm. e solo in alcuni casi la pressione minima diminuì di 20, 30 mm.

Negli esperimenti da noi eseguiti (cfr. tabelle I e II colonne 11 e 12), a Torino nell'estate, la pressione massima presentò un valore medio di 170, la minima di 102, nell'inverno la pressione massima presentò un aumento, 207; la minima una diminuzione, 85. Il giorno successivo all'arrivo al Col d'Olen, la pressione arteriosa si dimostrò inferiore, per entrambi i valori, a quella trovata pochi giorni prima al piano; in seguito la pressione massima andò gradatamente aumentando, sino ad oltrepassare al 6º giorno le cifre osservate nell'estate a Torino, per raggiungere i valori più alti (215) negli ultimi giorni di dimora a 3000 metri.

La pressione minima all'Olen, restò sempre inferiore alle cifre osservate in estate al piano, con valori pressochè uguali a quelli riscontrati nell'inverno.

I risultati delle indagini eseguite sulla pressione del sangue dopo le escursioni, sono riassunti nel seguente prospetto:

Numero	Escursione	Prima della escursione — Pressione Massima	Prima della escursione — Pressione Minima	Dopo della escursione — Pressione Massima	Dopo della escursione — Pressione Minima	Differenze — Pressione Massima	Differenze — Pressione Minima
III	Ghiacciaio Indren (1)	155	85	155	95	0	+ 10
IV	Capanna Gnifetti (1)......	155	100	160	100	+ 5	0
VI	Gressoney Trinità (2)......	175	80	170	100	— 5	+ 20
IX	Gressoney Trinità (2)......	180	85	155	65	— 25	— 20
XV	Lago Gabiet, Gh. Indren (2)	210	100	190	90	— 20	— 10
XXIV	Gressoney Trinità (2)......	215	95	190	90	— 25	— 5
XXVIII	Capanna Gnifetti (1)......	—	—	185	90	—	—

(1) Le determinazioni furono eseguite circa 6 ore dopo il ritorno.
(2) Le determinazioni furono eseguite da 15 a 30′ dopo il ritorno.

La pressione del sangue diminuì nella fatica, tanto nel suo valore massimo che nel minimo; la diminuzione più forte si ebbe al ritorno dall'escursione più faticosa (n. IX). Sei ore di riposo furono sufficienti a fare ritornare la pressione arteriosa ai valori normali. La diminuzione della pressione dopo il lavoro, coincise coll'abbassamento dell'elevazione dicrota e coll'aumento della frequenza del polso.

Numero dei corpuscoli rossi.

Le variazioni del numero dei corpuscoli rossi in alta montagna furono oggetto di numerose ricerche; la bibliografia di questo argomento è riassunta da Zuntz nel suo libro più volte citato (capitolo VI) e da Cohnheim nella « Physiologie des Alpinismus, II, Ergebnisse der Physiologie 1912 ».

I fratelli Loewy con L. Zuntz (12) al Col d'Olen ed alla Capanna Guifetti videro che il numero dei corpuscoli rossi diminuì nella prima settimana di permanenza in alta montagna, aumentò nella seconda settimana senza superare i valori trovati a Berlino. C. Foà (26) trovò a 3000 metri (Col d'Olen) un numero maggiore di corpuscoli rossi che in pianura: l'iperglobulia si manifestava 8-9 ore dopo l'arrivo e forse anche prima, non trovò mai un numero di globuli rossi giovani superiori al normale. Zuntz e collaboratori (3) videro che al Col d'Olen in uno dei componenti la spedizione (Müller) il numero delle emazie fu di poco superiore a quello riscontrato a 2150 metri (Rothorn) e presso a poco uguale ai valori di Brienz (500 metri). Fuchs (10) osservò un aumento relativo dei globuli rossi al Monte Rosa; Masing e Morawitz (27) in una permanenza di 12 giorni al Col d'Olen non videro modificazioni del numero delle emazie. Cohnheim (28) al Col d'Olen vide piccole differenze del numero dei corpuscoli rossi, che non oltrepassavano il limite del metodo adoperato, (Contaglobuli Thoma-Zeiss), che fu pure usato dagli autori precedentemente citati. Cohnheim e Weber (29) in ricerche successive eseguite sulla Jungfrau col contaglobuli del Bürker, (su 23 uomini e 2 donne di varia età, dai 17 ai 47 anni, i quali risiedettero a 2343 e 3450 metri per un tempo che variò da 4 mesi a 4 anni) ebbero risultati differenti e cioè osservarono in tutti un numero di globuli rossi maggiore che al piano.

Laquer (30) in un soggiorno di quattro settimane all'Istituto Mosso, trovò i seguenti dati (camera del Bürker, valori in milioni):

A Francoforte 5.22, al Col d'Olen: 1ª settimana 5.24, 2ª settimana 5.56, 3ª settimana 5.95, 4ª settimana 6.01, con un aumento massimo del 15.1 %.

Nelle nostre ricerche abbiamo ottenuti i risultati seguenti: (valori in milioni)

Numero	Data	Luogo	Numero dei corpuscoli rossi
	14-VII-1921	Torino	4.52
	23-VII- »	»	4.68
	4-I-1922	Torino	5.29
V	3-VIII-1921	Col d'Olen	4.76
VIII	6-VIII »	»	4.80
XXX	28-VIII »		6.05

dai quali si vede che il numero dei globuli a Torino nel luglio è più basso che nell'inverno. Al Col d'Olen, si verifica un aumento crescente e nell'ultimo giorno molto notevole.

Capacità vitale.

La capacità vitale, secondo le ricerche della massima parte degli Autori, diminuisce in alta montagna (Mosso; A. I. Loewy e L. Zuntz; Schumburg e Zuntz; Zuntz, Loewy, Müller e Caspari; Fuchs; Durig; Galeotti e collaboratori). Riguardo al suo compor-

tamento in seguito alla acclimatazione i risultati dei diversi esperimentatori non sono concordi.

Mosso (l. c. pag. 214) trovò che a 4560 metri la capacità vitale era sempre inferiore ai valori di Torino e che il soggiorno sulle Alpi non ebbe influenza nel dilatare la capacità polmonare. In Schumburg e Zuntz (31) la diminuzione relativamente ai valori di Berlino, fu a Zermatt del 10 % sulla vetta del M. Rosa del 25 %. In A. Loewy (2) dopo la salita al Col d'Olen non presentò differenze rispetto al piano; in I. Loewy e L. Zuntz diminuì del 10–15 %, per ritornare alle cifre di Berlino al terzo giorno. Diminuzione della capacità vitale in alta montagna osservarono Zuntz e collaboratori (3). Fuchs (10) ammette che vi sia una relazione fra la diminuzione della capacità vitale e l'abbassarsi della temperatura dell'aria egli osservò che negli stessi luoghi la capacità vitale era minore quando la temperatura dell'aria, era più bassa. In tali condizioni si ha un aumento del tono di tutta la muscolatura del corpo, inclusi i muscoli respiratorii, con conseguente diminuzione dell'accorciamento massimale dei muscoli.

Il lavoro fa diminuire ancora di più la capacità vitale abbassata nell'aria rarefatta. (Mosso, Schumburg e Zuntz, Durig, Galeotti e collaboratori, Viale e Gianturco (32).

Riguardo all'azione dell'allenamento Mosso osservò che la capacità vitale era di 5040 cc. in un giovane di 27 anni in condizioni di allenamento per avere fatto una serie notevole di ascensioni; dopo un mese di riposo la capacità vitale era discesa a 4630 cc.

In rapporto all'acclimatazione, secondo le ricerche del Viale (33) eseguite su due giovani di 23 e 25 anni, la diminuzione della capacità vitale non è costante quando si prolunghi il soggiorno nell'aria rarefatta, ma va gradatamente scomparendo col tempo: a poco a poco nella serie dei giorni i valori risalgono sino ad un livello costante eguale od anche superiore a quello che si aveva in pianura.

Se esaminiamo i dati riuniti nella tabella III (colonne 6–7), vediamo che la capacità vitale (valori bruti) al piano in estate, presenta una media di 4239 cc., è notevolmente diminuita il mattino seguente all'arrivo al Col d'Olen (3499 cc.) e questa diminuzione si mantiene con grande costanza durante tutto il soggiorno in alta montagna (in media 3454 cc.). Nell'inverno a Torino, la capacità vitale è di 3641 cc., di poco superiore ai valori dell'Olen, con una notevole diminuzione rispetto alle osservazioni fatte durante l'estate in pianura. Questi rilievi fanno supporre che nella diminuzione della capacità vitale abbia una certa influenza oltre alla depressione atmosferica, la bassa temperatura.

A proposito dell'influenza della bassa temperatura dell'ambiente ricorderemo soltanto che dalle esperienze di Galeotti (34) di Azzi (35) e Viale (36) sulla temperatura dell'aria espirata è risultato che in seguito al raffreddamento della superficie del corpo si ha nei polmoni una reazione vasomotoria corrispondente a quella delle parti superficiali raffreddate.

Cinque o sei ore dopo il ritorno da escursioni non troppo faticose, si è notato un lieve aumento della capacità vitale, il quale mancò dopo una gita non più lunga delle altre ma particolarmente faticosa per le condizioni del ghiacciaio. In una misurazione eseguita un'ora dopo il ritorno è stato trovato un aumento un po' maggiore di quello delle altre volte.

Numero	Escursion	Prima della escursione (Valori bruti cc.)	Dopo della escursione (Valori bruti cc.)	Osservazioni
III	Ghiacciaio Indren......	3432	3521	$5^h\ 45'$ dopo il ritorno
IV	Capanna Gnifetti......	3401	3484	6^h » » »
XXVIII	Capanna Gnifetti......	—	3434	6^h » » »
XIX	Gressoney	3487	3640	1^h » » »

Frequenza del Respiro e Ventilazione polmonare.

Riguardo alla ventilazione polmonare Mosso (l. c. pag. 52) scrisse che all'altezza di 3333 metri si respira una quantità d'aria assai minore che non a Torino. N. Zuntz (l. c. pag. 314) dalle osservazioni eseguite coi suoi collaboratori e da quelle di numerosi autori, che si riferiscono a 22 persone di varia età dai 20 sin verso i 60 anni con forte e con debole muscolatura, abituate e non abituate all'alta montagna, trasse la conclusione che la ventilazione polmonare è aumentata a grandi altezze. Vi sono grandi differenze individuali. Risultati analoghi trovarono Guillemard e Moog (37) sul Monte Bianco e Fuchs (10) sul Monte Rosa. Secondo quest'ultimo autore, l'aumento della ventilazione polmonare non è proporzionale alla diminuzione della pressione atmosferica e si accentua col freddo.

Hasselbach e Lindhard (13) nella prima settimana di soggiorno a 3290 m., in riposo, non videro modificazioni del volume dell'aria espirata nell'unità di tempo, aumentò nella seconda settimana durante la quale si esposero all'azione dei raggi solari. Durig e Zuntz (11) notarono differenze individuali, in Zuntz la ventilazione polmonare presentò eguali valori tanto al piano che sul Monte Rosa o ad Alta Vista (Teneriffa); Durig invece ebbe al piano una respirazione di lusso di un quinto. L'acclimatazione porterebbe ad una diminuzione di questa abnorme eccitazione dei polmoni (minore aumento della ventilazione polmonare negli alpini di Mosso). Secondo Viale (33) vi sono condizioni individuali: nei due giovani da lui esaminati nota che in uno il quale ha respirazione superficiale, il respiro tende a diventare ancora più superficiale; nell'altro che ha respirazione profonda, il respiro tende a diventare più profondo.

Nel lavoro muscolare l'attività respiratoria è maggiore nell'aria rarefatta che al piano (Zuntz, Fuchs, Douglas, Galeotti e collaboratori, Viale e Gianturco).

Dalle ricerche di Fuchs e Deimler (38) risulta che la ventilazione polmonare (valori ridotti) dopo un forte lavoro muscolare sino ad altezze di 3000 metri diminuisce, aumenta a maggiori altezze. L'aumento relativo si dimostra minore in D. individuo giovane e robusto (26 anni) che in F. più anziano (38 anni) e con minore capacità di lavoro. Negli esperimenti di Galeotti la ventilazione polmonare fu trovata normale dopo la fatica in uno dei soggetti, aumentata in altri tre.

Nei nostri esperimenti, eseguiti durante il riposo al Col d'Olen (cfr. tabella III, colonna 5), si nota un leggero aumento della *frequenza respiratoria* in confronto di quella verificata a Torino, senza notevoli variazioni dal principio alla fine del soggiorno in alta montagna.

La *ventilazione polmonare* (cfr. tab. III col. 8 e 9) presenta grandi variazioni sia nei dati raccolti a Torino nell'estate sia al Col d'Olen. Il secondo e il terzo giorno dopo l'arrivo al Col d'Olen si nota una diminuzione, successivamente i valori della ventilazione polmonare superano quelli del piano; le cifre più alte si riferiscono agli ultimi giorni.

Complessivamente si può dire che la ventilazione polmonare è aumentata al Col d'Olen. Nell'inverno al piano è minore che nell'estate.

Ritmo respiratorio e Ventilazione polmonare dopo le escursioni.

Numero	Escursioni	Ritmo respiratorio		Ventilazione polmonare				*Osservazioni*
				Prima della escursione		Dopo della escursione		
		Prima della escursione	Dopo della escursione	litri in 5′	litri in 5′ ridotti a 0° e 760 mm.	litri in 5′	litri in 5′ ridotti a 0° e 760 mm.	
III	Gh. Indren..	—	—	20.489	14.023	27.559	18.891	Gli esperimenti III, IV e XXVIII furono eseguiti 6 ore dopo il ritorno dall'escursione.
IV	Cap. Gnifetti	15	16	35.027	24.231	25.438	17.474	
IX	Gressoney..	—	15	23.992	16.309	37.772	25.587	
XV	Gh. Indren.. / Lago Gabiet.	15	15	21.320	14.454	39.718	27.043	Gli esperimenti IX e XV dopo 30′ e quelli XVII e XXIV dopo 5′ di riposo.
XVI	Corno	—	—	30.940	21.125			
XVII	Bianco	—	—			51.344	35.307	(*) Questi valori furono ricavati dall'ultimo giorno di riposo precedente alla gita.
XXIV	Gressoney...		16	39.520	27.099	42.203	29.020	
XXVIII	Cap. Gnifetti			46.644(*)	32.093(*)	25.480	18.294	

In due esperimenti fatti cinque minuti dopo il ritorno da gite lunghe e faticose, vi fu un notevole aumento della ventilazione polmonare, che in un caso (n. XVI) risultò corrispondente a più di un terzo del valore iniziale. In due altri esperimenti eseguiti trenta minuti dall'arrivo dopo marce pure faticose, si è verificato che la ventilazione polmonare si era mantenuta notevolmente maggiore di quella verificata prima della partenza, e finalmente in tre ricerche fatte sei ore dopo il ritorno dall'escursione, abbiamo trovato nel primo esperimento corrispondente alla III giornata del Col d'Olen un lieve aumento, in confronto della cifra relativamente bassa verificata prima della partenza; negli altri due, mentre le cifre rilevate prima della partenza erano già notevolmente elevate, abbiamo trovato una notevole diminuzione.

Perciò riteniamo che il soggiorno in alta montagna abbia cagionato un progressivo notevole aumento della ventilazione polmonare e che il lavoro abbia prodotto immediatamente un aumento e poi una diminuzione della ventilazione dei polmoni.

Ricambio respiratorio e produzione di calore.

Lo studio del ricambio respiratorio dell'uomo in alta montagna è stato oggetto di molte indagini; accenneremo solo ad alcune conclusioni. Zuntz nel capitolo VIII del suo libro (3) giunse a questa conclusione: « I processi ossidativi in alta montagna sono aumentati tanto nell'uomo che riposa, quanto durante il lavoro. La misura di questo aumento e l'altitudine a cui compare sono diverse nei varî individui ».

Secondo Durig (39) l'aumento dei processi ossidativi fra i 1000 e i 4000 metri, raggiunse il 5 %, fu maggiore a 4560 metri; la permanenza a grandi altezze non fece diminuire questo maggiore consumo.

Il quoziente respiratorio non mutò in Durig e si mantenne intorno a 0.7. Fuchs e Deimler (38) nelle ricerche eseguite nel 1908 sul Monte Rosa, in cui rimasero 20 giorni al Col d'Olen e 22 giorni alla capanna Margherita, ebbero i seguenti risultati: l'eliminazione dell'anidride carbonica, nel riposo, sino a 3000 metri non presentò grande aumento; (gli autori fanno osservare che i valori bassi da loro trovati per l'anidride carbonica potevano essere riferiti all'alimentazione prevalentemente a base di grassi, che dovette essere addottata per le speciali ricerche del ricambio delle quali si occupavano); l'assorbimento di ossigeno, nel riposo, aumentato dopo la salita al Col d'Olen, diminuì durante la permanenza a questa altezza, senza però ritornare ai valori del piano. Rispetto all'influenza dell'età constatarono che il più giovane delle persone in esperimento (Deimler, 26 anni) presentò una maggiore produzione di CO_2 e un maggiore assorbimento di O_2 del più anziano (Fuchs, 38 anni) Il Q. R. oscillò in F. fra 0,62 e 0,75; in D. fra 0.62 e 0.77. Hasselbalch e Lindhard (13) videro che durante un soggiorno di due settimane a 3290 metri, nel riposo, l'eliminazione di CO_2 rimase immutata in uno di essi, aumentò nell'altro; l'assorbimento di O_2 crebbe del 10 %; il Q. R. oscillò intorno a 0.8.

Viale (33) constatò che il ricambio respiratorio ed i processi ossidativi si esaltarono temporaneamente in alta montagna e che acclimatandosi l'organismo tendevano a compiersi come in pianura; il Q. R. era più elevato in montagna che in pianura; la permanenza ad una altezza di 3000 metri tendeva ad elevarlo maggiormente.

Per un dato lavoro eseguito sulle Alpi si ha un maggiore consumo di ossigeno; a parità di altre condizioni nell'uomo allenato il ricambio energetico nel vincere uguali dislivelli di terreno, è minore che nel non allenato (Zuntz). Douglas e i suoi collaboratori (15) osservarono che durante il lavoro, l'aumento dei processi ossidativi non fu maggiore sul Pike's Peak che ad Oxford. Essi ottennero valori assai differenti per il quoziente respiratorio, che talvolta salì sovra all'unità durante un esercizio violento, per tornare dopo il riposo ai valori normali. Negli esperimenti di Galeotti e collaboratori (8) dopo le escursioni le quantità di CO_2 emessa e di O_2 consumato, variarono senza alcuna regolarità ed oscillarono tra i limiti di — 199 cc. e + 94 per la emissione di CO_2 e di — 64 e + 121 per il consumo di O_2. Il Q. R. si abbassò.

Dai lavori di Durig e Zuntz (40) e di Douglas (15) risultò che l'azione postuma del lavoro in alta montagna si manifestava con un aumento del ricambio respiratorio, mentre il quoziente tendeva ad abbassarsi.

In alta montagna si ha in generale un aumento della *produzione di calore*, tanto nel riposo che nel lavoro, aumento che si attenua in seguito all'allenamento (Zuntz). In rapporto all'età Zuntz vide che fra le sei persone che presero parte alla spedizione del 1901, il più giovane e il più alto (Wandenburg, 21 anni) presentò il maggiore consumo energetico giornaliero (67.6 calorie per kgr. di peso del corpo); il più anziano (Zuntz 53 anni) il minore consumo (51.9 calorie).

I dati del ricambio respiratorio osservati nei nostri esperimenti a riposo, sono riuniti nelle colonne 10–11–12 della tabella III; confrontando i valori trovati in pianura con quelli dell'Olen vediamo che nel giorno successivo al faticoso viaggio per arrivare al Col d'Olen, si ebbe una forte diminuzione della emissione di CO_2, del consumo di O_2 e del quoziente respiratorio, più notevole per l'emissione dell'anidride carbonica. Al terzo giorno la quantità di CO_2 emessa aumenta in confronto del giorno precedente, l'ossigeno assorbito diminuisce. Nei giorni seguenti l'emissione di CO_2 e l'assorbimento di O_2 presentano frequenti oscillazioni in senso inverso da un giorno all'altro; nel complesso l'emissione dell'anidride carbonica aumenta, il consumo di ossigeno diminuisce nei primi giorni, cresce in seguito gradualmente superando notevolmente le cifre del piano. Il Q. R. si abbassa notevolmente al secondo giorno, di poi si eleva superando l'unità per diminuire successivamente, mantenendosi però superiore ai valori del piano.

Negli esperimenti invernali si nota che l'anidride carbonica eliminata e l'ossigeno assorbito presentano valori inferiori a quelli dell'estate, il Q. R. è presso a poco uguale a quello osservato nel luglio a Torino.

Nella tabella seguente sono riportati i valori delle determinazioni eseguite dopo il lavoro.

RICAMBIO RESPIRATORIO E PRODUZIONE DI CALORE DOPO LE ESCURSIONI.

Numero	ESCURSIONI	CO_2 emesso in 5′ cc. a 0° e 760 mm.		O_2 consumato in 5′ cc. a 0° e 760 mm.		Quoziente Respiratorio		Calorie per Kgr. ora	
		prima della escursione	dopo della escursione	prima della escursione	dopo della escursione	prima della escursione	dopo della escursione	prima della escursione	dopo della escursione
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
III	Ghiacciaio Indren	726	1107	797	1269	0.910	0.872	0.96	1.04
IV	Capanna Gnifetti	1376	961	1387	1009	0.992	0.951	1.17	1.31
IX	Gressoney	902	1228	931	1228	0.968	0.776	1.26	1.48
XV	Ghiacciaio Indren	751	1465	803	1767	0.935	0.829	1.03	1.88
XVI	Lago Gabiet	1029	—	1222	—	0.842	—	1.34	—
XVII	Corno Bianco	—	1525	—	1786	—	0.853	—	1.98
XXIV	Gressoney	1336	1423	1508	1776	0.886	0.801	1.80	1.83
XXVIII	Capanna Gnifetti	—	918	—	1183	—	0.779	—	1.13

Osservazioni: Gli esperimenti III, IV e XXVIII furono eseguiti 6 ore dopa il ritorno
» » IX e XV » » 30′ » » »
» » XVII e XXIV » » 5′ » » »

Tre di queste determinazioni furono eseguite sei ore dopo le escursioni: nella prima fu verificato un notevole aumento della eliminazione di CO_2 e del consumo di O_2, con una diminuzione del Q. R.; nelle altre due, sebbene fossero state eseguite in periodi diversi, l'una al principio e l'altra alla fine del soggiorno al Col d'Olen, si verificò col notevole affaticamento dell'individuo, una forte diminuzione del O_2, del CO_2 e del Q. R. In due esperimenti, fatti trenta minuti dopo la marcia, si notò forte aumento di tutti e tre i valori. Finalmente in due esperimenti eseguiti cinque minuti dopo il ritorno, si notò aumento del CO_2 e del O_2, molto più forte dopo la gita più faticosa, e pochissima differenza nel Q. R.

Negli esperimenti eseguiti a riposo nell'estate al piano, la *produzione di calore* fu in media di 1.14 calorie per kgr.-ora; diminuì nei primi tre giorni al Col d'Olen, per aumentare nei giorni successivi, gradualmente, sino a raggiungere valori quasi doppi di quelli del piano.

Nell'inverno la produzione di calore fu inferiore a quella riscontrata negli altri due periodi di ricerca; fatto questo, a proposito del quale ricordiamo che il soggetto faceva vita sedentaria quasi sempre in ambiente riscaldato intorno ai 18°.

Nel lavoro il ricambio energetico crebbe; l'aumento fu tanto maggiore quanto più basse erano le cifre ricavate prima dell'escursione e quanto maggiore il lavoro.

Dopo due marce uguali, l'una fatta al 9° giorno di dimora al Col d'Olen, l'altra al 24° giorno, si notò nella prima una differenza di + 0.22 calorie pro kgr.-ora, nella seconda nessuna variazione, ciò che dimostra che almeno in gran parte l'aumento del ricambio consecutivo al lavoro in alta montagna diminuisce con l'abitudine all'ambiente e con l'allenamento alle marce, dato questo che corrisponde alle osservazioni degli altri sperimentatori.

Assimilazione del glucosio.

Aggazzotti, per le sue ricerche sull'assimilazione del glucosio in alta montagna (1), ha fatto delle prove anche sul soggetto dei nostri esperimenti; noi ci limiteremo a riferire quella parte delle conclusioni che riguardano il soggetto stesso, aggiungendo ciò che abbiamo verificato in relazione al ricambio respiratorio, alla temperatura interna e al polso nella giornata della prova col glucosio.

Al Col d'Olen l'introduzione di 150 e rispettivamente di 200 gr. di glucosio puro anidro ingerito con la solita colazione non cagionò glicosuria neppure in traccie; mentre a Torino nel mese di dicembre l'introduzione di 200 gr. di glucosio cagionò glicosuria lieve nella 2ª ora, fortissima nella 3ª ora, minore nella 4ª, nulla nelle ore successive. Questo risultato dimostra che nel soggetto di 60 anni con una normale tolleranza del glucosio, il soggiorno in alta montagna ha aumentata la capacità di assimilazione di questo zucchero.

Dalle cifre della tabella seguente, risulta che in alta montagna con la perfetta assimilazione di una quantità di glucosio superiore a quella tollerata al piano, non vengono minimamente mutati nè il consumo di O_2 nè l'eliminazione di CO_2, nè il Q. R., che la temperatura del corpo è leggermente aumentata nelle prime ore, e la circolazione resta invariata. Nell'esperimento al piano, con la minore assimilazione, si ha aumento

di consumo di ossigeno, di eliminazione di anidride carbonica e del Q. R., mentre la temperatura del corpo resta invariata.

Luogo	Data	Tempo	CO_2 eliminata in 5′ cc. a 0° e 760 mm.	O_2 assorbito in 5′ cc. a 0° e 760 mm.	$\frac{CO_2}{O_2}$	Calorie per Kgr ora	Osservazioni
1	2	3	4	5	6	7	8
Col D'Olen	19-VIII-1921	A digiuno	1389	1605	0.865	1.82	Alle ore 8 ingestione di gr. 200 glucosio contemporaneamente alla prima colazione.
		Dopo 1h.30′	1297	1465	0.880	1.75	
		» 3h.30′	1422	1588	0.890	1.90	Non glicosuria.
»	23-VIII-1921	A digiuno	1508	1777	0.840	1.98	Alle ore 8 prima colazione (caffè-latte pane), senza glucosio.
		Dopo 1h.30′	1420	1425	0.996	2.04	
		» 3h.30′	1177	1472	0.799	1.49	
Torino	4-XII-1921	A digiuno	865 (1)	1112 (1)	0.777 (1)	0.89 (1)	Alle ore 7.40 ingestione di gr. 200 di glucosio, contemporaneamente alla prima colazione.
		Dopo 1h.30′	1208	1474	0.819	1.21	Glicosuria lieve nella 2a ora.
		» 3h.30′	1071	1340	0.799	1.10	Glicosuria fortissima nella 3a ora.

(1) Media di due determinazioni eseguite in giorni successivi.

Luogo	Data	Tempo	Temperatura del Corpo	Frequenza del Polso	Data	Temperatura del Corpo	Frequenza del Polso
			(Alle ore 8 ingestione di gr. 200 di glucosio durante la colazione).			(Alle ore 8 prima colazione senza ingestione di glucosio).	
1	2	3	4	5	6	7	8
Col D'Olen	19-VIII-1921	A digiuno	36.9	47	26-VIII-1921	36.7	52
		Dopo 2h.30′	37.3	56		36.8	58
		» 3h.30′	37.0	52		37.2	—
		» 8h.30′	37.0	50		37.1	60
Torino	4-XII-1921	A digiuno	36.9	50	5-XII-1921	36.8	51
		Dopo 2h.30′	36.7	57		36.9	56
		» 3h.30′	36.7	57		36.9	58

Produzione dell'urina.

Guillemard e Moog (41) notarono che la quantità di urina diminuì nei primi giorni di dimora sul M. Bianco, successivamente ritornò alla norma, per superare al quinto giorno i valori del piano. Zuntz e coll. (3), videro nelle grandi marce una forte perdita di acqua, che poteva superare i 2 kgr.; l'urina raccolta durante la fatica, non era più concentrata di quella delle 24 ore. Cohnheim e Kreglinger (6), dopo un ascensione alla capanna Margherita, eseguita in giornata molto calda, osservarono che dopo la forte perdita di acqua l'acidità dell'urina era più elevata ma non più di quanto comportasse l'alto peso specifico; nei due giorni successivi aumentò la quantità di urina eliminata e diminuì l'acidità e il peso specifico. Ricorderemo inoltre che Scaffidi (42) dimostrò che durante il riposo successivo alla fatica muscolare si produce una maggiore eliminazione di acido urico e di sostanze puriniche, sufficiente ad elevare la quantità totale dell'acido urico eliminata nelle 24 ore.

Nei nostri esperimenti la *quantità delle urine eliminate nelle* 24 *ore*, presenta una diminuzione nei primi quattro giorni al Col d'Olen, in seguito cresce progressivamente fino a superare di un terzo e più i valori del piano. Nei giorni delle escursioni si nota una diminuzione, la quale di solito scompare ed anzi viene compensata nel giorno di riposo seguente, ma che dopo lunghe marce (Corno Bianco) dura anche nelle 24 ore succesive. Il *peso specifico* presenta variazioni che stanno in rapporto con quelle della quantità totale delle urine. L'*acidità* presenta delle oscillazioni, in complesso è aumentata nelle giornate di riposo al Col d'Olen in confronto del piano: l'aumento è molto notevole nelle 24 ore della marcia e diminuisce in quelle ad esse successive. Come si vede i dati relativi alla quantità, alla concentrazione ed all'acidità dell'urina, rilevati in un soggetto di 60 anni, corrispondono a quelli trovati negli individui più giovani.

Conclusioni.

In un soggetto sano, abituato a vita di studio, in una città del piano (276 m. s. m.), con peso del corpo normale, molto costante, non allenato per esercizi fisici, con lieve bradicardia costituzionale, dell'età di 60 anni, il soggiorno all'altezza di 2900 metri Istituto Mosso, Col d'Olen) non ha cagionato cambiamento nel peso, nella temperatura del corpo, nè disturbi soggettivi, nè variazioni patologiche di qualsivoglia funzione; mentre ha determinato tutte quelle modificazioni della funzione circolatoria, del comportamento dei globuli rossi, della meccanica respiratoria, del ricambio dei gas, della produzione del calore, dell'assimilazione del glucosio [1] e della produzione dell'urina, che sono state verificate in persone di età meno avanzata ed anche giovane.

[1] Secondo le recenti ricerche dell'Aggazzotti (1)

I fenomeni che possono essere attribuiti alla *acclimatazione*, si sono svolti rapidamente e come nelle persone di età meno avanzata, in ragione del periodo relativamente breve (28 giorni) di soggiorno nell'alta montagna. Ha fatto eccezione soltanto la capacità respiratoria, la quale si è mantenuta più piccola che al piano durante tutto il soggiorno all'Olen, fatto questo che forse può essere messo in relazione con la temperatura dell'ambiente esterno e di quella dell'Istituto, che andarono abbassandosi nella seconda metà del soggiorno all'Olen.

Il *lavoro*, sebbene non abbia potuto essere regolato secondo le norme di un vero allenamento, per le condizioni climatiche molto variabili della regione e particolarmente incostanti nel periodo di soggiorno, ha cagionato quelle stesse modificazioni che furono verificate in analoghe prove dagli altri ricercatori.

La *perdita di peso* fu cagionata specialmente dalla abbondante sudazione e scomparve nel giorno seguente alle escursioni non troppo faticose.

La *temperatura del corpo* aumentò di pochi decimi e ritornò alla normale nel giorno successivo alle escursioni.

L'aumento della *frequenza del polso* fu moderato e minore nell'ultimo periodo del soggiorno all'Olen. In generale l'aumento di frequenza fu rapidamente transitorio, ma, dopo la gita più lunga e faticosa, persistette, per quanto diminuito, anche nel giorno successivo a quello dell'escursione, per ritornare alla media ed anche sotto alla media al terzo giorno.

Quando il lavoro produsse *fatica*, sia per la lunghezza e continuità della marcia, sia per le condizioni del terreno e di quelle metereologiche della giornata, si è osservato:

1) Perdita di peso di durata maggiore che dopo il lavoro non troppo faticoso, ma transitoria e perfettamente compensata dopo un giorno di riposo.

2) Piccolo aumento di temperatura dopo il lavoro, meno sensibile dopo una lunga fatica.

3) Cambiameuti nella pressione arteriosa e nella forma del polso, che corrispondevano ad una diminuzione della forza del cuore e del tono dei vasi; cambiamenti che furono, però, di breve durata e che, all'infuori di una volta, dopo una lunghissima e faticosa escursione, erano scomparsi nel giorno successivo all'escursione.

4) Aumento della capacità vitale, misurata una o più ore dopo il ritorno da gite faticose. Una volta sola la capacità vitale risultò diminuita per alcune ore, in seguito a fatica ed esposizione lunga alla forte illuminazione ed al calore del ghiacciaio.

5) Aumento della ventilazione polmonare, tanto più forte, quanto più grave era stata la fatica e quanto più presto dopo il ritorno dalla marcia era stata eseguita la misurazione.

6) Variazioni irregolari del ricambio respiratorio, tanto subito dopo l'escursione, quanto a distanza di alcune ore: aumento dell'anidride carbonica espirata e dell'ossigeno consumato e diminuzione del quoziente respiratorio.

7) Produzione di calore, tanto maggiore quanto più grave fu la fatica, in dipendenza sia della lunghezza dell'escursione, che delle condizioni metereologiche della giornata.

8) Produzione dell'urina diminuita per un periodo di tempo tanto più a lungo, quanto maggiore era stata la fatica. Peso specifico ed acidità potenziale, in ragione inversa della quantità dell'urina.

Queste ricerche dimostrano che l'età di 60 anni non è una condizione di impedimento alla acclimatazione ed al lavoro fisico in alta montagna e sono il punto di partenza di una serie di osservazioni, intese a stabilire come si modifichi la capacità all'acclimatazione e all'allenamento in alta montagna, nell'organismo durante il periodo di involuzione. È nostro proposito di seguire, finchè ci sarà dato, questo problema, la cui risoluzione presenta un notevole interesse tanto teorico che pratico.

L'argomento di queste ricerche fu scelto dal prof. Morpurgo ed il piano fu concretato da questo e dal dott. Rabbeno. Gli esami chimici e i relativi calcoli furono eseguiti dal dott. Rabbeno. Gli altri esperimenti furono naturalmente fatti dai due autori. L'estensione del lavoro fu eseguita dagli autori di comune accordo.

BIBLIOGRAFIA

1) A. Agazzotti. *L'assimilazione del glucosio in alta montagna.* Comunicazione fatta alla R. Accad. di Medicina di Torino: Seduta del 23 giugno 1921.

2) I. S. Haldane. *Methods of Air Analysis.* London, 1912.

3) N. Zuntz, A. Loewy, F. Müller, W. Caspari. *Höhenklima und Bergwanderungen.* Bong u. Co. Berlin, 1906.

4) K. Bürker. *Zählung und Differenzierung der Körperlichen Elemente des Blutes.* In Tigerstedt, Hand.b. d. phys. Methodik. II, 5-1 .

5) A. Mosso. *L'Uomo sulle Alpi.* III ediz. Treves, Milano, 1909.

6) O. Cohnheim, u. Kreglinger. *Zur Physiologie des Wassers und des Kochsalzes.* Zeitschr. f. phys. chem. *63*, 413, 1909 e *78*, 62, 1912.

7) G. Galeotti ed E. Signorelli. *üeber die Wasserbilanz während der Ruhe und bei der Anstrengung im Hochgebirge.* Bioch. Zeitschr. *41*, 268, 1912.

8) G. Galeotti, O. Barkan, F. Giuliani, H. L. Higgins, E. Signorelli, G. Viale. *Gli effetti dell'alcool sulla fatica in montagna.* Memorie R. Accad. dei Lincei, *10*, 231, 1914.

9) Durig u. Kolmer. *Denkschriften der math-naturw.* Kl. der K. Akad. der Wissensch. *86*, Wien. 1909.

10) R. F. Fuchs. *Physiologische Studien im Hochgebirge.* Sitzungsber. d. phys. med. Sozietät in Erlangen, *40*, 204, 1908.

11) A. Durig u. N. Zuntz. *Beobachtungen Ueber die Wirkung des Höhenklimas auf Teneriffa.* Bioch. Zeitschr. *39*, 435. 1912.

12) A., I. Loewy u. L. Zuntz. *Ueber den Einfluss der verdünnten Luft u. des Höhenklimas auf den Menschen.* Pflüger's Arch. *66*, 477, 1897.

13) K. A. Hasselbalch u. I. Lindhard. *Analyse des Höhenklimas in seinen Wirkungen auf die Respiration.* Skand, Arch. f. Phys., *24*, 361. 1911.

14) E. C. Schneider a. D. L. Sisco. *The Circulation of the blood in man of high altitudes.* Amer.. Journ. of. Phys. 34, 1, 1914.

15) Douglas, Haldane, Yandell-Henderson, Schneider. Phil. Trans. of the R. Soc. of London, Serie B. *203*, 185.

16) Conway. *Climbing a. explorations in the Karokorum Himalayas.* London, 1894.

17) Zuntz u. Schumburg. *Physiologie des Marches*, Berlin, 1901.

18) Veraguth. *Le climat de la haute Engadine.* Thèse de Paris, 1887.

19) Kronecker. *Die Bergkrankheit. Urban u. Schwarzenberg.* Berlin, 1903.

20) A. Loewy. *Ueber Respiration und Zirkulation bei Aenderung des Druckes.* Berlin, 1895.

21) Fränkel u. Geppert. *Ueber die Wirkung der verdünnten Luft auf den Organismus.* Berlin, Hirschwald.

22) Oliver. *A contribution to the study of blood pressure.* London, 1908, cit. da Schneider a. Hedblom (25).

23) R. Bayeux. *Observations biologiques faites à Chamonix et au Mont Blanc.* C. R. Acad. d. Sc. *138*, 920, 1904.

24) Lazarus u. Schyrmunski *Ueber die Wirkung des Aufenthalt in Verdünnten Luft auf den Blutdruck.* Zeitschr. f. Klin. Med., 7.

25) E. C. Schneider a. C. A. Hedblom. *Blood pressure with special reference to high altitudes.* Amer. Journ. of phys. *23*, 90, 1908.

26) C. Foà. *I mutamenti del sangue sull'alta montagna.* Rendiconti R. Accad. Lincei, Serie 5, *12*, 404, 1903.

27) E. Masing u. P. Morawitz. *Höhenklima u. Blutbildung.* Deutsch. Arch. f. Klinische Mediz., *98*, 1910.

28) O. Cohnheim. *Physiologie des Alpinismus. II.* Ergebn. d. Phys., 1912.

29) O. Cohnheim u. O. H. Weber. *Die Blutbildung im Hörhgebirge* Deutsch. Arch. f. Klinische Mediz., *110*, 225, 1913.

30) F. Laquer. *Höhenklima u. Blutneubildung.* Ibi, *110*, 189, 1913.

31) Schumburg u. N. Zuntz. *Zur Kenntniss der Einwirkungen des Hochgebirges auf den menschlichen Organismus.* Pflüger's Arch. *63*, 461, 1896.

32) G. Viale e G. Giantucco. *L'azione dell'alcool sul ricambio respiratorio nel riposo e nel lavoro.* Arch. di Scienze biologiche, 2, 89, 1921.

33) G. Viale. *L'acclimatazione in alta montagna.* Giorn. R. Accad. di Medic., di Torino Serie IV, Vol. 25, 350, 1919.

34) G. Galeotti, V. Scaffidi, O. Barkan. *Sulla temperatura dell'aria espirata.* Rendiconti R. Accad. dei Lincei, *23*, 2° Sem., 245, 1914.

35) A. Azzi. *Sulla temperatura dell'aria espirata.* Lo Sperimentale, *68*, 441, 1914; Ivi, *70*. 328, 1916.

36) G. Viale. *Rapporti fra la temperatura dell'aria espirata e la temperatura cutanea.* Arch. Scienze Mediche, *43*, 40, 1920.

37) H. Guillemard et A. Moog. *Influence du climat d'altitude sur la déshydratation de l'organisme.* C. R. Acad. d. Sciences, *145*, 823, 1907.

38) R. F. Fuchs u. Th. Deimler. *Versuche über den respiratorischen stoffwechsel im Hochgebirge.* II. Sitzungs ber. d. phys. med. Sozietät in Erlangen, 41, 125, 1909.

39) A. Durig. *Denkschriften der Math. Naturwissensch.* Klasse der K. AK. der Wissensch., 86.

40) A. Durig u. N. Zuntz. *Die Nachwirkung der Arbeit auf die Respiration in grösseren Höhen.* Skandin. Arch. f. Phys., *29*, 133, 1913.

41) H. Guillemard et A. Moog. *Influence des hautes altitudes sur la nutrition générale.* C. R. Acad. Sc., *141*, 843, 1905.

42) V. Scaffidi. *Sur les modifications de l'échange purinique dans la fatigue sur la haute montagne.* Internat. Beiträge Bd. II, Heft. 2; Atti Lab. Mosso sul Monte Rosa, 3, 115, 1912.

TABELLA I.

Numero	Data 1921	Luogo	Condizioni sperimentali	Peso del Corpo	Temperatura Esterna		Temperatura Interna		Polso	Pressione Arteriosa		Urine delle 24 ore		
										Massima	Minima	Quantità	Peso Specifico 15°	Acidimetria cmc NaOH 0,1 N sul totale
				Mattino	Mattino	Sera	Mattino	Sera	Mattino	Mattino	Mattino			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	**15**
1	14-VII	TORINO	A riposo	69.955	—	36.6	—	37	53	160	105	—	—	—
2	15 »	»	»	69.955	—	—	—	—	54	165	105	1850	1015	185.0
3	16 »	»	»	69.955	36.2	36.8	36.6	37.2	51	175	105	1090	1021	190.7
4	17 »	»	»	—	36.4	36.6	36.8	37.1	—	—	—	1380	1020	179.4
5	18 »	»	»	69.955	36.3	36.6	36.7	37.1	—	—	—	1685	1017	176.9
6	19 »	»	»	69.955	36.3	36.3	36.3	36.8	—	—	—	1335	1018	153.5
7	20 »	»	»	69:955	36.3	36.6	36.6	36.9	55	175	105	1220	1019	134.2
8	21 »	»	»	69.955	36.2	36.6	36.6	36.9	53	175	95	1310	1020	235.8
9	22 »	»	»	70.255	36.4	—	36.8	—	—	—	—	1320	1019	250.8
10	23 »	»	»	69.955	36.4	36.6	36.9	37.4	—	—	—	1390	1021	305.8
11	24 »	»	»	69.955	36.1	—	36.7	—	—	—	—	1400	—	280.0
			Media Torino - Estate A Riposo	*69.955*	*36.3*	*36.6*	*36.6*	*37.0*	*53*	*170*	*102*	*1397*	*1018.9*	*213.0*
			Media Toriuo - Inverno A Riposo *	*69.121*	—	—	*36.8*	—	*50.5*	*207*	*85*	—	—	—

* Media di due determinazioni eseguite nel mese di dicembre 1921.

TABELLA II.

Numero	Data 1921	Luogo	Condizioni Sperimentali	Peso del Corpo	Temperatura Esterna		Temperatura Interna		Polso	Pressione Arteriosa		Urine delle 24 ore		
										Massima	Minima	Quantità	Peso Specifico 15°	Acidimetria cmc NaOH 0,1 N sul totale
				Mattino	Mattino	Sera	Mattino	Sera	Mattino	Mattino	Mattino			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
II	31-VII	OLEN	Riposo	70.020	36.8	—	37.2	—	59	150	80	—	—	—
III	1-VIII	»	Ghiacciaio dell'Indren	69.620	36.3	37·0	36.8	37.1	55	155	85	810	1028	356.4
IV	2 »	»	Capanna Gnifetti.....	69.920	36.8	—	37.1	—	55	155	100	1000	1023	250.0
V	3 »	»	Riposo	70.070	36.5	—	36.8	—	46	160	95	930	1025	204.6
VI	4 »	»	Gressoney Trinità.....	70.020	36.1	36.9	36.6	37.3	51	175	80	1850	1018	314.6
VII	5 »	»	Colle delle Pisse......	69.620	36.5	36.8	37.0	36.7	58	180	75	1180	1020	236.0
VIII	6 »	»	Sasso del Diavolo.....	69.870	36.1	36.5	36.4	37.0	46	175	80	1010	1026	393.9
IX	7 »	»	Gressoney Trinità	69.820	36.2	36.7	36.6	36.8	52	180	85	1800	1018	396.0
X	8 »	»	Riposo	68.520	36.3	36.5	36.8	36.9	52	200	90	—	1018	—
XI	9 »	»	»	70.120	36.2	36.5	36.7	36.8	52	180	80	1020	1024	474.3
XII	10 »	»	»	69.770	36.5	—	36.7	—	50	200	100	1950	1012	331.3
XIII	11 »	»	»	69.810	—	—	—	—	—	—	—	2400	1013	288.0
XIV	12 »	»	Breve escursione con bufera di neve	69.920	—	—	—	—	51	—	—	2260	1012	361.6
XV	13 »	»	Ghiacciaio Indren .... Lago Gabiet..........	69.820	36.4	—	36.6	—	47	210	100	1800	1017	396.0
XVI	14 »	»	Corno Bianco	69.020	36.2	—	36.6	—	56	215	95	1560	1022	546.0
XVII	15 »	»	»	—	—	36.5	—	37.0	—	—	—	—	—	—
XVIII	16 »	»	Riposo	68.720	36.5	—	36.6	—	65	185	80	—	1029*	—
XIX	17 »	»	Ghiacciaio Indren .... Lago Gabiet..........	70.420	—	—	—	—	51	205	100	840	1030	612.4
XXI	19 »	»	Riposo	70.020	—	—	36.9	—	47	210	85	2500	—	325.0
XXII	20 »	»	»	70.020	—	—	37.0	—	48	210	90	2310	1011	282.9
XXIV	22 »	»	Gressoney Trinità	69.420	—	—	36.7	37.2	49	215	95	—	—	—
XXV	23 »	»	Riposo	69.420	—	—	36.7	—	52	215	95	670	1026	348.4
XXVI	24 »	»	»	70.320	—	—	—	—	—	—	—	2040	—	633.4
XXVII	25 »	»	»	69.520	—	—	—	—	—	—	—	2730	1014	436.8
XXVIII	26 »	»	Capanna Gnifetti.....	70.020	—	—	—	—	—	—	—	1940	1016	388.0
			Media Olen....	*69.773*	*36.4*	*36.7*	*36.8*	*37.0*	*52*	*188*	*89*			

* Urina della notte.

Tabella III.

Numero	Data 1921	Luogo	Condizioni sperimentali	Ritmo respiratorio	Capacità vitale		Ventilazione polmonare		CO_2 in 5' cmc. a 0° e 760 mm.	O_2 in 5' cmc. a 0° e 760 mm.	$\frac{CO_2}{O_2}$	Calorie per ora	Calorie per Kgr.-ora
					cmc.	cmc. a 0° e 760 mm.	litri in 5'	litri in 5' a 0° e 760 mm.					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	14-VII	Torino	Riposo	—	4112	3732	27.458	24.303	1040	1331	0.781	76.33	1.1
2	15 »	»	»	—	4165	3781	39.729	35.223	1507	1930	0.781	86.40	1.23
3	16 »	»	»	13	4314	3919	28.531	25.275	1035	1377	0.751	79.96	1.24
4	20 »	»	»	—	4304	3897	23.668	21.402	841	1164	0.722	65.74	0.93
5	21 »	»	«	13	4304	3897	25.987	23.460	1055	1489	0.708	84.12	1.20
			Media Torino Estate	—	*4239*	*3845*	*29.054*	*25.932*	*1095*	*1458*	*0.748*	*78.51*	*1.14*
	11-XII	Torino	Riposo	—	3616	3536	22.720	21.714	881	1133	0.777	63.85	0.91
	»	»	»	—	3666	3500	20.924	19.974	849	1092	0.777	61.50	0.87
			Media Torino Inverno	—	*3641*	*3518*	*21.822*	*20.844*	*865*	*1112.5*	*0.777*	*62.67*	*0.89.*
II	31-VII	Olen	Riposo	14	3499	2429	23.298	15.828	694	996	0.697	54.81	0.78
III	1-VIII	»	Ghiacciaio Indren....	—	3432	2349	20.489	14.023	726	797	0.910	68.80	0.96
IV	2 »	»	Capanna Gnifetti....	15	3401	2352	35.027	24.231	1376	1387	0.992	83.28	1.17
V	3 »	»	Riposo	15	3473	3385	32.656	22.430	1209	1133	1.068	99.56	1.42
VI	4 »	»	Gressoney Trinità....	16	3442	2355	34.153	23.432	1286	1386	0.930	82.14	1.15
VII	5 »	»	Colle delle Pisse	18	3442	2327	30.555	15.852	840	913	0.920	69.09	0.98
VIII	6 »	»	Sasso del Diavolo....	15	3475	2353	40.892	27.700	1486	1488	0.997	90.0	1.28
IX	7 »	»	Gressoney Trinità....	—	3487	2370	23.992	16.309	902	931	0.968	88.28	1.26
X	8 »	»	Riposo	15	3583	2443	39.416	26.883	1376	1610	0.854	125.83	1.85
XI	9 »	»	»	—	3473	2330	28.631	19.256	918	1051	0.872	84.58	1.20
XIV	12 »	»	Breve escursione con bufera di neve.....	—	3364	2280	35.880	24.322	1242	1405	0.884	115.77	1,65
XV	13 »	»	Ghiacciaio Indren.... Lago Gabiet	15	3408	2308	21.320	14.454	751	803	0.935	72.24	1.03
XVI	14 »	»	Corno Bianco........	—	—	—	30.940	21.125	1029	1222	0 842	93.00	1.34
XVIII	16 »	»	Riposo	—	—	—	31.220	21.546	1010	1408	0.717	81.37	1.18
XIX	17 »	»	Ghiacciaio Indren.... Lago Gabiet........	—	—		39.603	27.483	1359	1739	0.781	116.87	1.66
XXI	19 »	»	Riposo	—	—	—	37.211	25.734	1389	1605	0.865	127.81	1.82
XXII	20 »	«	»	14	—	—	35.828	24.770	1316	1591	0.827	115.80	1.65
XXIV	22 »	»	Gressoney Trinità....	—	3424	2358	39.520	27.099	1336	1508	0.886	124.69	1.80
XXV	23 »	»	Riposo	—	—	—	46.644	32.093	1508	1777	0.848	137.01	1.98
			Media Olen.........	*15*	*3454*	*2356*	*32.488*	*22.345*	*1134*	*1302*	*0.870*	*96.56*	*1.37*

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 10°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 4°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIV. Fasc. 1°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV, XV e XVI. Fasc. 10°.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XIX. Fasc. 7°-9°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO II.

Prof. GIOVANNI PLATANIA

RISULTATI

DELLE

OSSERVAZIONI DI POLARIZZAZIONE ATMOSFERICA

ESEGUITE IN CATANIA NEGLI ANNI 1910-18

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Risultati delle osservazioni di polarizzazione atmosferica eseguite in Catania negli anni 1910-18.

Memoria del prof. GIOVANNI PLATANIA

premiata nel concorso al premio CARPI del 1919-20.

---

1. È noto che, in generale, la distanza angolare del punto neutro di Babinet dal sole e quella del punto neutro di Arago dall'antisole, durante il tramonto, dapprima aumentano, poi diminuiscono e quindi crescono di nuovo, e che queste variazioni non hanno la stessa fase, quella del punto neutro di Babinet verificandosi con ritardo.

Le distanze medesime, le quali, nell'istante del tramonto, sono di circa 18°, subiscono delle variazioni talvolta notevoli. Nel 1884, dopo l'eruzione del Krakatoa, Cornu trovò un considerevole aumento di queste distanze, in coincidenza coi tramonti rossi e con l'apparizione dell'anello di Bishop.

Busch, che dal 1886 fa delle ricerche su tali fenomeni di polarizzazione atmosferica, osservò una graduale diminuzione di queste distanze fino al 1899, poi un aumento, con un massimo nel 1894; il nuovo minimo avvenne nel 1899-900 e il nuovo massimo nel 1903-4. Egli è di parere che esista una correlazione tra queste variazioni periodiche e l'andamento delle macchie solari: un massimo di macchie corrisponderebbe a un massimo di distanza.

A queste variazioni graduali si sovrappongono delle perturbazioni prodotte o da causa non bene accertata, come nel maggio 1907, o dal pulviscolo lanciato nelle eruzioni vulcaniche violente, come quella accennata dal Krakatoa, quella del 1902-03 seguita all'eruzione delle Indie Occidentali, e quella del 1912 per l'eruzione del Katmai (Alasca).

Sorgono pure altre questioni relative alla polarizzazione atmosferica: se e come influiscano le condizioni meteoriche, la natura del terreno, l'altitudine della stazione, la distribuzione in altezza e la natura delle particelle nell'atmosfera, ecc.

2. Dopo le antiche ricerche dello Zantedeschi (1846) e quelle dello svedese Rubenson a Roma e a Segni (1861-62), non sono state eseguite in Italia altre ricerche di polarizzazione atmosferica. Nel 1889 il prof. G. Basso pubblicò un appello [1], invitando gli studiosi di fisica, a intraprendere delle ricerche in questo campo; ma esso rimase senza effetto.

Nel 1909 il Dr. Chr. Jensen, del Laboratorio Fisico di Amburgo, mandò all'Osservatorio Astrofisico di Catania un polariscopio di quell'Istituto, proponendo che si eseguissero osservazioni regolari dei punti neutri nel detto Osservatorio, le quali sarebbero riuscite interessanti per la posizione meridionale della stazione e per la purezza

(1) Annuario Meteorologico italiano, 1889 (anno II).

del cielo siciliano. Incaricato di tali osservazioni, le cominciai nel 1910, continuandole negli anni successivi.

3. *Metodo di osservazione.* — Lo strumento di cui mi sono servito per queste osservazioni è un polariscopio di Savart, montato su di un quadrante di magnalio, con due mire e con alidada a pendolo, secondo il sistema del medesimo Jensen; l'analizzatore, una lamina di tormalina, è fisso, e il sistema dei quarzi è mobile.

Prima del tramonto, cominciavo a osservare, con questo apparecchio, l'altezza sull'orizzonte del punto neutro di Arago e di quello di Babinet, alternativamente, notandole in un registro, con l'ora in tempo medio locale (che anticipa di $20^{sec.},6$ sul tempo medio etneo), servendomi di un buon orologio da tasca, che avevo cura di confrontare col cronometro dell'Osservatorio.

La puntata del punto neutro veniva fatta rivolgendo il polariscopio in modo da mirare, nel verticale del sole, il punto medio della così detta zona neutra, cioè dell'intervallo in cui non sono visibili le frange.

Da principio (nel 1910) iniziavo le osservazioni con piccola altezza solare e le continuavo fino a poco dopo il tramonto, intendendo esaminare le altezze dei punti neutri nell'istante del tramonto. Poi, per uno studio più compiuto dell'andamento del fenomeno, ebbi cura di cominciare le osservazioni con anticipo, quando il sole era a circa 9° di altezza, e di continuarle il più possibile.

4. Coi valori delle altezze sull'orizzonte del punto neutro di Arago e di quello di Babinet, segnati come ordinate su di una carta a quadretti, prendendo come ascisse i tempi (con la riduzione a tempo vero), si otteneva, nei giorni normali, un diagramma con curve abbastanza regolari.

Calcolavo poi, per ogni giorno di osservazione, le ore vere corrispondenti alle diverse altezze solari, da $+9°$ a $-7°$, per mezzo di una tavola numerica preparata espressamente per questo scopo, cioè disposta in modo da fornire i tempi veri t, in corrispondenza agli argomenti h, altezza solare sull'orizzonte (di grado in grado fra $+10°$ e $-10°$) e δ declinazione del sole nel corso dell'anno (parimente di grado in grado da $+24°$ a $-24°$). Per questi calcoli venne applicata la nota formola

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}t = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(S-\varphi)\operatorname{sen}(S-\delta)}{\cos S \cos(S-Z)}}$$

dove

$$S = \frac{\varphi+\delta+z}{2}$$

essendo φ la latitudine del luogo (per Catania $+37°,5$) e z la distanza zenitale.

Il calcolo venne eseguito con quattro sole cifre per argomenti procedenti di 2 in 2 gradi e completato poi con due successive interpolazioni nel mezzo.

Ottenute le diverse ore vere, corrispondenti a ciascuna delle suddette altezze solari, le segnavo sul diagramma, e in questo modo riusciva facile ricavare con sufficiente precisione, le altezze medie dei punti neutri sull'orizzonte, segnando a occhio le medie grafiche per gli archi di curva compresi fra 9° e 8°, fra 8° e 7°,....., fra $-6°$ e $-7°$ di altezza solare. Queste altezze medie si riducevano infine a distanze medie dal sole, per il punto di Babinet, e dall'antisole, per il punto di Arago. Per avere un'idea del peso spettante a queste medie, aggiungo che ho osservato alternativamente il punto di

Babinet e quello di Arago, di solito, con l'intervallo di tempo di 1 minuto fra una misura e la successiva; in casi eccezionali di variazione molto rapida nell'altezza dei punti neutri – casi che si verificano durante il periodo di anomalia polarimetrica – ho fatto le misure alternate con l'intervallo di mezzo minuto.

Le osservazioni furono eseguite, in massima parte, sulla terrazza (altitudine 70 m.) dall'Osservatorio di Catania; talvolta, nei mesi estivi, sulla terrazza (altitudine 50 m.) di una casina a Ognina, un sobborgo a NE di Catania, e in un caso (agosto 1917) in una casina ad Aci-Trezza (provincia di Catania). I valori ottenuti in questi tre posti diversi rimangono peraltro confrontabili fra loro, trattandosi di piccole altitudini e, per il calcolo delle altezze solari, di piccole differenze di latitudine.

5. *Risultati delle osservazioni.* — I valori ottenuti in ciascun giorno di osservazione degli anni dal 1910 al 1918 sono riportati nelle seguenti tabelle I a XVIII, nelle quali, per valori corrispondenti alle altezze solari 8°,5, 7°,5,....., intendo le medie rilevate graficamente dai diagrammi, tra 9° e 8°, 8° e 7°,... di altezza solare vera, come ho detto al § 4.

TABELLA I.

Distanze solari del p. n. di Babinet.

Altezze solari vere.

1910		5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	—0,5	—1,5	– 2,5
Aprile	21	16.3	16.7	17.0	17.4	17.7	18.5	18.5	18.6	18.4
»	22	15.5	16.3	16.8	17.7	17.7	18.4	18.3	17.7	17.2
Maggio	8	13.9	14.8	15.7	16.5	17.0	16.4	18.0	—	—
»	17	—	14.8	14.5	15.4	16.1	16.7	17.2	17.5	—
»	18	14.7	15.2	15.2	15.8	16.5	16.8	17.5	17.7	18.1
»	19	—	14.5	14.6	15.6	16.7	16.8	16.8	—	—
»	21	—	—	—	16.0	16.5	15.9	16.8	—	—
»	29	12.0	13.2	13.5	14.6	15.5	16.1	17.0	16.9	—
Giugno	9	15.0	15.9	15.9	16.2	17.1	18.0	18.3	17.5	—
»	11	15.0	15.2	16.1	16.7	16.6	17.2	17.4	17.9	—
»	23	14.6	15.5	15.4	15.3	16.3	17.0	17.7	18.0	17.5
»	25	15.4	14.9	15.3	16.5	17.0	16.8	15.9	16.8	17.5
»	26	—	15.5	14.9	15.5	15.4	17.3	17.9	18.0	17.5
»	29	15.0	16.0	15.9	16.1	17.2	17.5	17.8	18.5	18.2
Luglio	1	15.5	16.1	15.5	17.2	17.8	18.5	17.9	18.2	17.8
»	2	15.3	15.5	15.3	16.2	16.8	16.4	17.7	18.2	18.1
»	10	15.0	16.5	16.7	16.7	17.2	17.2	18.5	17.3	16.7
»	11	15.1	15.5	16.6	17.0	17.2	17.6	17.7	18.5	16.9
»	12	15.0	17.2	16.6	17.7	17.1	17.1	16.9	16.9	16.5
»	21	15.5	15.7	15.9	16.5	16.6	17.6	18.4	18.0	—
»	22	16.0	16.2	16.6	17.6	17.8	18.1	17.9	17.9	—
»	23	—	16.1	17.2	17.2	17.7	18.1	17.8	18.0	17.5
»	24	13.0	15.1	16.1	15.8	16.6	16.7	17.9	17.5	17.4
»	25	—	17.1	16.7	17.2	17.8	18.1	18.0	17.9	17.9
»	30	—	16.0	16.7	17.7	17.4	18.1	18.3	18.1	—
»	31	17.7	18.0	18.3	19.0	18.5	17.7	18.3	18.3	17.7
Agosto	16	—	—	16.0	16.6	17.5	18.3	18.5	19.0	—
»	18	—	—	16.7	18.0	18.5	18.4	18.5	18.9	—
»	19	—	16.2	17.5	18.0	17.7	18.3	18.1	18.3	—
»	27	—	17.5	17.3	17.5	18.3	18.1	18.0	17.9	17.1
Ottobre	2	—	—	14.7	16.5	17.1	18.4	18.7	18.5	17.9
Dicembre	24	15.8	15.9	16.1	16.7	16.9	17.1	17.6	18.5	17.7

Tabella II.

Distanze antisolari del p. n. di Arago.

Altezze solari vere.

1910		5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	– 0,5	— 1,5	- 2,5	3,5
Aprile	21	19.9	20.6	20.0	19.9	19.6	18.7	18.6	18.1	18.5	—
»	22	19.8	19.9	19.5	20.0	19.5	19.4	18.8	19.0	19.2	—
Maggio	8	18.9	19.6	19.3	19.1	19.5	18.6	18.4	—	—	—
»	17	20.1	20.2	20.4	20.1	19.8	19.1	18.2	17.5	16.5	—
»	18	20.9	20.0	20.5	19.5	19.6	18.8	18.8	18.5	17.9	18.0
»	19	20.0	20.0	20.1	19.9	19.0	18.3	18.2	—	—	—
»	21	—	—	19.5	18.8	19.2	18.7	18.5	—	—	—
»	29	18.9	18.3	19.0	19.3	19.3	19.2	18.5	17.7	—	—
Giugno	9	20.2	20.5	20.0	20.0	19.9	18.5	18.8	18.5	—	—
»	11	19.3	19.6	19.6	19.4	19.3	19.1	18.2	18.0	—	—
»	23	20.1	20.4	20.1	19.9	20.0	19.4	19.2	18.5	18.2	—
»	25	19.6	20.0	19.5	19.8	19.7	19.0	18.0	18.2	19.2	—
»	26	—	18.6	18.7	19.6	18.7	18.1	17.9	17.5	18.0	18.8
»	29	20.4	20.6	20.4	20.0	19.9	19.7	19.8	18.9	18.9	—
Luglio	1	20.9	20.7	21.3	21.2	20.1	20.7	18.7	19.1	19.1	19.5
»	2	20.8	20.0	20.8	20.1	19.1	18.1	18.7	18.2	17.8	18.5
»	10	20.1	20.6	20.1	19.7	19.2	18.6	17.9	17.5	18.7	—
	11	21.1	20.9	20.0	19.9	19.6	19.0	18.0	18.1	19.4	—
	12	21.9	20.5	19.9	19.5	18.9	18.5	17.6	17.3	17.5	—
»	21	19.3	19.4	20.0	20.0	19.4	19.1	17.7	18.3	18.5	—
»	22	19.7	20.5	20.4	19.7	20.5	19.0	18.6	19.1	20.0	—
	23	20.5	20.6	20.0	19.9	19.5	18.9	18.9	18.2	18.5	—
»	24	20.9	20.9	20.7	20.5	19.8	19.2	18.5	18.3	18.6	—
»	25	—	19.6	19.2	19.0	19.3	19.2	19.1	18.9	19.0	—
»	30	21.0	21.5	21.4	21.5	20.6	19.8	20.2	19.3	—	—
»	31	22.0	21.7	21.4	20.5	19.4	19.4	19.2	18.4	18.6	—
Agosto	16	—	—	19.9	19.6	19.5	19.6	19.2	18.9	19.2	—
»	18	—	21.6	21.5	21.7	20.5	20.4	19.8	19.4	19.5	—
»	19	21.7	21.5	21.1	21.1	20.2	20.3	19.3	18.7	19.4	—
»	27	22.5	23.9	23.1	22.7	21.4	19.8	18.1	17.8	18.2	18.5
Ottobre	2	—	—	19.6	20.0	19.4	19.5	19.2	19.3	19.2	19.7
Dicembre	24	19.1	19.2	19.2	19.3	19.3	19.0	18.5	18.2	19.2	20.2

Tabella III.

Distanze solari del p. n. di Babinet.

Altezze solari vere.

1911		5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	- 0,5	- 1,5	—2,5	3,5	4,5	5,5
Gennaio	19	—	—	15.5	16.6	17.0	17.5	18.5	18.6	18.0	18.6	18.5	—
»	27	—	—	—	15.0	16.5	16.4	16.0	16.9	17.0	16.9	17.3	17.5
Febbraio	10	—	—	—	16.9	17.3	17.5	17.2	16.9	17.5	17.5	16.7	—
»	18	—	—	16.6	15.8	16.5	17.1	17.3	17.9	17.7	17.0	16.9	—
»	22	14.9	16.1	16.5	16.6	16.9	17.3	17.1	16.3	15.7	16.2	16.7	–
»	23	15.2	14.7	15.5	16.2	16.3	16.9	16.9	16.5	17.1	16.6	16.7	—
»	28	—	—	13.3	13.5	14.8	15.2	16.0	17.0	18.2	16.8	17.1	17.7
Marzo	1	15.3	15.5	16.1	16.6	17.3	17.0	17.5	17.4	17.3	17.3	17.0	—
Aprile	16	—	15.5	15.8	16.7	17.0	16.9	17.1	17.5	17.5	17.0	17.2	—
»	29	17.3	16.9	17.2	17.9	17.8	17.7	17.3	17.0	17.3	16.9	—	—
Maggio	16	15.0	15.2	16.0	16.6	17.0	17.3	17.5	17.7	17.4	17.2	—	—
»	17	16.0	15.6	16.6	17.3	17.5	17.6	17.1	17.6	17.6	18.1	—	—
Giugno	19	—	16.6	16.9	17.5	17.8	17.9	17.7	17.3	17.1	16.6	—	—
»	20	14.6	15.6	15.8	16.4	17.1	17.4	17.2	17.0	17.2	16.2	16.1	—
»	24	—	15.4	15.8	16.5	17.1	18.0	18.2	18.0	18.0	18.1	—	–
»	25	—	16.5	16.7	17.6	17.9	18.4	18.7	18.3	18.4	17.7	17.0	—
»	26	—	16.2	16.2	16.9	17.1	17.1	17.8	18.4	17.1	17.4	16.9	—
»	28	—	15.2	15.9	16.5	16.5	17.2	17.4	17.4	17.2	16.5	16.9	—
»	29	—	15.6	16.0	16.7	16.8	17.6	17.3	19.0	19.3	18.8	18.5	—
»	30	—	15.5	15.5	16.4	16.9	17.1	17.9	17.9	17.4	17.3	17.1	—
Luglio	31	—	15.5	16.7	17.5	18.2	18.7	19.0	18.8	—	—	—	—
Agosto	24	—	—	—	15.9	16.5	17.5	18.2	17.6	17.1	17.2	16.9	—
»	25	14.3	15.1	16.1	16.4	17.7	18.5	18.8	19.0	18.3	18.9	18.4	—
Ottobre	24	—	—	15.7	16.3	16.8	17.4	17.2	17.4	17.3	16.3	16.2	15.9
Dicembre	30	16.0	16.1	16.3	16.5	17.5	18.1	18.2	18.4	17.5	17.4	18.3	19.2

TABELLA IV.

Distanze antisolari del p. n. di Arago.

Altezze solari vere.

1911		5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	— 0,5	— 1,5	— 2,5	— 3,5	— 4,5	5,5
Gennaio	19	—	18.0	18.9	19.5	18.8	18.5	19.3	19.5	19.5	21.4	23.4	—
»	27	—	—	—	18.0	18.5	18.3	18.3	18.0	19.0	20.8	23.4	26.5
Febbraio	10	—	—	—	19.8	18.8	19.2	18.9	18.7	20.5	21.5	23.1	—
»	18	—	17.7	19.5	18.8	18.1	18.0	18.0	19.3	19.5	20.3	23.5	—
»	22	18.7	19.3	19.5	18.9	18.6	19.1	18.5	19.1	18.5	20.3	22.7	—
»	23	19.9	19.4	19.4	19.3	19.2	18.7	18.5	18.0	19.5	20.5	23.0	—
»	28	—	—	19.0	19.7	18.5	18.3	18.5	18.5	18,5	19.6	21.5	26.1
Marzo	1	17.6	17.9	18.5	18.4	18.4	18.3	18.6	18.7	19.1	20.5	23.5	—
Aprile	16	—	19.0	19.1	19.6	19.2	18.9	18.4	18.3	18.8	20.2	22.6	—
»	29	18.5	18.3	19.1	19.5	19.5	19.0	19.4	20.7	20.7	21.8	—	—
Maggio	16	21.5	21.4	21.2	20.4	20.2	19.7	19.0	18.6	18.5	19.6	—	—
»	17	19.4	19.9	19.6	19.6	18.8	18.5	17.8	18.0	17.3	18.1	—	—
Giugno	19	—	19.6	19.4	19.8	19.3	19.1	18.7	18.8	19.9	20.7	—	—
»	20	19.2	19.2	19.3	19.9	19.2	18.9	18.3	18.5	19.0	20.9	23.9	—
»	24	—	21.3	20.7	20.2	19.7	19.5	19.5	19.6	21.1	22.7	24.5	—
»	25	—	20.0	20.4	19.9	19.4	19.1	18.8	18.6	19.1	19.7	21.9	24.9
»	26	—	20.3	20.0	20.2	19.7	19.2	18.2	18.1	18.4	18.9	21.5	—
»	28	—	19.8	19.9	19.2	19.0	18.7	18.3	18.2	18.6	19.9	23.7	—
»	29	—	20.2	20.2	20.1	19.5	19.3	19.0	19.3	19.6	20.6	22.4	—
»	30	—	19.5	19.2	19.8	19.7	19.3	19.0	19.1	19.4	19.9	21.8	—
Luglio	31	—	21.4	20.9	20.8	20.0	19.9	19.2	18.7	—	—	—	—
Agosto	24	—	—	—	19.7	19.8	18.7	18.5	18.1	18.6	19.7	23.0	—
»	25	20.3	19.9	20.1	19.9	19.0	18.7	18.6	18.8	18.7	19.5	23.5	—
Ottobre	24	—	—	17.9	18.2	17.7	18.0	18.1	18.0	18.6	19.5	22.3	24.8
Dicembre	30	18,8	19.0	19,2	18.9	18,8	18,6	18,3	18,4	19.3	21,2	22.8	26.7

TABELLA V.

Distanze solari del p. n. di Babinet.

Altezze solari vere.

1912		7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	— 0,5	— 1,5	— 2,5	— 3,5	— 4,5	— 5,5
Febbraio	18	15.4	15.7	15.9	16.3	16.9	17.0	17.3	17.9	18.3	17.6	16.5	16.5	—	—
»	29	—	—	14.9	15.3	16.1	16.3	17.1	17.4	17.5	17.8	16.5	16.2	16.1	—
Marzo	27	14.6	14.7	14.7	15.7	16.0	16.2	17.0	17.6	17.7	17.0	16.9	16.7	16.6	—
Maggio	13	14.5	15.2	15.9	16.1	16.5	17.1	17.5	17.9	18.4	17.3	17.5	17.5	17.4	—
»	14	—	—	—	15.8	15.5	16.0	16.4	16.8	17.0	16.9	16.9	17.2	17.3	—
Luglio	4	—	—	16.7	17.5	17.7	18.3	18.3	18.4	19.1	19.8	20.7	—	—	—
»	5	—	—	14.5	16.4	17.2	17.5	17.5	18.0	19.0	19.3	18.2	18.7	19.2	—
»	15	—	—	—	—	20.5	21.5	20.5	21.0	20.9	20.7	20.6	20.5	19.5	—
»	16	19.0	19.5	20.3	21.0	21.5	22.2	22.5	23.6	23.2	23.3	22.5	21.1	20.0	—
»	23	—	—	—	—	21.0	21.7	22.1	22.5	21.6	20.3	20.7	20.3	19.2	—
»	24	—	18.9	19.6	20.7	21.7	22.6	22.2	22.0	19.1	18.5	17.5	16.3	—	—
»	26	—	21.1	21.6	22.6	22.3	22.4	23.5	22.4	20.0	18.7	17.3	16.4	—	—
Agosto	14	—	—	31.1	32.5	33.2	34.3	34.9	33.5	25.3	20.7	18.6	17.2	—	—
»	15	—	27.5	30.5	31.1	32.5	32.9	32.7	29.0	21.9	19.3	19.3	20.5	—	—
Settembre	8	—	—	—	29.7	32.0	32.5	30.3	28.8	23.7	20.2	17.2	19.0	—	—
Ottobre	30	—	—	—	—	—	—	31.2	29.5	25.9	22.0	20.7	21.7	22.3	21.4
Novembre	15	—	—	—	—	—	29.7	30.7	29.2	26.6	24.8	23.4	22.9	23.0	—
Dicembre	15	25.2	27.0	28.0	28.1	29.5	30.6	31.2	30.8	26.2	21.7	19.9	20.7	21.0	—

TABELLA VI.

Distanze antisolari del p. n. di Arago.

Altezze solari vere.

1912		7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	— 0,5	— 1,5	— 2,5	— 3,5	— 4,5	— 5,5
Febbraio	18	18.1	20.0	19.9	19.7	19.0	19.5	18.9	18.4	18.8	18.7	18.9	19.4	21.5	25.5
»	29	—	—	18.7	18.5	18.8	18.6	19.0	18.6	18.2	18.2	18.7	20.3	21.9	24.0
Marzo	27	18.5	19.4	19.6	20.0	19.5	19.6	19.7	19.4	18.8	18.6	18.9	20.3	21.4	—
Maggio	13	20.5	21.2	20.7	19.9	19.4	19.6	19.3	19.7	18.7	18.6	19.0	20.0	21.7	—
»	14	—	—	—	20.1	20.2	20.0	19.6	19.2	19.2	18.7	19.9	22.0	24.4	—
Luglio	4	—	—	20.7	20.5	20.6	20.3	19.9	19.4	18.7	19.3	20.0	—	—	—
»	5	—	—	21.0	20.7	20.6	20.3	19.7	19.5	18.6	18.5	19.0	20.0	21.7	—
»	15	—	—	—	—	24.5	24.4	23.7	23.5	20.4	19.3	19.4	19.4	19.9	—
»	16	25.2	24.7	24.8	25.3	24.7	24.6	23.8	22.4	21.5	21.5	20.7	19.9	20.5	—
»	23	—	—	—	—	26.3	26.0	25.8	23.9	20.8	18.9	18.9	18.8	19.1	—
»	24	—	27.7	26.7	27.6	26.9	26.8	25.7	22.5	19.1	18.1	17.2	17.5	—	—
»	26	—	27.7	27.3	27.5	27.3	26.8	25.4	21.7	17.7	16.5	16.1	15.8	—	—
Agosto	14	—	—	28.1	28.4	28.6	27.7	26.2	22.5	17.6	16.9	16.5	16.5	—	—
»	15	—	28.2	28.6	28.9	29.0	28.4	26.3	21.4	18.7	17.9	18.8	19.3	—	—
Settembre	8	—	—	—	28.2	27.8	27.2	25.6	21.7	17.9	15.9	15.3	15.8	17.5	—
Ottobre	30	—	—	—	—	—	—	24.0	21.8	18.7	18.5	19.5	21.1	21.5	—
Novembre	15	—	—	—	—	—	26.5	24.6	23.5	21.0	19.5	19.1	21.0	20.0	—
Dicembre	15	—	25.7	25.9	25.6	25.5	25.3	24.4	22.9	19.8	19.6	20.5	21.7	22.3	—

TABELLA VII.

Distanze solari del p. n. di Babinet.

Altezze solari vere.

1913		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	—0,5	—1,5	—2,5	—3,5	—4,5	—5,5
Febbraio	5	20.8	21.5	21.9	23.1	24.4	25.5	26.6	26.4	27.5	24.6	20.8	18.9	18.5	17.5	—
Marzo	6	19.9	20.5	21.7	23.2	23.7	24.2	23.8	26.0	25.0	24.0	22.4	20.9	19.7	—	—
»	12	20.8	21.3	22.2	22.9	24.8	25.4	26.7	28.5	29.8	30.3	28.3	24.5	21.5	20.5	—
»	20	23.4	23.7	24.4	25.1	25.7	27.0	28.5	28.6	29.0	28.1	25.5	22.3	21.7	22.2	—
Giugno	6	20.2	21.5	22.2	21.9	22.9	23.7	24.7	26.0	26.2	25.0	22.7	21.8	20.5	19.3	—
»	12	18.3	19.2	20.0	20.5	21.7	22.5	23.1	24.0	24.3	23.2	22.3	20.0	17.3	16.0	—
»	13	19.2	20.8	21.5	22.3	23.2	23.9	24.6	25.5	25.7	25.8	22.7	20.9	20.8	20.4	—
Luglio	5	—	20.9	22.0	23.0	24.1	25.3	26.8	26.7	27.1	24.7	23.5	21.9	20.0	18.5	—
»	25	22.0	22.3	23.3	24.5	25.3	26.0	26.6	27.3	27.7	26.8	25.7	24.4	24.8	23.4	21.9
»	26	—	22.5	23.5	23.1	24.0	25.0	26.0	26.3	27.1	26.8	25.6	26.5	28.8	27.7	27.5
»	27	21.9	22.5	23.3	23.7	23.9	24.2	25.5	26.8	27.3	27.2	26.4	28.6	29.3	28.8	—
»	28	—	23.1	23.4	23.1	24.2	25.5	26.4	26.8	27.2	26.3	25.3	25.2	27.8	28.5	26.7
Agosto	5	—	20.7	22.0	22.5	23.7	25.5	25.9	26.0	26.5	26.7	26.4	27.9	31.7	30.7	30.5
»	6	20.2	20.4	21.2	20.3	20.1	22.0	22.9	23.7	24.2	24.1	24.1	25.1	27.5	28.9	28.3
»	7	21.5	21.9	22.8	22.2	24.0	24.8	25.9	26.2	26.0	24.4	24.7	27.1	29.2	29.2	27.3
»	18	—	—	23.7	25.0	24.7	25.8	25.9	27.2	28.1	27.2	26.1	27.2	28.7	27.7	26.6
Settembre	6	—	—	21.2	22.6	23.1	24.3	25.6	25.5	25.7	25.5	25.1	23.2	26.2	28.3	26.4
Ottobre	25	—	21.3	22.9	24.2	24.5	25.0	25.7	26.0	26.4	26.9	26.3	25.6	25.9	25.7	26.5
Dicembre	15	—	20.7	20.8	21.4	21.7	21.7	22.6	23.0	23.7	24.7	24.1	24.5	26.4	25.0	24.0
»	16	21.9	21.6	22.5	22.4	23.1	22.7	23.2	23.7	24.0	23.7	23.6	25.4	27.3	26.1	25.6

TABELLA VIII.

Distanze antisolari del p. n. di Arago.

Altezze vere solari.

1913		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	—0,5	—1,5	—2,5	—3,5	—4,5	—5,5
Febbraio	5	25.4	24.8	24.7	25.2	25.1	25.7	24.8	24.7	23.2	20.6	18.1	17.6	18.5	20.3	—
Marzo	6	25.7	25.7	25.6	25.9	25.7	25.7	24.7	24.5	22.7	20.0	17.8	17.7	18.5	—	—
»	12	24.7	25.3	25.1	24.8	25.5	25.4	25.5	26.0	24.1	21.9	19.7	19.2	19.5	21.5	—
»	20	25.6	25.4	25.2	25.7	26.6	25.8	26.1	25.3	23.8	21.2	20.1	20.0	20.6	22.0	—
»	6	25.4	25.8	25.8	26.1	26.3	25.9	26.6	25.2	23.3	21.0	19.3	19.4	19.1	21.2	—
»	12	25.4	25.7	26.4	26.2	26.1	26.3	26.2	25.5	23.7	21.3	19.1	20.5	21.3	22.5	—
»	13	25.9	26.3	26.1	26.8	26.7	26.9	26.6	26.2	24.7	22.1	18.9	18.5	19.9	21.1	—
Luglio	5	—	25.1	24.9	25.6	25.5	25.8	25.9	25.2	24.0	22.2	19.7	19.2	19.0	20.4	—
»	25	25.4	25.2	25.1	25.4	25.4	25.4	25.5	25.4	23.9	21.6	20.1	19.7	21.0	22.1	23.8
»	26	—	24.7	24.2	24.3	24.4	24.8	24.3	23.8	22.5	21.4	22.0	23.3	23.8	24.1	24.9
»	27	25.3	24.8	25.0	25.4	25.5	25.0	24.2	24.2	23.4	22.2	21.7	22.4	22.5	23.8	—
»	28	—	26.0	25.7	25.6	25.8	25.2	24.9	24.4	22.3	20.8	21.8	22.7	23.5	23.8	26.0
Agosto	5	—	24.8	24.6	25.0	24.9	25.0	24.7	23.6	21.4	21.3	22.0	22.3	22.9	23.6	24.4
»	6	24.2	24.3	23.7	24.3	24.2	23.6	23.3	22.2	21.3	20.4	21.4	23.2	23.3	22.3	25.0
»	7	25.2	24.2	24.2	25.1	24.4	24.7	24.0	22.7	21.6	21.0	20.3	22.5	22.2	21.6	25.0
»	18	—	—	24.7	24.8	25.5	25.8	26.0	25.6	22.9	21.9	21.2	22.2	21.3	22.7	—
Settembre	6	—	—	25.2	24.8	25.4	25.4	24.7	23.5	22.8	21.3	21.2	20.7	21.5	21.2	22.5
Ottobre	25	—	24.0	24.5	24.6	24.4	24.0	24.2	24.4	23.1	22.2	21.2	21.9	22.2	22.5	24.1
Dicembre	13	—	23.3	23.9	23.8	24.3	23.6	23.2	23.0	22.5	20.9	21.5	21.2	22.4	22.5	—
»	16	24.5	24.3	24.8	24.3	24.2	24.3	24.1	24.1	23.0	22.3	23.2	23.5	24.4	24.8	26.5

TABELLA IX.

Distanze solari del p. n. di Babinet.

Altezze vere solari.

1914		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	—0,5	—1,5	—2,5	—3,5	—4,5	—5,5
Gennaio	26	23.5	23.3	24.4	25.1	25.2	25.3	26.5	28.0	28.5	29.2	26.2	25.5	23.7	22.7	—
Febbraio	3	21.0	21.5	21.8	22.0	22.5	23.2	24.2	25.7	25.8	25.4	24.8	25.0	23.7	23.9	—
»	4	22.0	23.1	23.9	24.2	24.0	24.2	25.3	25.8	25.2	23.8	24.1	21.6	21.4	21.3	—
»	20	—	—	—	23.9	23.9	24.2	24.5	23.9	24.2	23.9	24.4	23.3	20.5	19.4	18.9
Aprile	1	16.6	17.5	18.5	18.3	18.6	19.4	20.1	20.1	21.2	21.6	21.5	21.6	21.3	21.3	21.2
Giugno	10	17.9	18.1	17.5	16.8	17.2	18.2	18.2	18.1	18.9	19.5	18.6	18.0	18.1	18.5	18.7
Luglio	6	15.3	16.0	16.7	17.0	17.0	17.3	17.7	18.0	18.1	18.3	18.8	19.6	19.5	19.6	19.2
»	8	16.2	17.0	17.2	18.4	18.4	18.2	18.5	19.3	19.2	19.8	19.8	19.7	20.5	20.5	—
»	25	—	—	—	—	18.5	17.7	18.2	18.5	19.1	19.0	19.2	19.4	19.6	19.5	20.0
»	27	15.5	16.4	17.3	16.7	16.7	15.9	16.6	17.7	18.3	19.0	19.2	19.6	19.0	19.6	20.4
»	30	14.7	15.7	16.6	16.9	16.5	17.4	18.0	18.4	19.9	19.7	19.9	19.5	20.4	19.9	20.0
»	31	—	17.4	16.5	17.7	18.0	18.7	18.6	18.9	19.6	20.3	20.6	20.4	20.2	20.8	20.7
Agosto	5	—	—	—	16.9	18.6	18.8	18.3	19.0	19.6	20.3	20.4	21.0	20.7	20.8	—
Dicembre	1	15.5	15.7	16.2	16.5	16.3	17.3	18.1	18.3	18.7	19.2	19.3	20.6	20.8	20.9	21.3
»	7	—	—	17.3	17.5	18.2	19.2	19.1	18.8	18.7	19.2	19.6	19.7	19.3	19.3	20.0

TABELLA X.

Distanze antisolari del p. n. di Arago.

Altezze solari vere.

1914		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	—0,5	—1,5	—2,5	- 3,5	—4,5	5,5
Gennaio	26	24.9	24.8	25.3	24.2	24.0	24.7	24.0	23.5	22.6	23.2	21.7	22.1	22.8	25.7	
Febbraio	3	23.8	23.9	23.5	23.6	24.2	23.7	24.1	23.3	22.4	22.0	22.1	22.8	23.3	26.2	--
»	4	24.1	23.7	25.3	24.2	24.2	23.5	23.7	23.3	22.2	21.3	21.5	20.8	22.8	25.5	—
»	20	—	—	—	22.3	21.7	21.9	22.5	22.3	19.8	19.3	19.4	18.6	19.7	19.6	20.5
Aprile	1	23.3	23.2	23.5	24.0	23.8	23.8	23.2	23.5	22.9	22.3	21.3	21.5	21.8	21.2	22.7
Giugno	10	20.5	21.2	21.5	21.1	21.3	21.5	21.1	21.2	21.1	20.7	21.3	21.1	21.8	22.7	24.8
Luglio	6	19.7	21.0	22.2	22.2	22.4	22.0	21.8	21.2	21.0	21.2	21.3	21.6	22.8	22.9	25.3
»	8	21.8	21.5	21.9	22.7	22.3	22.3	21.9	21.5	21.0	20.7	20.7	21.0	22.2	22.7	25.2
»	25	—	—	—	—	19.9	21.1	21.0	20.5	20.5	20.3	20.4	21.5	21.6	21.7	24.8
»	27	18.7	19.9	20.3	20.6	20.3	20.4	20.4	20.1	20.3	20.0	20.1	20.7	20.9	22.2	24.0
»	30	20.8	21.1	21.7	21.4	21.6	21.1	20.3	20.7	20.7	20.2	20.1	21.1	21.8	23.2	26.3
»	31	—	20.4	20.3	20.6	20.5	20.7	20.4	20.5	20.7	20.9	20.8	21.5	23.3	23.7	25.8
Agosto	5	—	—	—	21.7	21.8	21.4	21.0	21.1	20.8	20.5	20.4	20.8	22.3	22.8	25.5
Dicembre	1	23.3	21.4	21.3	21.1	21.7	20.5	21.5	21.5	20.4	20.3	20.8	21.9	22.0	23.3	25.6
»	7	—	—	19.2	20.2	20.6	19.5	19.5	20.0	20.6	20.4	20.8	21.3	22.5	22.8	23.9

TABELLA XI.

Distanze solari del p. n. di Babinet.

Altezze solari vere.

1915		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	— 0,5	- 1,5	— 2,5	3,5	— 4,5	5,5
Gennaio	16	—	—	—	15.5	16.6	17.5	17.4	17.9	18.4	19.3	19.3	19.0	19.1	18.9	19.2
Maggio	28	16.0	16.9	16.1	16.7	17.5	18.0	18.2	18.3	18.7	18.5	18.6	18.4	18.3	18.1	18.0
Luglio	7	—	—	14.9	15.6	16.5	17.2	18.0	18.7	18.7	18.8	19.2	19.1	19.2	19.5	19.5
»	11	15.4	15.5	15.8	16.2	16.5	16.7	17.3	17.8	18.4	18.8	18.9	18.7	18.6	18.8	19.2
»	12	—	—	15.7	16.3	16.2	16.9	17.4	17.7	18.5	19.1	19.0	18.8	18.9	19.0	19.7
»	13	—	14.8	15.4	15.9	16.0	16.3	16.4	16.9	18,0	18.8	19.3	18.9	18.0	17.5	—
»	14	14.8	15.0	15.3	15.9	16.2	16.9	17.4	17.6	18.0	18.5	18.7	18.7	18.2	18.4	—
»	15	13.8	14.7	15.3	15.8	16.5	17.1	17.0	17.2	17.8	18.5	18.8	18.7	18.3	18.6	18.9
»	16	15.4	15.6	16.2	16.2	16.7	17.2	17.7	18.1	18.5	19.0	18.8	18.8	18.4	18.7	19.5
»	18	15.2	16.0	16.4	17.2	17.0	17.3	17.5	18.0	18.7	19.3	18.9	18.3	17.9	18.5	19.0
»	21	14.8	15.3	15.1	15.0	15.4	16.3	17.6	17.9	18.4	18.7	18.3	18.3	17.8	17.7	—
»	24	14.8	15.2	15.6	15.7	16.8	17.3	17.3	18.8	19.1	19.2	19.5	18.9	19.0	19.7	19.8
»	25	15.2	15.7	16.0	16.8	16.6	17.3	17.4	18.0	18.6	18.7	18.9	18.9	18.4	18.5	19.2
	27	16.2	16.7	16.3	16.7	16.4	17.3	17.5	18.2	18.7	19.2	18.8	19.6	19.2	19.3	20.0
»	28	15.6	16.0	15.9	16.3	16.9	17.4	17.8	18.0	18.4	18.8	18.7	18.5	18.2	18.4	18.9
»	29	13.5	15.1	15.5	16.1	16.3	16.8	17.9	17.9	17.8	18.4	17.9	18.2	17.5	17.3	18.4
»	30	—	15.3	15.8	15.9	15.3	16.3	16.5	17.8	17.9	18.4	17.9	17.8	17.5	17.1	18.7
Agosto	2	15.2	15.6	15.5	15.9	16.1	16.7	17.2	17.8	18.3	18.7	18.9	19.0	18.7	19.1	19.3
»	3	—	15.4	15.6	16.2	16.6	16.9	17.3	17.8	18.5	18.7	18.6	18.5	18.3	18.5	19.6
»	9	15.3	15.8	16.1	16.7	16.3	17.0	17.4	18.3	18.7	18.9	18.7	18.6	18.4	18.7	19.9
»	10	15.2	14.7	15.3	15.9	16.8	16.8	17.3	18.0	18.7	18.6	18.3	18.7	18.3	18.4	19.7
»	11	15.8	14.7	15.2	16.0	16.7	16.9	17.4	17.7	18.1	18.5	18.9	19.0	18.5	18.9	20.3
»	12	15.9	16.8	16.4	16.7	17.2	17.2	17.4	18.1	18.6	18.6	18.9	19.0	18.5	18.6	19.3
»	14	15.7	16.4	16.5	16.9	17.0	17.5	18.0	18.9	19.1	19.3	19.2	19.0	18.6	19.3	19.9
»	15	15.8	16.8	16.4	17.2	17.1	18.0	18.6	19.1	19.6	20.3	19.9	18.9	18.8	19.8	21.0
»	16	—	16.7	16.5	16.7	16.5	17.7	17.9	19.0	18.7	18.3	18.8	19.8	19.0	18.8	20.8
Dicembre	5	17.5	17.5	18.1	17.8	18.3	18.0	18.4	18.6	18.9	19.3	18.7	19.3	19.4	20.5	—

TABELLA XII.

Distanze antisolari del p. n. di Arago.

Altezze solari vere.

1915		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	—0,5	—1,5	—2,5	—3,5	—4,5	—5,5
Gennaio	16	—	—	—	18.7	20.0	19.4	19.4	18.8	18.6	18.7	18.8	19.3	20.9	21.3	22.7
Maggio	28	21.7	21.4	20.7	20 8	21.2	21.3	20.7	20.3	19.6	18.8	18.4	19.7	21.3	23.2	25.0
Luglio	7	—	—	22.2	22.2	21.8	21.4	21.7	20.8	20.0	19.9	20.1	20.2	20.8	22.6	23.2
»	11	20.7	21.2	21.6	21.4	21.1	21.0	20.8	20.6	20.2	19.8	19.9	20.4	21.3	22.9	25.8
»	12	—	—	21.4	21.0	21.2	21.3	20.7	20.8	20.3	19.9	19.8	20.1	21.2	22.6	24.3
»	13	—	21.6	21.8	21.3	21.2	21.1	20.6	20.5	19.8	19.6	19.4	20.2	21.2	22.7	25.5
»	14	20.6	20.9	21.0	21.2	20.7	20.8	20.9	20.1	19.9	20.0	20.1	20.3	21.0	22.8	25.2
»	15	20.3	20.7	20.8	20.6	20.3	20.7	20.4	19.7	19.7	20.3	20.5	20.6	21.6	23.4	25.9
»	16	20.0	20.5	20.7	20.8	20.9	20.7	20.6	20.0	20.0	19.8	20.0	20.3	21.5	23.6	25.9
»	18	19.2	19.9	20.5	21.1	20.7	20.7	20.8	20.2	20.3	20.3	20.4	20.4	21.2	23.5	26.1
»	21	18.7	19.1	19.7	20.0	19.9	20.2	20.3	19.9	19.8	18.9	18.8	19.6	20.8	22.8	25.9
»	24	20.9	21.4	21.7	21.3	21.2	21.2	20.9	20.6	20.2	19.8	19.9	20.5	21.7	24.9	27.5
»	25	20.0	20.8	21.2	21.1	20.7	20.4	20.5	20.6	20.3	19.9	19.7	20.1	21.4	23.7	26.0
»	27	19.3	20.2	20.3	20.2	20.4	20.7	20.2	19.7	19.7	19.8	19.6	20.1	21.5	23.6	26.9
»	28	19.8	19.9	19.8	20.4	20.8	20.5	20.2	19.7	19.6	19.2	19.4	20.0	21.3	23.2	26.1
»	29	19.3	19.8	20.1	20.0	20.2	20.3	19.8	19.2	19.3	19.2	18.8	19.7	20.9	23.0	25.8
»	30	—	19.1	19.7	19.9	19.7	19.9	19.7	19.3	19.0	19.4	19.3	19.9	21.5	23.7	26.6
Agosto	2	19.7	19.9	20.2	20.5	20.9	20.9	20.7	20.0	20.0	19.5	19.3	19.9	21.4	23.5	26.5
»	3	—	20.0	20.8	20.9	20.4	20.3	20.2	19.8	19.7	19.6	19.2	20.0	21.2	23.2	26.3
»	9	20.5	20.7	20.7	21.0	20.5	20.4	20.6	20.1	19.9	19.7	20.0	20.3	21.3	23.6	26.4
»	10	20.7	21.2	20.7	20.6	20.7	20.8	20.7	20.4	20.3	20.4	20.2	20.4	21.1	23.5	26.5
»	11	21.2	20.7	20.9	21.3	21.5	21.1	20.8	20.7	20.3	20.2	20.4	20.4	21.7	23.2	26.5
»	12	21.2	21.1	21.5	21.4	21.2	21.6	21.6	21.0	20.7	20.1	20.4	20.3	21.8	22.9	25.0
»	14	20.8	21.3	21.5	21.7	21.0	21.4	21.2	20.9	20.5	20.1	20.2	20.8	21.7	23.4	26.7
»	15	21.2	21.5	21.8	21.8	21.4	21.8	21.7	20.9	21.2	20.5	20.1	20.7	21.3	23.7	26.6
»	16	—	20.4	21.5	21.7	21.2	20.3	20.7	20.4	19.9	19.8	20.4	20.5	21.7	23.8	26.7
Dicembre	5	20.5	20.4	20.8	21.4	20.9	20.5	20.8	21.3	20.7	20.8	20.5	20.9	22.1	24.1	—

Tabella XIII.

Distanze solari del p. n. di Babinet.

Altezze solari vere.

1916		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	− 0,5	− 1,5	− 2,5	− 3,5	− 4,5	− 5,5	− 6,5
Gennaio	8	16.0	16.7	17.0	17.7	18.6	18.7	18.5	18.1	18.2	18.7	19.3	18.6	19.0	19.7	19.3	—
»	13	16.1	16.4	16.3	16.5	15.8	16.7	17.3	17.7	17.6	17.4	17.9	17.4	17.7	17.3	18.5	—
»	17	—	15.7	16.3	16.2	16.6	17.2	17.3	17.8	18.3	19.0	19.0	18.7	18.0	18.5	19.2	20.0
»	22	—	—	16.0	16.3	15.9	16.4	16.6	16.9	17.0	17.4	18.0	17.5	16.9	17.5	18.7	19.3
»	23	14.5	14.3	15.0	15.5	16.7	16.8	16.9	17.6	18.4	18.8	18.4	18.1	18.2	18.8	20.0	—
»	24	—	15.5	15.6	16.2	16.1	16.3	16.5	17.2	17.6	17.7	17.9	17.5	17.3	17.6	18.7	—
»	25	—	13.8	14.1	14.9	15.7	16.1	16.5	17.2	17.3	17.5	17.4	17.5	17.8	17.9	18.7	—
Marzo	18	17.4	18.2	18.5	17.5	17.3	17.3	17.5	17.4	17.5	18.3	17.7	17.9	18.9	19.4	20.2	—
»	19	17.2	16.5	16.4	17.1	16.9	17.1	16.2	15.8	15.5	16.3	17.1	18.0	18.9	19.5	20.3	—
Maggio	3	15.1	15.7	15.7	16.2	17.3	17.3	17.2	17.7	17.0	17.2	—	—	—	—	—	—
Giugno	6	13.8	14.4	14.9	14.3	15.3	16.0	15.7	17.6	18.2	18.4	18.6	18.3	18.2	18.3	20.0	—
»	20	15.2	15.0	14.6	15.5	16.0	16.0	16.1	16.7	18.3	18.4	18.3	18.3	17.8	17.2	18.4	—
»	28	15.0	14.9	15.2	15.5	15.8	15.9	16.3	17.3	18.3	18.4	18.7	17.9	18.5	18.1	18.5	—
Luglio	4	15.5	15.8	16.3	16.4	16.5	17.6	18.6	18.5	18.6	18.8	19.1	18.4	18.7	18.5	19.5	—
»	7	—	15.9	16.6	16.7	16.4	16.9	17.5	18.3	18.2	18.5	18.4	17.8	17.5	17.7	18.3	—
»	8	15.4	15.8	15.3	15.8	16.4	16.8	16.7	17.8	18.8	19.2	18.9	19.3	18.7	18.2	19.4	20.7
»	9	15.7	16.2	16.3	16.7	17.2	17.7	17.8	18.5	19.2	19.3	18.9	18.4	18.3	18.2	18.7	20.5
»	13	—	17.3	16.3	16.3	16.7	17.5	17.8	18.2	18.3	18.9	19.1	18.7	18.0	17.7	18.3	19.5
»	14	—	16.4	16.8	17.2	17.7	18.0	18.2	18.7	18.8	19.4	18.9	18.3	18.4	18.5	19.2	20.5
Agosto	27	15.2	15.9	16.3	16.3	16.7	17.3	17.7	18.4	18.4	19.0	19.3	19.6	—	—	—	—
Ottobre	13	15.0	14.8	14.8	15.6	16.3	17.3	17.7	18.4	18.8	19.2	19.1	19.2	18.5	19.3	22.0	—

Tabella XIV.

Distanze antisolari del p. n. di Arago.

Altezze solari vere.

1916		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	− 0,5	− 1,5	− 2,5	3,5	− 4,5	− 5,5	6,5
Gennaio	8	17.9	19.3	20.1	19.6	18.8	19.9	19.7	19.7	19.1	18.6	19.1	19.2	20.3	23.3	26.5	—
»	13	17.6	18.3	18.5	19.3	19.6	19.7	19.7	19.8	19.5	19.7	19.2	19.7	21.4	22.7	25.0	—
»	17		19.5	19.7	19.3	19.4	19.7	19.4	19.6	19.5	19.2	19.5	20.3	22.0	23.9	26.9	29.2
»	22		—	18.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.2	19.4	19.3	19.3	20.2	21.1	22.7	25.4	28.3
	23	19.6	20.5	20.7	20.4	20.7	20.0	19.8	19.9	20.1	20.0	19.7	19.9	20.5	22.5	25.3	28.5
	24	—	18.5	19.5	20.4	20.4	20.5	20.5	19.7	19.1	18.7	19.1	19.4	20.5	22.7	25.4	—
	25	—	18.6	19.5	20.0	19.7	19.3	18.8	19.5	19.4	19.3	18.9	18.7	21.2	25.3	26.5	—
Marzo	18	18.8	20.0	20.3	19.8	20.4	21.3	21.0	21.1	22.1	22.5	21.8	20.9	21.8	22.7	24.4	—
»	19	18.4	19.7	20.8	21.6	21.1	21.2	21.6	21.0	21.2	20.8	20.3	20.4	21.1	22.8	24.5	—
Maggio	3	20.7	20.6	20.8	21.0	20.7	20.7	20.4	20.3	19.9	20.1	—	—	—	—	—	—
Giugno	6	19.6	20.1	20.4	21.0	21.2	20.9	20.6	20.6	19.8	19.7	19.7	19.8	21.3	23.0	26.5	—
»	20	19.7	20.6	21.2	21.4	21.3	20.8	20.7	20.6	20.0	19.7	19.7	20.4	21.4	22.5	25.7	—
»	28	20.1	20.7	21.2	21.1	21.1	20.7	20.9	20.6	20.0	20.2	19.8	20.3	21.5	23.8	27.0	—
Luglio	4	20.2	21.3	21.1	21.7	21.1	21.2	21.2	21.3	20.1	19.7	19.4	19.2	20.7	23.1	25.1	—
»	7	—	19.3	19.8	19.8	20.3	20.4	20.4	20.1	19.5	18.9	18.7	19.1	20.4	22.4	25.5	—
	8	21.3	21.4	21.4	21.6	21.6	21.1	20.7	20.2	19.8	19.6	19.4	19.7	21.0	22.9	26.5	30.2
	9	21.1	22.0	21.7	21.7	21.8	21.8	21.7	20.4	20.5	20.9	21.2	20.5	21.8	23.2	25.7	28.5
»	13	—	21.1	22.2	21.8	20.8	20.9	20.7	19.7	19.7	19.8	19.5	19.5	20.3	22.3	24.4	27.5
	14	—	20.5	21.5	21.8	21.2	20.9	20.7	20.8	20.4	19.6	19.3	19.4	21.3	22.7	24.8	28.0
Agosto	27	22.5	22.4	23.2	23.2	22.6	22.3	22.5	22.0	22.5	21.7	21.6	21.8	23.2	—	—	—
Ottobre	13	20.4	20.5	20.5	20.9	20.8	20.7	20.7	21.1	21.0	20.3	20.4	20.9	21.8	24.4	26.8	—

TABELLA XV.

Distanze solari del p. n. di Babinet.

Altezze solari vere.

1917		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	— 0,5	— 1,5	— 2,5	— 3,5	— 4,5	— 5,5	— 6,5
Luglio	16	—	14.4	14.7	15.3	15.6	16.4	17.4	18.1	18.1	18.7	18.3	18.4	17.1	17.1	19.7	—
»	17	13.8	14.7	15.0	14.9	15.4	16.1	16.2	16.7	17.9	18.0	18.2	17.3	17.1	17.3	18.6	—
Agosto	1	—	15.0	15.3	15.6	15.9	16.7	16.9	17.2	18.5	18.4	18.2	18.7	18.2	18.9	20.7	—
»	4	—	14.3	14.9	15.9	16.4	17.0	18.5	18.3	18.5	18.7	18.6	18.0	17.8	18.1	20.7	23.7
»	11	14.1	14.5	14.8	15.2	15.4	16.4	16.7	16.6	17.3	17.4	17.0	16.5	17.2	17.5	19.1	21.4
»	12	—	—	—	15.8	16.0	16.7	16.8	17.6	18.1	18.2	17.4	16.7	17.1	16.4	18.8	21.8
»	13	—	14.8	15.0	15.4	15.8	16.5	16.3	17.2	17.7	17.8	17.4	16.8	16.4	16.9	19.7	21.7
»	14	15.2	15.3	15.1	15.6	15.6	15.7	16.7	17.0	16.7	17.3	17.6	17.7	16.8	17.6	20.0	22.7
»	15	14.4	15.1	15.2	16.1	16.7	16.6	17.1	17.4	17.7	17.4	17.4	16.7	17.2	18.7	20.2	20.8
»	17	14.3	14.8	14.7	15.7	16.4	16.3	16.7	17.4	17.7	18.1	17.8	16.7	17.3	17.7	18.6	21.5
Ottobre	26	16.7	17.3	16.8	16.3	15.8	15.9	16.6	16.4	17.1	17.9	17.8	17.1	16.7	16.7	18.6	21.5
»	27	—	16.1	16.4	16.3	16.5	17.5	17.4	17.5	18.3	17.9	17.4	16.9	16.1	15.9	16.5	18.1

TABELLA XVI.

Distanze antisolari del p. n. di Arago.

Altezze solari vere.

1917		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	— 0,5	— 1,5	— 2,5	— 3,5	— 4,5	— 5,5	— 6,5
Luglio	16	—	21.6	22.2	22.2	21.4	21.7	21.9	21.2	20.3	19.8	19.9	20.2	21.1	23.5	25.3	—
»	17	20.9	20.7	21.0	22.0	21.7	21.1	20.5	20.1	19.8	19.3	19.7	19.7	20.3	22.9	25.1	—
Agosto	1	—	19.4	19.9	20.7	21.6	21.8	21.0	20.4	19.8	19.3	19.4	19.8	20.8	22.7	24.3	—
»	4	—	19.2	19.4	19.9	20.1	19.9	20.1	19.9	19.7	19.4	19.4	19.5	20.4	22.6	25.4	28.5
»	11	19.0	19.3	19.7	19.8	20.0	19.7	19.9	19.8	19.4	19.3	19.4	19.3	20.2	22.3	24 3	27.3
»	12	—	—	—	19.9	20.2	20.5	20.3	20.4	20.2	19.7	19.9	19.9	20.7	22.3	24.5	27.3
»	13	—	19.7	20.2	20.4	20.8	21.0	20.4	19.9	19.7	19.4	19.0	19.3	20.2	22.2	24.4	28.5
»	14	20.6	21.3	21.9	21.7	21.9	21.7	21.7	20.8	20.1	20.3	20.1	19.8	20.2	22.0	26.3	28.5
»	15	18.5	19.1	19.3	19.8	19.7	20.5	20.4	19.8	19.9	19.5	19.1	19.4	19.9	22.0	24.3	27.6
»	17	16.3	16.8	18.6	19.3	19.3	19.8	19.6	20.4	21.2	20.4	20.2	19.4	21.3	22.7	24.5	27.7
Ottobre	26	17.2	17.8	18.5	18.7	18.8	19.2	19.3	19.8	19.5	19.3	19.7	20.5	21.6	23.7	26.0	28.5
»	27	—	17.9	18.6	18.9	19.7	19.8	19.9	19.9	19.7	19.1	19.0	19.4	20.7	22.3	24.8	27.9

Tabella XVII.

Distanze solari del p. n. di Babinet.

Altezze solari vere.

1918		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	—0,5	—1,5	—2,5	—3,5	—4,5	—5,5	—6,5
Gennaio	17	—	—	14.8	15.7	15.8	16.4	17.1	17.5	17.7	17.8	18.1	17.0	16.5	16.9	20.0	—
Febbraio	8	14.4	14.5	14.6	15.4	16.3	16.2	16.4	16.7	16.8	17.2	17.9	17.6	17.5	17.8	19.3	—
»	25	15.8	16.6	17.4	17.7	17.8	17.7	18.1	18.3	17.6	17.7	18.5	18.1	18.0	17.9	19.4	—
Luglio	18	14.9	15.5	15.5	15.8	16.7	17.3	17 6	18.3	19.1	19.1	19.0	18.3	18.2	18.1	20.7	—
»	19	14.5	15.5	16.2	16.1	16.0	17.2	17.3	17.3	17.8	17.7	17.4	17.5	18.5	19.1	21.6	—
»	20	—	—	—	15.7	16.5	17.4	17.4	17.7	18.5	18.7	19.1	18.1	18.2	17.9	20.6	—
»	21	16.6	17.1	16.8	17.3	16.9	17.8	17.7	18.3	18.1	18.5	18.3	18.2	18.1	19.3	21.7	—
»	22	14.7	14.5	15.1	14.7	15.3	16.2	16.1	16.5	17.2	17.3	17.2	15.8	16.5	17.8	18.7	—
»	23	14.8	15.3	15.2	15.7	15.8	16.8	16.9	17.2	17.6	17.5	17.7	18.0	18.1	19.2	20.3	—
»	24	—	—	15.9	16.4	16.2	16.8	16.9	17.7	18.3	18.7	18.7	18.5	18.7	19.4	20.7	22.4
Dicembre	16	15.7	14.9	15.6	16.3	16.6	16.5	16.8	17.6	18.3	17.9	18.0	17.9	17.8	18.4	20.5	22.1

Tabella XVIII.

Distanze antisolari del p. n. di Arago.

Altezze solari vere.

1918		8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	—0,5	—1,5	—2,5	—3,5	—4,5	—5,5	—6,5
Gennaio	17	—	—	22.4	22.7	22.7	22.7	22.4	21.7	20.8	20.7	20.8	20.9	21.5	23.7	26.5	—
Febbraio	8	19.9	20.4	20.7	21.6	21.8	21.5	21.6	21.4	20.7	20.4	20.3	20.7	21.9	24.0	26.1	—
»	25	17.6	18.3	17.9	18.1	19.2	19.3	19.7	19.5	19.4	19.3	19.7	20.2	21.5	23.8	25.8	—
Luglio	18	20.1	21.5	21.8	21.8	21.7	21.8	20.9	21.0	20.5	20.3	20.4	21.7	23.7	24.7	26.6	—
»	19	22.1	22.3	22.1	21.7	21.7	21.7	21.4	20.5	20.7	20.7	20.8	19.9	20.5	23.2	25.7	—
»	20	—	—	—	21.6	21.7	21.4	20.8	21.1	20.8	20.9	20.5	21.1	22.5	24.4	26.5	—
»	21	20.1	21.2	22.0	21.7	21.9	21.3	20.7	20.6	19.8	19.3	19.0	19.8	20.7	22.8	25.1	—
»	22	18.9	19.8	20.3	20.3	20.1	19.8	19.7	19.4	18.4	18.7	19.1	20.5	21.2	24.3	26 0	—
»	23	19.8	20.4	20.5	20.7	20.7	20.8	20.5	20.4	19.5	19.8	19.9	20.3	21.6	23.2	25.5	—
»	24	—	—	19.9	20.6	20.4	19.8	19.9	19.8	20.0	20.1	20.3	20.6	21.2	22.6	25.4	28.1
Dicembre	16	19,6	19,8	20,8	20,3	20,2	19.7	19,9	19,7	19.5	19,2	19,5	20,1	21,0	22,9	25,8	28,0

Le osservazioni riportate in queste tabelle furono tutte eseguite nelle ore intorno al tramonto, in giorni perfettamente sereni, con cielo azzurro; eccezionalmente con qualche nube (nebulosità sempre inferiore a $^1/_{20}$) lontana dal verticale del sole, o con cielo alquanto sbiancato. Del resto, dalla irregolarità delle curve dei diagrammi, costruiti nel modo anzidetto, appariva subito quali giorni si potessero considerare come perturbati accidentalmente. Questi giorni, peraltro rarissimi, sono stati esclusi dalle tabelle suddette; nè vi sono riportati, per ragioni che dirò di poi, i valori che ottenni, in taluni giorni, nelle ore intorno al sorgere del sole (§ 8).

Inoltre è da notare che i giorni di osservazione, così ridotti, non sono molti in un anno e sono in numero diverso da un anno all'altro. Per ragioni indipendenti dalla mia volontà ho dovuto tralasciare, di tanto in tanto, l'osservazione in giorni favorevoli, quattro o cinque in media ogni anno, e più nel 1918, quando fui assente da Catania nei mesi di agosto e settembre, nei quali occorsero molti giorni adatti per le osservazioni. Tuttavia il numero di giorni perfettamente sereni, utilizzati in ogni anno di osservazione, è, di solito, molto maggiore in Catania che in altri luoghi più settentrionali, ed è sufficiente per riconoscere l'andamento del fenomeno.

Esaminando i valori riportati in queste tabelle, si scorge che nel 2° semestre del 1912 si manifestò una considerevole perturbazione polarimetrica, la quale, con andamento variabile, ebbe una lunga durata, cioè per tutto il 1913, e per buona parte del 1914.

Ho creduto opportuno perciò di considerare dapprima i valori medii degli anni non perturbati, e poi, a parte, quelli del periodo anomalo.

Le medie annue per gli anni normali sono riportate nelle seguenti tabelle XIX e XX.

Tabella XIX.

Distanze solari del p. n. di Babinet.

Altezze solari vere.

Anni	8°,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	−0,5	−1,5	−2,5	−3,5	−4,5	−5,5	−6,5
1910	—	—	—	15.1	15.8	16.0	16.7	17.1	17.5	17.8	18.0	17.6	—	—	—	—
1911	—	—	—	15.4	15.7	16.0	16.4	16.8	17.4	17.6	17.6	17.5	17.3	17.2	—	—
1912 (1° s.)	—	—	15.2	15.4	15.8	16.2	16.5	17.1	17.5	17.8	17.3	16.9	16.8	16.8	—	—
1914 (2° s.)	15.8	16.6	16.9	16.9	17.5	17.9	18.1	18.5	19.0	19.4	19.5	19.8	19.8	19.9	20.0	—
1915	15.4	15.8	15.9	16.3	16.6	17.1	17.5	18.1	18.5	18.9	18.8	18.8	18.5	18.7	19.5	—
1916	15.5	15.8	15.9	16.2	16.6	17.0	17.2	17.7	18.3	18.4	18.5	18.3	18.2	18.3	19.3	20.1
1917	14.8	15.1	15.3	15.7	16.0	16.5	16.9	17.3	17.8	18.0	17.8	17.3	17.1	17.4	19.3	21.4
1918	15.2	15.5	15.7	16.1	16.4	16.9	17.1	17.6	17.9	18.0	18.2	17.7	17.8	18.3	20.3	—

Tabella XX.

Distanze antisolari del p. n. di Arago.

Altezze solari vere.

Anni	8°,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	−0,5	−1,5	−2,5	−3,5	−4,5	−5,5	−6,5
1910	—	—	—	20.3	20.4	20.2	20.0	19.6	19.1	18.6	18.4	18.7	—	—	—	—
1911	—	—	—	19.3	19.6	19.6	19.5	19.1	18.9	18.6	18.7	19.2	20.2	22.9	25.8	—
1912 (1° s.)	—	—	20.2	19.7	19.6	19.4	19.5	19.3	18.9	18.7	18.6	19.1	20.4	22.2	—	—
1914 (2° s.)	20.6	20.9	21.0	21.3	21.2	21.0	20.9	20.8	20.7	20.5	20.7	21.2	22.0	22.8	25.1	—
1915	20.3	20.6	20.9	20.9	20.8	20.8	20.6	20.2	20.0	19.8	19.8	20.2	21.4	23.3	25.8	—
1916	19.8	20.3	20.6	20.8	20.7	20.6	20.5	20.3	20.1	19.9	19.8	20.0	21.3	23.1	25.4	28.6
1917	18.8	19.3	19.9	20.3	20.4	20.6	20.4	20.2	19.9	19.6	19.6	19.7	20.6	22.6	24.9	27.9
1918	19,8	20.5	20.8	21.0	21.1	20.9	20.7	20.5	20.0	19.9	20.0	20.5	21.6	23.6	25,9	—

Prima di discutere questi valori, faccio notare che il 23 marzo 1910 l'Etna entrò in attività eruttiva; la lava e il materiale frammentario venivano fuori da crateri eccentrici, nel fianco meridionale, a circa 2000 m. di altitudine (Monti Riccò). Il 13 aprile cessò l'emissione di lava; ma il cratere centrale continuò ad emettere il fumo eruttivo, ora più ora meno denso; e la striscia di fumo si stendeva, trasportata dal vento, quando in una, quando in un'altra direzione, ora più larga, ora meno, e a diverse altezze. Nel mio registro di osservazioni presi nota di ciò, insieme con le altre osservazioni meteorologiche.

Nel 1910 il fumo eruttivo formava una striscia a W_z nei giorni 21 aprile, 7 e 29 giugno, 22, 23 e 31 luglio, 16, 18 e 19 agosto. Per i giorni rimanenti, dopo tolti questi giorni, ho calcolato i valori medii (m^1) dei giorni senza fumo etneo a W, che qui metto a riscontro con le medie generali (m), tanto per il punto di Babinet (B), quanto per quello di Arago (A).

altezze solari vere	B		A	
	m	m'	m	m'
5°.5	15.1	14.8	20.3	20.2
4.5	15.8	15.6	20.4	20.2
3.5	16.0	15.7	20.2	20.1
2.5	16.7	16.4	20.0	20.0
1.5	17.1	16.9	19.6	19.6
0.5	17.5	17.3	19.1	19.0
—0.5	17.8	17.7	18.6	18.5
—1.5	18.0	17.8	18.4	18.3
—2.5	17.6	17.7	18.7	18.5

Onde si vede che la differenza tra le due serie di valori medii è piccolissima, non superando mai 0°,3.

Differenze parimente trascurabili si riscontrano confrontando le medie generali, con le medie – che qui per brevità non riporto – ottenute dopo aver tolto i giorni nei quali si notò o la piccola nebulosità nelle condizioni cui ho accennato (21, 22 aprile, 8 maggio, 9, 26 giugno, 2 ottobre, 24 dicembre), o cielo sbiancato (17, 29 maggio, 11 giugno, 10, 12, 23 luglio).

Sicchè negli anni successivi al 1910 ho considerato come tramonti sereni anche quelli in cui si notava o qualche piccola nube, situata in modo da non disturbare, o la striscia di fumo etneo a W; salvo che il diagramma rivelasse irregolarità.

Perciò i valori medii, che io qui riporto, non si riferiscono, come altri talvolta fa, a tutti i giorni di osservazione, ma solo a giorni perfettamente sereni.

Si ricava pure, da queste considerazioni, che il pulviscolo etneo, nell'eruzione del 1910, non disturbò punto l'andamento del fenomeno, e ciò deve attribuirsi al fatto che il fumo eruttivo non raggiunse grandissime altezze, tali da superare il limite della troposfera.

Esaminando i valori medi (tabelle XIX e XX) e i relativi diagrammi costruiti prendendo come ascisse le altezze solari vere e come ordinate le distanze dei punti

neutri rispettivamente dal sole (B) e dall'antisole (A), si osserva che le differenze da un anno all'altro sono piccole. Si nota un lieve aumento nel 2° semestre del 1914, e un minimo nel 1911 (per alcuni valori anche nel 1910 e nel 1912).

Nelle fig. I e II sono riportati i diagrammi del 1912 e del 1918, nei quali l'andamento del p. n. di Babinet è rappresentato con una curva tratteggiata e quello del p. n. di Arago con una curva a tratto pieno.

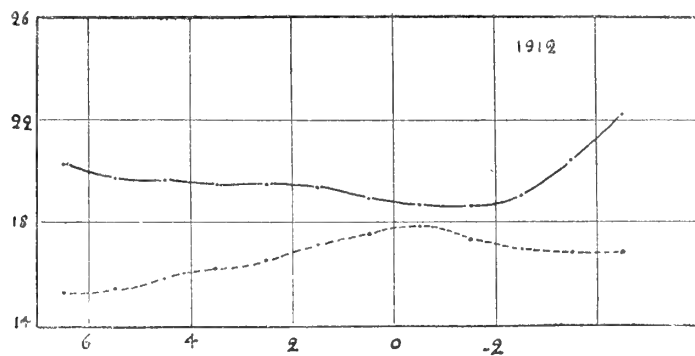



Fig. I. — P. n. di Babinet e di Arago nel 1912.

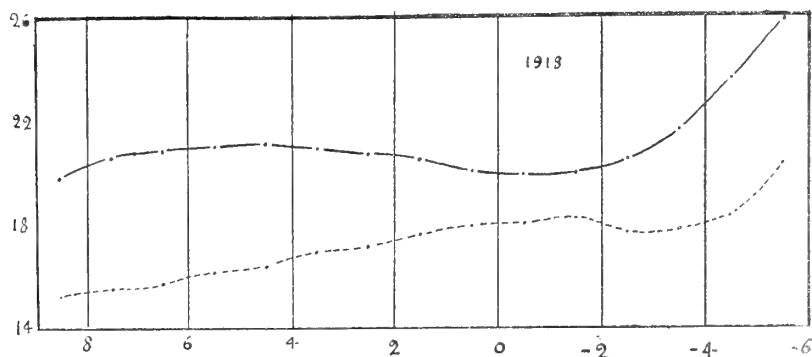



Fig. II. — P. n. di Babinet e di Arago nel 1918.

Se per ogni altezza solare si prende il valore massimo (che è sempre nel 1914, 2° sem.) e il valore minimo (in uno degli anni 1910–11–12), si ottengono le differenze tra massimo e minimo date in questo quadro:

alt. solari vere	5.5	4.5	3.5	2.5	1.5	0.5	—0.5	—1.5	—2.5	—3.5	—4.5
B	1.8	1.8	1.9	1.7	1.7	1.6	1.8	1.9	2.9	3.0	3.1
A	2.0	1.6	1.6	1.4	1.7	1.8	1.9	2.0	2.5	1.8	1.4

Si vede che queste differenze non raggiungono quasi mai 2°, salvo per grandi altezze solari negative, specialmente per B.

Da questi valori non sembra confermata la correlazione tra il numero delle macchie solari e l'altezza di questi punti neutri, indicata da Busch.

Esaminando le altezze medie dei punti neutri nell'istante del tramonto vero, si ottiene:

	B	A	A-B
1910	17.°6	18.8	1.2
1911	17. 5	18.7	1.2
1912 (1° s.)	17. 7	18.8	1.1
1914 (2° s.)	19. 2	20.6	1.4
1915	18. 7	19.9	1.2
1916	18. 3	20.0	1.7
1917	17. 9	19.7	1.8
1918	17. 9	19.9	2.0

Onde si vede che, negli anni normali, nell'istante del tramonto, si ha sempre A > B, e che la differenza A — B, nel periodo di tempo in esame, dapprima fu sempre intorno a 1°, 2, crescendo poi lievemente fino a raggiungere 2,0 nel 1918.

Un'altra osservazione, sulla quale ho già richiamato altrove [1] l'attenzione, è che le medie ottenute da Busch, ad Arnsberg (Vestfalia) nel 1910 e nel 1911 sono poco diverse da quelle ottenute da me, le differenze non raggiungendo mai 1°, salvo per i valori estremi del punto neutro di Babinet. Questa concordanza fra due stazioni così distanti è notevole, ed indurrebbe a concludere che le condizioni locali non debbano esercitare quella grande influenza che si ritiene, quando si abbia cura di osservare il fenomeno in giorni perfettamente sereni.

È già stato notato che, nei giorni normali, il massimo valore del punto neutro di Babinet e il minimo del punto neutro di Arago avvengono, in un giorno di osservazione, con piccola altezza solare negativa. Dai valori medii annui delle tabelle XIX e XX si vede che per il punto di Babinet il primo massimo avviene a —0°.5 (1911; -12, -15, -17), oppure a —1°,5 di altezza solare (1910, -16, -18); continuando le osservazioni il secondo massimo si verifica alla massima altezza solare negativa. Nel 1914 manca il 1° massimo.

Per il punto neutro di Arago il minimo accade a —0°,5 (1911, -14, -18), oppure a —1°5, (1910, -12, -16), o tra —0°,5 e —1°,5 (1915, -17). Negli ultimi tre anni per grandi altezze solari si nota un altro minimo in principio della curva.

A cominciare dal 1915 si osserva che, a circa —3,5 di altezzze solari, il punto di Babinet raggiunge un minimo secondario, seguito da un rapido inalzamento, il quale è più notevole negli ultimi due anni.

L'andamento ora descritto dei punti neutri viene interpretato come dipendente dalle variazioni di luminosità a W e ad E, durante il tramonto. Deve anche esercitare influenza l'avvicendarsi delle colorazioni dell'anticrepuscolo e del crepuscolo: è noto che uno schermo rosso produce, nei giorni normali, una diminuzione delle distanze dei

[1] Memorie d. Soc. d. Spettroscopisti (2) I, 1912.

punti neutri e io ho notato che, nei tramonti con più intense colorazioni crepuscolari si verifica, di solito, una più sensibile variazione delle distanze medesime. I valori critici, corrispondenti all'altezza solare di —0°,5 o di —1°,5 sono attribuiti (Süring, Humphreys) al passaggio dei raggi solari attraverso il più basso strato di pulviscolo, la cui altezza raramente supera di 1 km. Il minimo secondario del punto neutro di Babinet, per l'altezza solare di —3°,5, viene riferito al secondo strato di pulviscolo, la cui altezza si aggira intorno a 4 km., e che darebbe anche ragione dei rapidi cambiamenti che subisce in quel momento il punto neutro di Arago.

Nei giorni in cui i valori si scostano dalla media degli anni normali, i suddetti valori critici non più corrispondono alle altezze solari ora indicate – come si possono trovare esempi nelle tabelle I a XVIII – facendo così supporre una distribuzione anormale degli strati di pulviscolo.

In Catania è possibile talvolta continuare le osservazioni per diversi giorni consecutivi; con ciò che si è detto si spiega perchè, con condizioni meteorologiche di carattere persistente, si notano, tra un giorno e il successivo, differenze lievissime, come per esempio, nel 1915, nei giorni 11 e 12, 24 e 25 luglio, 11 e 12 agosto; mentre le differenze diventano meno piccole, anche per un semplice cambiamento nella direzione o nell'intensità del vento, come, nello stesso anno, nei giorni 29 e 30 luglio, 14, 15, 16 agosto.

6. *Perturbazione polarimetrica degli anni* 1912, -13, -14. — Nei primi mesi del 1912 l'andamento del fenomeno in esame continuava a essere normale. Nei giorni 4 e 5 luglio le distanze erano poco diverse da quelle osservate ordinariamente. Ma, a cominciare dal 15 luglio queste distanze aumentarono notevolmente e l'anomalia polarimetrica andò crescendo, e raggiunse un massimo nei mesi di agosto e settembre. Per tutto il 1913, e per il primo semestre del 1914 la perturbazione persistette, diminuendo man mano di intensità e presentando talvolta caratteri diversi.

Anzichè calcolare, in questi due anni, i valori medii annui, che non avrebbero alcun significato, ho considerato le medie dividendo le osservazioni in 8 gruppi:

1° del 4 e 5 luglio . . . . 1912 a)
2° dal 15 al 23 luglio . . . . » b)
3° del 24-26 luglio . . . . » c)
4° dell'agosto e settembre . . . . » d)
5° dell'ottobre e dicembre . . . . » e)
6° dal 5 febbraio al 5 luglio . . . . 1913 a)
7° dal 25 luglio al 16 dicembre . . . . . » b)
8° dal gennaio al 4 febbraio . . . . 1914 a)

È vero che, esaminando i valori delle tabelle VII e VIII, si nota, per esempio, un salto brusco tra 25 e 26 luglio 1913, specialmente per il punto di Arago, e un altro, meno brusco, tra 7 e 18 agosto. Tuttavia il raggruppamento dei giorni di osservazione da me scelto mi è sembrato il più adatto per seguire l'andamento della perturbazione.

I valori medi relativi a questi 8 gruppi sono riportati nelle tabelle XXI e XXII, e i diagrammi dei gruppi 4°, 6°, e 7° nelle fig. III, IV e V.

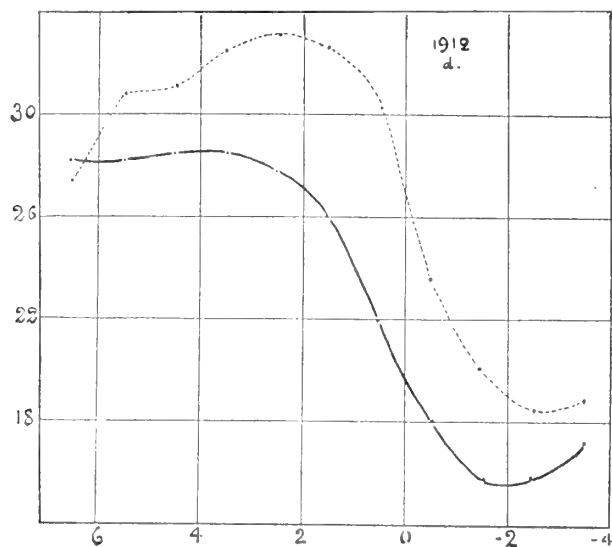



FIG. III. — P. n. di Babinet e di Arago nel 1912 (agosto-settembre).

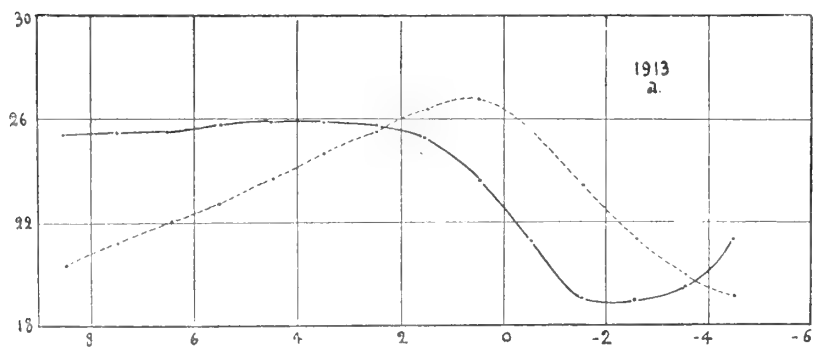



FIG. IV. — P. n. di Babinet e di Arago nel 1913 (5 febbraio-5 luglio).

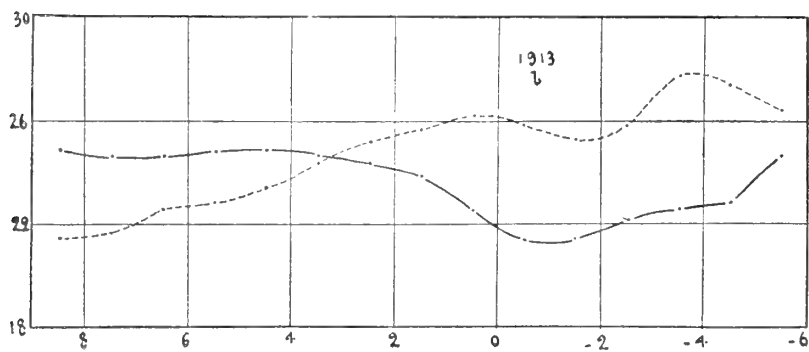



FIG. V. — P. n. di Babinet e di Arago nel 1913 (25 luglio-16 dicembre).

TABELLA XXI.

Distanze solari del p. n. di Babinet.

Altezze solari vere.

Anni		8°,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	– 0,5	– 1,5	- 2,5	– 3,5	4 5	5,5
1912	a	—	—	—	15.6	17.0	17.4	17.9	17.9	18.2	19.1	19.5	19.4	—	—	—
	b	—	—	19.5	20.3	21.0	21.0	21.8	21.7	22.3	21.9	21.4	21.3	20.6	19.6	—
	c	—	—	20.0	20.6	21.6	22.0	22.5	23.3	22.2	19.5	18.6	17.4	16.3	—	—
	d	—	—	27.5	30.8	31.1	32.6	33.2	32.6	30.4	23.6	20.1	18.4	18.9	—	—
	e	—	—	27.0	28.0	28.1	29.5	30.1	31.0	29.8	26.2	22.8	21.4	21.8	22.1	—
1913	a	20.4	21.2	22.9	22.7	23.8	24.7	25.6	26.5	26.8	25.7	23.5	21.4	20.0	19.2	—
	b	21.5	21.7	22.6	22.9	23.5	24.4	25.2	25.7	26.2	25.9	25.3	25.9	27.8	27.5	26.5
1914	a	22.2	22.6	23.4	23.8	23.9	24.2	25.3	26.5	26.5	26.1	25.0	24.0	22.9	22.6	—

TABELLA XXII.

Distanze antisolari del p. n. di Arago.

Altezze solari vere.

Anni		8°,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	– 0,5	– 1,5	– 2,5	– 3,5	4,5	5,5
1912	a	—	—	—	20.8	20.6	20.6	20.3	19.8	19.4	18.7	18.9	19.5	—	—	—
	b	—	—	24.7	24.8	25.3	25.2	25.0	24.4	22.9	20.9	19.9	19.7	19.4	19.8	—
	c	—	—	27.7	27.0	27.5	27.1	26.8	25.6	22.1	18.4	17.3	16.7	16.7	—	—
	d	—	—	28.2	28.3	28.5	28.5	27.8	26.1	21.9	18.1	16.9	16.9	17.2	—	—
	e	—	—	25.7	25.9	25.6	25.5	25.9	24.3	22.7	19.8	19.2	19.7	21.3	21.3	—
1913	a	25.4	25.5	25.5	25.8	25.9	25.9	25.8	25.3	23.7	21.3	19.1	19.0	19.6	21.3	—
	b	24.9	24.6	24.6	21.8	24.9	24.7	24.4	23.9	22.6	21.4	21.5	22.2	22.6	22.9	24.7
1914	a	24.3	24.1	24.7	20.4	24.1	24.0	23.9	23.4	22.4	22.2	21.8	21.9	23.0	25.8	—

Esaminando questi gruppi di medie e i relativi diagrammi, si scorge che la regolarità nell'andamento del fenomeno comincia lievemente a modificarsi il 4–5 luglio 1912, di più nella seconda metà di luglio, e la perturbazione diventa massima in agosto e settembre, diminuendo alquanto in ottobre-dicembre dello stesso anno. L'anomalia presenta caratteri diversi nei primi mesi, fino al 5 luglio del 1913, dal 25 luglio al 16 dicembre dello stesso anno, e tende a diminuire lentamente nel primo bimestre del 1914,

Mentre negli anni normali, come si è detto, è sempre B $<$ A, nel tempo dell'anomalia in esame si è avuto B $>$ A, dapprima solamente per altezze solari h negative (1912 *a*, *b*,), poi a cominciare da h = 0°5 (1912, *c*) e infine, nel massimo della perturbazione, quasi per tutto il tempo di osservazione (1912, *d*, *e*). Poi l'anomalia cambia carattere: si nota (1913, *b*) un aumento insolito di B, con un secondo massimo per h = — 3°,5, che sparisce nel 1914, *a*.

Si è detto (§ 4) che il massimo di B e il minimo di A, in tempi normali, avvengono quando h = — 1° circa. Esaminando le cifre delle tabelle XXI e XXII si vede per contro che il massimo di B, mentre dapprima (1912, *a*) avviene come di solito, a poco a poco va anticipando: nel 1912, *b* per h = 0°,5; nel 1912, *c* per h = 1°,5, nel 1912 *d* per h = 2°,5 e poi di nuovo lentamente ritorna alla condizioni di prima. Una singolarità si osserva nel 1913 quando questo massimo avviene per h = — 3°,5. Il minimo di A si presenta con ritardo, ma con minore regolarità nei diversi periodi.

La perturbazione della polarizzazione atmosferica, che risulta evidentissima da queste misure in Catania, fu notata prima nelle regioni più settentrionali e con andamento diverso da un luogo all'altro; il massimo valore in Catania si manifestò molto più tardi che altrove, e così pure il carattere della maggior distanza del punto neutro di Babinet rispetto a quella del punto neutro di Arago.

La perturbazione polarimetrica fu accompagnata da un notevole intorbidamento dell'atmosfera – del quale hanno trattato diversi autori (¹) – e venne attribuita alla grande eruzione del Katmai (Alasca), cominciata il 6 giugno 1912.

Essendo l'atmosfera fortemente intorbidata dal pulviscolo, si osservava, con altezze solari positive, il predominio della componente negativa (orizzontale) proveniente dalla diffusione di secondo ordine; tramontando il sole, questa componente negli strati di aria inferiori rapidamente diminuiva d'intensità, rimanendo il predominio della polarizzazione positiva (verticale) e verificandosi perciò una considerevole diminuzione dalle distanze dei punti neutri dall'orizzonte.

Questo andamento si cominciò a osservare, debole, nella seconda decade di luglio, e fu più considerevole il 14 agosto 1912, quando, per la diminuzione di 1° dell'altezza solare (tra 0,5 e – 0,5) lo spostamento di B raggiunse 8°,2. Il massimo spostamento di A fu di 4°,9, il 14 e 15 agosto dello stesso anno, intorno all'altezza solare di 0,5. Nei tempi normali questi spostamenti, in Catania, raggiungono raramente 1° in corrispondenza alla suddetta altezza solare.

È pure da notare che, nel massimo dell'anomalia, riusciva impossibile continuare le osservazioni oltre l'altezza solare di —5°.

Dall'esame dei valori medi del 1913 *b* risulta, come ho accennato, che l'andamento della perturbazione fu notevolmente diverso da quello precedente. Questa modificazione cominciò, in Catania, il 25 luglio 1913, mentre perdurava l'effetto del pulviscolo del Katmai, e andò crescendo fino a raggiungere il massimo nell'agosto dello stesso anno. Essa si iniziò in coincidenza con un altro fenomeno ottico, cioè con l'aumento d'intensità della luce purpurea, che nell'Italia continentale fu osservato dal prof. Ignazio

(¹) Per l'Italia, F. Castriota in Rivista Meteorico-agraria, 1913.

Galli a Roma, dal 13 luglio 1913 al 10 aprile 1914. Il Galli [1], che osservò con cura il fenomeno, dà conto altresì delle osservazioni fatte in Francia, in Inghilterra, nel Belgio, in Germania, ecc. e attribuisce questi fenomeni ottici all'azione di pulviscolo vulcanico proveniente dall'eruzione del Katmai e da quella dell'Asama-Yama (giugno 1913).

L'esame delle anomalie polarimetriche offre il vantaggio di poter seguire con misure numeriche l'andamento del fenomeno. Dai valori ottenuti in Catania si arguisce che, mentre nel primo periodo del 1913 (*a*) lo strato di pulviscolo andava man mano abbassandosi verso la troposfera, nel secondo periodo (*b*) una nuova onda di pulviscolo sopravvenne nella stratosfera.

La ricerca dei punti neutri è dunque il miglior criterio per lo studio dell'intorbidamento atmosferico. Nell'accurato lavoro di F. Castriota, su menzionato, sull'intorbidamento dell'atmosfera durante l'estate del 1912, si leggono non poche relazioni di direttori di osservatorii, i quali o non si accorsero del fenomeno, o giudicarono che fosse scomparso, mentre esso non aveva ancora raggiunta la massima intensità.

La perturbazione in esame fu peraltro accompagnata da fenomeni ottici, come tramonti purpurei, anello di Bishop ; ma non in grado così elevato come quella prodotta dall'eruzione del Krakatoa, nel 1883. Dal mio registro di osservazioni risulta che in Catania si verificarono in piccola misura questi altri fenomeni ottici ; in esso è notato per il 1912 : per la prima volta « caligine » il 15 luglio ; il 16 luglio « il sole, alto 3°,5 si può guardare direttamente » ; il 16 e il 23 luglio « crepuscolo leggermente roseo » ; il 15 agosto la tinta purpurea del crepuscolo fu più intensa, e così pure l'8 settembre, il 20 ottobre, il 15 novembre e il 15 dicembre ; nel 1913 e nel 1914, l'intensità della luce purpurea crepuscolare fu in generale mediocre ; maggiore, nel 1913, nei giorni 20 marzo, 12 e 13 giugno, 28 agosto, 14 settembre, 25 ottobre, 8 e 14 novembre, 13 e 16 dicembre ; nel 1914 nei giorni 9 e 10 gennaio e 20 febbraio ; poi appariva debole, con intermittenza.

7. *Osservazioni dal punto neutro di Brewster.* — Le frange negative del punto neutro di Babinet non si vedono molto distintamente ; di solito, nei giorni normali, per discernerle bene, occorre schermare opportunamente la luce diretta del sole.

Ancora meno facile riesce la ricerca del punto neutro di Brewster, che viene perciò osservato molto di rado. Mi sembra perciò non privo d'interesse dar conto delle osservazioni che ho avuto occasione di fare.

Il 10 agosto del 1910, trovandomi sull'Etna, a 1890 m. di altitudine, osservai che mentre il sole era alto 21°, la distanza del punto neutro di Brewster dal sole era di 13°.

È noto che durante le perturbazioni polarimetriche si vedono più distintamente le frange negative del punto di Babinet e l'osservazione del punto di Brewster riesce meno disagevole. Nel 1912, nel massimo della perturbazione polarimetrica (§ 6) volli eseguire delle misure relative al punto di Brewster, in Catania, e ottenni i seguenti

[1] Atti Acc. Nuovi Lincei, 1913 e 1914.

valori, che sono dati in numeri interi, perchè tali osservazioni sono sempre alquanto incerte, non potendosi distinguere bene le frange negative:

Data 1912	Altezze solari	Distanze del sole dal p. di Babinet	Distanze del sole dal p. di Brewster
agosto 15	36,5	20°	21°
»	35,5	20	22
»	34,5	20	22
»	33,5	20	22
»	32,5	21	22
agosto 19	32,5	21	22
»	31,5	20	22
»	30,5	20	22
»	29,5	21	23
ottobre 30	22,0	20	18
novembre 15	29,5	21	26

In generale, come si è notato in altre occasioni, le distanze del punto di Brewster furono sempre maggiori di quelle del punto di Babinet, salvo il 30 ottobre, che si verificò il contrario.

8. *Altre osservazioni di polarizzazione atmosferica.* — Infine mi sembra opportuno notare che, durante questi anni di osservazioni, ho avuto occasione di eseguire talvolta delle osservazioni dei punti neutri di Babinet e di Arago al sorgere del sole, in giorni perfettamente sereni. Mi fermo qui a considerare quelle del 18 e 19 maggio 1910, a Ognina, quelle del 5, 6, 7 agosto a Nicolosi, alle falde dell'Etna, e quelle del 5 e 16 settem bre 1914, ad Acireale.

Dai valori ottenuti, che qui per brevità non riporto, risulta quanto segue:

Le osservazioni del 18 e 19 maggio 1910, a Ognina (altitudine 35 metri) furono eseguite fino a piccola altezza solare, e con lo scopo di esaminare l'eventuale influenza della cometa di Halley, che peraltro risultò negativa.

In quelle di Nicolosi (altitudine 700 m.), eseguite anch'esse tanto di mattina quanto di sera, negli stessi giorni, si osserva che le distanze medie ottenute al sorgere del sole (m) differiscono da quelle ottenute al tramonto (s), per il punto di Babinet essendo m — s circa 1°,2 per h = 3°,5, e questa differenza va diminuendo fino ad annullarsi per h = 0°, mentre per il punto di Arago la differenza medesima è sempre negativa e quasi costantemente uguale a — 1°. Ciò mi fece dubitare che a diminuire l'altezza del punto neutro di Babinet influisse la riflessione dei raggi solari alla superficie del mare.

Le misure in Acireale (altitudine 160 m.) confermarono questa interpretazione, perchè costatai che, con sole alto, il punto di Babinet si avvicinava man mano al sole, fino a scomparire quando l'altezza solare raggiungeva 9°: le frange indicavano polarizzazione positiva, anche al di sotto del sole, fino all'orizzonte, e sulla grande striscia di luccichio alla superficie del mare. Evidentemente la causa di questo comportamento deve ricercarsi nella striscia di riflessione dei raggi solari alla superficie del mare, striscia che comincia a scorgersi pochi minuti dopo il sorgere del sole, ed è dapprima molto ristretta, estendendosi man mano in larghezza; l'effetto crescente è da ascriversi altresì alla variazione dell'angolo d'incidenza dei raggi solari.

Questo effetto della riflessione in mare m'indusse a non ripetere le osservazioni durante il sorgere del sole, e a scartare, nel calcolo delle medie, quelle già eseguite.

9. *Ricapitolazione dei risultati.*

1. L'eruzione etnea del 1910, accompagnata e seguita da violente emissioni di ammassi di fumo eruttivo dal cratere centrale, non produsse alcuna perturbazione polarimetrica, per l'altezza relativamente piccola alla quale il pulviscolo veniva lanciato.

2. Dalle misure eseguite in Catania negli anni 1910 a 1918 non sembra confermata la correlazione, indicata da Busch, fra il numero delle macchie solari e le altezze dei punti neutri.

3. Il valore di B e di A, all'istante del tramonto, negli anni normali è tale che A — B è sempre positivo ed è cresciuto leggermente dal 1915 al 1918.

4. Quando le osservazioni sono eseguite in giorni perfettamente sereni, si riscontra quasi concordanza nei valori ottenuti in stazioni molto lontane e poste in diverse condizioni. Ciò indurrebbe a concludere che le condizioni locali non debbano in tal caso esercitare una grande influenza.

5. L'andamento delle distanze dei punti neutri di Babinet e di Arago rispettivamente dal sole e dall'antisole viene interpretato come dipendente dalle variazioni di luminosità del cielo a occidente e ad oriente, durante il tramonto. Deve esercitare influenza l'avvicendarsi delle colorazioni anticrepuscolari e crepuscolari; nei tramonti con più intensa colorazione si verifica, di solito, una più sensibile variazione delle distanze medesime.

6. La perturbazione polarimetrica del 1912, prodotta dell'eruzione del Katmai, si manifestò in Catania, nelle sue varie fasi, con notevole ritardo rispetto ai luoghi più settentrionali e con andamento talvolta diverso. Ciò deve attribuirsi alla maggior distanza dal luogo di origine del polviscolo, e alle diverse condizioni meteorologiche.

7. L'anomalia durò in Catania circa 2 anni.

8. La variazione di altezza del pulviscolo, dipendente da fattori meteorici, dà ragione delle variazioni talvolta notevoli riscontrate in giorni successivi.

9. Una modificazione nell'andamento della perturbazione si manifestò in Catania nel luglio 1913, in coincidenza con l'aumento d'intensità dei tramonti purpurei in Europa. Le osservazioni in Catania sembrano dimostrare che, mentre l'effetto del pulviscolo del Katmai tendeva a diminuire, sopravvenne nella stratosfera una nuova onda di pulviscolo.

10. La ricerca dei punti neutri è il miglior criterio per lo studio dell'intorbidamento atmosferico: può anche servire come indizio della maggiore o minore trasparenza atmosferica.

11. Il punto neutro di Brewster si può ricercare o da stazioni elevate o durante i periodi di grande perturbazione polarimetrica. La sua distanza dal sole è quasi sempre maggiore di quella del punto di Babinet.

12. Le osservazioni dei punti neutri vengono disturbate dalla riflessione dei raggi solari sulla superficie del mare, nelle stazioni costiere, nelle quali perciò bisogna eseguire le misure al tramonto se la costa guarda a oriente.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 1°. Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIV. Fasc. 2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV. XV e XVI. Fasc. 11°.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XIX. Fasc. 7°-9°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successor di E. Loescher & C.) — *Roma*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO III.

ANGELO BIANCHI

QUARZO DI VAL DEVERO (OSSOLA)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

RELAZIONE

presentata dai Soci prof. E. Artini e prof. L. Brugnatelli, nella seduta del 7 gennaio **1923**, sulla Memoria del dott. Angelo Bianchi, dal titolo: *Quarzo di Val Devero (Ossola).*

Nella presente Memoria sul *Quarzo di Val Devero* il dott. Angelo Bianchi, continuando lo studio dei minerali di questa Valle Ossolana, espone i risultati delle sue ricerche sui numerosi ed interessanti cristalli di quarzo raccolti in otto giacimenti diversi, e cioè: nel *Gneiss Antigorio* (M. Cistella e M. Forno), nei *Calcescisti dell'Alpe Devero*, nel *Gneiss Leone-Ofenhorn* (M. Cervandone e Bocchetta d'Arbola), nelle *intercalazioni cloritico-anfiboliche* entro quest'ultima coltre di gneiss, sul versante meridionale del Monte Cervandone e della Punta d'Arbola (Passo del Forno e Ghiacciaio del Forno).

Con una descrizione sintetica dei cristalli di ciascun giacimento, l'autore mette chiaramente in rilievo le forme più caratteristiche, la varietà e ricchezza delle loro combinazioni. le particolarità dell'abito; fa notare specialmente la grande frequenza di romboedri inversi nei cristalli dei *Calcescisti* e del *Gneiss Leone-Ofenhorn*, che più spiccato presentano il tipico abito nettamente trigonale a terminazione molto acuta, e la maggior ricchezza invece di romboedri diretti e di trapezoedri nei cristalli delle intercalazioni di scisti verdi entro lo stesso gneiss; descrive una caratteristica associazione di proclorite col quarzo, osservata in un giacimento del *Gneiss Antigorio*; riassume infine i risultati del suo studio in un quadro generale delle forme osservate, indicando la loro frequenza nei varii giacimenti di Val Devero.

Negli 83 cristalli studiati, in ricche e diverse combinazioni, l'autore ha trovato un centinaio di forme; delle quali, 84 sicuramente determinate e 9 considerate come vicinali. Di esse, 17 forme sicure, 8 vicinali e qualche altra probabile sono nuove per la specie. Altre forme, ritenute fino ad ora incerte, sono inoltre confermate.

Una tavola con nove figure, molto ben disegnate, illustra il lavoro.

I suddetti commissarii ritengono che la Memoria del dott. A. Bianchi, oltre che essere interessante per la monografia mineralogica della Val Devero, costituisca, per i nuovi importanti risultati, un contributo notevole alla conoscenza morfologica del quarzo, e ne propone quindi l'inserzione integrale nei volumi dell'Accademia.

Quarzo di Val Devero (Ossola).

Memoria di ANGELO BIANCHI [1]

presentata nella seduta del 3 dicembre

Fra i minerali di Val Devero è degno di nota il quarzo. Anche questo, non meno degli altri che già ho fatto oggetto di studio dettagliato, merita una particolare descrizione, per la frequenza di bei cristalli, per l'abito caratteristico, per la grande ricchezza di forme e la varietà delle loro combinazioni, e per il numero notevole delle forme nuove, che ancora si aggiungono alla numerosissima serie di quelle già note.

Cristalli di grandi dimensioni furono raccolti negli *scisti di Baceno* (entro una grotta aperta sulla gola del torrente Devero a sud di Croveo) [2] e nelle lenti di quarzite che affiorano sul tavolato gneissico presso la cima del Monte Cistella [3]. Individui di notevole sviluppo si possono trovare anche, ma più raramente, negli gneiss del Monte Cervandone. Uno dei maggiori esemplari raccolti proviene però dalle rocce a sud-est del Passo del Forno (Punta d'Arbola) [4]: è un gruppo di due cristalli di quarzo affumicato, il maggiore dei quali raggiunge quasi trenta centimetri di altezza per undici o dodici circa di massima larghezza; l'altro, affiancato, è poco più della metà del primo.

Credo basti aver solo accennato a questi più vistosi rappresentanti, perchè tanti più bei cristalli di dimensioni minori e piccole, limpidi e meglio formati, più tipici, offrono naturalmente un ben maggior interesse per il loro studio morfologico.

Se ne trovano sparsi in tutta la serie di rocce della Val Devero, dal *granito di Crodo-Verampio*, che costituisce la massa più profonda, fino alla coltre superiore del *gneiss di Berisal*. Ma specialmente frequenti sono: nelle geodi dei *calcescisti dell'Alpe Devero*, nelle litoclasi del *gneiss Leone-Ofenhorn* al *monte Cervandone* e nelle *intercalazioni anfiboliche* e *cloritiche* della stessa coltre di gneiss al *Passo del Forno*, nel gruppo dell'*Arbola*.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pavia, diretto dal prof. L. Brugnatelli.

(2) Donati dall'ing. G. B. Traverso al Museo civico di storia naturale di Genova.

(3) Raccolti dal prof. G. Spezia e attualmente nelle collezioni del Museo Galletti di Domodossola e del Museo di mineralogia della R. Università di Torino.

(4) Trovato dal sig. L. Alberti di Croveo, e attualmente nella *Raccolta Val Devero* del Museo di mineralogia della R. Università di Pavia.

Dei cristalli di questi giacimenti principali tratterò dapprima, sintetizzando il più possibile le osservazioni fatte su parecchie decine di individui, per dire poi, più brevemente, del quarzo di alcuni giacimenti minori, compresi nel *gneiss Antigorio.*

Quarzo dei calcescisti di Devero ([1]).

I lavori della Società Conti per gli impianti idro-elettrici del Devero hanno portato a giorno, dalle gallerie scavate, molto materiale fresco ed interessante di questa formazione dei *calcescisti.* Specialmente nelle discariche che fiancheggiano l'ultimo tratto della strada che da Goglio raggiunge l'alpe di Devero, si può rilevare l'abbondanza di geodi mineralizzate e si possono facilmente raccogliere cristalli di quarzo limpidi ed incolori.

Poichè dei minerali di questi calcescisti tratterò in altro lavoro, quì mi limito ora a dire che compagni abituali del quarzo sono: *muscovite* (in lamelle talora intimamente associate ai cristalli del primo) *clorite*, *rutilo*, *pirite* ed i carbonati *calcite*, *dolomite* e *breunnerite*. Più raro è trovarlo anche assieme con cristallini di *aragonite*, o di *tormalina*, o di *blenda*.

I cristalli di *quarzo*, che variano in genere, per dimensioni, da alcuni millimetri fino a 4 o 5 cm. di lunghezza, si sviluppano sempre, più o meno regolarmente, con un caratteristico abito appuntito, determinato dalla successione, o anche talora dall'alternanza, di romboedri acuti fra il prisma di primo ordine $m \; \{10\bar{1}0\}$ e i due romboedri fondamentali coniugati, diretto ed inverso. Questi ultimi sono rappresentati per lo più da piccole facce terminali, perfettamente piane e terse. Si sviluppano in genere maggiormente quelle del romboedro diretto, $r \; \{10\bar{1}1\}$, che vengono a contatto a costituire l'apice del cristallo, mentre sono spesso ridotte quelle dell'inverso, $z \; \{01\bar{1}1\}$, a sottili faccette allungate in senso meridiano.

Nella *zona* [010], *dei romboedri diretti*, predominano le facce di $M \; \{30\bar{3}1\}$, limitando col loro estendersi lo sviluppo in altezza delle facce del prisma, molto più che non avvenga nelle zone adiacenti dei romboedri inversi. Sono in generale ben piane e speculari, con scarse e fini tracce di striatura trasversale.

Qualche faccia minore di romboedro diretto, poco più ottuso, si presenta talora a sostituire in parte quelle di $\{30\bar{3}1\}$, e si calcolano allora i simboli

$$\{50\bar{5}2\} \;,\; \{80\bar{8}3\} \;,\; ^{*}\{13.0.\overline{13}.5\}.$$

Nuova quest'ultima forma, e notata recentemente la $\{80\bar{8}3\}$ in un cristallo di Val d'Ala da E. Grill ([2]).

([1]) Per lo studio del quarzo di questo primo gruppo di giacimenti, oltre ai numerosi esemplari da me raccolti, ho potuto avere a disposizione, per la cortese condiscendenza del prof. F. Zambonini, che di nuovo ringrazio, anche il materiale portato all'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino dal compianto dott. Alfonso Garbagni, che alcuni anni or sono aveva cominciato lo studio sui minerali dei calcescisti di Goglio e dell'Alpe Devero. La guerra recente ha interrotto il suo lavoro all'inizio; ed ai cristalli di Devero e alle pagine sparse di appunti non tornò più, purtroppo, il giovane naturalista.

([2]) E. Grill, *Quarzo, granato, clorite di Val d'Ala*, in « Atti Soc. Ital. di Sc. Nat. ». Milano, (1922), LXI-222.

Si osservano pure talora le faccette di $l\ \{20\bar{2}1\}$, o di qualche forma vicinale della stessa zona; e, più frequenti, quelle del romboedro $i\ \{50\bar{5}3\}$.

Al disotto delle $\{30\bar{3}1\}$ seguono le facce sottili, ma ben definite, di $\boldsymbol{r}\ \{40\bar{4}1\}$, a cui si accompagnano spesso le $e\ \{50\bar{5}1\}$.

Fra i romboedri più acuti si riesce ancora a individuare con certezza, in alcuni cristalli: $\{70\bar{7}1\}$, $\{90\bar{9}1\}$ o $\{13.0.\bar{13}.1\}$. Per altri romboedri invece, come $\{60\bar{6}1\}$, $\{15.0.\bar{15}.1\}$, la determinazione può ritenersi meno sicura, perchè essi sono rappresentati da sottilissime faccette che si ripetono in mezzo a fasce di marcata striatura, dovuta al continuo alternarsi di queste, o delle precedenti facce di romboedri acuti, con le facce del prisma o con altre di posizione vicinale ad esse.

La superficie dei cristalli ne risulta talora leggermente incurvata e striata, talora fortemente solcata, nel tratto di zona fra $(50\bar{5}1)$ ed il prisma, e si osserva allora, per riflessione, tutta una serie quasi continua di immagini, addensate attorno ad alcune più nette e lucenti, che corrispondono alle forme sopraddette [1].

Nella *zona* [100], *dei romboedri inversi*, sono meglio individuate le numerose faccette che si susseguono, strette le prime, verso l'alto, e quasi opache per una finissima striatura, poi gradatamente più larghe e più lucenti, verso il prisma.

Fra le prime si trova la $\{02\bar{2}1\}$, spesso sostituita però, come la reciproca della zona precedente, da facce vicinali, che in qualche cristallo si possono esprimere col simbolo $\{0.23.\bar{23}.11\}$, determinato da Grill (*op. cit.*) in alcuni quarzi di Val d'Ala con analogo abito trigonale cuspidato. Più sicura però in questi cristalli di Val Devero è la forma prossima $\{0.21.\bar{21}.10\}$, che presentasi sola o assieme alla $\{02\bar{2}1\}$ Sicure sono anche le forme

$$\{09\bar{9}4\} \quad \text{e} \quad {}^*\{0.17.\bar{17}.7\}\ ,$$

osservate in cristalli diversi. La prima viene così confermata, poichè già notata dal Weiss in un cristallo del Gottardo [2]; la seconda invece è nuova.

Troviamo poi quasi sempre le facce del romboedro

$$\{0.11.\bar{11}.4\}$$

e quelle di altri romboedri poco più acuti, che, soli o assieme col precedente, costituiscono una delle caratteristiche della zona [100], non soltanto in questi, ma anche nella gran parte dei cristalli di quarzo della Val Devero. Le misure ottime col romboedro fondam. e col prisma portano talora al simbolo

$$\{0.23.\bar{23}.7\}\ ,$$

già osservato da Gonnard nel quarzo della vicina Valle di Binn [3], e noto per altre località; oppure al simbolo

$$^*\{0.22.\bar{22}.7\}\ ,$$

[1] Naturalmente non è su queste serie quasi continue di immagini più o meno nitide, di cui è tuttavia interessante osservare il caratteristico modo di raggrupparsi, che ho basato la determinazione dei numerosi romboedri acuti osservati in questi ed in altri cristalli di quarzo della Val Devero.

[2] E. Weiss, «Sitzungs. Niederrh. Ges. Bonn.», 9 dic. 1871, p. 149.

[3] F. Gonnard, *Notes crystallographiques sur le quarz*, « Bullet. soc. Franç. de minér. », Parigi, 1902, XXV, 95,

che pure ritroveremo in altri cristalli della Val Devero [1]. Più frequentemente corrispondono ad una delle due forme prossime, di simbolo

$$\{0.10.\bar{10}.3\} \quad e \quad * \{0.17.\bar{17}.5\}:$$

nuova quest'ultima, ed osservata invece la prima in un cristallo di Alexander County, nel Nord-Carolina [2].

Seguono poi spesso, alle precedenti, una o due faccettine di romboedri più acuti, le quali talvolta ricompaiono più in basso ad interrompere il piano delle facce prismatiche. Sicuramente determinate e ritrovate in cristalli diversi sono:

$\{06\bar{6}1\}$, $\{09\bar{9}1\}$, * $\{0.14.\bar{14}.1\}$, $\{0.17.\bar{17}.1\}$, più frequenti, e

$\{0.11.\bar{11}.1\}$, $\{0.13.\bar{13}.1\}$, $\{0.18.\bar{18}.1\}$, meno frequenti.

Probabili sono anche $\{0.10.\bar{10}.1\}$, e $\{0.16.\bar{16}.1\}$, i cui simboli però saranno meglio confermati dai cristalli di altri giacimenti della Val Devero.

Nuova è la forma * $\{0.14.\bar{14}.1\}$; incerta era ritenuta, fino ad ora, la $\{0.18.\bar{18}.1\}$, data come probabile da G. vom Rath [3]; rara è la forma $\{09\bar{9}1\}$ osservata, prima d'ora, soltanto nei cristalli del Nord-Carolina [4].

La *bipiramide trigonale* s $\{11\bar{2}1\}$, con faccettine sottilissime, e il *trapezoedro trigonale* x $\{51\bar{6}1\}$ si trovano nella maggior parte dei cristalli, mentre è più raro il trapezoedro u $\{31\bar{4}1\}$.

Nel cristallo destro, rappresentato dalla figura 2ª della tavola, si osservano, assieme coi due trapezoedri positivi destri, anche sottili faccette di un trapezoedro sinistro negativo, di simbolo $\{34\bar{7}3\}$, già osservato da Artini nel quarzo di Val Malenco [5]. La figura 1 riproduce invece uno dei cristalli più tipici di questo giacimento, con marcato abito trigonale per la riduzione molto notevole, verso l'estremità libera, della zona dei romboedri inversi.

(1) Ho indicato tale simbolo come nuovo per il quarzo. Allo stesso però corrisponderebbero i valori recentemente dati da E. Grill (*opera citata*), per una forma del quarzo di Val d'Ala, determinata col simbolo prossimo, e pure nuovo, $\{0.13.\bar{13}.4\}$.

Si ha infatti: $(01\bar{1}1)$: $(0.22.\bar{22}.7)$ calcolato 24°9′ e misurati: Val d'Ala: 24°10′, 24°15′; calcescisti di Devero: 24°3′, 24°9′, 24°10′, 24°10′, 24°12′,; mentre per $(01\bar{1}1)$:$(0.13.\bar{13}.4)$ si ha un valore teorico di 24°36′, che differisce di 8′ soltanto dall'angolo 24°44′ della forma nota $\{0.23.\bar{23}.7\}$.

E ciò varrebbe naturalmente anche per i romboedri diretti corrispondenti.

Tuttavia anche la forma $\{0.13.\bar{13}.4\}$, data da Grill, potrebbe ritenersi confermata dalle misura di alcuni cristalli di quarzo del Gneis Ticino, che farò prossimamente oggetto di una breve nota.

(2) I. E. Pogue e V. Goldschmidt, *Zwei Quarze von Alexander County.* « Zeitschr. Krystall. » 1913, LI, 271.

In alcuni cristalli ad abito piramidale acuminato del Sempione, G. Cesàro ha osservato faccette opache di romboedro inverso, che hanno una posizione molto prossima al $\{0.10.\bar{10}.3\}$ e per le quali egli dà come più probabile il simbolo $\{0.27..\bar{27}.8\}$ intermedio fra i due simboli più semplici e molto prossimi osservati per la Val Devero $\{0.10.\bar{10}.3\}$ e $\{0.17.\bar{17}.5\}$. (G. Cesaro, « Bull. Acad. R. de Belgique – Cl. de Sc. » 1907 e « Zeitschr. Krystall. » 1909, XLVI, 484).

(3) G. vom Rath. *Ueber ausgezeichnete Quarzkrystalle aus Nord-Carolina*, « Sitzungsber der Niederrhein Ges. etc. », Bonn, 1885, XLII; e anche *Einige neue Flächen am Quarz* « Zeitschr. Krystall. » 1887, XII, 535.

(4) G. vom Rath, *op. cit.*; A. C. Gill, *Beiträge zur Kenntniss des Quarzes*, « Zeitschr. Krystall. » etc. 1894, XXII, 100.

(5) E. Artini, *Quarzo di Val Malenco*, « Mem. R. Accad. Lincei ». Roma 1888, ser. 4ª, vol. V, pag. 6.

I *geminati*, secondo la comune legge del Delfinato, non sono rari nei cristalli di quarzo dei calcescisti di Devero. In essi si ripetono generalmente le zone dei romboedri diretti con le faccette di trapezoedro }516̄1{; l'abito quindi dei geminati viene ad essere più o meno modificato per la prevalenza delle facce della forma }303̄1{, sulle quali sono spesso evidenti le tracce di geminazione, che delimitano talora plaghe a superficie quasi opaca ed a contorno irregolare.

Delle misure eseguite riporto soltanto alcuni angoli che determinano la posizione delle forme nuove o di quelle rare nel quarzo, tralasciando di riassumere le osservazioni che si riferiscono alle forme più generalmente note.

I calcoli per questi, come anche per gli altri quarzi di Val Devero, furono eseguiti con la:

$$\textit{costante di Kupffer}: \quad c = 1{,}09997\ldots \quad (r : m = 38^{\circ}.13'),$$

generalmente accettata dai trattati di mineralogia. Infatti si ha nel quarzo dei calcescisti di Devero, per l'angolo fra il romboedro fondam. ed il prisma, un valore, medio di 27 osservazioni,

$$10\bar{1}1 : 10\bar{1}0 = 38^{\circ}.11\,{}^{1}/_{2}' \quad (\text{fra i limiti: } 38^{\circ}.8' - 38^{\circ}.16'),$$

valore prossimo al 38°.13', calcolato.

Angoli	Valori calcolati	Valori osservati		Numero
		Limiti	Medie	
101̄1 : 505̄2	20°.44'	20°.40' – 20°.55'	20.46	4
» : 13.0.1̄3̄.5	21.22	21.19 – 21.21	21.20	3
» : 808̄3	21.46	21.50 – 21.52	21.51	2
» : 909̄1	33.13	33.10 – 33.14	33.11	3
011̄1 : 0.23.2̄3̄.11	17.24	17.20 – 17.23	17.21	3
» : 0.21.2̄1̄.10	17.40	17.34 – 17.42	17.37	6
» : 099̄4	18.56	18.43 – 19.2	18.52	3
» : 0.17.1̄7̄.7	20.15	20.8 – 20.21	20.16	3
» : 0.11.1̄1̄.4	22.14	22.7 – 22.27	22.18	8
» : 0.22.2̄2̄.7	24.9	24.3 – 24.12	24.9	5
» : 0.23.2̄3̄.7	24.44	24.42 – 24.46	24.44 ½	8
» : 0.10.1̄0̄.3	24.55 ½	24.52 – 24.58	24.55	11
» : 0.17.1̄7̄.5	25.10 ½	25.6 – 25.11	25.8	10
» : 099̄1	33.13	33.8 – 33.20	33.15	5
» : 0.13.1̄3̄.1	34.45	34.40 – 34.48	34.44	3
» : 0.14.1̄4̄.1	35.—	34.55 – 35.3	34.59	6
» : 0.16.1̄6̄.1	35.24	35.20 – 35.25	35.23	4
» : 0.17.1̄7̄.1	35.34	35.31 – 35.36	35.33	6
» : 0.18.1̄8̄.1	35.43	35.41 – 35.44	35.43	3
101̄1 : 347̄3	34.18 ½	—	34.18	1
0111 : »	27.37	—	27.35	1
011̄0 :	32.33 ½	—	32.36	1

Quarzo del monte Cervandone.

Come ho già accennato, i cristalli di quarzo sono frequenti nelle fenditure del *gneiss Leone-Ofenhorn* in tutto il gruppo del monte Cervandone. Bei cristalli, limpidi ed incolori, raramente affumicati, di dimensioni molto varie, ho raccolto infatti, sia sulla parete nord-est, che si stacca da quella cima verso la Punta della Rossa, sia sullo sperone est della piramide terminale del Cervandone, sia nelle morene del ghiacciaio della Rossa, come anche al Passo del Cornera (fra il Monte Cervandone e il Pizzo Boccareccio).

Frequentemente il quarzo si trova con i cristalli e le associazioni a rosetta di *ematite titanifera*, di cui ho già trattato in una precedente nota[1], assieme con cristallini di *adularia* o con laminette di *muscovite*. Compagni più rari sono la *tormalina*, *il rutilo*, la *magnetite*, la *calcite*.

Una distinzione fra i cristalli di *quarzo* raccolti nelle varie località ora ricordate riesce certamente superflua e non giustificata dalle variazioni di abito, che, nelle sue linee fondamentali, si mantiene quasi costante e ripete, per la terminazione molto acuta, per le differenze di forme e di sviluppo fra le zone dei romboedri diretti e quelle degli inversi, il caratteristico abito, nettamente trigonale, già descritto per i cristalli dei calcescisti di Devero.

Ciò è mostrato chiaramente dalle figure 3, 4, 5, 6 della tavola annessa

Nella *zona dei romboedri diretti* possiamo rilevare con notevole frequenza il ripetersi, due, tre, o più volte, della serie di forme comprese fra $\{30\bar{3}1\}$ ed il prisma: anche queste alternanze a gradinata concorrono quindi spesso ad acuminare il cristallo nella sua parte terminale. Ciò si osserva specialmente nei cristalli della parete nord-est del Cervandone e in quelli del Passo Cornera (vedi figure n. 5 e 6 della tavola).

È frequente il romboedro $\{50\bar{5}3\}$, ed ho osservato in un cristallo anche il $\{50\bar{5}4\}$, già citato da Des Cloizeaux [2] per il quarzo di Traversella, e ritrovato in poche altre località (Harz; Elba) [3].

Pure in un solo cristallo osservai una faccia corrispondente alla forma * $\{19.0.\bar{19}.7\}$ che dò solo come probabile.

Prevale sempre il $\{30\bar{3}1\}$, però, naturalmente, con riduzione di sviluppo in quei cristalli ove le sue facce si ripetono, per alternanza, con quelle dei romboedri più acuti e del prisma. Si sviluppa, più che nei cristalli dei calcescisti di Devero, il $\{40\bar{4}1\}$, e sono meglio

(1) A. Bianchi. *Ilmenite ed ematite titanifera di Val Devero*, « Atti Soc. ital. Sc. nat. », Milano, 1921, LX, 127.

(2) A. Des Cloizeaux, *Mémoire sur la crystallisation et la structure intérieure du quarz.* (Mém. prés. par div. Sav.), Parigi, 1858, XV, 4.

(3) O. Luedecke, *Die Minerale des Harzes*, Berlino, 1896. Recensione in « Zeitschr. Krystall. etc. », 1898, XXIX, 182. — F. Millosevich. *I 5000 Elbani del Museo di Firenze* « Pubbl. R. Istit. Studi Sup. », Firenze, 1914.

definite successivamente le faccette dei romboedri $\{50\bar{5}1\}$ e $\{60\bar{6}1\}$ o del romboedro di posizione intermedia

$$\{11.0.\bar{1}\bar{1}.2\}$$

che è quasi sempre presente e che assume valore di forma caratteristica per la zona, mancando il corrispondente romboedro inverso nei cristalli del quarzo di Val Devero.

Meno frequente è la vicina forma $\{16.0.\bar{1}\bar{6}.3\}$, che Des Cloizeaux diede come forma incerta per il quarzo del Brasile e di Traversella e che Artini confermò, osservandola nel quarzo di Val Malenco [1].

Fra i romboedri più acuti ho potuto sicuramente rilevare in un solo cristallo $\{80\bar{8}1\}$ e $\{90\bar{9}1\}$, e in due cristalli diversi $\{10.0.\bar{1}\bar{0}.1\}$, $\{13.0.\bar{1}\bar{3}.1\}$, e il $*\{17.0.\bar{1}\bar{7}.1\}$, nuovo [2].

Nella *zona dei romboedri inversi*, che anche nei cristalli del Cervandone è più ricca di forme, meglio individuate, della precedente zona, ritroviamo $\{02\bar{2}1\}$, $\{09\bar{9}4\}$, già ricordate per i cristalli dell'Alpe Devero, e notiamo inoltre le forme, che nel quarzo sono rare

$$\{0.13.\bar{1}\bar{3}.6\}\ ,\ \{07\bar{7}3\}\ ,\ \{05\bar{5}2\}\ ,$$

e la

$$\{0.11.\bar{1}\bar{1}.4\}$$

caratteristica per la zona e presente in un gran numero di cristalli.

Dell'altro gruppo di forme caratteristiche, comprese fra $\{03\bar{3}1\}$ e $\{04\bar{4}1\}$, troviamo:

frequentissima, la $\{07\bar{7}2\}$,

le cui facce hanno spesso sviluppo prevalente su quelle degli altri romboedri inversi, e sono talora finemente striate e quasi opache, talora distinte per una marcata e meno fitta striatura trasversale:

frequenti, $\{0.10.\bar{1}\bar{0}.3\}$ e $*\{0.17.\bar{1}\bar{7}.5\}$;

più rare, $*\{0.22.\bar{2}\bar{2}.7\}$ e $\{0.23.\bar{2}\bar{3}.7\}$.

Si trovano anche, in qualche cristallo, le due forme estreme $\{03\bar{3}1\}$ e $\{04\bar{4}1\}$.

I romboedri inversi

$$\{05\bar{5}1\}\ ,\ *\{0.16.\bar{1}\bar{6}.3\}\ ,\ \text{probab.}\ *\{0.17.\bar{1}\bar{7}.3\}\ ,\ \{06\bar{6}1\}\ ,$$

dei quali i due contrassegnati sono nuovi, furono da me osservati in diversi cristalli.

[1] E. Artini, op. cit.; A. Des Cloizeaux, op. cit.

[2] Altri romboedri acuti come $\{15.0.\bar{1}\bar{5}.2\}$, $\{12.0.\bar{1}\bar{2}.1\}$, $\{16.0.\bar{1}\bar{6}.1\}$, $\{33.0.\bar{3}\bar{3}.1\}$, di incerta determinazione, sono da ritenersi più probabilmente come dovuti a spostamenti graduali dei primi, più sicuri, per combinazione alternante col prisma.

Fra i romboedri più acuti notiamo come sicuri i seguenti:

$$\{08\bar{8}1\}\ ,\ \{09\bar{9}1\}\ ,\ \{0.10.\bar{10}.1\}\ ,\ \{0.12.\bar{12}.1\}\ ,\ {}^*\{0.14.\bar{14}.1\}\ .$$
$$\{0.15.\bar{15}.1\}\ ,\ \{0.17.\bar{17}.1\}\ ,$$

ciascuno dei quali fu osservato almeno quattro volte, in cristalli differenti. Essi poi si ripetono o si sostituiscono a vicenda nelle zone corrispondenti in uno stesso cristallo. I più frequenti sono il $\{09\bar{9}1\}$, il $\{0.14.\bar{14}.1\}$ e il $\{0.17.\bar{17}.1\}$, dei quali si è già detto a proposito dei cristalli del giacimento precedente. La $\{0.15.\bar{15}.1\}$ entra fra le forme sicure del quarzo, poichè era incerta la determinazione fattane da G. vom Rath nel quarzo di Alexander County (Nord-Carolina).

Molto probabile è anche la forma $\{0.16.\bar{16}.1\}$, che fu osservata solo nel quarzo di Reichenstein [1]; ma anche per questa forse, come per altre osservate nei cristalli del Cervandone, quali la $\{0.11.\bar{11}.1\}$, $\{0.13.\bar{13}.1\}$, $\{0.18.\bar{18}.1\}$ ecc., non si può dire con certezza se si tratti di nuove forme, o non piuttosto di facce vicinali delle precedenti, leggermente spostate dalla vera posizione loro, per la già ricordata combinazione alternante col prisma.

Nella *zona* $[01\bar{1}]$, oltre alla *piramide trigonale* $s\ \{11\bar{2}1\}$ ed al *trapezoedro positivo* $x\ \{51\bar{6}1\}$, presenti nella grande maggioranza dei cristalli osservati, troviamo frequentemente $u\ \{31\bar{4}1\}$ e più raramente $y\ \{41\bar{5}1\}$. In un solo cristallo ho osservato anche sottili faccettine della forma positiva $v\ \{71\bar{8}1\}$; in tale cristallo, fedelmente riprodotto dalla figura 5 della tavola, è inoltre ben rappresentata la *zona* $[10\bar{1}]$ dai

trapezoedri positivi: $\{71\bar{8}7\}$, $t\ \{32\bar{5}3\}$, $\{54\bar{9}5\}$,

e *negativi*: $W\ \{3.7.\bar{10}.3\}$, $\mu\ \{13\bar{4}1\}$,

che presentano una fine striatura parallela all'asse della zona [2].

Ho ritrovato la forma $\{32\bar{5}3\}$ anche in altro cristallo del monte Cervandone. Così pure in altri individui si notano le faccette sottili e striate delle forme w e μ o di qualche altra prossima, che non si riesce a determinare, perchè spesso, anzichè di vere forme, si tratta di una smussatura degli spigoli fra romboedri diretti e inversi, o fra questi ed i trapezoedri positivi; smussatura, che appare come un prolungamento assottigliato, e più fortemente striato, delle facce della bipiramide trigonale nella zona $[10\bar{1}]$. Anche in ciò dunque si ha un buon criterio per l'orientamento di questi cristalli di quarzo.

(1) R. B. Hare, *Mineralien aus dem Serpentin von Reichenstein in Schlesien*, Breslau, 1897 (ved. « Zeitschr. Krystall. etc. », 1880, IV, 298).

(2) Essendo il cristallo in questione semplice e negativo, le forme surriportate presentano, come vedesi nel disegno, le facce $(\bar{1}2\bar{1}1)$ della bipir. trig. $(\bar{5}6\bar{1}1)$ e $(\bar{7}8\bar{1}1)$ (« err. corr. ») di trapez. sin. pos., $(\bar{1}4\bar{3}1)$ e $(\bar{3}.10.\bar{7}.3)$ di trap. destro negativo, $(\bar{3}5\bar{2}3)$, $(\bar{5}9\bar{4}5)$ e $(\bar{7}8\bar{1}7)$ di trap. sin. positivo Rare nel quarzo le due ultime forme, osservate da E. Artini nel *Quarzo di Val Malenco* (loc. cit.); confermata la $\{71\bar{8}7\}$ da W. H. Hobbs (vedi « Zeitschr. Krystall ». 1897, XXIIX, 335) nel quarzo di Wisconsin (Michigau) e dubbia la $\{54\bar{9}5\}$ nel quarzo di Carrara (ritenuta di corrosione da G. Von. Rath, « Zeitschr. Krystall. » 1885, X, 487).

In un altro individuo, fra le facce $\{30\bar{3}1\}$ e $\{31\bar{4}1\}$ ho notata una sottile faccetta che avrebbe il simbolo di un nuova forma: $\{12.3.\bar{15}.4\}$. Data però la sua sottigliezza e una leggera curvatura, non è improbabile che si tratti piuttosto di una faccetta di corrosione, simile a quelle osservate ed ottenute da Molengraaff (¹) (V. tav. figura 4ª).

Non si può rilevare una maggior frequenza di cristalli destri o di sinistri. In quelli in cui si ha una ripetizione alternata dei romboedri diretti sul prisma, anche il trapezoedro $x\ \{51\bar{6}1\}$ ricompare con due, tre, o più faccette parallele, come si osserva nella figura 6. Questa rappresenta un geminato di due individui destri, compenetrati secondo la « legge di geminazione del Delfinato », che frequentemente si osserva anche in questi cristalli di quarzo. Le tracce di geminazione sono particolarmente evidenti sulle facce di romboedro $\{30\bar{3}1\}$.

Fra le particolarità delle facce notiamo ancora, che su quelle del romboedro fondam. diretto $\{10\bar{1}1\}$ (ben più raramente anche su quelle dell'inverso) si osservano talora dei rilievi di corrosione a contorno di triangolo isoscele con lati leggermente curvi, col vertice acuto orientato verso il vertice del cristallo e con una sottile striatura parallela ai lati; rilievi cioè depressi e lanceolati, simili a quelli già notati da Des Cloizeaux (²) e da Aloisi (³) nei cristalli di quarzo del marmo di Carrara; ma spesso troncati superiormente da una faccetta, pure triangolare, parallela al piano della $\{10\bar{1}1\}$, su cui i rilievi si trovano.

Un altro giacimento del Monte Cervandone, nel quale trovai il quarzo, in cristalli più semplici di quelli ora descritti, ma di abito simile, è il giacimento di *epidoto*, con *adularia*, *titanite*, ecc., che ho già ricordato a proposito di quest'ultimo minerale (⁴) e che trovasi sulla parete sud del monte, entro le litoclasi di uno scisto anfibolico-epidotico, intercalato nel *gneiss Leone-Ofenhorn*.

Le forme osservate nel quarzo di questo giacimento sono:

$$\{10\bar{1}0\}\ ;\ \{01\bar{1}1\}\ ;\ \{07\bar{7}2\}\ ,\ \{05\bar{5}1\}\ ,\ \{0.18.\bar{18}.1\}\ ;\ \{10\bar{1}1\},$$
$$\{50\bar{5}3\}\ ,\ \{30\bar{3}1\}\ ,\ \{40\bar{4}1\}\ ,\ \{11.0.\bar{11}.2\}\ ,\ \{90\bar{9}1\}\ ,\ \{17.0.\bar{17}.1\},$$
$$\{11\bar{2}1\}\ ,\ \{31\bar{4}1\}\ ,\ \{51\bar{6}1\}\ \text{e probabili}\ \{16.0.\bar{16}.3\}\ \text{e}\ \{15.0.\bar{15}.2\}.$$

(¹) G. A. F. Molengraaff, *Ueber natürliche und künstliche Aetzerscheinungen am Quarz*, « Zeitschr. Krystall. etc. », 1888, XIV, 173.

(²) A. Des Cloizeaux, op. cit., pag. 21.

(³) P. Aloisi, *Il quarzo dei marmi di Carrara* (« Memorie Soc. Toscana di sc. nat. », Pisa, 1909, vol. XXV, 33).

(⁴) A. Bianchi. *Titanite di Val Devero*, (Atti « Soc. ita. di sc. nat. », Milano, 1916, LV, 119).

Anche per i cristalli del M. Cervandone riporto solo i valori angolari delle forme più caratteristiche per questi giacimenti e nuove o rare nel quarzo :

Angoli	Valori calcolati	Valori osservati		Numero
		Limiti	Medie	
$10\bar{1}0 : 16.0.\bar{16}.3$	29°.49′	29°.42′ - 29°.45′	29°.44′	4
» $: 11.0.\bar{11}.2$	30.4	29.56 - 30.5	30.—	11
» $: 17.0.\bar{17}.\bar{1}$	35.34	35.33 - 35.36	35.34	3
$0111 : 0.13.\bar{13}.6$	18.14	18.11 - 18.16	18.13 ½	4
» $: 09\bar{9}4$	18.56	18.50 - 19.6	18.57	4
» $: 07\bar{7}3$	19.34	19.24 - 19.31	19.29	5
» $: 05\bar{5}2$	20.44	20.48 - 20.59	20.50 ½	4
» $: 0.11.\bar{11}.4$	22.14	22.9 - 22.28	22.20	12
» $: 0.22.\bar{22}.7$	24.9	24.5 - 24.7	24.6	3
» $: 0.23.\bar{23}.7$	24.44	—	24.45	2
» $: 0.10.\bar{10}.3$	24.55 ½	24.53 - 24.59	24.55	9
» $: 0.17.\bar{17}.5$	25.10 ½	25.8 - 25.13	25.11 ½	7
» $: 07\bar{7}2$	25.32	25.22 - 25.38	25.31	29
» $: 0.16.\bar{16}.3$	29.49	29.40 - 29.48	29.45 ½	6
» $: 0.17.\bar{17}.3$	30.18 ½	30.17 - 30.25	30.20	3
» $: 09\bar{9}1$	33.13	33.6 - 33.14	33.10	7
» $: 0.12.\bar{12}.1$	34.28	34.26 - 34.30	34.29	5
» $: 0.14.\bar{14}.1$	35.—	34.55 - 34.57	34.56	6
» $: 0.15.\bar{15}.1$	35.12 ½	35.10 - 35.14	35.13	5
» $: 0.16.\bar{16}.1$	35.24	35.20 - 35.26	35.22 ½	5
» $: 0.18.\bar{18}.1$	35.43	35.40 - 35.45	35.43	6
$10\bar{1}1 : 71\bar{8}7$	5.39	—	5.45	1
$11\bar{2}1 :$ »	23.15	—	23.8	1
$10\bar{1}1 : 54\bar{9}5$	24.52	24.40 - 24.55	24.45	2
$11\bar{2}1 :$ »	4.2	4.— - 4.20	4.7	2
$10\bar{1}1 : 12.3.\bar{15}.4$	27.6	—	26.53	1
$01\bar{1}1 :$ »	50.20	—	50.11	1
$30\bar{3}1 :$ »	10.43	10.22 - 10.34	10.29	3
$31\bar{4}1 :$ »	3.—	2.47 - 3.2	2.54	3

Quarzo della Punta d'Arbola.

Già nel 1859 Wiser (1) e nel 1866 Kenngott (2) citarono i cristalli di quarzo del *Monte Albrun*, denominazione più comprensiva dell'attuale, e che allora indicava tutto il gruppo dell'*Arbola*, chiamato poi nelle carte svizzere *Ofenhorn*.

Più recentemente Lewis, nel 1903 (3), descrisse cristalli del lato sud dell'Ofenhorn, cioè del versante italiano della Punta d'Arbola. Egli dà le seguenti forme:

$\{10\bar{1}0\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{50\bar{5}3\}$, $\{30\bar{3}1\}$, $\{40\bar{4}1\}$, $\{14.0.\bar{14}.3\}$,
$\{50\bar{5}1\}$, $\{70\bar{7}1\}$, $\{80\bar{8}1\}$, $\{10.0.\bar{10}.1\}$:
$\{01\bar{1}1\}$, $\{04\bar{4}1\}$, $\{05\bar{5}1\}$;
$\{11\bar{2}\bar{1}\}$, $\{31\bar{4}1\}$, $\{41\bar{5}1\}$, $\{9.2.\bar{1}\bar{1}.2\}$ oppure $\{17.4.\bar{2}\bar{1}.4\}$;
$\{13\bar{4}1\}$, $\{15\bar{6}1\}$; $\{23\bar{5}3\}$.
e incerte: $\{13.0.\bar{13}.3\}$ e $\{13.0.\bar{13}.1\}$.

Più precise notizie riguardanti il giacimento troviamo poi nello studio geo-mineralogico della Valle di Binn di L. Desbuissons (4).

Il gruppo dei giacimenti principali della Punta d'Arbola, ove anche i bei cristalli di quarzo abbondano, trovasi a sud della cima, nella regione del *Passo del Forno* (sul versante di Val Devero) e del *Ghiacciaio del Forno* (sul versante del lago Vannino).

Poichè ho già parlato di questi giacimenti nella mia nota sulla « Titanite di Val Devero » (5), ricorderò solo brevemente che il *gneiss Ofenhorn* presenta, in tutta questa zona, frequenti alternanze con strati a *facies*-anfibolica e cloritica e intercalazioni di anfiboliti, ricche talora di epidoto.

Il *quarzo* qui si trova abitualmente con cristalli di *periclino* e di *titanite* oppure con cristallini di *albite* o di *adularia*: talvolta è anche accompagnato da zeoliti (*eulandite*, *stilbite*).

È in cristalli generalmente limpidissimi, spesso però rivestiti di finissima clorite o con inclusioni della stessa nella parte d'attacco alla roccia. Più raramente include anche cristalli di anfibolo.

Moltissimi fra i cristalli di quarzo sono di abito normale e semplici, presentando solo la combinazione delle forme comuni, $m\,\{10\bar{1}0\}$, $r\,\{10\bar{1}1\}$, $z\,\{01\bar{1}1\}$, $s\,\{11\bar{2}1\}$, con o senza $x\,\{51\bar{6}1\}$, alle quali talvolta si aggiunge una faccetta di romboedro diretto, $\{40\bar{4}1\}$, o $\{60\bar{6}1\}$, o $\{70\bar{7}1\}$.

(1) D. F. Wiser, « N. Jahrb. f. Min. etc. », 1859, p. 424.

(2) A. Kenngott, *Die Minerale der Schweiz*, Leipzig, 1866.

(3) W. Lewis, *Notes on minerals from the neighbourhood of Binn*, « Miner. Mag. », Londra, 1903, XIII, 293.

(4) L. Desbuissons, *La Vallée de Binn (Valais)*, Losanna 1909, pag. 71 e 134.

(5) A. Bianchi, op. cit.

Questi cristalli, più regolari, si trovano specialmente ad ovest del Passo del Forno; ma anche qui, come nel giacimento a nord del Ghiacciaio del Forno, sono frequenti individui più complessi, con abito meno regolare, spesso geminati secondo la comune « legge del Delfinato ».

Il loro abito non ha così spiccate caratteristiche come quello degli altri cristalli di quarzo di Val Devero, già descritti; e la differenza fondamentale sta nel fatto che nei quarzi dell'Arbola troviamo sempre molto povera di forme e anche mal formata la zona dei romboedri inversi, mentre è ricca di facce, spesso ben definite, la zona dei romboedri diretti, fra i quali la prevalenza di $\{30\bar{3}1\}$ è poco frequente e poco rilevante. Maggior importanza assume pure la zona $[01\bar{1}]$, ossia $[11\bar{2}1 : 51\bar{6}1]$, che presenta talvolta numerose faccette di trapezoedri positivi.

Le forme già date da Lewis furono tutte trovate nei cristalli da me raccolti e studiati, ad eccezione solo della $\{13.0.1\bar{3}.1\}$, la cui determinazione rimane dubbia. Sono invece confermate per la località le altre forme incerte:

$$\{13.0.\bar{13}.3\}\ ,\ \{9.2.\bar{11}.2\}\quad e\quad \{17.4.2\bar{1}.4\}\ .$$

Fra i *romboedri diretti*, le forme $\{50\bar{5}3\}$ e $\{30\bar{3}1\}$ sono frequenti: però in qualche cristallo (Passo del Forno), in luogo della prima, osservai la

$$^*\{17.0.\bar{17}.10\}\ ,$$

e in parecchi individui, assieme colla seconda forma più semplice, od al suo posto, osservai, sicura e caratteristica, la presenza del romboedro di simbolo

$$\{22.0.\bar{22}.7\}\ .$$

Il romboedro $\{40\bar{4}1\}$ è sempre presente nei cristalli ricchi di forme, e sempre con facce regolarissime e perfettamente speculari. È raro invece il $\{50\bar{5}1\}$, perchè spesso sostituito da qualche forma prossima, come

$$\{14.0.\bar{14}.3\}\ ,\ \{16.0.\bar{16}.3\}\ ,\quad e\quad ^*\{19.0.\bar{19}.4\}\ (^1).$$

E pure raramente si trova nei cristalli dell'Arbola la $\{11.0.\bar{11}.2\}$, tanto frequente e caratteristica per la zona nei cristalli del Cervandone: mentre ho notato invece, in quattro dei cristalli osservati, la nuova forma vicina

$$^*\{17.0.\bar{17}.3\}$$

Ancora nella zona dei romboedri diretti, troviamo poi qua e là rappresentati, in cristalli diversi, alcuni dei seguenti romboedri più acuti:

$$\{60\bar{6}1\}\ ,\ \{80\bar{8}1\}\ ,\ \{90\bar{9}1\}\ .$$

(1) Tale simbolo fu determinato in base a misure ottime, con limiti vicinissimi di osservazione (vedi a pag. 73). Tuttavia per la grande prossimità della forma $\{14.0.\bar{14}.3\}$, più frequente in questi cristalli e già ben nota nel quarzo, riporto solo come probabile il simbolo nuovo $\{19.0.\bar{19}.4\}$ nel gruppo delle forme vicine a $\{50\bar{5}1\}$ e caratteristiche per la zona $[010]$.

più frequenti nei cristalli del Passo del Forno,

$$\{70\bar{7}1\}\ ,\ \{10.0.\overline{10}.1\}\ ,\ {}^*\{21.0.\overline{21}.1\}\ ,$$

più frequenti in quelli del Ghiacciaio del Forno.

Fra i romboedri inversi, solo eccezionalmente ho osservato $\{04\bar{4}1\}$ e $\{05\bar{5}1\}$, dati da Lewis, e pure raramente trovai qualche faccia di romboedro più acuto ben definita e speculare, che si potesse determinare con sicurezza, e cioè

$$\{08\bar{8}1\}\ ,\ \{09\bar{9}1\}\ ,\ \{0.10.\overline{10}.1\}\ ,\ \{0.12.\overline{12}.1\}\ ,\ \{0.13.\overline{13}.1\}\ ,$$

nel solo giacimento del Ghiacciaio del Forno, e $\{0.17.\overline{17}.1\}$ in questo e anche al Passo del Forno.

In genere, in tale zona troviamo direttamente combinato il prisma col romboedro fondam. inverso $z\,\{01\bar{1}1\}$, e con una certa frequenza troviamo una combinazione alternante delle due stesse forme, che determina una superficie a gradinata più o meno fortemente incisa, a cui segue una più marcata striatura trasversale sulle corrispondenti facce del prisma; oppure si presentano, mal definite, opache o striate, facce di romboedri inversi, molto acuti, o facce vicinali di $\{01\bar{1}0\}$.

Anche queste facce del prisma sono spesso opache, mentre sono speculari quelle corrispondenti alle zone di romboedri diretti.

Nella *zona* $[01\bar{1}]$, oltre alla *bipiramide trigonale* $s\ \{11\bar{2}1\}$ ed ai *trapezoedri* $u\ \{31\bar{4}1\}$, $y\ \{41\bar{5}1\}$, $\{9.2.\overline{11}.2\}$ $x\ \{51\bar{6}1\}$, già notati da Lewis, e che si osservano in tutte e due i giacimenti principali dell'Arbola, altri trapezoedri positivi si trovano in parecchi cristalli del Ghiacc. del Forno, ricchi di forme e frequentemente geminati.

Così la $\{9.2.\overline{11}.2\}$, che è in essi molto frequente, è spesso accompagnata dalle faccette di un'altra forma prossima, caratteristica per il giacimento, e nuova per il quarzo,

$${}^*\{14.3.\overline{17}.3\}\ .$$

Così, in luogo del trapezoedro $y\,\{41\bar{5}1\}$, si trova in qualche cristallo una forma prossima di simbolo più complesso, come la $\{17.4.\overline{21}.4\}$, già notata in modo dubbio anche da Lewis, o la vicina ${}^*\{25.6.\overline{31}.6\}$, più frequente e anch'essa nuova.

Così pure altre faccette di trapezoedro positivo si raggruppano in alcuni cristalli di questo giacimento, presso la $\{51\bar{6}1\}$, che non manca mai, ma che ne risulta in gran parte sostituita. Esse appartengono pure talvolta alla stessa zona $[01\bar{1}]$, fino ad ora considerata, e si determinano coi simboli

$${}^*\{61\bar{7}1\}\ ,\ {}^*\{11.2.\overline{13}.2\}\ \text{ e }\ {}^*\{16.3.\overline{19}.3\}\ ,$$

non ancora noti per le forme osservate nel quarzo.

Più spesso però, in luogo di queste, o con le stesse, si presentano facce vicinali poco inclinate su di esse e che dànno al goniometro gruppi di immagini riflesse, di poco uscenti dalla zona $[01\bar{1}]$.

La determinazione di alcune di tali facce vicinali, più nitide e piane, sebbene ottenuta isolandone le immagini dai riflessi delle altre, non può avere se non un valore relativo ; e quindi solo come probabili, e per meglio definire questo gruppo di facce vicinali caratteristiche, che sostituiscono spesso i tre nuovi trapezoedri sopra detti, riporto i seguenti simboli complessi, che ho calcolati:

* $\{33.6.\overline{39}.7\}$, vicinale di $\{51\bar{6}1\}$ sulla zona $[\bar{1}23]$, cioè fra $\{51\bar{6}1\}$ e $\{30\bar{3}1\}$;
* $\{50.8.\overline{58}.9\}$, vicinale di $\{61\bar{7}1\}$;
* $\{47.8.\overline{55}.9\}$, vicinale di $\{11.2.\overline{13}.2\}$, sulla zona $[\bar{2}56]$, cioè fra $\{11.2.\overline{13}.2\}$, e $\{30\bar{3}1\}$.

Una sottile faccetta di $v\ \{71\bar{8}1\}$ completa in qualche cristallo la serie dei trapezoedri positivi della zona $[01\bar{1}]$.

Nella *zona* $[\bar{1}01]$, cioè $[10\bar{1}1 : 11\bar{2}1]$, già il Lewis, come dissi, aveva osservato i trapezoedri negativi $\mu\ \{13\bar{4}1\}$ e $x\ \{15\bar{6}1\}$, dei quali io ritrovai il primo in qualche cristallo del giacimento a nord del Ghiacciaio del Forno. Più frequentemente però io osservai altri trapezoedri negativi, di posizione più prossima alla bipiramide trigonale $\{11\bar{2}1\}$, in quei cristalli che presentano anche la serie di trapezoedri positivi sopra descritti.

Si tratta, come abbiamo visto anche per diversi cristalli del monte Cervandone, di una o più faccette che, seguendo con piccoli angoli alla $\{11\bar{2}1\}$ e presentandosi come un prolungamento assottigliato e finemente striato di questa lungo la zona $[\bar{1}01]$, dànno un sicuro criterio di orientamento del cristallo. (V. Figure 7 ed 8).

Per alcune di tali faccette, ripetutamente osservate in cristalli differenti, possiamo ritenere sufficientemente determinati i simboli:

$$\{35\bar{8}3\}\ ,\ \{34\bar{7}3\}\ ,\ \{5.6.\overline{11}.5\}\ ,\ \{8.9.\overline{17}.8\}\ ,\ \{11.12.\overline{23}.11\}\ ,$$

non nuovi per il quarzo (1); e possiamo aggiungere, sebbene osservata in un solo cristallo, anche la forma dal simbolo nuovo

$$*\ \{14.15.\overline{29}.14\}\ ,$$

calcolata in base a ottime misure degli angoli formati coi due romboedri fondamentali. (vedi elenco a pag. seg.). Per altre invece delle faccette in questione, i simboli $\{45\bar{9}4\}$, $\{23\bar{5}2\}$, $\{5.7.\overline{12}.5\}$, dedotti da una sola misura sulla zona $[\bar{1}01]$, sono poco sicuri.

Meglio determinate, con ottime misure angolari, alcune faccette di *trapezoedri positivi* della stessa zona, osservate ripetutamente in alcuni cristalli geminati del Passo del Forno, e cioè:

$$\{32\bar{5}3\}\ ,\ *\ \{10.7.\overline{17}.10\}\ \text{ e }\ *\ \{15.14.\overline{29}.15\}:$$

(1) La forma $\{5.6.\overline{11}.5\}$ fu notata da W. Lewis (*Krystallograph. Notizien*, «Zeitschr. Krystall.» 1883, VII, 175) in un cristallo di ignota provenienza.

Le $\{34\bar{7}3\}$ e $\{8.9.\overline{17}.8\}$ furono osservate da E. Artini nel quarzo di Val Malenco (op. cit.).

La $\{11.12.\overline{23}.11\}$ è nota, oltre che per quest'ultimo, anche per altri giacimenti alpini: Pfitsch. in Tirolo (Des Cloizeaux), Scopi, in Svizzera (G. vom. Rath).

già nota la prima e osservata, all'Arbola, anche in un cristallo del Ghiacc. del Forno; nuove le altre due, delle quali la seconda, prossima alla bipiramide trigonale, è più frequente

È molto probabile anche, come vicinale di $\{32\bar{5}3\}$ che sostituisce in uno di questi cristalli, la forma * $\{22.15.\bar{37}.22\}$, la quale appartiene alla stessa zona $[\bar{1}01]$ ed alla zona $[01\bar{1}1 : 22.0.\bar{22}.7]$, caratteristica, come abbiamo visto per parecchi cristalli dell'Arbola, in sostituzione della comune $[01\bar{1}1 : 30\bar{3}1]$.

In un cristallo del Ghiacc. del Forno, ricco di romboedri diretti e di trapezoedri positivi della zona $[01\bar{1}]$ (figura 8), trovansi anche, sulla zona $[\bar{1}31]$, fra $(10\bar{1}1)$ e $(41\bar{5}1)$, due faccette piccole, ma regolari e ben determinabili, del trapezoedro $\{61\bar{7}3\}$, che Des Cloizeaux dà come forma sicura del quarzo, senza indicazione del giacimento, e del nuovo trapezoedro * $\{9.2.\bar{11}.3\}$. Quest'ultimo ricompare in qualche altro cristallo della stessa località, ma con faccettine sottili, leggermente incurvate, che sembrano smussature di corrosione dello spigolo fra $(31\bar{4}1)$ e $(30\bar{3}1)$, piuttosto che vere facce.

Ho già accennato alla frequenza, anche fra i cristalli di quarzo dell'Arbola, di geminati per compenetrazione secondo la comune « legge del Delfinato ». (Asse di gemin. l'asse trigonale). In un solo cristallo del Ghiacciaio del Forno, riprodotto dalla figura 7, ho osservato la geminazione secondo la « legge del Brasile ». (Piano di gemin. una faccia di prisma $(11\bar{2}0)$.

In altre località della regione dell'Arbola, oltre alle due descritte, si possono raccogliere cristalli di quarzo, che presentano però minore interesse.

Ricorderò quì soltanto alcuni individui raccolti alla *Bocchetta d'Arbola* (*Albrunpass*), nel gneiss, assieme con cristallini di *ottaedrite* e *clorite*, oppure con *albite* ed *ematite*; cristalli che, per l'abito e per le forme (vedi tabella generale a fine nota), ricordano quelli già descritti del monte Cervandone.

Altri cristalli, raccolti poco più a valle, nei calcescisti, sono perfettamente simili a quelli corrispondenti dell'Alpe Devero.

Dalle osservazioni fatte sui cristalli di quarzo della Punta d'Arbola riporto i seguenti valori angolari:

Angoli	Valori calcolati	Valori osservati		Numero
		Limiti	Medie	
Zona [010]				
$10\bar{1}1 : 17.0.\bar{17}.10$	13°22′	13°16′–13°25′	13°20′	5
» $: 22.0.\bar{22}.7$	24.9	24.3 – 24.11	24.7	14
» $: 13.0.\bar{13}.3$	27.55	27.56 – 28.—	27.58	2
» $: 14.0.\bar{14}.3$	28.38	28.30 – 28.40	28.35	11
(» $: 19.0.\bar{19}.4$	28.48	28.47 – 28.51	28.50	6)
» $: 16.0.\bar{16}.3$	29.49	29.45 – 29.48	29.47	5
» $: 17.0.\bar{17}.3$	30.18 ½	30.15 - 30.22	30.19	6
» $: 21.0.\bar{21}.1$	36.4	36.4 – 36.5	36.4 ½	5
Zona $[01\bar{1}]$				
$31\bar{4}1 : 01\bar{1}1$	48.22 ½	48.17 – 48.25	48.20	7
» $: 10\bar{1}1$	28.42	28.35 – 28.45	28.39	6
$41\bar{5}1 : 01\bar{1}1$	52.17	52.10 – 52.20	52.17	9
» $: 10\bar{1}1$	30.14	30.6 – 30.10	30.8 ½	5
$25.6.\bar{31}.6 : 01\bar{1}1$	52.47	52.45 – 52.50	52.49	6
» $: 10\bar{1}1$	30.18 ½	30.14 – 30.17	30.16	5
$17.4.\bar{21}.4 : 01\bar{1}1$	53.1 ½	52.58 – 53.8	53.—	3
» $: 10\bar{1}1$	30.24	30.21 – 30.25	30.23	3
$9.2.\bar{11}.2 : 01\bar{1}1$	53.41	53.38 – 53.43	53.40 ½	18
» $: 10\bar{1}1$	30.42	30.39 – 30.45	30.41	12
$14.3.\bar{17}.3 : 01\bar{1}1$	54.6	54.5 – 54.14	54.9 ½	8
» $: 10\bar{1}1$	30.53	30.49 – 30.59	30.53	6
$51\bar{6}1 : 01\bar{1}1$	54.51	54.46 – 54.56	54.51	24
» $: 10\bar{1}1$	31.14	31.8 – 31.16	31.12	17
$16.3.\bar{19}.3 : 01\bar{1}1$	55.31	55.26 - 55.35	55.29	4
» $: 10\bar{1}1$	31.33	31.25 – 31.30	31.29	3
$11.2.\bar{13}.2 : 01\bar{1}1$	55.50	55.54 – 55.56	55.55	2
» $: 10\bar{1}1$	31.42	—	31.35	1
$61\bar{7}1 : 01\bar{1}1$	56.39 ½	56.30 – 56.32	56.31	3
» $: 10\bar{1}1$	32.7	—	32.8	1
» $: 50\bar{5}3$	19.49	—	19.39	1
$71\bar{8}1 : 01\bar{1}1$	58.—	58.2 – 58.10	58.5	2
» $: 10\bar{1}1$	32.48 ½	32.45 – 32.48	32.46	2
Vicinale di $(51\bar{6}1)$ = Zona $[\bar{1}23]$				
$33.6.\bar{39}.7 : 01\bar{1}1$	55.1 ½	55.2	55.2	2
» $: 10\bar{1}1$	30.31	30.29 – 30.39	30.36	2
Vicinale di $(11.2.\bar{13}.2)$ = Zona $[\bar{2}56]$				
$47.8.\bar{55}.9 : 01\bar{1}1$	55.53 ½	55.46 – 55.55	55.51	3
» $: 10\bar{1}1$	31.11	31.10 – 31.16	31.13	3

Continuazione:

Angoli	Valori calcolati	Valori osservati — Limiti	Valori osservati — Medie	Numero
Vicinale di $(61\bar{7}1)$:				
$50.8.\overline{58}.9 : 01\bar{1}1$	56°.29′	56°.25′ – 56°.26′	56°.25 ½′	2
» $: 10\bar{1}1$	31.30	31.33	31.33	2
» $: 32\bar{5}3$	25.57	—	25.52	1
Zona $[\bar{1}01]$				
$32\bar{5}3 : 10\bar{1}1$	21.47	21.45 – 21.47	21.46 ½	2
» $: 01\bar{1}1$	31.51	31.50 – 31.52	31.50 ½	3
» $: 30\bar{3}1$	25.40	25.35 – 25.38	25.36 ½	2
e *vicinale*:				
$22.15.\overline{37}.22 : 10\bar{1}1$	22.9	22.—	22.—	2
» $: 01\bar{1}1$	31.40	—	31.44	1
» $: 22.0.\overline{22}.7$	26.14	—	25.54	1
$10.7.\overline{17}.10 : 10\bar{1}1$	22.35	22.35 – 22.39	22.37	2
» $: 01\bar{1}1$	31.28	31.25 – 31.28	31.26 ½	2
$15.14.\overline{29}.15 : 10\bar{1}1$	27.38	27.38 – 27.40	27.39	4
» $: 01\bar{1}1$	29.20	29.19 – 29.20	29.19 ½	4
$11\bar{2}1 : \{10\bar{1}1, 01\bar{1}1\}$	28.54	28.49 – 29.—	28.53 ½	37
$14.15.\overline{29}.14 : 10\bar{1}1$	30.11	—	30.8	1
» $: 01\bar{1}1$	28.31	—	28.31	1
$11.12.\overline{23}.11 : 10\bar{1}1$	30.31 ½	30.33 – 30.36	30.34	2
» $: 01\bar{1}1$	28.25	—	28.20	1
$8.9.\overline{17}.8 : 10\bar{1}1$	31.6	31.— – 31.19	31.9	3
» $: 01\bar{1}1$	28.16	28.12	28.12	2
$5.6.\overline{11}.5 : 10\bar{1}1$	32.19	32.15 – 32.21	32.18	2
» $: 01\bar{1}1$	27.58 ½	—	28.—	1
$34\bar{7}3 : 10\bar{1}1$	34.18 ½	34.4 – 34.30	34.18	3
» $: 01\bar{1}1$	27.37	—	27.30	1
$35\bar{8}3 : 10\bar{1}1$	38.29	—	38.35	1
» $: 01\bar{1}1$	27.7	—	27.—	1
Zona $[\bar{1}31]$				
$61\bar{7}3 : 10\bar{1}1$	19.33	—	19.30	1
» $: 01\bar{1}1$	48.39 ½	—	48.28	1
» $: 40\bar{4}1$	11.20	—	11.17	1
$9.2.\overline{11}.3 : 10\bar{1}1$	26.35 ½	26.13 – 26.30	26.20	3
» $: 01\bar{1}1$	50.55 ½	—	51.6	1
» $: 11\bar{2}1$	22.10	—	22.15	1

Quarzo del gneiss Antigorio.

I cristalli di quarzo che si possono raccogliere nel *gneiss Antigorio* sono meno interessanti di quelli del *gneiss Leone-Ofenhorn* e dei *calcescisti di Devero.*

Essi però, sebbene con minor ricchezza di forme, ricordano in generale, per la presenza di alcuni dei romboedri caratteristici e per l'abito, i cristalli del Monte Cervandone.

Senz'altro quindi credo sufficiente riportare, nell'elenco generale, le forme osservate nei cristalli raccolti in due località differenti:

1°) sul *Monte Cistella*, poco sopra il laghetto di Brumei (Croveo) [1];

2°) sul *Monte Forno* (o Pizzo La Colla), nel giacimento di titanite ed adularia sopra l'Alpe Suzzo (Croveo) [2].

Una breve descrizione meritano alcuni cristalli di quarzo raccolti poco sopra questo ultimo giacimento. Formano un gruppo solo di individui tozzi, che misurano da 1½ a 3 cm. di larghezza, per 3 a 6 cm. circa di sviluppo massimo, secondo l'asse verticale.

Sono accompagnati da cristallini minori di quarzo, dello stesso tipo, di *feldispato* (*periclino*), da qualche cristallino tabulare, giallo chiaro, di *titanite*, e da *clorite.* I cristalli di *quarzo*, ultimi in ordine di formazione, sono trasparenti ed incolori, ma presentano inclusioni, talora molto abbondanti, di lamelle sottilissime ed allungate di *biotite*, o anche di aghetti d'*epidoto* e di cristallini laminari di *ematite.*

A rappresentare l'abito costante e le principali forme osservate in questi cristalli, serve molto bene l'individuo disegnato a figura 9 della tavola [3].

L'elenco delle forme è riportato pure nel quadro generale, a fine Nota.

Su alcuni di questi cristalli di quarzo si osserva, all'estremità libera, un ricoprimento di *clorite vermicolare*, adagiata e parzialmente compenetrata sulle facce dei romboedri fondamentali $\{10\bar{1}1\}$ e $\{01\bar{1}1\}$ e su quelle della bipiramide trigonale $\{11\bar{2}1\}$ e dei trapezoedri positivi.

I vermicoli di clorite diminuiscono rapidamente di numero e di lunghezza, sulle prime faccette di romboedri acuti, lasciando spesso al loro posto molte brevi incisioni, e mancando sulle facce del prisma. Anche su questo, però, sono rimaste spesso abbondanti e minute traccie della clorite scomparsa, sotto forma di qualche piccola lamella verde, trasparente, a contorno esagonale o tondeggiante, o di numerosi piccoli incavi corrispondenti.

Cosicchè il caratteristico e parziale ricoprimento procloritico fa pensare al risultato di una associazione regolare della clorite col quarzo nell'ultimo periodo di formazione di questo; per la quale gli aggregati vermicolari di clorite avrebbero assunto una

(1) Anche i cristalli che si raccolgono nei noduli di quarzite affioranti presso la cima del M. Cistella, e di cui ho ricordato qualche vistoso esemplare a pag. 1, sono di tipo analogo.

(2) A. Bianchi, *Titanite di Val Devero* (*Ossola*), « Atti Soc. Ital. Sc. Nat. », Milano 1916, LV, 91.

(3) Si noti: lo sviluppo prevalente del romboedro fondamentale diretto $\{10\bar{1}1\}$: l'alternanza degli altri romboedri diretti col prisma; la prevalenza del prisma sui romboedri inversi, ridotti a faccette sottili e fittamente striate, o quasi opache, per le quali troviamo anche in questi cristalli i simboli $\{0.11.\bar{1}\bar{1}.4\}$ $\{0.10.\bar{1}\bar{0}.3\}$, $\{0.7.\bar{7}.2\}$, frequenti specialmente nel quarzo del Cervandone: la serie di trapezoedri positivi della zona $[01\bar{1}]$, con la forma $\{9.2.\bar{1}\bar{1}.2\}$ comune nei cristalli del Ghiacc. del Forno (Arbola).

posizione più o meno adagiata sulle facce terminali del quarzo, mentre su quelle del prisma verticale si sarebbero trovati impiantati con la base, offrendo quindi la minor resistenza al distacco e lasciando solo qualche lamella di sfaldatura, a testimoniare la loro presenza.

Un accrescimento di questo tipo fra quarzo e clorite non mi risulterebbe finora osservato.

Riporto, come sintesi delle osservazioni fatte sui cristalli di quarzo della Val Devero e delle considerazioni già esposte, il *quadro generale delle forme determinate*, indicando la loro frequenza relativa, col numero delle osservazioni in cristalli diversi per ciascuno dei varî giacimenti considerati, e col numero complessivo delle combinazioni differenti in cui ogni forma fu trovata.

Ho indicato in modo distinto le determinazioni sicure da quelle probabili, e dall'elenco ho escluso senz'altro tutte le forme incerte (e generalmente anche quelle non confermate in cristalli diversi), per riunire solo le forme sicure o almeno molto probabili. Alcune di esse sono molto prossime, ma caratteristiche: talvolta isolate talvolta associate fra loro, ma tuttavia ben distinte. Ho indicato quelle che hanno caratteri di facce vicinali.

Solo fra i trapezoedri alcuni si possono ritenere sicuri anche se osservati una sola volta, perchè ben determinati in base a due o più angoli su zone diverse.

È ben notevole il numero complessivo delle forme osservate (84 sicure + 9 vicinali + 5 probabili), ed è anche più notevole, per un minerale già tanto noto ed illustrato, il numero delle forme nuove trovate nei cristalli di Val Devero (17 sicure + 8 vicinali + + 4 probabili).

V'è pure un numero considerevole di forme, ritenute finora incerte o probabili per il quarzo ed ora confermate.

Da uno sguardo complessivo all'elenco delle forme osservate ed alla loro frequenza nei cristalli della Val Devero, risultano i principali raggruppamenti di forme caratteristici per le diverse zone; e dalla considerazione particolare dei diversi giacimenti si nota che possiamo distinguere in due gruppi principali tutti i cristalli di quarzo di questa regione: da un lato cioè possiamo riunire i cristalli dei calcescisti di Devero (II), del gneiss Antigorio [Monte Cistella (I A)], e del gneiss « Leone Ofenhorn » [Monte Cervandone (III A), Bocchetta d'Arbola (IV)]; dall'altro abbiamo invece i cristalli delle intercalazioni basiche a *facies* anfibolica e cloritica, con epidoto o titanite, del gneiss « Leone Ofenhorn » [Monte Cervandone-Sud (III B), Passo del Forno (V A) e Ghiacciaio del Forno (V B)].

La distinzione morfologica fra i due gruppi risulta naturalmente più netta, considerando i cristalli dei giacimenti principali (II e III A) (V A e V B), che offrono maggior copia di forme ad un tale confronto.

Vediamo così una gran ricchezza e frequenza di forme della zona [100], dei romboedri inversi, nei cristalli del primo gruppo, che sono quelli che presentano anche più tipico e più marcato l'abito trigonale a terminazione molto acuta. La povertà di forme di tale zona, mal definita, ed invece una maggiore importanza delle zone [$\bar{1}01$] e [$01\bar{1}$] a trapezoedri, sono caratteristiche dei cristalli del secondo gruppo e specialmente di quelli del giacimento a nord del Ghiacc. del Forno (Arbola). La zona [010], dei romboedri diretti, è ricca di forme nei cristalli di entrambi i gruppi di giacimenti; ma, come abbiam visto, nei cristalli dell'Arbola (2° gruppo) esse sono meglio determinate.

I cristalli del giacimento di titanite e adularia del Monte Forno (gneiss Antigorio, I B) hanno caratteri comuni sia coll'uno che coll'altro dei due grandi gruppi ora distinti.

Mi limito qui a queste sole considerazioni riassuntive di ordine morfologico, e non mi estendo a confronti con cristalli di quarzo simili d'altri giacimenti, nè mi fermo ad altre considerazioni d'ordine paragenetico, dovendo ritornare su tale argomento nel lavoro riassuntivo sui giacimenti della Val Devero, che spero di poter presto pubblicare.

Quadro generale delle forme osservate nel Quarzo di Val Devero.

FORME * = *nuove* p. = *probabili* v. = che si presentano solamente come facce *vicinali* di altre a simbolo semplice —			Gneiss Antigorio — I		Calcescisti — II	Gneiss Leone-Ofenhorn (α) e intercalazioni a *facies* anfibolica ecc. (β)					Numero complessivo delle combinazioni diverse in cui fu osservata ciascuna forma
						III Monte Cervandone		IV	V Punta d'Arbola		
			A **Monte Cistella**	B **Monte Forno** Giacimento titanite, adularia ecc.	**di Devero**	A (α) Giacimenti ematite titanifera	B (β) Giacimento epidoto, titanite ecc.	**Bocchetta d'Arbola** (α)	A (β) Giacimento titanite, feldispati ecc. Passo del Forno	B (β) Giacimento titanite, feldispati ecc. Ghiacciaio del Forno	
	SIMBOLI *Bravais*	*Miller*	*N. B.* — I numeri in carattere minore, fra parentesi, si riferiscono a determinazioni probabili; quelli in carattere maggiore esprimono solo determinazioni sicure. (Es.: 3 (1) = 3 sic. + 1 prob.								
	Zona [010] = Romboedri diretti										
	$10\bar{1}1$	100	3	5	11	22	3	3	17	19	83
	$50\bar{5}4$	$14.\bar{1}.\bar{1}$	..	..	..	1	..	..	1	..	2
	$50\bar{5}3$	$13.\bar{2}.\bar{2}$	2	5	3 (1)	5 (2)	2	..	5	10	39 (3)
* v.	$17.0.\bar{17}.10$	$44.\bar{7}.\bar{7}$	..	..	..	..	..	..	2 (1)	..	2 (1)
	$20\bar{2}1$	$5\bar{1}\bar{1}$	..	(1)	2	..	..	..	..	..	2 (1)
	$50\bar{5}2$	$4\bar{1}\bar{1}$	..	..	2	..	..	..	..	..	2
*	$13.0.\bar{13}.5$	$31.\bar{8}.\bar{8}$	..	..	2 (1)	..	..	..	..	..	2 (1)
	$80\bar{8}3$	$19.\bar{5}.\bar{5}$	..	..	2	..	..	..	..	..	2
* p.	$19.0.\bar{19}.7$	$15.\bar{4}.\bar{4}$	..	..	..	1 (1)	..	..	..	..	1 (1)
	$30\bar{3}1$	$7\bar{2}\bar{2}$	3	5	11	20 (2)	3	1	5 (3)	5 (1)	52 (6)
	vic. $30\bar{3}1$	—	..	..	+	..	..	..	+	..	+
*	$22.0.\bar{22}.7$	$17.\bar{5}.\bar{5}$	..	..	(3)	1	..	..	6	6 (1)	13 (4)
	$10.0.\bar{10}.3$	$23.\bar{7}.\bar{7}$	..	..	..	..	..	1 (1)	1	(1)	2 (2)
	$40\bar{4}1$	$3\bar{1}\bar{1}$	3	5	7 (2)	18 (2)	3	2	9	11	58 (4)
	$13.0.\bar{13}.3$	$29.\bar{10}.\bar{10}$	..	..	..	(1)	..	1	1	..	2 (1)
p.	$90\bar{9}2$	$20.\bar{7}.\bar{7}$	..	..	(1)	(1)	..	(1)	(2)	..	(5)
	$14.0.\bar{14}.3$	$31.\bar{11}.\bar{11}$	..	..	..	(2)	..	..	3 (2)	4 (2)	7 (6)
p. *	$19.0.\bar{19}.4$	$14.\bar{5}.\bar{5}$	..	..	(1)	(1)	..	..	3 (1)	2	5 (3)
	$50\bar{5}1$	$11.\bar{4}.\bar{4}$	2	1	4 (1)	10 (5)	..	2	2 (1)	2	23 (7)
	$16.0.\bar{16}.3$	$35.\bar{13}.\bar{13}$	..	2	1	1 (1)	(1)	..	2	2	8 (2)
	$11.0.\bar{11}.2$	$8\bar{3}\bar{3}$	1	2 (1)	..	10 (1)	1	..	1	1 (1)	16 (3)
*	$17.0.\bar{17}.3$	$37.\bar{14}.\bar{14}$	..	..	..	(1)	..	..	3 (1)	1 (1)	4 (3)
	$60\bar{6}1$	$13.\bar{5}.\bar{5}$	(1)	..	1	4 (2)	..	1	2 (2)	1 (1)	9 (6)
	$70\bar{7}1$	$5\bar{2}\bar{2}$	..	..	2	(2)	..	..	1 (2)	4 (1)	7 (5)
	$80\bar{8}1$	$17.\bar{7}.\bar{7}$	..	..	..	1	..	..	2 (2)	..	3 (2)

Continuazione QUADRO GENERALE DELLE FORME ECC.

	FORME		I		II	III		IV	V		TOTALE
			A	B		A (α)	B (β)	(α)	A (β)	B (β)	
	$90\bar{9}1$	$19.\bar{8}\bar{8}$	1	..	3	..	1	1	2 (3)	1 (2)	9 (5)
	$10.0.\bar{1}\bar{0}.1$	$7\bar{3}\bar{3}$	..	..	..	2	..	..	1 (2)	2 (1)	5 (3)
	$13.0.\bar{1}\bar{3}.1$	$9\bar{4}\bar{4}$	..	..	2	2	..	..	..	(1)	4 (1)
	$15.0.\bar{1}\bar{5}.1$	$31.\bar{1}\bar{4}.\bar{1}\bar{4}$	1	..	1 (1)	..	..	..	..	(1)	2 (2)
	$16.0.\bar{1}\bar{6}.1$	$11.\bar{5}.\bar{5}$	1	(1)	..	(2)	..	..	1 (1)	..	2 (4)
*	$17.0.\bar{1}\bar{7}.1$	$35.\bar{1}\bar{6}.\bar{1}\bar{6}$	..	..	..	1 (2)	1	..	..	(1)	2 (3)
*	$21.0.\bar{2}\bar{1}.1$	$43.\bar{2}\bar{0}.\bar{2}\bar{0}$	..	..	..	..	..	..	..	2	2 (1)
	vic. $10\bar{1}0$	—	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	$10\bar{1}0$	$2\bar{1}\bar{1}$	3	5	11	22	3	3	17	19	83
	Zona [100] = Romboedri inversi										
	$01\bar{1}1$	$22\bar{1}$	3	5	11	22	3	3	17	19	83
	$03\bar{3}2$	$55\bar{4}$	..	..	1	..	..	1	..	(1)	2 (1)
	$02\bar{2}1$	$11\bar{1}$	..	..	2 (1)	2	..	(1)	..	..	4 (2)
v.	$0.23.\bar{2}\bar{3}.11$	$34.34.\bar{3}\bar{5}$	..	..	1 (2)	..	..	..	..	..	1 (2)
*	$0.21.\bar{2}\bar{1}.10$	$31.31.\bar{3}\bar{2}$	..	..	3 (1)	..	..	..	..	..	3 (1)
	$0.13.\bar{1}\bar{3}.6$	$19.19.\bar{2}\bar{0}$	..	..	..	2	..	..	..	..	2
	$09\bar{9}4$	$13.13.\bar{1}\bar{4}$	..	..	1 (1)	1 (2)	..	..	..	..	2 (2)
	$07\bar{7}3$	$10.10.\bar{1}\bar{1}$	..	..	..	2 (2)	..	..	..	..	2 (2)
*	$0.17.\bar{1}\bar{7}.7$	$24.24.\bar{2}\bar{7}$	..	(1)	..	2 (1)	..	..	..	..	2 (2)
	$05\bar{5}2$	$77\bar{8}$	..	..	1 (1)	2 (1)	..	..	..	..	3 (2)
	$0.11.\bar{1}\bar{1}.4$	$55\bar{6}$	..	1	6	8 (1)	..	2	..	..	17 (1)
	$03\bar{3}1$	$44\bar{5}$	..	..	2 (1)	4 (1)	..	(1)	..	..	6 (3)
*	$0.22.\bar{2}\bar{2}.7$	$29.29.\bar{3}\bar{7}$	..	..	2	2	..	1	..	..	5
	$0.23.\bar{2}\bar{3}$ 7	$10.10.\bar{1}\bar{3}$	..	..	2	2	..	3	..	..	7
	$0.10.\bar{1}\bar{0}.3$	$13.13.\bar{1}\bar{7}$	(1)	3	6 (1)	5	..	2	..	..	16 (2)
*	$0.17.\bar{1}\bar{7}.5$	$22.22.\bar{2}\bar{9}$	2	..	6 (1)	3 (1)	..	(1)	..	..	11 (3)
	$07\bar{7}2$	334	1	2	(1)	13	2	(1)	..	..	18 (2)
	$04\bar{4}1$	$55\bar{7}$	(1)	(1)	1	2 (1)	..	..	..	2	5 (3)
	$05\bar{5}1$	$22\bar{3}$	..	..	..	3 (2)	1	1	..	..	5 (2)
*	$0.16.\bar{1}\bar{6}.3$	$19.19.\bar{2}\bar{9}$	..	..	..	3 (1)	..	..	..	..	3 (1)
* p.	$0.17.\bar{1}\bar{7}.3$	$20.20.\bar{3}\bar{1}$	..	..	..	1 (2)	..	..	..	..	1 (2)
	$06\bar{6}1$	$7.7.\bar{1}\bar{1}$	..	1	3	3 (1)	..	1	..	..	8 (1)
	$08\bar{8}1$	$33\bar{5}$	..	..	1	3	..	..	..	(1)	4 (1)
	$09\bar{9}1$	$10.10.\bar{1}\bar{7}$	..	1	4	4 (2)	..	1 (1)	..	2	12 (3)
	$0.10.\bar{1}\bar{0}.1$	$11.11.\bar{1}\bar{9}$	1	..	1	3 (1)	..	..	..	1	6 (1)
	$0.11.\bar{1}\bar{1}.1$	$44\bar{7}$	..	1	2	1 (1)	..	..	..	..	4 (1)
	$0.12.\bar{1}\bar{2}.1$	$13.13.\bar{2}\bar{3}$	..	..	1	4 (1)	..	1	..	1	7 (1)
	$0.13.\bar{1}\bar{3}.1$	$14.14.\bar{2}\bar{5}$	..	2	2	(1)	..	(1)	..	1	5 (2)
*	$0.14.\bar{1}\bar{4}.1$	$15.15.\bar{2}\bar{7}$	2	..	3 (1)	5	..	..	..	..	10 (1)

Continuazione Quadro generale delle forme ecc.

	Forme		I A	I B	II	III A (α)	III B (β)	IV (α)	V A (β)	V B (β)	Totale
	$0.15.\overline{15}.1$	$16.16.\overline{29}$	..	..	..	3 (1)	..	..	..	..	3 (1)
	$0.16.\overline{16}.1$	$17.17.\overline{31}$	..	1	(4)	3	..	..	..	..	4 (4)
	$0.17.\overline{17}.1$	$6.6.\overline{11}$	..	..	3 (1)	4	..	..	1	1	9 (1)
	$0.18.\overline{18}.1$	$19.19.\overline{35}$	..	..	2 (1)	2 (1)	1	..	..	..	5 (2)
	vic. $01\bar{1}0$	—	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	Zona $[01\bar{1}]$ $= [01\bar{1}1 : 10\bar{1}0]$										
	$11\bar{2}1$	$41\bar{2}$	1	4	7	18	2	2	8	17	59
	$31\bar{4}1$	$8\bar{1}\bar{4}$	..	3	3	6 (1)	1	..	3 (1)	6 (1)	22 (3)
	$41\bar{5}1$	$10.\bar{2}.\bar{5}$	..	1	..	2	..	..	2	4	9
* v.	$25.6.\overline{31}.6$	$62.\overline{13}.\overline{31}$	..	..	..	..	..	..	..	5	5
	$17.4.\overline{21}.4$	$42.\bar{9}.\overline{21}$	..	..	..	..	..	..	(Lewis)	3 (1)	3 (1)
	$9.2.\overline{11}.2$	$22.\bar{5}.\overline{11}$	..	1	..	..	..	..	2	15	18
*	$14.3.\overline{17}.3$	$34.\bar{8}.\overline{17}$	..	...	..	..	..	..	..	6 (2)	6 (2)
	$51\bar{6}\bar{1}$	$4\bar{1}\bar{2}$	2	5	7 (1)	15 (1)	2	1	6	18	56 (2)
*	$16.3.\overline{19}.3$	$38.\overline{10}.\overline{19}$	..	..	..	..	..	..	..	3 (1)	3 (1)
*	$11.2.\overline{13}.2$	$26.\bar{7}.\overline{13}$	..	..	..	..	..	..	..	2 (1)	2 (1)
*	$61\bar{7}1$	$14.\bar{4}.\bar{7}$	..	..	..	..	..	..	..	3 (1)	3 (1)
	$71\bar{8}1$	$16.\bar{5}.\bar{8}$	..	..	..	1	..	..	..	2 (1)	3 (1)
	e vicinali:										
* v.	$33.6.\overline{39}.7$	$79.\overline{20}.\overline{38}$	..	..	..	..	..	..	..	2	2
* v.	$47.8.\overline{55}.9$	$37.\overline{10}.\overline{18}$	..	..	..	..	..	..	..	3	3
* v.	$50.8.\overline{58}.9$	$39.\overline{11}.\overline{19}$	..	..	..	..	..	..	..	2	2
	Zona $[\bar{1}01]$ $= [10\bar{1}1 : 01\bar{1}0]$										
	$71\bar{8}7$	$22.1.\bar{2}$	..	..	..	1	..	..	..	..	1
* v.	$32\bar{5}3$	$11.2.\bar{4}$	..	..	..	2	..	..	2	1	5
* v.	$22.15.\overline{37}.22$	$27.5.\bar{6}$	..	..	..	..	..	..	1 (1)	..	1 (1)
*	$10.7.\overline{17}.10$	$37.7.\overline{14}$	..	..	..	..	..	..	2	..	2
	$54\bar{9}5$	$19.4.\bar{8}$	..	..	..	1	..	..	..	..	1
* v.	$15.14.\overline{29}.15$	$59.14.\overline{28}$	..	..	..	..	..	..	2	..	2
	$(11\bar{2}1)$	$(41\bar{2})$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
* v.	$14.15.\overline{29}.14$	$57.15.\overline{30}$	..	..	..	..	..	..	..	1	1
	$11.12.\overline{23}.11$	$15.4.\bar{8}$	..	..	..	..	..	..	..	2	2
	$8.9.\overline{17}.8$	$11.3.\bar{6}$	..	..	..	..	..	..	..	2 (1)	2 (1)
	$5.6.\overline{11}.5$	$72\bar{4}$	..	..	..	..	..	..	..	2	2
	$34\bar{7}3$	$13.4.\bar{8}$	..	..	1	(2)	..	..	..	2 (1)	3 (3)
	$3.7.\overline{10}.3$	$16.7.\overline{14}$	..	..	..	1 (1)	..	..	..	..	1 (1)
	$35\bar{8}3$	$14.5.\overline{10}$	..	..	..	(1)	..	..	(1)	1	1 (2)

Continuazione QUADRO GENERALE DELLE FORME ECC.

FORME			I		II	III		IV	V		TOTALE
			A	B		A (α)	B (β)		A (β)	B (β)	
	$13\bar{4}1$	$21\bar{2}$	..	..	..	2 (1)	..	..	..	2 (1)	4 (2)
	$15\bar{6}1$	$8.5.\bar{10}$	..	..	..	..	..	..	(LEWIS)		—
	$61\bar{7}3$	$16.\bar{2}.\bar{5}$	..	..	..	..	..	..	..	1	1
*	$9.2.\bar{11}.3$	$23.\bar{4}.\bar{10}$	..	..	..	..	..	..	..	2 (1)	2 (1)
*p.	$12.3.\bar{15}.4$	$31.\bar{5}.\bar{14}$	..	..	..	2	..	..	..	..	2
	(faccetta di corrosione ?)										
N.° CRISTALLI MISURATI			**3**	**5**	**11**	**22**	**3**	**3**	**17**	**19**	**83**
N.° FORME OSSERVATE:											
Sicure			17	22	43	53	15	21	31	43	**84**
Vicinali.			—	—	1	—	—	—	3	5	**9**
Probabili.			3	4	5	13	1	6	4	7	**5**
N.° FORME NUOVE:											
Sicure			2	—	6	7	1	1	3	8	**17**
Vicinali.			—	—	—	—	—	—	3	5	**8**
Probabili			—	1	3	5	—	2	2	2	**4**

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Nelle FIGURE nn. 3, 6, 7, 8, 9, i cristalli sono disegnati con la orientazione comune, diretta.

Nelle FIGURE nn. 1, 2, 4, 5 i cristalli sono girati di 60° per presentare all'osservatore la zona dei romboedri inversi.

FIG. 1. *Quarzo dei « Calcescisti di Devero » (Alpe Devero)* – XX semplice destro.

Forme: *m* $\{10\bar{1}0\}$ (e vicinali) ; *r* $\{10\bar{1}1\}$, *M* $\{30\bar{3}1\}$, **Γ** $\{40\bar{4}1\}$, *e* $\{50\bar{5}1\}$, ○ $\{70\bar{7}1\}$, ● $\{90\bar{9}1\}$, + $\{13.0.\bar{13}.1\}$, $\{150.\bar{15}.1\}$; *z* $\{01\bar{1}1\}$, $\{0.11.\bar{11}.4\}$, $\{0.17.\bar{17}.5\}$, × $\{06\bar{6}1\}$, ×× $\{09\bar{9}1\}$, ××× $\{0.18.\bar{18}.1\}$; *s* $\{11\bar{2}1\}$; *x* $\{51\bar{6}1\}$.

FIG. 2. *Id. id. (Alpe Devero)* – XX semplice destro.

Forme: *m* $\{10\bar{1}0\}$ (e vicin.) : *r* $\{10\bar{1}1\}$, *i* $\{50\bar{5}3\}$, $\{20\bar{2}1\}$, $\{13.0.\bar{13}.5\}$, $\{80\bar{8}3\}$, $\{50\bar{5}2\}$, *M* $\{30\bar{3}1\}$, **Γ** $\{40\bar{4}1\}$, *e* $\{50\bar{5}1\}$, ● $\{90\bar{9}1\}$; *z* $\{01\bar{1}1\}$, ○ $\{03\bar{3}2\}$, $\{02\bar{2}1\}$ (e vicin.) , $\{09\bar{9}4\}$, $\{0.11.\bar{11}.4\}$; *s* $\{11\bar{2}1\}$; *u* $\{31\bar{4}1\}$, *x* $\{51\bar{6}1\}$; $\{34\bar{7}3\}$.

FIG. 3. *Quarzo del Monte Cervandone (Gneiss « Leone-Ofenhorn »)* – XX semplice sinistro.

Forme: *m* $\{10\bar{1}0\}$; *r* $\{10\bar{1}1\}$, *M* $\{30\bar{3}1\}$, prob. *e* $\{50\bar{5}1\}$ (e vicin.) ; *z* $\{01\bar{1}1\}$, + $\{02\bar{2}1\}$ e vicin.) , ⊹ $\{05\bar{5}2\}$, $\{0.11.\bar{11}.4\}$. $\{0.10.\bar{10}.3\}$, $\{0.17.\bar{17}.5\}$, $\{06\bar{6}1\}$, $\{0.11.\bar{11}.1\}$; *s* $\{11\bar{2}1\}$ *u* $\{31\bar{4}1\}$ *y* $\{4151\}$ *x* $\{51\bar{6}1\}$.

FIG. 4. *Id. id. (Monte Cervandone)* – XX semplice destro.

Forme: *m* $\{10\bar{1}0\}$ (e vicin.) ; *r* $\{10\bar{1}1\}$, prob. $\{19.0.\bar{19}.7\}$. *M* $\{30\bar{3}1\}$ (e vicin.) , **Γ** $\{40\bar{4}1\}$. $\{60\bar{6}1\}$; *z* $\{01\bar{1}1\}$. $\{0.13.\bar{13}.6\}$, $\{09\bar{9}4\}$. $\{0.11.\bar{11}.4\}$, $\{03\bar{3}1\}$ $\{0.22.\bar{22}.7\}$, *h* $\{07\bar{7}2\}$, $\{04\bar{4}1\}$, prob. •–• $\{0.17.\bar{17}.3\}$, $\{09\bar{9}1\}$ prob. $\{0.12.\bar{12}.1\}$, prob. $\{0.14.\bar{14}.1\}$, $\{0.18.\bar{18}.1\}$; *s* $\{11\bar{2}1\}$; *u* $\{31\bar{4}1\}$; prob. ⟋ $\{12.3.\bar{15}.4\}$ (corrosione ?) fra *M* ed *U*.

FIG. 5. *Id. id. (Monte Cervandone)* – Crist. semplice sinistro.

Forme: *m* $\{10\bar{1}0\}$ (e vicin.) ; *r* $\{10\bar{1}1\}$, + $\{50\bar{5}4\}$. *i* $\{50\bar{5}3\}$, *M* $\{30\bar{3}1\}$, prob. $\{13.0.\bar{13}.4\}$, **Γ** $\{4041$, *e* $\{50\bar{5}1\}$, prob. $\{11.0.\bar{11}.2\}$, × $\{80\bar{8}1\}$, ○ $\{17.0\bar{17}.1\}$; *z* $\{01\bar{1}1\}$, $\{03\bar{3}1\}$. $\{07\bar{7}2\}$, $\{08\bar{8}1\}$, $\{0.13.\bar{13}.1\}$: *s* $\{11\bar{2}1\}$; *x* $\{51\bar{6}1\}$, *v* $\{71\bar{8}1\}$: **μ** $\{13\bar{4}1\}$, *W* $\{3.7.\bar{10}.3\}$. $\{54\bar{9}3\}$, $\{32\bar{5}3\}$; ⟍ $\{71\bar{8}7\}$.

N. B. — Nella figura 5 leggi $(\bar{5}6\bar{1}1)$ e $(78\bar{1}1)$ in luogo di $(5\bar{6}11)$ e $(7\bar{8}11)$.

FIG. 6. *Id. id. (Monte Cervandone)* – Geminato « legge Delfinato ».

Forme: *m* $\{10\bar{1}0\}$ (e vicin.) ; *r* $\{10\bar{1}1\}$. *i* $\{50\bar{5}3\}$, *M* $\{30\bar{3}1\}$. **Γ** $\{40\bar{4}1\}$, *e* $\{50\bar{5}1\}$. × $\{11.0.\bar{11}.2\}$, ×× $\{14.0.\bar{14}.1\}$; *z* $\{01\bar{1}1\}$. prob. $\{07\bar{7}3\}$, prob. $\{0.17.\bar{17}.7\}$. *h* $\{07\bar{7}2\}$, $\{05\bar{5}1\}$, $\{0.16.\bar{16}.3\}$. prob. $\{06\bar{6}1\}$, $\{0.10.\bar{10}.1\}$, $\{0.15.\bar{15}.1\}$; *s* $\{11\bar{2}1\}$; *u* $\{31\bar{4}1\}$, *x* $\{51\bar{6}1\}$, * $\{3.7.\bar{10}.3\}$.

FIG. 7. *Quarzo della Punta d'Arbola (Ghiacciaio del Forno)* – Geminato « legge Brasile ».

Forme: *m* $\{10\bar{1}0\}$ (e vicin.) ; *r* $\{10\bar{1}1\}$, *i* $\{50\bar{5}3\}$, **Γ** $\{40\bar{4}1\}$, *e* $\{50\bar{5}1\}$ (e vicin.) ; *z* $\{01\bar{1}1\}$, $\{04\bar{4}1\}$, × $\{08\bar{8}1\}$. $\{09\bar{9}1\}$; *s* $\{11\bar{2}1\}$, ○ $\{25.6.\bar{31}.6\}$, ○○ $\{9.2.\bar{11}.2\}$. *x* $\{51\bar{6}1\}$. $\{61\bar{7}1\}$; * $\{35\bar{8}3\}$.

FIG. 8. *Id. id. (Ghiacciaio del Forno)* – XX semplice destro.

Forme: *m* $\{10\bar{1}0\}$ (e vicin.) ; *r* $\{10\bar{1}1\}$. *i* $\{50\bar{5}3\}$. $\{22.0.\bar{22}.7\}$, $\{40\bar{4}1\}$, $\{14.0.\bar{14}.3\}$. $\{60\bar{6}1\}$. $\{90\bar{9}1\}$; *z* $\{01\bar{1}1\}$, $\{04\bar{4}1\}$ (e vicin.) ; *e* $\{05\bar{5}1\}$ (e vicin.) , $\{08\bar{8}1\}$ (e vicin.) ; *y* $\{41\bar{5}1\}$ ○ $\{9.2.\bar{11}.2\}$, *x* $\{51\bar{6}1\}$; ⊥ $\{61\bar{7}3\}$, ⊥ $\{9.2.\bar{11}.3\}$.

FIG. 9. *Quarzo dello Gneiss Antigorio (Monte Forno, Croveo).*

Forme: *m* $\{10\bar{1}0\}$ (e vicin.) ; *r* $\{10\bar{1}1\}$, *i* $\{50\bar{5}3\}$, *M* $\{30\bar{3}1\}$, **Γ** $\{40\bar{4}1\}$, *e* $\{50\bar{5}1\}$, + $\{16.0.\bar{16}.3\}$; *z* $\{01\bar{1}1\}$, $\{0.11.\bar{11}.4\}$, $\{0.10.\bar{10}.3\}$, $\{07\bar{7}2\}$, $\{0.13.\bar{13}.1\}$, prob. $\{0.16.\bar{16}.1\}$; *s* $\{11\bar{2}1\}$; *u* $\{31\bar{4}1\}$, $\{9.2.\bar{11}.2\}$, *x* $\{51\bar{6}1\}$.

A Bianchi, dis

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 11°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 12°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIV, Fasc. 2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. Fasc. 3°.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XX. Fasc. 1°-3°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO IV.

ANTONIO SIGNORINI

SULL'INTEGRAZIONE APPROSSIMATA DELLE EQUAZIONI CLASSICHE DELLA BALISTICA ESTERNA

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

RELAZIONE

dei Soci E. Almansi, G. A. Crocco e T. Levi-Civita (relatore), letta nella seduta del 1° febbraio 1920, sulla Memoria del prof. Antonio Signorini, intitolata: *Sull'integrazione approssimata delle equazioni classiche della balistica esterna.*

Per l'integrazione approssimata delle equazioni del moto del centro di gravità dei proiettili esistono procedimenti svariati, i quali però si riferiscono tutti ad un arco di traiettoria convenientemente limitato.

Il prof. Signorini, basandosi sopra una sua anteriore ricerca, espone un proprio metodo che consente di abbracciare tutta intera la traiettoria, assicurando una approssimazione uniforme in ogni punto, sia per le coordinate, sia per la grandezza e direzione della velocità. Come l'A. stesso rileva, il pregio teorico del suo metodo è raggiunto con analisi faticosa, sicchè si è tratti a presumere che in pratica si richiederebbero calcoli lunghi e tediosi per assicurare una approssimazione sufficiente. Vi sono però due questioni particolari che hanno reale interesse per l'Artigliere, il tiro teso e il tiro sotto resistenza quadratica, in cui le formule proposte si semplificano notevolmente, prestandosi al calcolo numerico. Questa l'affermazione dell'Autore.

La Vostra Commissione, esprimendo il desiderio e l'augurio che l'Autore stesso voglia quanto prima comprovarla con applicazioni a qualche esempio concreto, riconosce che il lavoro, in cui si trovano esposti l'idea direttiva e lo svolgimento di massima, merita di essere senz'altro accolto fra le Memorie dell'Accademia.

Sull'integrazione approssimata delle equazioni classiche della Balistica Esterna.

Memoria di ANTONIO SIGNORINI

---

§ 1. Le equazioni del moto di un punto grave, G, nell'atmosfera — equazioni classiche della Balistica Esterna — notoriamente possono scriversi nella forma seguente:

$$(\mathrm{E})\qquad \begin{cases} \dfrac{g}{v}\dfrac{d}{d\theta}(v\cos\theta) = c\,\delta(y)\,F(v) \qquad v = v_0 \text{ per } \theta = \varphi \\[2mm] g t = \displaystyle\int_\theta^\varphi \frac{v\,d\theta}{\cos\theta} \\[2mm] g x = \displaystyle\int_\theta^\varphi v^2\,d\theta \\[2mm] g y = \displaystyle\int_\theta^\varphi v^2 \operatorname{tg}\theta\,d\theta \end{cases}$$

[θ inclinazione della traiettoria, φ angolo di proiezione, v_0 velocità iniziale, c costante dipendente dalla forma, dalle dimensioni e dal peso del proietto schematizzato in G, $\delta(y)$ densità balistica media all'altitudine individuata da y, $F(v)$ funzione resistente di Siacci].

In questa Memoria espongo un procedimento d'integrazione delle (E) per archi successivi, che rispetto a quelli già in uso presenta il vantaggio di permettere di seguire il moto di G con un'approssimazione prefissata (non soltanto da un valore di θ ad un valore convenientemente prossimo ad esso, ma anche) dal valore $\theta = \varphi$ fino ad un qualunque valore $\theta = \theta^*$ interno all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \varphi\right)$: e quindi — come il più spesso si richiede nelle applicazioni — dall'origine fino al punto $y = -h < 0$, se [1]

$$\theta^* < \theta_h = [\theta]_{y=-h}.$$

Fintantochè [§§ 2-10] non si introduce alcuna ipotesi particolare e si considera la $F(v)$ come vincolata solo da qualche proprietà di carattere qualitativo, è tutt'altro

[1] Cfr. A. Signorini, *Un teorema di confronto in Balistica Esterna ed alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLIV (1920)], n.^{i} 19 e 29.

che da escludere che il procedimento in questione possa dar luogo a calcoli numerici estremamente pesanti.

Per eliminare questo grave inconveniente occorre rinunziare, almeno in parte, alla generalità del procedimento e convenientemente adattarlo ai singoli casi che hanno un reale interesse per l'Artigliere.

E questo è appunto ciò che ho fatto dopo la trattazione del caso generale, pel caso del tiro teso [§§ 11-16] e pel caso della resistenza quadratica [§§ 17-27].

Per semplicità, ho sempre sottinteso $\varphi > 0$.

Nella trattazione particolare del tiro teso e del tiro sotto resistenza quadratica ho supposto assegnato, non direttamente θ^*, ma invece h: ed ho rappresentato con Y, T_h ed X_h rispettivamente dei limiti superiori [1] dell'altezza del tiro e dei valori di t ed x per $\theta = \theta_h$.

Come unità di lunghezza e di tempo — ovunque occorra precisarle — sono rispettivamente sottintesi il metro e il secondo.

Caso generale.

§ 2. Sia $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_r} + \cdots$ una serie a termini positivi e decrescenti

1°) divergente;

2°) tale che risulti convergente la serie

$$\frac{1}{a_1^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a_2^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \frac{1}{a_r^{\frac{3}{2}}} + \cdots$$

— della quale in appresso rappresenteremo la somma con $S_{\frac{3}{2}}$ — e contemporaneamente si abbia

$$\sum_r^{\infty}{}_s \frac{1}{a_s^2} < \frac{S_2}{a_r} \tag{1}$$

con S_2 numero finito indipendente da r.

Anzi, per semplicità, supporremo anche

$$a_1 = 1.$$

Ad es. la serie armonica soddisfa a tutte le condizioni volute

1°) con [2] $S_{\frac{3}{2}} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = 3$;

2°) con $S_2 = \frac{\pi^2}{6} = \sum_1^{\infty}{}_s \frac{1}{s^2}$,

[1] Cfr. A. Signorini, loc. cit.

[2] Landau, *Primzahlen* (Leipzig, Teubner, 1909), pag. 105.

perchè

$$\frac{\frac{1}{r}}{\sum_{r}^{\infty} s \frac{1}{s^2}} > \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{(2r-1)^2} + \frac{1}{(2r)^2} + \cdots \frac{1}{(3r-1)^2} + \cdots} > \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \cdots} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{6}} .$$

Limitiamoci a trattare il caso

$$\theta^* < 0 ,$$

perchè in sostanza ciò esaurisce la questione.

Scelto arbitrariamente σ entro l'intervallo $(0, 1)$, si determini il minimo valore di n (≥ 1) soddisfacente alla condizione

$$\cos \theta^* \geq (1 - \sigma)^{2 \sum_{1}^{n} s \frac{1}{a_s}} :$$

successivamente si determini il minimo valore di p (≥ 1) per cui

$$\cos \varphi \geq (1 - \sigma)^{2 \sum_{n+1}^{n+p} s \frac{1}{a_s}} .$$

Dopo ciò adottiamo le seguenti notazioni:

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi ; \\ \varphi_p = 0 ; \\ \text{se } p > 1 , \text{ per } r = 1 , \dots , p - 1 \ (^1): \quad \varphi_r = \arccos (1 - \sigma)^{2 \sum_{n+1}^{n+p-r} s \frac{1}{a_s}} ; \\ \text{per } r = p + 1 , \dots , p + n : \quad \varphi_r = - \arccos (1 - \sigma)^{2 \sum_{n+p-r+1}^{n} s \frac{1}{a_s}} . \end{cases}$$

Dato che

1°) se $p > 1$, $\cos \varphi < (1 - \sigma)^{2 \sum_{n+1}^{n+p-1} s \frac{1}{a_s}}$;

2°) se $n > 1$, dall'essere

$$\cos \theta^* < (1 - \sigma)^{2 \sum_{1}^{n-1} s \frac{1}{a_s}}$$

ed

$$\frac{1}{a_1} > \frac{1}{a_n}$$

(1) S'intende che $\arccos \alpha$ rappresenta l'angolo acuto positivo avente per coseno il numero (positivo e < 1) α.

segue

$$\cos\theta^* < (1-\sigma)^{\frac{2\sum_2^n s\frac{1}{a_s}}{}};$$

risulta

$$\varphi_{p+n} \leq \theta^* < \varphi_{p+n-1} < \cdots < \varphi_r < \varphi_{r-1} < \cdots < \varphi_1 < \varphi_0 = \varphi\,.$$

Nel seguito l'intervallo $(\varphi_r, \varphi_{r-1})$ sarà indicato con i_r $(r=1,\ldots,p+n)$.
Introduciamo anche le notazioni:

$$\begin{cases} \text{per } 1\leq r\leq p: & \dfrac{1}{C_r} = (1-\sigma)^{2\sum_{n+1}^{n+p-r+1} s\frac{1}{a_s} - \frac{1}{a_{n+p-r+1}}} \\ \text{per } p+1\leq r\leq p+n: & \dfrac{1}{C_r} = (1-\sigma)^{2\sum_{n+p-r+1}^{n} s\frac{1}{a_s} - \frac{1}{a_{n+p-r+1}}}. \end{cases}$$

Poniamo infine, per brevità,

$$\bar{r} = n+p-r+1 \qquad\qquad (r=1,\ldots,p+n).$$

Dal confronto delle definizioni delle φ_r e C_r segue che se θ appartiene ad i_r $(r=1,\ldots,p+n)$

$$(1-\sigma)^{\frac{1}{a_{\bar r}}} \leq C_r\cos\theta \leq (1-\sigma)^{-\frac{1}{a_{\bar r}}}. \tag{2}$$

§ 3. L'equazione

$$c\,\delta(0)\,F(v_c) = g\sin|\theta^*|$$

perfettamente definisce il valore di v_c, perchè la $F(v)$ costantemente cresce con v.
Rappresentiamo con v_M il più grande dei valori v_0 e v_c; finchè

$$\theta^* \leq \theta \leq \varphi$$

v non potrà superare v_M. Infatti, se $y>0$ notoriamente $v<v_0$; se $y<0$ (e quindi $\theta<0$) dalla (E_1) può trarsi, almeno ove sia $\dfrac{dv}{d\theta}<0$,

$$-g\sin\theta > c\,\delta(y)\,F(v)$$

ed anche, poichè $\delta(y)$ costantemente cresce al decrescere di y,

$$c\,\delta(0)\,F(v) < g\sin|\theta^*|.$$

§ 4. Sia λ un limite superiore del valore assoluto dell'espressione

$$\frac{1}{\delta(y)}\,\frac{\delta(y')-\delta(y)}{y-y'}$$

per

$$|y'-y| < 200$$

ed y variabile tra i valori che gli corrispondono al livello del mare ed al vertice della traiettoria di G.

Ad es. per traiettorie che non raggiungono altitudini superiori ad 8800 può assumersi (¹)

$$\lambda = \frac{4}{3}\, 10^{-4}\,.$$

Siano poi:

k il minimo intero (positivo) soddisfacente alla diseguaglianza

$$\frac{\lambda\, v_M^2}{g k} < 1\,;$$

ν il più grande dei numeri 1 e $\frac{4}{k}$,

$$u_\sigma = \frac{1 - \frac{\sigma}{2}}{(1-\sigma)^2}\,. \tag{3}$$

Da questo punto in avanti, per tutta la trattazione del « Caso generale », converremo che σ [non solo appartenga all'intervallo $(0\,,1)$, ma anche] soddisfi alle due condizioni

$$\sigma < 300\,\lambda$$

$$\frac{\lambda v_M^2}{g} \left\{ \frac{1}{k(1-\sigma)^\nu} + 4\,S_2\,\sigma\, u_\sigma^2 \right\} < 1\,: \tag{4}$$

dalle quali, in particolare, segue

$$\frac{v_M^2}{g k}\, \frac{\sigma}{(1-\sigma)^\nu} + \frac{4\,S_2\, v_M^2\, \sigma^2\, u_\sigma^2}{g} < 300\,. \tag{5}$$

§ 5. Poniamo, per comodità di notazioni,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{r,0} = \varphi_{r-1} \\ \varphi_{\ ,k} = \varphi_r \end{array} \right. \qquad (r = 1\,, \ldots, p+n)$$

e dividiamo l'intervallo

$$i_r \equiv (\varphi_r\,,\, \varphi_{r-1}) \equiv (\varphi_{r,k}\,,\, \varphi_{r,0})$$

in k intervalli parziali

$$i_{r,j} \equiv (\varphi_{r,j}\,,\, \varphi_{r,j-1}) \qquad (r = 1\,, \ldots, p+n\,;\; j = 1\,, \ldots, k)$$

assumendo

$$\text{per } r \leq p: \quad \varphi_{r,j} = \ \ \text{arc cos} \left\{ (1-\sigma)^{\frac{2(k-j)}{k\, a_{\bar r}}} \cos \varphi_r \right\}$$

$$\text{per } r \geq p: \quad \varphi_{r,j} = -\,\text{arc cos} \left\{ (1-\sigma)^{\frac{2j}{k\, a_{\bar r}}} \cos \varphi_{r-1} \right\};$$

(¹) Questo valore di λ è stato tratto dalla 4ª tavola numerica annessa al *Corso teorico-pratico di Balistica Esterna* del col. Bianchi (Torino, Pasta, 1910).

colla condizione ulteriore che φ sia l'estremo superiore dell'eventuale intervallo $i_{1,j}$ che altrimenti non apparterrebbe totalmente a (φ_1, φ) e che si identifichino coll'unico valore φ gli eventuali intervalli $i_{1,j}$ che altrimenti risulterebbero completamente esterni a (φ_1, φ).

Siano α e β i valori di θ agli estremi di un arco a della traiettoria di G, nell'ipotesi che

1°) $\varphi \geq \beta \geq \alpha \geq \theta^*$;

2°) α e β abbiano lo stesso segno.

Detta H la grandezza della differenza dei valori di y agli estremi di a, avremo [1]

$$H = \frac{1}{g}\int_\alpha^\beta v^2 \,|\operatorname{tg}\theta|\, d\theta < \frac{1}{g}\left[v^2 \cos^2\theta\right]_{\theta=\beta} \int_\alpha^\beta |\operatorname{tg}\theta| \frac{d\theta}{\cos^2\theta} < \frac{v_M^2 \cos^2\beta}{2g} \left|\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\alpha\right|$$

e infine

$$H < \frac{v_M^2}{2g}\left|1 - \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\right|. \tag{6}$$

Quindi, rappresentando con $H_{r,j}$ il valore di H relativo alla parte di $i_{r,j}$ comune con (θ^*, φ) [2] e posto

$$H_r = \frac{v_M^2}{2g}\left\{(1-\sigma)^{-\frac{4}{k a_{\bar{r}}}} - 1\right\},$$

dalle (5) si deduce

$$H_{r,j} < H_r \qquad (r = 1, \dots, p+n;\ j = 1, \dots, k).$$

Osserveremo inoltre che

1°) se $\dfrac{4}{k a_{\bar{r}}} < 1$,

$$H_r = \frac{v_M^2}{2g} \frac{1-(1-\sigma)^{\frac{4}{k a_{\bar{r}}}}}{(1-\sigma)^{\frac{4}{k a_{\bar{r}}}}} < \frac{v_M^2}{2g} \frac{\sigma \dfrac{4}{k a_{\bar{r}}} (1-\sigma)^{\frac{4}{k a_{\bar{r}}}-1}}{(1-\sigma)^{\frac{4}{k a_{\bar{r}}}}} < \frac{2 v_M^2}{gk} \frac{1}{1-\sigma} \frac{\sigma}{a_{\bar{r}}};$$

2°) se $\dfrac{4}{k a_{\bar{r}}} > 1$,

$$H_r = \frac{v_M^2}{2g} \frac{1-(1-\sigma)^{\frac{4}{k a_{\bar{r}}}}}{(1-\sigma)^{\frac{4}{k a_{\bar{r}}}}} < \frac{v_M^2}{2g} \frac{\sigma \dfrac{4}{k a_{\bar{r}}}}{(1-\sigma)^{\frac{4}{k a_{\bar{r}}}}} < \frac{2 v_M^2}{gk} \frac{1}{(1-\sigma)^{\nu}} \frac{\sigma}{a_{\bar{r}}};$$

[1] Si tenga presente che lungo tutta la traiettoria $v\cos\theta$ decresce con θ.

[2] Per $r = p+n$, $i_{r,k}$ può risultare parzialmente o totalmente esterno a (θ^*, φ).

donde si conclude che in ogni caso

$$H_{r,j} < H_r < \frac{2v_M^2}{gk}\frac{\sigma}{(1-\sigma)^\nu a_r} \qquad (r=1,\dots,p+n). \tag{7}$$

§ 6. Sia $\delta_{r,j}$ una quantità positiva variabile solo cogli indici r ed j ($r=1,\dots,p+n$; $j=1,\dots,k$) della quale in seguito preciseremo i valori.

Accanto al moto di G prendiamo in esame il moto ausiliare [1], definito per

$$\varphi_{p+n}\,(\leq \theta^*) \leq \theta \leq \varphi$$

dalle equazioni

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{g}{v_a}\dfrac{d(v_a\cos\theta)}{d\theta} = c\,\delta_{r,j}\dfrac{F(v_a C_r\cos\theta)}{C_r\cos\theta} \quad \text{in } i_{r,j}\ (r=1,\dots,p+n;\ j=1,\dots,k)\\[2mm] g\,t_a = \displaystyle\int_\theta^\varphi \frac{v_a\,d\theta}{\cos\theta}\\[2mm] g\,x_a = \displaystyle\int_\theta^\varphi v_a^2\,d\theta\\[2mm] g\,y_a = \displaystyle\int_\theta^\varphi v_a^2\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta \end{cases}$$

insieme alla condizione iniziale

$$v_a = v_0 \quad \text{per} \quad \theta = \varphi$$

[e alla condizione che v_a sia continua in tutto $(\varphi_{n+p}\,.\,\varphi\,]$.

Adottiamo le notazioni di Siacci

$$I(x) = \int_x^\infty \frac{2g\,dx}{x\,F(x)} \qquad T(x) = \int_x^\infty \frac{dx}{F(x)} \qquad D(x) = \int_x^\infty \frac{x\,dx}{F(x)} \qquad A(x) = \int_x^\infty \frac{x\,I(x)\,dx}{F(x)}$$

ed $u = v_a\cos\theta$.

Notoriamente risulta allora in $i_{r,j}$ ($r=1,\dots,p+n$; $j=1,\dots,k$)

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}\,\varphi_{r,j-1} + \dfrac{C_r}{2c\,\delta_{r,j}}\left[I(C_r u_{r,j-1}) - I(C_r u)\right]\\[2mm] t_a - t_{r,j-1} = \dfrac{T(C_r u) - T(C_r u_{r,j-1})}{c\,\delta_{r,j}}\\[2mm] x_a - x_{r,j-1} = \dfrac{D(C_r u) - D(C_r u_{r,j-1})}{c\,\delta_{r,j}\,C_r}\\[2mm] y_a - y_{r,j-1} = \left\{\mathrm{tg}\,\varphi_{r,j-1} + C_r\dfrac{I(C_r u_{r,j-1})}{2c\,\delta_{r,j}}\right\}\times\\[2mm] \qquad\times\dfrac{D(C_r u) - D(C_r u_{r,j-1})}{c\,\delta_{r,j}\,C_r} - \dfrac{1}{2c^2\,\delta_{r,j}^2}\left\{A(C_r u) - A(C_r u_{r,j-1})\right\}. \end{cases}$$

[1] Cfr. A. Signorini, loc. cit., n. 5.

S' intende che deve assumersi

$$u_{1,0} = v_0 \cos \varphi \qquad t_{1,0} = 0 = x_{1,0} = y_{1,0} ,$$

e, per ogni altra coppia di valori di r ed j, i valori di $u_{r,j-1}$, $t_{r,j-1}$, $x_{r,j-1}$, $y_{r,j-1}$ (cioè i valori di u, t_a, x_a, y_a per $\theta = \varphi_{r,j-1}$) devono esser tratti con procedimento ricorrente

1°) se $j > 1$, dalle equazioni:

$$(9) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi_{r,j-1} = \operatorname{tg} \varphi_{r,j-2} + \dfrac{C_r}{2c\,\delta_{r,j-1}} \left[I(C_r u_{r,j-2}) - I(C_r u_{r,j-1}) \right] \\[2ex] t_{r,j-1} - t_{r,j-2} = \dfrac{T(C_r u_{r,j-1}) - T(C_r u_{r,j-2})}{c\,\delta_{r,j-1}} \\[2ex] x_{r,j-1} - x_{r,j-2} = \dfrac{D(C_r u_{r,j-1}) - D(C_r u_{r,j-2})}{c\,\delta_{r,j-1} C_r} \\[2ex] y_{r,j-1} - y_{r,j-2} = \left\{ \operatorname{tg} \varphi_{r,j-2} + C_r \dfrac{I(C_r u_{r,j-2})}{2c\,\delta_{r,j-1}} \right\} \times \\[2ex] \quad \times \dfrac{D(C_r u_{r,j-1}) - D(C_r u_{r,j-2})}{c\,\delta_{r,j-1} C_r} - \dfrac{1}{2c^2 \delta^2_{r,j-1}} \left\{ A(C_r u_{r,j-1}) - A(C_r u_{r,j-2}) \right\} ; \end{cases}$$

2°) se $j = 1$, dalle equazioni:

$$(10) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi_{r,0} = \operatorname{tg} \varphi_{r-1,k-1} + \dfrac{C_{r-1}}{2c\,\delta_{r-1,k}} \left[I(C_{r-1} u_{r-1,k-1}) - I(C_{r-1} u_{r,0}) \right] \\[2ex] t_{r,0} - t_{r-1,k-1} = \dfrac{T(C_{r-1} u_{r,0}) - T(C_{r-1} u_{r-1,k-1})}{c\,\delta_{r-1,k}} \\[2ex] x_{r,0} - x_{r-1,k-1} = \dfrac{D(C_{r-1} u_{r,0}) - D(C_{r-1} u_{r-1,k-1})}{c\,\delta_{r-1,k} C_{r-1}} \\[2ex] y_{r,0} - y_{r-1,k-1} = \left\{ \operatorname{tg} \varphi_{r-1,k-1} + C_{r-1} \dfrac{I(C_{r-1} u_{r-1,k-1})}{2c\,\delta_{r-1,k}} \right\} \times \\[2ex] \times \dfrac{D(C_{r-1} u_{r,0}) - D(C_{r-1} u_{r-1,k-1})}{c\,\delta_{r-1,k} C_{r-1}} - \dfrac{1}{2c^2 \delta^2_{r-1,k}} \left\{ A(C_{r-1} u_{r,0}) - A(C_{r-1} u_{r-1,k-1}) \right\} . \end{cases}$$

§ 7. Ricordiamo che, non soltanto $F(v)$, ma anche $\dfrac{F(v)}{v}$ cresce costantemente con v; onde

$$(11) \quad \begin{cases} \text{per } 0 < \varrho \leq 1 : & \varrho F(v) \geq F(\varrho v) \\ \text{per } \varrho \geq 1 : & \varrho F(v) \leq F(\varrho v) : \end{cases}$$

Dalle $(E)_1$ ed $(A)_1$ segue che per ogni valore di θ appartenente ad $i_{r,j}$ rispettivamente ([1])

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{d\theta} = \operatorname{tg}\theta + \frac{1}{g\cos\theta}\, c\,\delta(y)\, F(v)$$

$$\frac{1}{v_a}\frac{dv_a}{d\theta} = \operatorname{tg}\theta + \frac{1}{g\cos\theta}\, c\,\delta_{r,j}\,\frac{F(v_a C_r \cos\theta)}{C_r\cos\theta}\;;$$

e quindi

$$\frac{d}{d\theta}\log\left(\frac{v}{v_a}\right) = \frac{c\,\delta(y)}{g\cos\theta}\left\{ F(v) - \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)}\,\frac{F(v_a C_r\cos\theta)}{C_r\cos\theta}\right\}.$$

Di qui si deduce che – sempre per θ appartenente ad $i_{r,j}$ – ove sia $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v}{v_a}\right) \leq 0$ sarà pure

$$F(v) \leq \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)}\,\frac{F(v_a C_r\cos\theta)}{C_r\cos\theta}\,,$$

e quindi:

α) se $\frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)}\,\frac{1}{C_r\cos\theta} < 1$,

$$F(v) < F(v_a C_r \cos\theta)$$

cioè

$$\frac{v}{v_a} < C_r\cos\theta$$

ed anche, per la (2),

$$\frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-\frac{1}{a_r}}\;; \tag{12}$$

β) per $\varrho = \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)}\,\frac{1}{C_r\cos\theta} \leq 1$ [cfr. la $(11)_2$]

$$F(v) \leq F\left(v_a\,\frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)}\right)$$

cioè

$$\frac{v}{v_a} \leq \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)}\,. \tag{13}$$

[1] Naturalmente, qui e nel seguito, come valore di $\frac{dv_a}{d\theta}$ nell' estremo inferiore (superiore) di $i_{r,j}$ deve intendersi il valore della derivata destra (sinistra) di v_a per tal valore di θ.

Analogamente si trova che in tutto $i_{r,j}$, ove sia $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v}{v_a}\right) \geq 0$,

$$\alpha) \text{ se } \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)} \frac{1}{C_r \cos\theta} > 1 , \qquad (14) \quad \frac{v}{v_a} > C_r \cos\theta \geq (1-\sigma)^{\frac{1}{a_{\bar{r}}}} ;$$

$$\beta) \text{ se } \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)} \frac{1}{C_r \cos\theta} \leq 1 , \qquad (15) \quad \frac{v}{v_a} \geq \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)} .$$

§ 8. Assumiamo

$$\delta_{r,j} = \delta(y_{r,j-1} \pm \tfrac{1}{2} H_r) \qquad (r = 1, \dots, p+n ; j = 1, \dots, k) \tag{16}$$

scegliendo il segno $+$ oppure $-$ a seconda che $r \leq p$ oppure $r > p$, e sottintendendo, naturalmente, $y_{1,0} = 0$ e tutte le altre $y_{r,j}$ determinate per via ricorrente mediante le (9) e (10).

I §§ immediatamente seguenti saranno dedicati a dimostrare che, subordinatamente a tale scelta delle $\delta_{r,j}$, per ogni valore di θ in $(\theta^\star, \varphi)$ risulta

$$1 - \sigma < \frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-1} \tag{I}$$

$$|t - t_a| < \frac{2^{\frac{3}{2}} S_{\frac{3}{2}} v_M u_\sigma^{\frac{1}{2}}}{g(1-\sigma)} \sigma^{\frac{3}{2}} \tag{II}$$

$$|x - x_a| < \frac{2^{\frac{5}{2}} S_{\frac{3}{2}} v_M v_0 \cos\varphi \, u_\sigma^{\frac{3}{2}}}{g} \sigma^{\frac{3}{2}} \tag{III}$$

$$|y - y_a| < \frac{4 S_2 v_M^2 u_\sigma^2}{g} \sigma^2 : \tag{IV}$$

ciò che senz'altro dà luogo al preannunciato procedimento d'integrazione approssimata delle (E).

§ 9. Dimostriamo in primo luogo che, per $\theta \geq \theta^\star$ ed appartenente ad i_r $(r = 1, \dots, p+n)$,

$$|y - y_a| < \frac{4 S_2 v_M^2 u_\sigma^2}{g \, a_{\bar{r}}} \sigma^2 : \tag{17}$$

diseguaglianza che, essendo sempre $a_{\bar{r}} \geq a_1 = 1$, include la (IV).

La (17) evidentemente sussiste per $\theta = \varphi$. D'altra parte, al variare di s da 1 a $p+n$, $\frac{1}{a_{\bar{s}}}$ costantemente cresce [1]. Pensiamo fissato il valore di r e supponiamo

$$\begin{cases} \varphi_r \leq \theta_r < \varphi_{r-1} \\ \theta^\star \leq \theta_r \end{cases} :$$

[1] S'intende che $\bar{s} = p + n - s + 1$.

inoltre, per semplicità, adottiamo momentaneamente la convenzione di rappresentare con i_r l'intervallo $(\theta_r\, \varphi_{r-1})$ escluso l'estremo θ_r. Dato che $y - y_a$ è funzione continua di θ, per provare la (17) basterà provare che dall' ipotesi che sia

$$|y - y_a| < \frac{4\,S_2\, v_M^2\, u_\sigma^2}{g\, a_{\bar{s}}}\, \sigma^2 \tag{18}$$

in tutto i_s $(s = 1\,, \dots, r)$, segue il verificarsi della (17) per $\theta = \theta_r$.

In $i_{s,j}$, per la (16),

$$\frac{\delta_{s,j}}{\delta(y)} - 1 = \frac{\delta(y_{s,j-1} \pm \frac{1}{2}\, H_s) - \delta(y)}{\delta(y)} \tag{19}$$

col segno $+$ o $-$ a seconda che $s \leq p$ o $s > p$. Inoltre, per la (7),

$$|y_{s,j-1} \pm \tfrac{1}{2}\, H_s - y| \leq |(y_{s,j-1} \pm \tfrac{1}{2}\, H_s - y_a)| + |y_a - y| < \tfrac{1}{2}\, H_s + |y_a - y|:$$

donde (sottintendendo $\theta > \theta_r$) la (18) [insieme alle (7) e (5)] permette di ricavare

$$|y_{s,j-1} \pm \tfrac{1}{2}\, H_s - y| < \left\{ \frac{v_M^2}{gk} \frac{\sigma}{(1-\sigma)^\nu} + \frac{4\,S_2\, v_M^2\, u_\sigma^2\, \sigma^2}{g} \right\} \frac{1}{a_{\bar{s}}} < 300\,.$$

Osservato questo, dalle (18) e (19) si trae [cfr. § 4, di nuovo la (7) e poi la (4)]:

$$\left|\frac{\delta_{s,j}}{\delta(y)} - 1\right| < \lambda\, |y_{s,j-1} \pm \tfrac{1}{2}\, H_s - y| < \lambda \left\{ \tfrac{1}{2}\, H_s + |y_a - y| \right\} <$$
$$< \frac{\lambda\, v_M^2}{g} \left\{ \frac{1}{k\,(1-\sigma)^\nu} + 4\,S_2\, u_\sigma^2\, \sigma \right\} \frac{\sigma}{a_{\bar{s}}} < \frac{\sigma}{a_{\bar{s}}}\,.$$

D'altra parte

$$\frac{\sigma}{a_{\bar{s}}} < 1 - (1-\sigma)^{\frac{1}{a_{\bar{s}}}}$$

onde

$$\left|\frac{\delta_{s,j}}{\delta(y)} - 1\right| < 1 - (1-\sigma)^{\frac{1}{a_{\bar{s}}}}$$

e infine

$$(1-\sigma)^{\frac{1}{a_{\bar{s}}}} < \frac{\delta_{s,j}}{\delta(y)} < (1-\sigma)^{-\frac{1}{a_{\bar{s}}}}\,.$$

Dopo ciò — non appena si richiamino le (12) e (13), le (14) e (15) — risulta evidente che per θ appartenente ad i_s $(s = 1\,, \dots, r)$:

1°) ove $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{v}{v_a}\right) \leq 0$,

$$\frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-\frac{1}{a_{\bar{s}}}}; \tag{20}$$

2°) ove $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v}{v_a}\right) \geq 0$,

$$\frac{v}{v_a} > (1-\sigma)^{\frac{1}{a_s^-}}. \tag{21}$$

Ne segue che in tutto i_s $(s = 1, \ldots, r)$

$$(1-\sigma)^{\frac{1}{a_s^-}} < \frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-\frac{1}{a_s^-}}. \tag{22}$$

Infatti, essendo $\frac{v}{v_a} = 1$ per $\theta = \varphi$, ove la (22) non si verificasse in tutto i_1, in i_1 dovrebbe esistere almeno un valore di θ per cui contemporaneamente fosse

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v}{v_a}\right) \leq 0 \qquad \frac{v}{v_a} \geq (1-\sigma)^{-\frac{1}{a_{n+p}}}$$

[ciò che è contrario alla (20)] o altrimenti

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v}{v_a}\right) \geq 0 \qquad \frac{v}{v_a} \leq (1-\sigma)^{\frac{1}{a_{n+p}}}$$

[ciò che è contrario alla (21)]. E analogamente si dimostra la (22) per $s = 2, \ldots, r$, osservando che dall'essere

$$(1-\sigma)^{\frac{1}{a_{n+p}}} < \frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-\frac{1}{a_{n+p}}}$$

deriva

$$(1-\sigma)^{\frac{1}{a_{n+p-1}}} < \frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-\frac{1}{a_{n+p-1}}},$$

etc.

In base alla (22), dalle $(E)_4$ ed $(A)_4$ si ricava che [1]

$$|y - y_a|_{\theta=\theta_r} \leq \frac{1}{g}\int_{\theta_r}^{\varphi} v^2 \operatorname{tg}\theta \left|\frac{v_a^2}{v^2} - 1\right| d\theta <$$

$$< \sum_1^r {}_s \frac{1}{g} \int_{\varphi_s}^{\pm \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{C_s}} v^2 |\operatorname{tg}\theta| \left\{(1-\sigma)^{-\frac{2}{a_s^-}} - 1\right\} d\theta +$$

$$+ \sum_1^r {}_s \frac{1}{g} \int_{\pm \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{C_s}}^{\varphi_{s-1}} v^2 |\operatorname{tg}\theta| \left\{(1-\sigma)^{-\frac{2}{a_s^-}} - 1\right\} d\theta$$

[1] Evidentemente non resta escluso neppure il caso $\operatorname{arc\,cos} \frac{1}{C_1} > \varphi$.

valendo pel termine s^{mo} di ciascuna sommatoria il segno $+$ o $-$ secondochè $s \leq p$ o $s > p$: ed anche [cfr. la (6)]

$$|y - y_a|_{\theta=\theta_r} < 2 \sum_1^r {}_s \frac{v_M^2}{2g} \left\{ (1-\sigma)^{-\frac{2}{a_s}} - 1 \right\}^2 =$$

$$= \frac{v_M^2}{g} \sum_1^r {}_s \frac{\left\{ 1 - (1-\sigma)^{\frac{1}{a_s}} \right\}^2 \left\{ 1 + (1-\sigma)^{\frac{1}{a_s}} \right\}^2}{(1-\sigma)^{\frac{4}{a_s}}} <$$

$$< \frac{v_M^2}{g} \sum_1^r {}_s \frac{\left\{ \frac{\sigma}{a_s} (1-\sigma)^{\frac{1}{a_s}-1} \right\}^2 \left\{ 1 + (1-\sigma)^{\frac{1}{a_s}} \right\}^2}{(1-\sigma)^{\frac{4}{a_s}}} <$$

$$< \frac{v_M^2}{g} \frac{\sigma^2}{(1-\sigma)^2} \sum_1^r {}_s \frac{1}{a_s^2} \frac{\left\{ 1 + (1-\sigma)^{\frac{1}{a_s}} \right\}^2}{(1-\sigma)^{\frac{2}{a_s}}} < \frac{v_M^2}{g} \frac{\sigma^2}{(1-\sigma)^2} \left\{ \frac{1}{1-\sigma} + 1 \right\}^2 \sum_r^\infty {}_s \frac{1}{a_s^2}$$

e infine, per le (3) e (2),

$$|y - y_a|_{\theta=\theta_r} < \frac{v_M^2}{g} \sigma^2 \, 4 u_\sigma^2 \frac{S_2}{a_r} \qquad \text{c. d. d.}$$

§ 10. Dimostrata così la (17), rimane stabilita, come abbiamo già osservato, la (IV): ed anche la (I), anzi, più in generale, la (22) per qualunque valore di s da 1 ad $n + p$. Rimangono allora da provare solo le (II) e (III).

A questo scopo, osserviamo in primo luogo che, colle notazioni del § 5, essendo identicamente

$$\frac{\operatorname{sen}^2(\beta - \alpha)}{\cos^2 \alpha} + \frac{2 \cos \beta}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen}(\beta - \alpha) + \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} - 1 =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2(\beta - \alpha)}{\cos^2 \beta} - \frac{2 \cos \alpha}{\cos \beta} \operatorname{tg} \beta \operatorname{sen}(\beta - \alpha) + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} - 1 = 0 \, ,$$

e quindi

$$\operatorname{sen}(\beta - \alpha) \leq \cos \alpha \sqrt{\left| 1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \right|} \, ,$$

si ha pure

$$1^o) \quad \int_\alpha^\beta v^2 \, d\theta = \int_\alpha^\beta v^2 \cos^2 \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} < [v^2 \cos^2 \theta]_{\theta=\beta} \left\{ \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \right\} =$$

$$= [v^2 \cos^2 \theta]_{\theta=\beta} \frac{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta} < [v \cos \theta]_{\theta=\beta} \, v_M \sqrt{\left| 1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \right|}$$

e in conseguenza

$$\int_\alpha^\beta v^2\, d\theta < v_M\, v_0 \cos\varphi \sqrt{\left|1 - \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\right|}\,; \tag{23}$$

2°) (24) $$\int_\alpha^\beta \frac{v\, d\theta}{\cos\theta} = \int_\alpha^\beta v\cos\theta \frac{d\theta}{\cos\theta} < v_M \sqrt{\left|1 - \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\right|}.$$

Tenuto conto della (22), delle $(E)_3$ ed $(A)_3$ segue [cfr. § prec.] che per qualunque valore di θ in (θ^*, φ)

$$|x - x_a| < \sum_1^{n+p}{}_s \frac{1}{g}\int_{\varphi_s}^{\pm \text{arc}\cos\frac{1}{C_s}} v^2 \left|\frac{v_a^2}{v^2} - 1\right| d\theta + \sum_1^{n+p}{}_s \frac{1}{g}\int_{\pm \text{arc}\cos\frac{1}{C_s}}^{\varphi_{s-1}} v^2 \left|\frac{v_a^2}{v^2} - 1\right| d\theta <$$

$$< \sum_1^{n+p}{}_s \frac{1}{g}\left\{(1-\sigma)^{-\frac{2}{a_s^-}} - 1\right\}\left\{\int_{\varphi_s}^{\pm \text{arc}\cos\frac{1}{C_s}} v^2\, d\theta + \int_{\pm \text{arc}\cos\frac{1}{C_s}}^{\varphi_{s-1}} v^2\, d\theta\right\}:$$

e quindi, per la (23),

$$|x - x_a| < \frac{2\, v_M\, v_0 \cos\varphi}{g}\sum_1^{n+p}{}_s \left\{(1-\sigma)^{-\frac{2}{a_s^-}} - 1\right\}^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2\, v_M\, v_0 \cos\varphi}{g}\sum_1^{n+p}{}_s \frac{\left\{1 - (1-\sigma)^{\frac{1}{a_s^-}}\right\}^{\frac{3}{2}}\left\{1 + (1-\sigma)^{\frac{1}{a_s^-}}\right\}^{\frac{3}{2}}}{(1-\sigma)^{\frac{3}{a_s^-}}} <$$

$$< \frac{2\, v_M\, v_0 \cos\varphi}{g}\sum_1^{n+p}{}_s \frac{\left\{\frac{\sigma}{a_s^-}(1-\sigma)^{\frac{1}{a_s^-}-1}\right\}^{\frac{3}{2}}\left\{1 + (1-\sigma)^{\frac{1}{a_s^-}}\right\}^{\frac{3}{2}}}{(1-\sigma)^{\frac{3}{a_s^-}}} <$$

$$< \frac{2\, v_M\, v_0 \cos\varphi}{g}\,\frac{\sigma^{\frac{3}{2}}}{(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}\sum_1^{n+p}{}_s \frac{1}{a_s^{-\frac{3}{2}}}\,\frac{\left\{1 + (1-\sigma)^{\frac{1}{a_s^-}}\right\}^{\frac{3}{2}}}{(1-\sigma)^{\frac{3}{2a_s^-}}} <$$

$$< \frac{2\, v_M\, v_0 \cos\varphi}{g}\,\frac{\sigma^{\frac{3}{2}}}{(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{1}{1-\sigma} + 1\right\}^{\frac{3}{2}}\sum_1^{n+p}{}_s \frac{1}{a_s^{-\frac{3}{2}}}$$

e infine per la (3)

$$|x - x_a| < \frac{2\, v_M\, v_0 \cos\varphi}{g}\,\sigma^{\frac{3}{2}}\, 2^{\frac{3}{2}}\, u_\sigma^{\frac{3}{2}}\, S_{\frac{3}{2}}\,.$$

In modo perfettamente analogo si dimostra la (II) [in base alla (24)].

TIRO TESO

§ 11. Riprendiamo la nostra questione ex-novo, supponendo

$$\delta(y) = \delta_0 - \alpha y \tag{25}$$

(con α indipendente da y) e insieme

$$4\,Y + h < \frac{\delta_0}{\alpha}. \tag{26}$$

È notorio che la (25) può ritenersi valida [1] fin quando l'altitudine corrispondente ad y non superi 4000, con

$$\alpha = 0.000085:$$

dopodichè, se ad es. l'altitudine dell'origine della traiettoria non supera 1800, e quindi [2]

$$\frac{\delta_0}{\alpha} < \frac{0,850000}{0,000085} = 10000\,,$$

sia la (24) che la (25) dovrà ritenersi soddisfatta non appena

$$Y = 2050\,.$$

Conservando la notazione

$$u_\sigma = \frac{1 - \frac{\sigma}{2}}{(1-\sigma)^2}, \tag{3}$$

nel seguito intenderemo σ scelto entro l'intervallo $(0\,,\,1)$ in modo da soddisfare la diseguaglianza

$$\delta_0 > \alpha \left\{ 4\,u_\sigma (1 + \sigma)(1 + \sigma u_\sigma)\,Y + (h + \Delta h)\,[2\,u_\sigma (1 + \sigma) - 1] \right\} \tag{27}$$

ove

$$\Delta h = 2\,\sigma\,u_\sigma (2\,Y + h)\,. \tag{27$_*$}$$

In conseguenza della (26), la (27) è sempre soddisfatta per valori convenientemente piccoli di σ: ci sarà pure utile osservare che da essa si ricava

$$\delta_0 > \alpha\,Y \left\{ 2\,u_\sigma (1 + \sigma) + 1 + 2\,\sigma\,u_\sigma + 2\,\sigma\,u_\sigma \cdot 2 \cdot u_\sigma (1 + \sigma) \right\}$$

cioè

$$\delta_0 > \alpha\,Y \left\{ 1 + 2\,\sigma\,u_\sigma \right\} \left\{ 1 + 2\,u_\sigma (1 + \sigma) \right\}. \tag{28}$$

[1] Cfr. ad es. Bianchi, loc. cit., pag. 31.

[2] Cfr. ad es. la tavola numerica citata a pag. 86.

§ 12. Sia p il minimo intero (positivo) pel quale

$$(1-\sigma)^{2p} \leq \cos\varphi .$$

Poniamo

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi \\ \text{per } 1 \leq r \leq p , \qquad \varphi_r = \text{arc cos}\,(1-\sigma)^{2(p-r)} \\ \text{per } p \leq r \leq p+n , \quad \varphi_r = -\,\text{arc cos}\,(1-\sigma)^{2(r-p)} \end{cases}$$

ove n è (un numero intero e positivo) pel momento imprecisato.

Dato che con ciò risulta

$$\varphi_{p+n} < \varphi_{p+n-1} < \cdots < \varphi_r < \varphi_{r-1} < \cdots < \varphi_1 < \varphi_0 = \varphi ,$$

conveniamo pure di mantenere la notazione

$$i_r \equiv (\varphi_r\,,\,\varphi_{r-1}) \qquad (r = 1\,,\ldots,p+n) .$$

Poniamo inoltre

$$\frac{1}{C_r} = (1-\sigma)^{[2(p-r)+1]} \qquad (r = 1\,,\ldots,p+n) .$$

Con queste notazioni avremo

$$1-\sigma \leq C_r \cos\theta \leq (1-\sigma)^{-1} \tag{29}$$

tutte le volte che θ appartenga ad i_r $(r = 1\,,\ldots,p+n)$.

§ 13. Pensiamo l'intervallo i_r $(r = 1\,,\ldots,p+n)$ diviso in un certo numero k_r d'intervalli parziali

$$i_{r,1} \equiv (\varphi_{r,1}\,,\,\varphi_{r-1}) \equiv (\varphi_{r,1}\,,\,\varphi_{r,0})\,,\ldots$$

$$i_{r,j} \equiv (\varphi_{r,j}\,,\,\varphi_{r,j-1})\,,\ldots,\, i_{r,k_r} \equiv (\varphi_r\,,\,\varphi_{r,k_{r-1}}) \equiv (\varphi_{r,k_r}\,,\,\varphi_{r,k_{r-1}}) .$$

Riprendiamo in esame la categoria di moti ausiliari introdotta al § 6, senz'altro cambiamento formale — anche per quanto si riferisce alle (8), (9) e (10) — che la sostituzione di k con k_r $(r = 1\,,\ldots,p+n)$.

Con considerazioni del tutto analoghe a quelle del § 7, dalle $(E)_1$, $(A)_1$ e (29) si deduce che in $i_{r,j}$ $(r = 1\,,\ldots,p+n\,;\ j = 1\,,\ldots,k_r)$:

1°) ove $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{v}{v_a}\right) \leq 0$, si verifica una almeno delle relazioni

$$\frac{v}{v_a} < \frac{1}{1-\sigma} \qquad \frac{v}{v_a} \leq \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)}\,; \tag{30}$$

2°) ove $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{v}{v_a}\right) \geq 0$, si verifica una almeno delle relazioni

$$\frac{v}{v_a} > \frac{1}{1-\sigma} \qquad \frac{v}{v_a} \geq \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)} . \tag{31}$$

§ 14. Adottiamo le notazioni

$$(32)\quad \begin{cases} \text{per } r=1,\ldots,p: \\ Y_{r,j} = \dfrac{2\sigma}{\alpha}\,\dfrac{\delta_0 - \alpha\, y_{r,j-1}[1+2u_\sigma(1+\sigma)]}{1+2\sigma[1+2u_\sigma(1+\sigma)]} \\ \text{per } r=p+1,\ldots,p+n: \\ Y_{r,j} = \dfrac{2\sigma}{\alpha}\,\dfrac{\delta_0 - \alpha\{4u_\sigma(1+\sigma)(1+\sigma u_\sigma)Y - y_{r,j-1}[2u_\sigma(1+\sigma)-1]\}}{1+4u_\sigma\sigma} \\ \qquad (j=1,\ldots,k_r). \end{cases}$$

ciò che corrisponde a porre

$$(33)\quad \begin{cases} \text{per } r=1,\ldots,p: \\ \sigma = \dfrac{\alpha[\frac{1}{2}Y_{r,j} + 2\sigma u_\sigma\{y_{r,j-1}+Y_{r,j}\}]}{\delta_0 - \alpha[y_{r,j-1}+Y_{r,j}+2\sigma u_\sigma\{y_{r,j-1}+Y_{r,j}\}]} \\ \text{per } r=p+1,\ldots,p+n: \\ \sigma = \dfrac{\alpha[\frac{1}{2}Y_{r,j} + 2\sigma u_\sigma\{2(1+\sigma u_\sigma)Y - y_{r,j-1}+Y_{r,j}\}]}{\delta_0 - \alpha[y_{r,j-1}+2\sigma u_\sigma\{2(1+\sigma u_\sigma)Y - y_{r,j-1}\}]}. \end{cases}$$

Supponiamo poi $\varphi_{r,j-1} > 0$ e insieme

$$(34)\qquad 1-\sigma < \frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-1}$$

per ogni valore di θ nell'intervallo $(\varphi_{r,j-1}, \varphi)$.

Dimostreremo che in queste ipotesi

$$(35)\qquad Y_{r,j} > \frac{2\sigma}{\alpha}\,\frac{\delta_0 - \alpha Y\{1+2\sigma u_\sigma\}\{1+2u_\sigma(1+\sigma)\}}{1+2\sigma[1+2u_\sigma(1+\sigma)]},$$

ciò che include, per la (28),

$$Y_{r,j} > 0:$$

e che, ove si assuma

$$(36)\qquad \delta_{r,j} = \delta(y_{r,j-1} + \tfrac{1}{2}Y_{r,j})$$

e si scelga $\varphi_{r,j}$ $(\geq \varphi_r \geq 0)$ in modo che risulti

$$(37)\qquad y_{r,j} \leq y_{r,j-1} + Y_{r,j},$$

in tutto l'intervallo $i_{r,j}$

$$(38)\qquad 1-\sigma < \frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-1},$$

$$(39)\qquad |y - y_a| < 2\sigma u_\sigma Y.$$

Dall' ipotesi che in $(\varphi_{r,j-1}, \varphi)$ valga la (34) segue [per le $(E)_4$. $(A)_4$ e perchè $\varphi_{r,j-1}$ non è negativo]

$$|y - y_a|_{\theta=\varphi_{r,j-1}} \leq \frac{1}{g} \int_{\varphi_{r,j-1}}^{\varphi} v^2 \operatorname{tg}\theta \left| \frac{v_a^2}{v^2} - 1 \right| d\theta < Y \left\{ \frac{1}{(1-\sigma)^2} - 1 \right\};$$

cioè

$$|y - y_a|_{\theta=\varphi_{r,j-1}} < 2\sigma\, u_\sigma\, Y; \tag{40}$$

e quindi

$$y_{r,j-1} \leq \left\{ y + |y_a - y| \right\}_{\theta=\varphi_{r,j-1}} < (1 + 2\sigma\, u_\sigma)\, Y.$$

Dopo ciò, per convincersi della validità della (35), basta richiamare le (32), tenendo conto che l'essere $\varphi_{r,j-1} > 0$ implica $r \leq p$.

Vediamo allora se è possibile che — dopo, s'intende, soddisfatte le (36) e (37) — esista in $i_{r,j}$ un valore $\theta' < \varphi_{r,j-1}$ tale che per qualunque valore di θ ($\leq \varphi$ e) $> \theta'$ valga la (38), mentre per $\theta = \theta'$ sia $\frac{v}{v_a} = (1-\sigma)^{\pm 1}$.

Ove così fosse, per qualunque valore di θ nell'intervallo (θ', φ) si avrebbe

$$|y - y_a| \leq \frac{1}{g} \int_{\theta'}^{\varphi} v_a^2 \operatorname{tg}\theta \left| \frac{v^2}{v_a^2} - 1 \right| d\theta < \frac{2\sigma\, u_\sigma}{g} \int_{\theta'}^{\varphi} v_a^2 \operatorname{tg}\theta\, d\theta < 2\sigma\, u_\sigma\, y_{r,j}$$

e quindi, per la (37),

$$|y - y_a| < 2\sigma\, u_\sigma \left\{ y_{r,j-1} + Y_{r,j} \right\}.$$

Onde, tenuto conto della (25), in tutto l'intervallo $(\theta' \varphi_{r,j-1})$ sarebbe pure

$$\left| \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)} - 1 \right| = \frac{\alpha \left| y_{r,j-1} + \frac{1}{2} Y_{r,j} - y \right|}{\delta(y)} \leq \alpha \frac{\left\{ |y_{r,j-1} + \frac{1}{2} Y_{r,j} - y_a| + |y_a - y| \right\}}{\delta_0 - \alpha \left\{ y_{r,j-1} + y_a - y_{r,j-1} | + |y - y_a| \right\}} <$$

$$< \frac{\alpha \left[\frac{1}{2} Y_{r,j} + 2\sigma\, u_\sigma \left\{ y_{r,j-1} + Y_{r,j} \right\} \right]}{\delta_0 - \alpha \left[y_{r,j-1} + Y_{r,j} + 2\sigma\, u_\sigma \left\{ y_{r,j-1} + Y_{r,j} \right\} \right]};$$

cioè, per la $(33)_1$,

$$\left| \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)} - 1 \right| < \sigma$$

$$1 - \sigma < \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)} < (1-\sigma)^{-1};$$

e infine, per le (30) e (31),

$$1 - \sigma < \frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-1}$$

anche per $\theta = \theta'$.

Vuol dire che nelle nostre ipotesi sussiste la (38): e insieme la (39) che da essa si ricava non appena si riprenda il ragionamento che ha condotto alla (40).

§ 15. Nelle attuali (A) il valore di n e quelli delle singole $\varphi_{r,j}$ (diverse dalle φ_r), delle $\delta_{r,j}$ e k_r possono, come subito verificheremo, esser fissati in modo da render soddisfatte tutte le condizioni seguenti:

$$\delta_{r,j} = \delta(y_{r,j-1} \pm \tfrac{1}{2} Y_{r,j}) \qquad (r = 1, \dots, p+n;\ j = 1, \dots, k_r) \tag{41}$$

col segno + o — a seconda che $r \leq p$ oppure $r > p$;

$$|y_{r,j} - y_{r,j-1}| \leq Y_{r,j} \qquad (r = 1, \dots, p+n;\ j = 1, \dots, k_r) \tag{42}$$

$$y_{p+n,k_{p+n}} \leq -h - \varDelta h. \tag{43}$$

Infatti, dato che

$$1 - \sigma < \left(\frac{v}{v_a}\right)_{\theta=\varphi} = 1 < (1-\sigma)^{-1}, \tag{44}$$

le conclusioni del § precedente bastano a garantire che il procedimento ricorrente per la scelta delle quantità in questione fornito dalle (41) e (42) — col concorso, s'intende, delle $(9)_1$ e $(9)_4$, $(8)_1$ ed $(8)_4$ — per $r \leq p$ non potrà essere arrestato dal presentarsi di una $Y_{r,j}$ negativa e darà luogo a valori sempre finiti delle singole k_r, valendo sempre la (35). Mentre d'altra parte il semplice richiamo delle $(32)_2$ rende evidente che per $r > p$, finchè sia $y_{r,j-1} > -h - \varDelta h$, sarà sempre

$$Y_{r,j} > \frac{2\sigma}{\alpha} \, \frac{\delta_0 - \alpha \{4u_\sigma(1+\sigma)(1+\sigma u_\sigma) Y + (h + \varDelta h)[2u_\sigma(1+\sigma) - 1]\}}{1 + 4\sigma u_\sigma},$$

in particolare, per la (27),

$$Y_{r,j} > 0.$$

Dimostreremo ora che, una volta soddisfatte le (41), (42) e (43), risulta $\theta_h > \varphi_{p+n}$ e per ogni valore di θ in (θ_h, φ) è

$$1 - \sigma < \frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-1} \tag*{(I)$_t$}$$

$$|t - t_a| < \frac{\sigma}{1-\sigma} T_h \tag*{(II)$_t$}$$

$$|x - x_a| < 2\sigma u_\sigma X_h \tag*{(III)$_t$}$$

$$|y - y_a| < 2\sigma u_\sigma (2Y + h). \tag*{(IV)$_t$}$$

§ 16. Limitatamente all'intervallo $(0, \varphi)$ la $(\mathrm{I})_t$ è già stata dimostrata perchè, in conseguenza delle (44), (41) e (42) [possiamo anche dire, delle (34), (36) e (37)] sostanzialmente non differisce dalla (38).

Riprendiamo il procedimento per assurdo seguìto al § 14, ammettendo che in un certo intervallo $i_{r,j}$ con $r > p$, esista un valore $\theta'(< 0)$ tale che per

$$\varphi \geq \theta > \theta'$$

sussista sempre la $(\mathrm{I})_t$, mentre per $\theta = \theta'$ si abbia $\dfrac{v}{v_a} = (1-\sigma)^{\pm 1}$.

In tale ipotesi, per qualunque valore di θ in $(\theta', 0)$,

$$|y-y_a| \leq \frac{1}{g}\left\{\int_0^\varphi v^2 \operatorname{tg}\theta \left|\frac{v_a^2}{v^2}-1\right| d\theta + \int_\theta^0 v_a^2 |\operatorname{tg}\theta| \left|\frac{v^2}{v_a^2}-1\right| d\theta\right\} <$$

$$< \frac{2\sigma u_\sigma}{g}\left\{\int_0^\varphi v^2 \operatorname{tg}\theta\, d\theta + \int_\theta^0 v_a^2 |\operatorname{tg}\theta|\, d\theta\right\} =$$

$$= \frac{2\sigma u_\sigma}{g}\left\{\int_0^\varphi v^2 \operatorname{tg}\theta\, d\theta + \int_0^\varphi v_a^2 \operatorname{tg}\theta\, d\theta - \int_\theta^\varphi v_a^2 \operatorname{tg}\theta\, d\theta\right\};$$

e poichè, per la (39),

$$\frac{1}{g}\int_0^\varphi v_a^2 \operatorname{tg}\theta\, d\theta \leq \frac{1}{g}\int_0^\varphi v^2 \operatorname{tg}\theta\, d\theta + |y-y_a|_{\theta=0} < \mathrm{Y}(1+2\sigma u_\sigma),$$

anche

$$|y-y_a| < 2\sigma u_\sigma \{2\mathrm{Y}(1+\sigma u_\sigma) - y_a\} \leq 2\sigma u_\sigma \{2\mathrm{Y}(1+\sigma u_\sigma) - y_{r,j-1} + |y_{r,j-1} - y_a|\}.$$

Dopo ciò, dalle (25), (41) e (42) segue che per ogni valore di θ in $(\theta', \varphi_{r,j-1})$

$$\left|\frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)} - 1\right| \leq \frac{\alpha\,|y_{r,j-1} - \mathrm{Y}_{r,j} - y|}{[\delta(y)]_{\theta=\varphi_{r,j-1}}} \leq \frac{\alpha\{|y_{r,j-1} - \frac{1}{2}\mathrm{Y}_{r,j} - y_a| + |y_a - y|\}}{\delta_0 - \alpha\{y_{r,j-1} + |y-y_a|_{\theta=\varphi_{r,j-1}}\}} <$$

$$< \frac{\alpha\{\frac{1}{2}\mathrm{Y}_{r,j} + 2\sigma u_\sigma[2\mathrm{Y}(1+\sigma u_\sigma) - y_{r,j-1} + \mathrm{Y}_{r,j}\}}{\delta_0 - \alpha\{y_{r,j-1} + 2\sigma u_\sigma[2\mathrm{Y}(1+\sigma u_\sigma) - y_{r,j-1}]\}},$$

cioè, per la $(33)_2$,

$$\left|\frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)} - 1\right| < \sigma$$

e quindi

$$1-\sigma < \frac{\delta_{r,j}}{\delta(y)} < (1-\sigma)^{-1}.$$

Donde si ricava, per le (30) e (31),

$$1-\sigma < \frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-1}$$

anche per $\theta = \theta'$.

Si può dunque concludere che

$$1-\sigma < \frac{v}{v_a} < (1-\sigma)^{-1} \tag{45}$$

per qualunque valore di θ in (φ_{n+p}, φ).

Ne segue, per ogni valore di θ compreso tra φ e il più grande dei valori φ_{n+p} e θ_h:

$$|t-t_a| \leq \frac{1}{g}\int_{\theta_h}^\varphi \frac{v}{\cos\theta}\left|\frac{v_a}{v}-1\right| d\theta < \mathrm{T}_h\left\{\frac{1}{1-\sigma}-1\right\} = \frac{\sigma}{1-\sigma}\mathrm{T}_h; \tag{46}$$

$$|x-x_a| \leq \frac{1}{g}\int_{\theta_h}^\varphi v^2\left|\frac{v_a^2}{v^2}-1\right| d\theta < \mathrm{X}_h\left\{\frac{1}{(1-\sigma)^2}-1\right\} = 2\sigma u_\sigma \mathrm{X}_h; \tag{47}$$

$$|y-y_a| \leq \frac{1}{g}\int_{\theta_h}^\varphi |v^2 \operatorname{tg}\theta|\left|\frac{v_a^2}{v^2}-1\right| d\theta < \tag{48}$$

$$< \{2\mathrm{Y}+h\}\left\{\frac{1}{(1-\sigma)^2}-1\right\} = 2\sigma u_\sigma\{2\mathrm{Y}+h\}.$$

La (48) implica che $\theta_h > \varphi_{p+n}$: infatti se fosse $\varphi_{p+n} \geq \theta_h$, cioè $[y]_{\theta=\varphi_{p+n}} \geq -h$. per la (43) dovrebbe aversi

$$y - y_a|_{\theta=\varphi_{p+n}} \geq \Delta h,$$

mentre la (48), nella stessa ipotesi, dà

$$|y - y_a|_{\theta=\varphi_{p+n}} < 2\sigma u_\sigma (2Y + h)$$

cioè, per la $(27)_*$,

$$|y - y_a|_{\theta=\varphi_{p+n}} < \Delta h.$$

Stabilito così che $\theta_h > \varphi_{p+n}$, le (45)-(48) immediatamente dànno luogo alle $(I)_t$–$(IV)_t$.

Resistenza quadratica.

§ 17. Quando si assuma

$$F(v) = a v^m - b$$

(a, b, m costanti positive) il procedimento generale d'integrazione approssimata delle (E) può con vantaggio esser modificato in quello che ora svilupperemo.

Per semplicità ci riferiremo al caso della resistenza quadratica

$$F(v) = a v^2,$$

pensando

$$v_0 < 240:$$

onde ([1]) contemporaneamente manterremo l'ipotesi (25) $\delta(y) = \delta_0 - \alpha y$.

Quindi, posto $\varkappa = ac$, d'ora innanzi intenderemo sostituite le (E) colle seguenti

$$(49)\quad \begin{cases} \dfrac{g}{v}\dfrac{d(v\cos\theta)}{d\theta} = (\delta_0 - \alpha y)\,\varkappa\, v^2 \qquad v = v_0 \text{ per } \theta = \varphi \\ gt = \displaystyle\int_\theta^\varphi \frac{v\, d\theta}{\cos\theta} \\ gx = \displaystyle\int_\theta^\varphi v^2\, d\theta \\ gy = \displaystyle\int_\theta^\varphi v^2 \operatorname{tg}\theta\, d\theta : \end{cases}$$

e in base a queste equazioni supporremo calcolato un limite inferiore $\theta^\star \left(> -\dfrac{\pi}{2}\right)$ del valore di θ_h.

§ 18. Pensiamo diviso l'intervallo $(0, \varphi)$ in un certo numero p d'intervalli parziali

$$i_1 \equiv (\varphi_1, \varphi) \equiv (\varphi_1, \varphi_0),\ i_2 \equiv (\varphi_2, \varphi_1), \ldots, i_{p-1} \equiv (\varphi_{p-1}, \varphi_{p-2}),$$
$$i_p \equiv (0, \varphi_{p-1}) \equiv (\varphi_p, \varphi_{p-1});$$

([1]) Si osservi che, per $v_0 = 240$, si può assumere $Y = \dfrac{\overline{240}^2}{2 \times 9{,}78\ldots} < 3000$; tenendo presente quanto abbiamo già detto al § 11 circa la validità della (24).

ed aggiunto alla loro successione un certo numero n d'intervalli consecutivi del ramo discendente della traiettoria

$$i_{p+1} \equiv (\varphi_{p+1}, 0) \equiv (\varphi_{p+1}, \varphi_p) \;,\; i_{p+2} \equiv (\varphi_{p+2}, \varphi_{p+1}), \ldots, i_{p+n} \equiv (\varphi_{p+n}, \varphi_{p+n-1});$$

colla sola condizione, per ora, che sia

$$\varphi_{p+n} = \theta^* .$$

Conveniamo di rappresentare con ε_r $(r = 1, \ldots, p+n)$ -1 oppure 0 secondochè $r \leq p$ oppure $r > p$, e con s la lunghezza di un segmento arbitrariamente fissato. Quindi, accanto al moto di G, prendiamo in esame il moto ausiliare ([1]) definito, per $\varphi_{p+n} \leq \theta \leq \varphi$, dalle equazioni

$$(50)\quad \begin{cases} \dfrac{g}{v_a}\dfrac{d(v_a \cos\theta)}{d\theta} = \\ \qquad = \left\{ \delta(y_{r-1} + \varepsilon_r s) - \alpha \dfrac{v_{r-1}^2}{2g}\left(1 - \dfrac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta}\right)\right\} \varkappa v_a^2 \quad \text{in } i_r \ (r = 1, \ldots, p+n) \\ g t_a = \displaystyle\int_\theta^\varphi \frac{v_a\, d\theta}{\cos\theta} \\ g x_a = \displaystyle\int_\theta^\varphi v_a^2\, d\theta \\ g y_a = \displaystyle\int_\theta^\varphi v_a^2 \operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{cases}$$

insieme alla condizione iniziale

$$v_a = v_0 \quad \text{per} \quad \theta = \varphi$$

[ed alla condizione che v_a sia continua in tutto (φ_{p+n}, φ)]: intendendo, naturalmente, che y_{r-1} e v_{r-1} siano i valori di y_a e v_a per $\theta = \varphi_{r-1}$.

([1]) Affinchè in tutto i_r $(r = 1, \ldots, p+n)$ si abbia

$$f = \delta(y_{r-1} + \varepsilon_r s) - \alpha \frac{v^2_{r-1}}{2g}\left(1 - \frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta}\right) > 0,$$

anzi

$$\delta(y_{r-1} + \varepsilon_r s) - \alpha \frac{v^2_{r-1}}{2g} > 0,$$

basta che sia

$$(\alpha) \qquad \delta\left(\frac{v_0^2}{2g}\right) > 0.$$

Infatti

$$\delta(y_{r-1} + \varepsilon_r s) - \alpha \frac{v^2_{r-1}}{2g} = \delta\left(y_{r-1} + \varepsilon_r s + \frac{v^2_{r-1}}{2g}\right) \geq \delta\left(y_{r-1} + \frac{v^2_{r-1}}{2g}\right),$$

mentre d'altra parte, almeno fin quando $f > 0$, notoriamente non può essere

$$y_a + \frac{v_a^2}{2g} > \frac{v_0^2}{2g}.$$

A sua volta la (α) deve nel caso attuale supporsi sempre (e largamente) soddisfatta. Perchè, quand'anche si assuma [cfr. ad es. la tavola numerica citata a pag. 86] $\delta_0 = 0{,}37$ ed $\alpha = 92 \times 10^{-6}$, risulta

$$\delta_0 - \alpha \frac{v_0^2}{2g} > 0{,}37 - 92 \times 10^{-6} \times 3000 > 0.$$

Per brevità, poniamo

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_r &= \frac{\delta\left(y_{r-1} + \varepsilon_r s + \dfrac{v_{r-1}^2}{2g}\right) \varkappa\, v_{r-1}^2}{g} \\ \beta_r &= \frac{\alpha\, v_{r-1}^2}{2g\, \delta\left(y_{r-1} + \varepsilon_r s + \dfrac{v_{r-1}^2}{2g}\right)} \end{aligned}\right. \qquad (r = 1, \ldots, p+n):$$

adottiamo anche la notazione consueta $\xi_m(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^{m+1}\theta}$.

Dalla $(50)_1$ segue che in i_r $(r = 1, \ldots, p+n)$

$$(51) \qquad g \frac{1}{v_a^3 \cos^3\theta} \frac{d(v_a \cos\theta)}{d\theta} = \left\{ \delta\left(y_{r-1} + \varepsilon_r s + \frac{v_{r-1}^2}{2g}\right) + \frac{\alpha\, v_{r-1}^2}{2g} \frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta} \right\} \frac{\varkappa}{\cos^3\theta};$$

dalla quale, integrando tra θ e φ_{r-1}, si trae

$$\frac{g}{2}\left\{ \frac{1}{v_a^2 \cos^2\theta} - \frac{1}{v_{r-1}^2 \cos^2\varphi_{r-1}} \right\} =$$

$$= \varkappa\, \delta\left(y_{r-1} + \varepsilon_r s + \frac{v_{r-1}^2}{2g}\right) \left\{ \xi_2(\varphi_{r-1}) - \xi_2(\theta) + \beta_r \cos^2\varphi_{r-1} [\xi_4(\varphi_{r-1}) - \xi_4(\theta)] \right\}.$$

Dopo ciò — facendo intervenire anche le $(50)_2$, $(50)_3$, $(50)_4$ — si ottiene, per qualunque valore di θ appartenente ad i_r $(r = 1, \ldots, p+n)$:

$$(52) \quad \left\{\begin{aligned}
v_a^2 &= \frac{1}{\cos^2\theta} \frac{v_{r-1}^2 \cos^2\varphi_{r-1}}{1 + 2\gamma_r \cos^2\varphi_{r-1} \{\xi_2(\varphi_{r-1}) - \xi_2(\theta) + \beta_r \cos^2\varphi_{r-1} [\xi_4(\varphi_{r-1}) - \xi_4(\theta)]\}} \\
t_a - t_{r-1} &= \frac{v_{r-1} \cos\varphi_{r-1}}{g} \times \\
&\times \int_\theta^{\varphi_{r-1}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\gamma_r \cos^2\varphi_{r-1} \{\xi_2(\varphi_{r-1}) - \xi_2(\theta) + \beta_r \cos^2\varphi_{r-1} [\xi_4(\varphi_{r-1}) - \xi_4(\theta)]\}}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
x_a - x_{r-1} &= \frac{v_{r-1}^2 \cos^2\varphi_{r-1}}{g} \times \\
&\times \int_\theta^{\varphi_{r-1}} \frac{1}{1 + 2\gamma_r \cos^2\varphi_{r-1} \{\xi_2(\varphi_{r-1}) - \xi_2(\theta) + \beta_r \cos^2\varphi_{r-1} [\xi_4(\varphi_{r-1}) - \xi_4(\theta)]\}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
y_a - y_{r-1} &= \frac{v_{r-1}^2 \cos^2\varphi_{r-1}}{g} \times \\
&\times \int_\theta^{\varphi_{r-1}} \frac{1}{1 + 2\gamma_r \cos^2\varphi_{r-1} \{\xi_2(\varphi_{r-1}) - \xi_2(\theta) + \beta_r \cos^2\varphi_{r-1} [\xi_4(\varphi_{r-1}) - \xi_4(\theta)]\}} \frac{\operatorname{tg}\theta\, d\theta}{\cos^2\theta}.
\end{aligned}\right.$$

§ 19. Dalla $(50)_1$ segue

$$\frac{d}{d\theta}\left\{y_a+\frac{v_{r-1}^2}{2g}\frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta}\right\}=-\frac{v_a^2\operatorname{tg}\theta}{g}+\frac{v_{r-1}^2}{g}\frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^3\theta}\operatorname{sen}\theta= \tag{53}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\theta}{g\cos^3\theta}\left\{v_{r-1}^2\cos^2\varphi_{r-1}-v_a^2\cos^2\theta\right\}.$$

Per θ appartenente ad i_r $(r=1,\dots,p+n)$ poniamo

$$\eta_r=y_{r-1}+\frac{v_{r-1}^2}{2g}\left(1-\frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta}\right)-y_a=$$

$$=\left(y_a+\frac{v_{r-1}^2}{2g}\frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta}\right)_{\theta=\varphi_{r-1}}-\left(y_a+\frac{v_{r-1}^2}{2g}\frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta}\right),$$

cioè rappresentiamo con η_r la differenza — a parità di θ — tra l'ordinata della parabola osculatrice alla traiettoria del moto ausiliare nel punto $\theta=\varphi_{r-1}$ e l'ordinata della traiettoria stessa. Dato che $v_a\cos\theta$ lungo tutta la traiettoria del moto ausiliare costantemente decresce con θ, risulta allora dalla (53) che in tutto i_r, se $r\leq p$ $(>p)$:

$$\frac{d\eta_r}{d\theta}\leq 0 \qquad (\geq 0); \tag{54}$$

$$\eta_r\geq 0 \qquad (\leq 0); \tag{55}$$

$$\left|\frac{d\eta_r}{d\theta}\right|<\frac{\operatorname{tg}\varphi_r^\star}{g\cos^2\varphi_r^\star}v_0^2\cos^2\varphi\ , \tag{56}$$

pur di indicare con $\varphi_r^\star$ l'angolo φ oppure l'angolo $|\theta^\star|$ a seconda che $r\leq p$ oppure $r>p$.

§ 20. Sia

$$\mu=\frac{\alpha}{\delta(\mathrm{Y})};$$

rappresentiamo cioè con μ un limite superiore del rapporto $\frac{\alpha}{\delta(y)}$, o, ciò che evidentemente è lo stesso, l'elemento che corsisponde al λ del « Caso generale » dopo l'adozione della (25).

Ad es., finchè l'altitudine corrispondente ad Y non supera 3900, si può assumere [1]

$$\mu=\frac{0{,}000085}{0{,}6767}<\frac{5}{4}10^{-4}.$$

Servendoci, con procedimento ricorrente, delle (52), fissiamo i valori di p, n e φ_r in guisa che in i_r $(r=1,\dots,p+n)$ sia

$$|\eta_r|\leq s. \tag{57}$$

[1] Cfs. § 11 e la tavola numerica ivi citata.

Nella qual cosa riuscirà di evidente utilità tener conto della (54); mentre, d'altro canto, la (56) basta ad escludere che la (57) sia incompatibile colle condizioni $\varphi_p = 0$, $\varphi_{p+n} = \theta^\star$ o almeno non possa verificarsi insieme ad esse se non per $p + n = \infty$.

Dimostreremo che, dopo tale scelta delle φ_r, per ogni valore di θ in (θ_h, φ):

$$(\mathrm{I})_q \qquad \left| \frac{v_a^2}{v^2} - 1 \right| < \mu\, s\, e^{\mu(\gamma+h)};$$

$$(\mathrm{II})_q \qquad \left| t - t_a \right| < \mathrm{T}_h\, \mu\, s\, e^{\mu(\gamma+h)};$$

$$(\mathrm{III})_q \qquad \left| x - x_a \right| < \mathrm{X}_h\, \mu\, s\, e^{\mu(\gamma+h)};$$

$$(\mathrm{IV})_q \qquad \left| y - y_a \right| < s \left\{ e^{\mu(\gamma+h)} - 1 \right\}.$$

§ 21. Prima di procedere alla dimostrazione di quanto or ora abbiamo enunciato, indicheremo un procedimento pel calcolo delle φ_r più comodo di quello già proposto.

Se $r \leq p$, per ogni valore di θ in i_r dove risultare, in base alla $(50)_1$,

$$\frac{g}{v_a^3 \cos^3\theta} \frac{d(v_a \cos\theta)}{d\theta} \leq \delta(y_{r-1} - s) \frac{\varkappa}{\cos\varphi_{r-1} \cos^2\theta},$$

e quindi, dopo un'integrazione tra θ e φ_{r-1},

$$\frac{g}{2} \left\{ \frac{1}{v_a^2 \cos^2\theta} - \frac{1}{v_{r-1}^2 \cos^2\varphi_{r-1}} \right\} \leq \frac{\varkappa\, \delta(y_{r-1} - s)}{\cos\varphi_{r-1}} \left\{ \operatorname{tg}\varphi_{r-1} - \operatorname{tg}\theta \right\},$$

cioè

$$v_a^2 \cos^2\theta \geq \frac{v_{r-1}^2 \cos^2\varphi_{r-1}}{1 + \gamma_r' \cos\varphi_{r-1} [\operatorname{tg}\varphi_{r-1} - \operatorname{tg}\theta]}$$

dove

$$\gamma_r' = \frac{2\varkappa\, \delta(y_{r-1} - s)\, v_{r-1}^2}{g}.$$

In i_r sarà dunque

$$y_r = \frac{v_{r-1}^2}{2g} \left(1 - \frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta}\right) - \frac{1}{g} \int_\theta^{\varphi_{r-1}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}\, v_a^2 \cos^2\theta\, d\theta < s,$$

almeno finchè

$$\frac{v_{r-1}^2}{2g} \left(1 - \frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta}\right) - \frac{v_{r-1}^2 \cos^2\varphi_{r-1}}{g} \int_\theta^{\varphi_{r-1}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta} \frac{d\theta}{1 + \gamma_r' \cos\varphi_{r-1} [\operatorname{tg}\varphi_{r-1} - \operatorname{tg}\theta]} \leq s.$$

Rappresentando, per brevità, con $\psi_r(\theta)$ il primo membro di questa relazione, per $\varphi_{r-1} \geq \theta \geq 0$ risulta

$$0 \leq -\frac{d\psi(\theta)}{d\theta} < \frac{v_0^2 \operatorname{tg}\varphi}{g} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{2\varkappa\, \delta(-s)\, v_0^2 \operatorname{sen}\varphi}{g}} \right\}.$$

D'altra parte con una semplice integrazione si trova

$$\psi_r(\theta) = \frac{v_{r-1}^2}{2g}\left(1 - \frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta}\right) -$$

$$- \frac{v_{r-1}^2 \cos^2\varphi_{r-1}}{g}\left\{\frac{1+\gamma_r' \operatorname{tg}\varphi_{r-1}}{\gamma_r'^2}\log\left[1+\gamma_r'(\operatorname{tg}\varphi_{r-1}-\operatorname{tg}\theta)\right] - \frac{1}{\gamma_r'}(\operatorname{tg}\varphi_{r-1}-\operatorname{tg}\theta)\right\}.$$

Tutto ciò porta a calcolare φ_r

1°) se $\psi_r(0) \leq s$, assumendo

$$\varphi_r = (\varphi_p =)\, 0\,;$$

2°) se $\psi_r(0) > s$, assumendo come valore di φ_r la radice dell'equazione $\psi_r(\theta) = s$ interna all'intervallo $(\varphi_{r-1}, 0)$: con che sicuramente risulterà

$$|\varphi_r - \varphi_{r-1}| > \frac{s}{\frac{v_0^2 \operatorname{tg}\varphi}{g}\left\{1 - \frac{1}{1+\frac{2\varkappa\,\delta(-s)\, v_0^2 \operatorname{sen}\varphi}{g}}\right\}}.$$

Per $r > p$ si arriva a conclusioni del tutto analoghe, ove si assuma

$$\gamma_r' = \frac{2\varkappa\,\delta\left[y_{r-1} + \frac{v_{r-1}^2}{2g}\left(1 - \frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta^*}\right)\right]}{g\cos\theta^*}\cos\varphi_{r-1}$$

e si cambi di segno $\psi_r(\theta)$.

§ 22. Essendo

$$\delta(\eta_{r-1} + \varepsilon_r s) - \alpha\frac{v_{r-1}^2}{2g}\left(1 - \frac{\cos^2\varphi_{r-1}}{\cos^2\theta}\right) = \delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a),$$

dalle $(49)_1$ e $(50)_1$ si deduce [cfr. § 7] che in i_r $(r = 1, \ldots, p+n)$

$$\frac{d}{d\theta}\log\left(\frac{v_a}{v}\right) = \frac{\varkappa\,\delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a)}{g\cos\theta}\left\{v_a^2 - \frac{\delta(y)}{\delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a)}v^2\right\}$$

e quindi

$$(58)\qquad \begin{cases} \text{ove } \dfrac{d}{d\theta}\log\left(\dfrac{v_a}{v}\right) \leq 0 & \dfrac{v_a^2}{v^2} \leq \dfrac{\delta(y)}{\delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a)} \\ \text{ove } \dfrac{d}{d\theta}\log\left(\dfrac{v_a}{v}\right) \geq 0 & \dfrac{v_a^2}{v^2} \geq \dfrac{\delta(y)}{\delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a)}. \end{cases}$$

D'altra parte le (55) e (56) direttamente forniscono

$$(59)\qquad 0 \geq \eta_r + \varepsilon_r s \geq -s$$

in tutto i_r $(r = 1, \ldots, p+n)$.

Da tutto ciò segue che la differenza $y_a - y$ al variare di θ da φ a 0 è (fuori dell'origine) sempre negativa e costantemente cresce in valore assoluto.

Avendosi, per le $(49)_4$ e $(50)_4$,

$$y_a - y = \frac{1}{g}\int_\theta^\varphi v^2 \operatorname{tg}\theta \left\{ \frac{v_a^2}{v^2} - 1 \right\} d\theta, \tag{60}$$

per provare l'asserto basterà provare, come subito faremo, che per $\varphi > \theta \geq 0$

$$\frac{v_a}{v} < 1.$$

Dall'essere

$$\begin{cases} \left[\dfrac{v_a}{v}\right]_{\theta=\varphi} = 1 \\ \left[\dfrac{\delta(y)}{\delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a)}\right]_{\theta=\varphi} = \dfrac{\delta(0)}{\delta(-s)} < 1, \end{cases}$$

segue, per le (58),

$$\left[\frac{d}{d\theta}\log\left(\frac{v_a}{v}\right)\right]_{\theta=\varphi} > 0.$$

Quindi, se si esclude l'asserto, bisognerà ammettere che in $(0, \varphi)$ esista un valore $\theta' > \varphi$ tale che:

per $\theta' < \theta < \varphi$

$$\frac{v_a}{v} < 1 \tag{61}$$

mentre (non solo per $\theta = \varphi$, ma anche) per $\theta = \theta'$

$$\frac{v_a}{v} = 1; \tag{62}$$

$$\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_a}{v}\right)\right]_{\theta=\theta'} \leq 0. \tag{63}$$

Dalle (62) e (63) si deduce, in base alla $(58)_1$,

$$1 \leq \left[\frac{\delta(y)}{\delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a)}\right]_{\theta=\theta'},$$

ed anche, invocando la (59),

$$[y_a - y]_{\theta=\theta'} > 0,$$

cioè, per la (60),

$$\int_\theta^\varphi v^2 \operatorname{tg}\theta \left\{ \frac{v_a^2}{v^2} - 1 \right\} d\theta > 0;$$

conclusione evidentemente contraria alla (61).

Dimostrato così il nostro asserto, rileveremo subito due sue conseguenze immediate:

1°) in tutto $(0, \varphi)$

$$|y_a - y| \leq \Delta_v \tag{64}$$

ove

$$\Delta_r = |y_a - y|_{\theta=0};$$

2°) lungo tutta la traiettoria del moto ausiliare

(65) $$y_a < \mathrm{Y}.$$

§ 23. In conseguenza delle (25), (59) e (65), in tutto i_r $(r = 1, \dots, p+n)$

$$\left| \frac{\delta(y)}{\delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a)} - 1 \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a)} \left\{ |\delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a) - \delta(y_a)| + |\delta(y_a) - \delta(y)| \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a)} \left\{ \alpha s + \alpha |y_a - y| \right\} \leq \frac{\alpha}{\delta(\mathrm{Y})} \left\{ s + \alpha |y_a - y| \right\} = \mu \left\{ s + |y_a - y| \right\}.$$

Quindi, indicando con Δ_θ il massimo valore di $|y_a - y|$ nell'intervallo (θ, φ), qualunque sia θ in i_r $(r = 1, \dots, p+n)$ avremo

$$\left| \frac{\delta(y)}{\delta(\eta_r + \varepsilon_r s + y_a)} - 1 \right| < \mu \left\{ s + \Delta_\theta \right\}.$$

Dal confronto di questa diseguaglianza colle (58) si deduce che per qualunque valore di θ in (φ_{p+n}, φ)

(66) $$\left| \frac{v_a^2}{v^2} - 1 \right| < \mu (s + \Delta_\theta).$$

§ 24. Avendo presente la (60), appare evidente che, al decrescere di θ da 0 a θ^*, la differenza $y_a - y$ almeno in principio è negativa e decresce in valore assoluto: perchè abbiamo già dimostrato che per $\theta = 0$ è negativa non solo $y_a - y$, ma anche $\frac{v_a^2}{v^2} - 1$.

Ne segue che se

$$\theta^* \leq \theta' < \varphi$$

e dentro $(\theta', 0)$ la $y_a - y$ è negativa, certamente è $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_a}{v}\right) < 0$ per ogni valore di θ dentro lo stesso intervallo. Infatti, al decrescere di θ da 0 a θ', la prima volta che entro $(\theta', 0)$ si avesse $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_a}{v}\right) = 0$, dovrebbe essere, per la (60), $\frac{v_a}{v} = 1$: e quindi, per la (58), $y = \eta_r + \varepsilon_r s + y_a$; e infine, per la (59), $y_a - y \geq 0$.

Vuol dire che $|y_a - y|$ al variare di θ da 0 a φ_{p+n}:

i_1) o non si annullerà mai, e in tal caso costantemente decrescerà e [cf. la (64)] in tutto (θ^*, φ) avremo

(67) $$|y_a - y| \leq \Delta_v;$$

i_2) o arriverà ad annullarsi senza che poi cessi di sussistere la (67);

i_3) oppure si annullerà [per $\theta = \theta'$] e, ripreso successivamente [per $\theta = \bar{\theta} > \theta^*$] il valore Δ_v, finirà per superarlo.

Alla θ associamo nell'intervallo $(\theta^\star, 0)$ la nuova variabile

$$\zeta = \frac{1}{g}\int_\theta^0 v^2\,|\operatorname{tg}\theta|\,d\theta,$$

che al decrescere di θ da 0 a $\theta^\star$ varia, costantemente crescendo, dal valore 0 a un certo valore $\zeta^\star = [\zeta]_{\theta=\theta^\star}$: e subito osserviamo che nell'ipotesi i_3) dev'essere

$$\bar{\zeta} = [\zeta]_{\theta=\bar{\theta}} > \frac{2\varDelta_v}{\mu(s+\varDelta_v)}. \tag{68}$$

Invero, in tale ipotesi, avendosi

$$\frac{1}{g}\int_{\theta'}^0 v^2\,|\operatorname{tg}\theta|\left|\frac{v_a^2}{v^2}-1\right|d\theta = \frac{1}{g}\int_{\theta'}^0 v^2\operatorname{tg}\theta\left\{\frac{v_a^2}{v^2}-1\right\}d\theta = \varDelta_v$$

$$\frac{1}{g}\int_{\bar{\theta}}^{\theta'} v^2\,|\operatorname{tg}\theta|\left|\frac{v_a^2}{v^2}-1\right|d\theta = \frac{1}{g}\int_{\bar{\theta}}^{\theta'} v^2\operatorname{tg}\theta\left\{\frac{v_a^2}{v^2}-1\right\}d\theta \geq \varDelta_v$$

si ha pure

$$\frac{1}{g}\int_{\bar{\theta}}^0 v^2\,|\operatorname{tg}\theta|\left|\frac{v_a^2}{v^2}-1\right|d\theta \geq 2\varDelta_v;$$

donde, in base alla (66), si ricava la (68) non appena si rilevi che, nell'ipotesi i_3), in tutto $(\bar{\theta}, 0)$ è

$$\varDelta_\theta = \varDelta_v.$$

§ 25. Sempre nell'ipotesi i_3), dalle (60) e (66) si deduce, per $\bar{\theta} \geq \theta \geq \theta^\star$

$$\varDelta_\theta \leq \varDelta_v + \frac{1}{g}\int_{\bar{\theta}}^{\theta} \mu(s+\varDelta_\theta)\,v^2\,|\operatorname{tg}\theta|\,d\theta.$$

Adottando la notazione

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{g}\int_{\bar{\theta}}^{\theta} \varDelta_\theta\,v^2\,|\operatorname{tg}\theta|\,d\theta,$$

scriveremo tale relazione nella forma

$$\frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} = \varDelta_v + \mu\,s(\zeta-\bar{\zeta}) + \mu\Psi(\zeta) - \mathrm{P}(\zeta),$$

intendendo che, per $\zeta^\star \geq \zeta \geq \bar{\zeta}$, sia

$$\mathrm{P}(\zeta) \geq 0.$$

Sia $\varepsilon(\zeta)$ la soluzione dell'equazione

$$\frac{d\,\varepsilon(\zeta)}{d\zeta} = \varDelta_v + \mu\,s(\zeta-\bar{\zeta}) + \mu\,\varepsilon(\zeta)$$

che si annulla per $\zeta = \bar{\zeta}$: sia cioè

$$\varepsilon(\zeta) = e^{\mu(\zeta-\bar{\zeta})}\int_{\bar{\zeta}}^{\zeta}\left\{\varDelta_v + \mu\,s(\zeta-\bar{\zeta})\right\}e^{-\mu(\zeta-\bar{\zeta})}\,d\zeta$$

e quindi

$$\frac{d\varepsilon(\zeta)}{d\zeta} = \varDelta_v e^{\mu(\zeta-\bar{\zeta})} + s \left\{ e^{\mu(\zeta-\bar{\zeta})} - 1 \right\}.$$

Risultando

$$\frac{d\left\{\varepsilon(\zeta) - \Psi(\zeta)\right\}}{d\zeta} = \mu\left\{\varepsilon(\zeta) - \Psi(\zeta)\right\} + \mathrm{P}(\zeta)$$

e contemporaneamente

$$[\varepsilon(\zeta) - \Psi(\zeta)]_{\zeta=\bar{\zeta}} = 0,$$

avremo, sempre per $\bar{\zeta} \leq \zeta \leq \zeta^\star$,

$$\varepsilon(\zeta) - \Psi(\zeta) = e^{\mu(\zeta-\bar{\zeta})} \int_{\bar{\zeta}}^{\zeta} e^{-\mu(\zeta-\bar{\zeta})} \mathrm{P}(\zeta)\, d\zeta \geq 0:$$

e successivamente

$$\frac{d}{d\zeta}\left\{\varepsilon(\zeta) - \Psi(\zeta)\right\} \geq 0$$

e quindi

$$\varDelta_\theta = \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \leq \frac{d\varepsilon(\zeta)}{d\zeta}$$

cioè

$$\varDelta_\theta \leq (\varDelta_v + s)\, e^{\mu(\zeta-\bar{\zeta})} - s. \tag{69}$$

In modo analogo [precisamente, riprendendo il ragionamento seguìto per giungere alla (69) dopo aver sostituito $\bar{\zeta}$ e $\varDelta_v$ con 0] si dimostra che in tutto $(0, \varphi)$

$$\varDelta_\theta < s\left\{e^{\mu\mathrm{Y}} - 1\right\},$$

in particolare

$$\varDelta_v < s\left\{e^{\mu\mathrm{Y}} - 1\right\}. \tag{70}$$

§ 26. Poniamo

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\varDelta_v}{s} \\ f(\xi) = (1+\xi)\, e^{-\frac{2\xi}{1+\xi}} = (1+\xi)\, e^{\frac{2}{1+\xi}}\, e^{-2}. \end{cases}$$

Nell'ipotesi i_3), dal confronto della (69) colla (68) si trae, per $\bar{\theta} \leq \theta \leq \theta^\star$,

$$\varDelta_\theta < (\varDelta_v + s)\, e^{\mu\left\{\zeta - \frac{2\varDelta_v}{\mu(s+\varDelta_v)}\right\}} - s = s\left\{f(\xi)\, e^{\mu\zeta} - 1\right\}. \tag{71}$$

Essendo identicamente

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}\, e^{-\frac{2\xi}{1+\xi}},$$

la $f(\xi)$ nell'intervallo $(0, \infty)$ passerà sempre decrescendo dal valore $f(0) = 1$ al valore $f(1) = \dfrac{2}{e}$, per poi crescere costantemente e indefinitamente.

La radice > 1 dell'equazione $f(\xi) = 1$, cioè dell'equazione

$$(1 + \xi)\, e^{\frac{2}{1+\xi}} = e^2 ,$$

come facilmente si verifica è compresa tra 3,5 e 4.

Nella (71) sarà dunque $f(\xi) < 1$ tutte le volte che

$$\Delta_v \leq 3{,}5\, s ,$$

in particolare, per la (70), quando

$$e^{\mu Y} < 4{,}5 ,$$

$$\mu Y < 1{,}5 \ldots .$$

Dato che nelle ipotesi del § 17 questa diseguaglianza deve supporsi sempre e larghissimamente verificata ([1]), potremo concludere che in tutto $(\theta^\star , \bar\theta)$

$$\Delta_\theta < s \left\{ e^{\mu\zeta} - 1 \right\} . \tag{72}$$

Con questo la $(IV)_q$ si può dire dimostrata. Infatti, possiamo affermare che, in tutto $(\theta_h , 0)$, si ha:

1°) nell'ipotesi i_1) od i_2) – per la (70) –

$$| y_a - y | < s \left\{ e^{\mu Y} - 1 \right\} ;$$

2°) nell'ipotesi i_3) – per la (70), la (72) e perchè $[\zeta]_{\theta=\theta_h} = Y + h$ –

$$| y_a - y | < s \left\{ e^{\mu(Y+h)} - 1 \right\} .$$

Ciò che evidentemente include la $(IV)_q$.

§ 27. Dimostrata la $(IV)_q$, la $(I)_q$ doventa un'immediata conseguenza della (66).

Successivamente [tenendo conto delle $(49)_3$ e $(50)_3$, $(49)_2$ e $(52)_2$] si trova che per ogni valore di θ in (θ_h , φ):

$$(III)_q \quad | x_a - x | \leq \frac{1}{g} \int_\theta^\varphi v^2 \left| \frac{v_a^2}{v^2} - 1 \right| d\theta < X_h\, \mu s e^{\mu(Y+h)} ,$$

$$(II)_q \quad | t_a - t | \leq \frac{1}{g} \int_\theta^\varphi \frac{v}{\cos\theta} \left| \frac{v_a}{v} - 1 \right| d\theta = \frac{1}{g} \int_\theta^\varphi \frac{v}{\cos\theta} \frac{\left| \frac{v_a^2}{v^2} - 1 \right|}{\frac{v_a}{v} + 1} d\theta < T_h\, \mu s e^{\mu(Y+h)} ;$$

ed anche, se, come è da presumere, $\mu s e^{\mu(Y+h)} < 1$,

$$| t_a - t | < \frac{1}{g} \int_\theta^\varphi \frac{v\, d\theta}{\cos\theta} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \mu s e^{\mu(Y+h)}} \right\} < T_h \left\{ 1 - \sqrt{1 - \mu s e^{\mu(Y+h)}} \right\} .$$

([1]) Cfr. § 20 e la nota a pag. 102.

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX, 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO V.

ENRICO FERMI

SUL PESO DEI CORPI ELASTICI

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

RELAZIONE

letta dal Corrispondente ARMELLINI (relatore), a nome anche del Socio LEVI-CIVITA, nella seduta del 7 gennaio 1923, sulla Memoria del dott. ENRICO FERMI, intitolata: *Sul peso dei corpi elastici.*

L'A. immagina un corpo elastico immerso in uno spazio euclideo in condizioni di riposo, cioè in modo che le sue tensioni interne siano tutte nulle.

Suppone poi che il corpo venga tolto dallo spazio euclideo ed immerso in uno spazio statico einsteiniano, la cui metrica è determinata dalla forma data dal prof. Levi-Civita,

$$ds^2 = g_{00}\,dt^2 - \sum g_{ik}\,dx_i\,dx_k\,,$$

dove le g sono funzioni delle sole x. L'A. calcola quindi la variazione dell'energia specifica nell'intorno di un punto generico del corpo elastico quando esso passa dallo spazio euclideo allo spazio einsteiniano, e dimostra che ad essa corrisponde in generale una variazione del peso del corpo, variazione che non ha la direzione della gravità.

Poichè, però, i procedimenti adoperati sarebbero più adattati a dimostrare l'esistenza piuttosto che a calcolare l'ammontare di questa variazione di peso, l'A. consacra il seguito della Memoria allo studio di due casi particolarmente semplici: quando cioè il corpo elastico sia una sfera od un cilindro circolare.

La condotta del lavoro rivela nell'A. una completa padronanza dello strumento analitico. Non ostante che le formole generali — date nella prima parte della Memoria — fossero già state trovate dal Ricci, il quale però le ha soltanto esposte nelle sue lezioni all'Università di Padova senza mai pubblicarle, i relatori giudicano che il lavoro del dott. Fermi arreca un vero e sostanziale contributo all'argomento di cui tratta, e ne propongono quindi l'inserzione integrale negli Atti accademici.

Sul peso dei corpi elastici.

Memoria del dott. ENRICO FERMI

1. — Formule generali.

Intendendo in questo lavoro considerare soltanto fenomeni statici, supporremo che nello spazio-tempo valga la metrica che corrisponde a questo caso [1]; che sia cioè

$$ds^2 = g_{00}\, dt^2 - \sum_{ik=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx_i\, dx_k\,, \tag{1}$$

dove g_{00} e le γ_{ik} sono funzioni solamente delle coordinate di spazio $x_1\, x_2\, x_3$. Consideriamo ora un corpo elastico che possa distendersi in uno spazio euclideo in posizione di riposo, in modo cioè che siano nulle tutte le tensioni elastiche tra le sue parti. Se lo spazio S di metrica

$$d\sigma^2 = \sum_{ik} \gamma_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i\,, k = 1\,, 2\,, 3) \tag{2}$$

fosse euclideo, potremmo in ∞^6 modi distendere in esso il nostro corpo in posizione di riposo. Siccome però ciò in generale non sarà, accadrà generalmente che nel nostro corpo, quando è immerso nello spazio S, avranno luogo delle tensioni elastiche; e l'energia di queste tensioni varierà generalmente spostando il corpo. Ne segue che il peso del nostro corpo, oltre che alla parte dovuta al peso della sua eventuale massa materiale ed al peso della sua energia elastica, consterà ancora di un'altra parte dovuta alle variazioni di energia elastica or ora accennate. Lo scopo di questo lavoro è appunto di calcolare quale sia questo peso addizionale. Faremo l'ipotesi che lo spazio S sia quasi euclideo, nella quale non è contenuto altro se non la limitazione che si fa sempre nella teoria dell'elasticità, che le deformazioni del corpo elastico siano molto piccole.

Pensiamo per un momento il nostro corpo elastico disteso in uno spazio euclideo ed indichiamo con $u_1\, u_2\, u_3$ delle coordinate cartesiane ortogonali in questo spazio. Quando il corpo si trova immerso nello spazio S, $x_1\, x_2\, x_3$ verranno ad essere funzioni di $u_1\, u_2\, u_3$ per modo che l'elemento metrico di S potrà anche esprimersi, per le u,

$$d\sigma^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, du_i\, du_k\,, \tag{3}$$

[1] T. Levi-Civita, Rendiconti Accademia Lincei, serie 5ª, vol. XXVI, 1917.

essendo naturalmente

$$a_{ik} = \sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial u_i} \frac{\partial x_s}{\partial u_k} . \tag{4}$$

Indichiamo con $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ le tre dilatazioni principali relative ad una particella del corpo. L'energia elastica specifica circostante alla particella sarà, come è noto,

$$W_0 = 4\,A(S\alpha_1)^2 - 4\,B\,S\alpha_2\,\alpha_3 , \tag{5}$$

indicandosi con S la somma eseguita circolando sugli indici (1 , 2 , 3) ed essendo A e B costanti di elasticità che si esprimono per mezzo del modulo di elasticità E e del coefficiente σ di Poisson con le formule

$$A = \frac{E(1-\sigma)}{8(1+\sigma)(1-2\sigma)} \; ; \; B = \frac{E}{4(1+\sigma)} . \tag{6}$$

Ora le solite considerazioni di cinematica dei mezzi continui mostrano che $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ sono le radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - (1+x)^2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - (1+x)^2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - (1+x)^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

E quindi, per le note relazioni tra coefficenti e radici, si ha

$$\begin{cases} S(1+\alpha_1)^2 = S a_{11} \\ S(1+\alpha_2)^2(1+\alpha_3)^2 = S \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} . \end{cases} \tag{7}$$

Indicando al solito con ε_{ik}, 1 oppure 0, secondo che $i = k$ oppure $i \neq k$, si avrà, per le ipotesi fatte, $a_{ik} = \varepsilon_{ik} + \beta_{ik}$, essendo le β_{ik} piccolissime. Dalle (7) si ha allora

$$2\,S\alpha_1 + S\alpha_1^2 = S\beta_{11}$$

$$S(1+\alpha_2)^2(1+\alpha_3)^2 = 3 + 2\,S\beta_{11} + S \begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}$$

da cui, essendo, sempre per le ipotesi fatte, le α molto piccole, si ricava approssimativamente

$$S\alpha_1 = \frac{1}{2} S\beta_{11} \quad ; \quad S\alpha_2\,\alpha_3 = \frac{1}{4} S \begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} , \tag{8}$$

e quindi (5)

$$W_0 = A(S\beta_{11})^2 - B\,S \begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} . \tag{9}$$

Siccome nei nostri calcoli ci serviremo del principio di Hamilton, occorre che troviamo la variazione di W_0 quando variano le x_i considerate come funzioni delle u_i; da (9) si ha:

$$\begin{aligned} \delta W_0 &= 2\,A(S\beta_{11})\,S\,\delta\beta_{11} - B\,S(\beta_{22}\,\delta\beta_{33} + \beta_{33}\,\delta\beta_{22} - 2\,\beta_{23}\,\delta\beta_{23}) = \\ &= S\left[\delta\beta_{11}\left\{2A\beta_{11} + (2A-B)(\beta_{22}+\beta_{33})\right\} + 2\,B\,\beta_{23}\,\delta\beta_{23}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Si ha poi (4)

$$\delta \beta_{ik} = \delta a_{ik} = \sum_{rst} \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_t} \delta x_t \frac{\partial x_r}{\partial u_i} \frac{\partial x_s}{\partial u_k} + 2 \sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial u_i} \frac{\partial \delta x_s}{\partial u_k} .$$

Per aver formule più semplici, possiamo prender le coordinate x coincidenti con le u, e la formula precedente diventa

$$(11) \qquad \delta \beta_{ik} = \sum_t \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_t} \delta x_t + 2 \sum_s \gamma_{is} \frac{\partial \delta x_s}{\partial u_k} .$$

Come espressione dell'azione possiamo prendere

$$(12) \qquad W = \iint W_0 \sqrt{g_{00}}\, d\tau\, dt + \iint k \sqrt{g_{00}}\, d\tau\, dt + \iint \sum_i F_i x_i\, dt\, d\tau ,$$

nella quale il primo termine dà l'azione elastica; il secondo l'azione delle masse materiali di densità k; $d\tau$ è l'elemento di volume dello spazio; l'ultimo termine rappresenta infine l'azione di una forza esterna di componenti $F_1\, F_2\, F_3$ adatta a sostenere il corpo perchè non cada: forza che dunque altro non è se non l'eguale e contraria del peso del corpo. La variazione di W può ora immediatamente effettuarsi e siccome il principio di Hamilton richiede che sia $\delta W = 0$, troviamo l'equazione

$$\iint \sum_i F_i \delta x_i\, d\tau\, dt + \iint k \sum_i \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x_i} \delta x_i\, d\tau\, dt +$$
$$+ \iint \left(W_0 \sum_i \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x_i} \delta x_i + \delta W_0 \sqrt{g_{00}} \right) dt\, d\tau = 0 .$$

In δW_0, come risulta dalle (10) (11), sono contenute, oltre ai δx_i, anche le loro derivate, che però possono subito eliminarsi con una integrazione per parti. Siccome poi possiamo p. es. supporre le F_i costanti, annullando i coefficienti dei δx_i troviamo delle equazioni adatte a determinarci la posizione del corpo, ossia, ciò che è equivalente, le β_{ik}. Fatto questo, restano ancora da determinare le F_i, cioè le componenti del peso del corpo. E questo si fa ora facilmente, supponendo le δx costanti. Si trova infatti, da (10) (11),

$$\delta \beta_{ik} = \sum_t \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_t} \delta x_t ;$$

e quindi

$$(13) \qquad \delta W_0 = \sum_t K_t\, \delta x_t ,$$

avendo per brevità posto

$$(14) \qquad K_t = S \left[\frac{\partial \beta_{11}}{\partial u_t} \left\{ 2\, A\, \beta_{11} + (2\, A - B)\, (\beta_{22} + \beta_{33}) \right\} + 2\, B\, \beta_{23} \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_t} \right] .$$

Il principio di Hamilton ci dà dunque, annullando i coefficienti dei δx_i,

$$(15) \qquad \int F_t\, d\tau + \int (k + W_0) \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x_t} d\tau + \int K_t \sqrt{g_{00}}\, d\tau = 0 .$$

Dalla quale risulta che il peso è:

$$\int (k + W_0) \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x_i} d\tau + \int K_i \sqrt{g_{00}}\, d\tau .$$

Esso consta dunque di due parti: la prima non è altro se non il peso delle masse materiali e dell'energia elastica, ed ha la direzione della gravità; la seconda, di componenti $\int K_i \sqrt{g_{00}}\, d\tau$, ha in generale direzione diversa ed è dovuta alla ragione accennata al principio di questa Nota. Essa può in particolare esser diversa da zero anche quando g_{00} è costante, ossia quando non c'è forza di gravità nel senso ordinario.

2. — Caso di un cilindro con le generatrici parallele all'asse z.

Il metodo dato ora per calcolare questo peso addizionale è però, per lo più, inapplicabile perchè richiede la risoluzione di un complicato problema di teoria dell'elasticità. Mi propongo di mostrare, con due esempî particolarmente semplici, come in qualche caso si possa giungere a calcolare effettivamente questo peso addizionale dei corpi elastici. Supporremo, nel primo esempio, che il ds^2 dello spazio tempo sia

$$ds^2 = g_{00}\, dt^2 - dz^2 - E\, dx^2 - 2\, F\, dx\, dy - G\, dy^2 , \tag{16}$$

essendo g_{00}, E, F, G funzioni soltanto di x e di y. Supporremo poi che il nostro corpo elastico sia costituito da un cilindro con le generatrici parallele all'asse z e che, disteso in posizione di riposo in uno spazio euclideo, abbia sezione circolare di raggio piccolo in confronto al raggio di curvatura della forma quadratica $E\, dx^2 + 2F\, dx\, dy + G dy^2$. Quanto alle proprietà elastiche del nostro corpo, possiamo press'a poco indifferentemente supporre o che sia isotropo, ma di forma tanto allungata che sia trascurabile l'influenza degli estremi, oppure che abbia lunghezza qualunque, ma sia costituito come da fibre rigide parallele all'asse. Siccome questa seconda ipotesi conduce a calcoli un po' più semplici della prima, ci atterremo ad essa.

Sia H la curvatura della forma quadratica $E dx^2 + 2F\, dx\, dy + G\, dy^2$. Noi supporremo che H e g_{00} non variino sensibilmente entro il nostro corpo, di modo che esso continuerà ad aver forma di cilindro circolare. Indichiamo con r la distanza di una particella generica del cilindro dall'asse, quando il cilindro è in posizione di riposo in uno spazio euclideo, e con $r + \varepsilon$ la sua distanza dall'asse quando il cilindro è immerso nel nostro spazio non euclideo. La lunghezza del cerchio col centro sull'asse passante per la nostra particella era $2\pi r$; ed ora, se lo spazio fosse euclideo, sarebbe $2\pi(r + \varepsilon)$. Siccome però ciò non è, la lunghezza di quel cerchio risulta, con la nostra approssimazione, $2\pi(r+\varepsilon)\left(1 - \frac{Hr^2}{6}\right)$, di modo che gli allungamenti della nostra particella in direzione radiale e trasversale sono rispettivamente, trascurando nella nostra approssimazione il prodotto εH,

$$\frac{d\varepsilon}{dr} \; ; \; \frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6} .$$

L'energia elastica specifica nell'intorno della nostra particella è dunque

$$(17)\qquad W_0 = 4A\left\{\left(\frac{d\varepsilon}{dr}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6}\right)^2\right\} + 4B\frac{d\varepsilon}{dr}\left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6}\right),$$

essendo A e B costanti di elasticità legate al modulo di elasticità E ed al coefficente di contrazione σ (naturalmente considerati nel piano perpendicolare alle fibre) dalle relazioni

$$(18)\qquad A = \frac{E}{8(1-\sigma^2)}\quad,\quad B = \frac{\sigma E}{4(1-\sigma^2)}.$$

Supponiamo che il nostro cilindro abbia altezza 1; allora l'energia corrispondente allo strato compreso tra i due cilindri coassiali di raggio r ed $r + dr$ è $2\pi r W_0\, dr$. Sia R il raggio del cilindro: l'energia totale sarà allora

$$2\pi\int_0^R r\, W_0\, dr\,,$$

cioè

$$8\pi\int_0^R r\, dr\left[A\left\{\left(\frac{d\varepsilon}{dr}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6}\right)^2\right\} + B\frac{d\varepsilon}{dr}\left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6}\right)\right].$$

Per l'equilibrio elastico dobbiamo determinare ε in funzione di r per modo che l'espressione precedente sia un minimo.

Abbiamo perciò, con le solite regole del calcolo delle variazioni, l'equazione differenziale

$$2A\left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6}\right) + B\frac{d\varepsilon}{dr} = \frac{d}{dr}\left\{2A\frac{d\varepsilon}{dr}r + B\left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6}\right)r\right\}$$

con le condizioni ai limiti

$$\text{per } r = 0 \qquad \varepsilon = 0$$

$$\text{per } r = R \qquad 2A\frac{d\varepsilon}{dr} + B\left(\frac{\varepsilon}{r} - \frac{Hr^2}{6}\right) = 0.$$

Queste condizioni sono sufficenti a determinare ε in funzione di r, e ci forniscono precisamente

$$(19)\qquad \varepsilon = \frac{(2A - B)\, HR^2}{32A}\, r - \frac{(2A - 3B)H}{32A}\, r^3.$$

Ci conviene ora sostituire questa espressione di ε nell' espressione dell'energia totale. Dopo qualche calcolo un pò laborioso, ma assolutamente privo di difficoltà si trova così per l'energia totale l'espressione:

$$\frac{\pi H^2 R^6}{3456 A^2}\left[224 A^3 - 108 A^2 B + 72 AB^2 + 27 B^3\right];$$

o, ponendo

$$(20)\qquad M = \frac{\pi}{3456 A^2}\left[224 A^3 - 108 A^2 B + 72 AB^2 + 27 B^3\right],$$

otteniamo finalmente come energia totale

$$M H^2 R^6 .$$

Ed M è una costante che dipende esclusivamente dalle costanti elastiche del nostro corpo.

Indichiamo ora con m la massa totale del nostro cilindro e con F_x, F_y, F_z le tre componenti della equilibrante del peso. Per il principio di Hamilton, come prima, dovrà essere nulla la variazione dell'espressione

$$\sqrt{g_{00}}\,(m + M H^2 R^6) + F_x x + F_y y + F_z z \cdot$$

Ora, tale variazione è

$$\left(\delta x \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x} + \delta y \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial y}\right)(m + M H^2 R^6) + 2\sqrt{g_{00}}\, M H R^6 \left(\frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial y}\delta y\right) + $$
$$+ F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z ,$$

poichè g_{00} e H sono funzioni soltanto di x e di y.

Annullando i coefficenti di $\delta x\ \delta y\ \delta z$, troviamo ora

$$(21)\qquad \begin{cases} F_x + \dfrac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x}(m + M H^2 R^6) + 2\sqrt{g_{00}}\, M H R^6 \dfrac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ F_y + \dfrac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial y}(m + M H^2 R^6) + 2\sqrt{g_{00}}\, M H R^6 \dfrac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$$

Supponiamo, per comodità, che in vicinanza del nostro corpo la velocità della luce sia 1, cioè $g_{00} = 1$.

Allora $\dfrac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \sqrt{g_{00}}}{d y}$ non sono altro se non le componenti G_x e G_y dell'accelerazione di gravità. Risulta allora che le componenti del peso del nostro corpo sono

$$G_x (m + M H^2 R^6) + M R^6 \frac{\partial H^2}{\partial x}$$
$$G_y (m + M H^2 R^6) + M R^6 \frac{\partial H^2}{\partial y}$$
$$0$$

ossia, con scrittura vettoriale, che il suo peso è

$$(22)\qquad \vec{P} = \vec{G}\,(m + M H^2 R^6) + M R^6 \operatorname{grad}(H^2) .$$

Esso consta dunque di due parti bene distinte. La prima non è altro se non il peso ordinario della massa e dell'energia elastica ed ha la direzione dell'accelerazione di gravità G. La seconda, dovuta invece alle deviazioni dall'euclideità del solo spazio, ha in generale direzione diversa dalla prima, determinata soltanto dalla curvatura H. Essa può dunque esistere anche quando la prima non esista: cioè un corpo elastico può pesare anche in un campo in cui non vi sia accelerazione di gravità propriamente detta.

3. — Caso di una sfera isotropa.

Il secondo esempio è il seguente: calcolare il peso di una sfera elastica isotropa di dimensioni molto piccole rispetto ai raggi di curvatura dello spazio. Anche ora conviene naturalmente cercare prima l'energia totale elastica della nostra sfera.

Consideriamo perciò, accanto allo spazio S di metrica (2), anche uno spazio euclideo S' e supponiamo che la nostra sfera successivamente sia distesa in posizione di riposo in S'; e poi posta in S.

Riferiamo lo spazio S' a coordinate cartesiane ortogonali (ξ, η, ζ) con centro nel centro della sfera. Siccome poi tra i punti di S e di S' vi è corrispondenza biunivoca (facendo corrispondere quelle coppie di punti che sono occupate dalla medesima particella della sfera elastica), potremo riferire anche lo spazio S alle coordinate $\xi\,\eta\,\zeta$. Osserviamo poi che, per la approssimazione introdotta, alle tre direzioni principali ortogonali di curvatura dello spazio S, relative al centro della sfera, corrisponderanno in S' tre direzioni, pure ortogonali, che potremo prendere per direzioni degli assi coordinati. L'elemento metrico di S sia ora riferito al nuovo sistema

$$(23)\qquad \begin{aligned} ds^2 = (1+\beta_{11})\,d\xi^2 + (1+\beta_{22})\,d\eta^2 + (1+\beta_{33})\,d\zeta^2 +\\ + 2\beta_{23}\,d\eta\,d\zeta + 2\beta_{31}\,d\zeta\,d\xi + 2\beta_{12}\,d\xi\,d\eta \end{aligned}$$

dove le β saranno molto piccole. Possiamo svilupparle in serie delle $\xi\,\eta\,\zeta$, fermandoci ai termini quadratici. Osserviamo poi che, per le ipotesi fatte, mancheranno in questo sviluppo i termini lineari (se vi fossero, infatti, essi permetterebbero di distinguere un senso dall'opposto), e nei termini quadratici mancheranno quelli rettangolari (se vi fossero, infatti, la quadrica ottenuta eguagliando questo termine quadratico a una costante avrebbe il triedro principale non coincidente col triedro principale di curvatura, ciò che è contro la simmetria). Inoltre in $\beta_{23}, \beta_{31}, \beta_{12}$ mancherà anche il termine costante, perchè, per $\xi = \eta = \zeta = 0$, deve essere $\beta_{23} = \beta_{31} = \beta_{12} = 0$. Così che, in ultima analisi, il nostro sviluppo sarà

$$(24)\qquad \begin{cases} \beta_{11} = \gamma_{11} + p_{11}\,\xi^2 + q_{11}\,\eta^2 + r_{11}\,\zeta^2 \\ \beta_{23} = \qquad p_{23}\,\xi^2 + q_{23}\,\eta^2 + r_{23}\,\zeta_2 \end{cases}$$

e le analoghe circolando sugli indici. Le γ, p, q, r sono costanti.

Ora la (9) ci permette di calcolare l'energia specifica W_0, e si trova

$$W_0 = G + SL_1\,\xi^2 + SP_1\,\xi^4 + S\pi_1\,\eta^2\,\zeta^2,$$

essendo le G, L, P, π costanti formate con le γ, p, q, r. L'energia totale sarà $W = \int_\tau W_0\,d\tau$, esteso a tutto il volume della sfera.

Ora si ha

$$\int_\tau d\tau = \frac{4}{3}\pi R^3;\ \int_\tau \xi^2\,d\tau = \frac{4}{15}\pi R^5;\ \int_\tau \xi^4\,d\tau = \frac{4}{35}\pi R^7;\ \int_\tau \eta^2\xi^2\,d\tau = \frac{4}{105}\pi R^7;$$

di modo che l'energia totale risulta

$$W = \frac{4}{3}\pi R^3 G + \frac{4}{15}\pi R^5 SL_1 + \frac{4}{35}\pi R^7 SP_1 + \frac{4}{105}\pi R^7 S\pi_1.$$

Dalla (9) e dalla (24) si trova poi, effettuando i calcoli, che

$$G = AS\,\gamma_{11}^2 + (2A - B)\,S\,\gamma_{22}\,\gamma_{33}\,,$$

$$SL_1 = 2AS\,\gamma_{11}(p_{11} + q_{11} + r_{11}) +$$
$$+ (2A - B)\,S\,\{\gamma_{22}(p_{33} + q_{33} + r_{33}) + \gamma_{33}(p_{22} + q_{22} + r_{22})\}\,,$$

$$SP_1 = AS\left(p_{11}^2 + q_{11}^2 + r_{11}^2\right) + \left(2A - B\right)S\left(p_{22}\,p_{33} + q_{22}\,q_{33} + r_{22}\,r_{33}\right) +$$
$$+ B\left(p_{23}^2 + q_{23}^2 + r_{23}^2\right),$$

$$S\pi_1 = 2AS\,(q_{11}\,r_{11} + r_{11}\,p_{11} + p_{11}\,q_{11}) + (2AB)\,S(q_{22}\,r_{33} + q_{33}\,r_{22} + r_{22}\,p_{33} +$$
$$+ r_{33}\,p_{22} + p_{22}\,q_{33} + p_{33}\,q_{22}) + 2BS\,(q_{23}\,r_{23} + r_{23}\,p_{23} + p_{23}\,q_{23})\,.$$

Sostituendo queste espressioni in (25), si trova W espresso per le γ, p, q, r. Ora per l'equilibrio bisogna determinare γ, p, q, r in modo che W sia minimo. Le γ, p, q, r son però soggette anche alla condizione che le curvature dello spazio abbiano il valore che debbono avere. Ora da (23) (24) risulta subito

$$(26)\quad (23\,,23) = -r_{22} - q_{33}\,;\ (31\,,31) = -p_{33} - r_{11}\,;\ (12\,,12) = -q_{11} - p_{22}\,.$$

La determinazione delle γ, p, q, r si può fare ora col metodo dei coefficenti indeterminati a_1, a_2, a_3, perchè, dato che le β_{ik} sono piccolissime, si può intendere che (23 , 23) (31 , 31) (12 , 12) siano le tre curvature principali. Si trova, con un calcolo un po' laborioso ma privo di ogni difficoltà

$$(27)\qquad \delta\left(\frac{W}{4\pi R^3} - Sa_1\,[(23\,,23) + r_{22} + q_{33}]\right) =$$

$$= S\,\delta\gamma_{11}\left[\frac{2A}{3}\gamma_{11} + \frac{2A-B}{3}(\gamma_{22}+\gamma_{33}) + \frac{2A\,R^2}{15}(p_{11}+q_{11}+r_{11}) + \right.$$
$$\left. + \frac{(2A-B)\,R^2}{15}(p_{33}+q_{33}+r_{33}+p_{22}+q_{22}+r_{22})\right] +$$

$$+ S\,\delta p_{11}\left[\frac{2AR^2}{15}\gamma_{11} + \frac{(2A-B)\,R^2}{15}(\gamma_{22}+\gamma_{33}) + \frac{2A\,R^4}{105}(3p_{11}+r_{11}+q_{11}) + \right.$$
$$\left. + \frac{(2A-B)\,R^4}{105}(3p_{33}+r_{33}+q_{33}+3p_{22}+r_{22}+q_{22})\right] +$$

$$+ S\,\delta q_{11}\left[\frac{2A\,R^2}{15}\gamma_{11} + \frac{(2A-B)\,R^2}{15}(\gamma_{22}+\gamma_{33}) + \frac{2A\,R^4}{105}(3q_{11}+r_{11}+p_{11}) + \right.$$
$$\left. + \frac{(2A-B)\,R^4}{105}(3q_{33}+r_{33}+p_{33}+3q_{22}+r_{22}+p_{22}) - a_3\right] +$$

$$+ S\,\delta r_{11}\left[\frac{2A\,R^2}{15}\gamma_{11} + \frac{(2A-B)\,R^2}{15}(\gamma_{22}+\gamma_{33}) + \frac{2A\,R^4}{105}(3r_{11}+p_{11}+q_{11}) + \right.$$
$$\left. + \frac{(2A-B)\,R^4}{105}(3r_{33}+p_{33}+q_{33}+3r_{22}+p_{22}+q_{22}) - a_2\right] +$$

$$+ \frac{2B\,R^4}{105}\,S\left[\delta p_{23}(3p_{23}+q_{23}+r_{23}) + \delta q_{23}(3q_{23}+r_{23}+p_{23}) + \right.$$
$$\left. + \delta r_{23}(3r_{23}+p_{23}+q_{23})\right] = 0\,.$$

Dobbiamo ora annullare tutti i coefficenti dei $\delta\gamma$, δp, δq, δr; e alle equazioni, così ottenute, aggiungere le (26). Otteniamo così 24 equazioni lineari ed omogenee tra le 24 incognite γ, p, q, r, a.

Dalle 3 che si ottengono annullando i coefficienti di δp_{23}, δq_{23}, δr_{23}, si ricava intanto $p_{23} = q_{23} = r_{23} = 0$, da cui $\beta_{23} = 0$ ed analogamente $\beta_{31} = \beta_{12} = 0$. Per determinar le rimanenti 15 incognite, poniamo

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{5}{R^2} S_1 = p_{11} + q_{11} + r_{11} \\ 2A\gamma_{11} + (2A - B)(\gamma_{22} + \gamma_{33}) = C_1 \\ 3p_{11} + r_{11} + q_{11} = P_1 \dfrac{7}{R^2} \\ \alpha_1 = a_1 \dfrac{15}{R^2} \end{array} \right. .$$

Le equazioni che si ottengono annullando le rimanenti variazioni sono

$$(29) \qquad \left\{ \begin{array}{l} C_1 + 2AS_1 + (2A - B)(S_2 + S_3) = 0 \\ C_1 + 2AP_1 + (2A - B)(P_2 + P_3) = 0 \\ C_1 + 2AQ_1 + (2A - B)(Q_2 + Q_3) = \alpha_3 \\ C_1 + 2AR_1 + (2A - B)(R_2 + R_3) = \alpha_2 \end{array} \right.$$

e le analoghe. Per determinare da queste le S, P, Q, R in funzione delle C, α, si trovano sempre sistemi del tipo

$$2Ax + (2A - B)(y + z) = X$$
$$2Ay + (2A - B)(z + x) = Y$$
$$2Az + (2A - B)(x + y) = Z$$

che ha per soluzione

$$x = MX + N(Y + Z)$$
$$y = MY + N(Z + X)$$
$$z = MZ + N(X + Y)$$

avendo posto

$$(30) \qquad M = \frac{4A - B}{6AB - 2B^2}\,;\; N = \frac{-2A + B}{6AB - 2B^2}.$$

Si ottiene così

$$(31) \qquad \left\{ \begin{array}{l} -S_1 = MC_1 + N(C_2 + C_3) \\ -P_1 = MC_1 + N(C_2 + C_3 - \alpha_2 - \alpha_3) \\ -Q_1 = M(C_1 - \alpha_3) + N(C_2 + C_3 - \alpha_1) \\ -R_1 = M(C_1 - \alpha_2) + N(C_2 + C_3 - \alpha_1) \end{array} \right.$$

e analoghe.

D' altra parte, dalle posizioni (28) risulta subito $5\,S_1 = 7\,(P_1 + Q_1 + R_1)$ e quindi (31)

$$MC_1 + N\,(C_2 + C_3) = \frac{7}{8}\,N\alpha_1 + \frac{7}{16}\,(M + N)\,(\alpha_2 + \alpha_3) \tag{32}$$

e, sostituendo nelle (31) queste espressioni, si hanno le S, P, Q, R, espresse per le α. D'altra parte, dalle (28) si ha

$$r_{22} = \frac{1}{2R^2}\,(7\,R_2 - 5\,S_2)$$

e le 8 analoghe. Mettendo, poi al posto delle α_i, $\frac{15}{R^2}\,a_i$, troviamo infine

$$\left\{\begin{aligned} p_{11} &= \frac{105}{16\,R^4}\,[-2\,Na_1 + (7\,N - M)\,(a_2 + a_3)] \\ q_{11} &= \frac{105}{16\,R^4}\,[6\,Na_1 - (M + N)\,a_2 + (7\,M - N)\,a_3] \\ r_{11} &= \frac{105}{16\,R^4}\,[6\,Na_1 + (7\,M - N)\,a_2 - (M + N)\,a_3] \end{aligned}\right. \tag{33}$$

e analoghe.

Sostituendo questi valori nelle (26), troviamo

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{16R^4}{105}\,(23\,,23) &= 2\,(7M - N)\,a_1 + (5N - M)\,(a_2 + a_3) \\ -\frac{16R^4}{105}\,(31\,,31) &= 2\,(7M - N)\,a_2 + (5N - M)\,(a_3 + a_1) \\ -\frac{16R^4}{105}\,(12\,,12) &= 2\,(7M - N)\,a_3 + (5N - M)\,(a_1 + a_2). \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Da queste tre equazioni si possono ricavare $a_1\,a_2\,a_3$, e, sostituendo i valori così ottenuti in (33), si otterrebbero le incognite cercate. Esse poi dovrebbero sostituirsi nell'espressione (25) di W, e così si otterrebbe l'energia elastica cercata. Possiamo abbreviare questo calcolo osservando che W è funzione omogenea di secondo grado delle γ, p, q, r, e che quindi, per il teorema di Eulero, si ha

$$2\,W = \Sigma\gamma\,\frac{\partial W}{\partial\gamma} + \Sigma p\,\frac{\partial W}{\partial p} + \Sigma q\,\frac{\partial W}{\partial q} + \Sigma r\,\frac{\partial W}{\partial r}\,.$$

Ma dalla (27) risulta che tutte le derivate parziali di W sono zero, tranne quelle rapporto a $q_{11}, r_{11}, r_{22}, p_{22}, p_{33}, q_{33}$ che, a meno del fattore $4\pi R^3$, sono eguali ad $a_3, a_2, a_1, a_3, a_2, a_1$; abbiamo dunque

$$W = 2\pi R^3\,(a_3\,q_{11} + a_2\,r_{11} + a_1\,r_{22} + a_3\,p_{22} + a_2\,p_{33} + a_1\,q_{33})$$

e, introducendo i valori (33)

$$W = \frac{105\,\pi}{4R}\left[(5N - M)\,S\,a_2\,a_3 + (7M - N)\,S\,a_1^2\right].$$

Basta ora ricavare dalle (34) i valori delle a e sostituirli qui dentro, per trovare successivamente

$$a_1 = \frac{4R^4}{105\,(15M - 7N)\,(3M + 2N)} \Big[-(13M + 3N)\,(23\,,23) + + (5N - M)\,\{(31\,,31) + (12\,,12)\} \Big],$$

$$Sa_1^2 = \frac{16R^8}{105^2\,(15M - 7N)^2\,(3M + 2N)^2} \Big[(171M^2 + 58MN + 59N^2)\,S(23\,,23)^2 + + 2(27M^2 - 134MN + 31N^2)\,S(31\,,31)\,(12\,,12) \Big],$$

$$Sa_2\,a_3 = \frac{16R^8}{105^2\,(15M - 7N)^2\,(3M + 2N)^2} \Big[(27M^2 - 134MN + 31N^2)\,S\,(23\,,23)^2 + + (198M^2 - 76MN + 54N^2)\,S\,(31\,,31)\,(12\,,12) \Big],$$

$$W = \frac{4\pi R^7}{105\,(15M - 7N)^2\,(3M + 2N)^2} \Big[(1170M^3 + 504M^2N - 346MN^2 + 96N^3) \times \times S\,(23\,,23)^2 + (180M^3 - 864M^2N + 268MN^2 + 269N^3)\,S\,(31\,,31)\,(12\,,12) \Big],$$

Ci conviene trasformare ancora un momento questa espressione in modo da farvi figurare elementi invarianti.

Introduciamo perciò il tensore controvariante α^{ik} di Ricci, in luogo dei simboli di Riemann; osservando che nella (23) le β_{ik} sono piccolissime, si vede che praticamente si avrà

$$S\,(23\,,23)^2 = \sum_{ik} \alpha^{ik}\,\alpha_{ik}\,,$$

$$S\,(31\,,31)\,(12\,,12) = \frac{1}{2}\Big[\Big(\sum_i \alpha_i^i \Big)^2 - S\,\alpha^{ik}\,\alpha_{ik} \Big].$$

Troviamo così, infine

$$W = R^7 \Big[\mu \sum_{ik} \alpha^{ik}\,\alpha_{ik} + \nu \Big(\sum_i \alpha_i^i \Big)^2 \Big] \tag{35}$$

dove si è posto

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{2\pi\,(2160M^3 + 1872M^2N - 960MN^2 - 77N^3)}{105\,(15M - 7N)^2\,(3M + 2N)^2} \\ \nu = \dfrac{2\pi\,(180M^3 - 864M^2N + 268MN^2 + 269N^3)}{105\,(15M - 7N)^2\,(3M + 2N)^2}\,. \end{cases} \tag{36}$$

Se, come in molti metalli, fosse $\sigma = 1/3$, si troverebbe

$$\mu = \pi E\,\frac{38669}{9274720} \qquad \nu = \pi E\,\frac{13171}{9274720}\,.$$

Per calcolare il peso, possiamo ora procedere in modo dal tutto analogo a quello seguìto nell'esempio precedente. Con le notazioni di allora si trova che, vettorialmente, il peso è espresso da

$$\vec{G}\,(m + W) + R^7 \Big[\mu \,\mathrm{grad} \Big(\sum_{ik} \alpha^{ik}\,\alpha_{ik} \Big) + \nu \,\mathrm{grad} \Big\{ \Big(\sum_i \alpha_i^i \Big)^2 \Big\} \Big].$$

Il secondo termine rappresenta quella parte del peso che non ha la direzione della gravità.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 12°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 12°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIV. Fasc. 4°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. Fasc. 3°.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XX. Fasc. 1°-3°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO VI.

A. PIUTTI e dott. E. BOGGIO-LERA

SULLA DIFFUSIBILITÀ DELL'ELIO

ATTRAVERSO IL VETRO DI TURINGIA

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

Sulla diffusibilità dell'elio attraverso il vetro di Turingia.

Memoria del Socio A. PIUTTI e del Dott. E. BOGGIO-LERA

presentata nella seduta del 4 marzo 1923.

In una precedente Memoria (Rend. Acc. Lincei, serie 5ª, vol. XIII, p. 687) abbiamo accennato di aver verificato che le conclusioni del prof. Lo Surdo (Rend. Acc. Lincei, serie 4ª, vol. XXX, p. 85) circa la penetrazione dell'elio e del neon atmosferici nei tubi di scarica contenenti idrogeno non erano applicabili nel nostro caso.

Avendoci questa verifica permesso di determinare con sufficiente precisione i valori della velocità di diffusione dell'elio attraverso il vetro da noi adoperato (Turingia) a diverse temperature e pressioni, esponiamo nella presente Memoria il metodo sperimentale impiegato ed i risultati ottenuti.

Metodo sperimentale. — L'apparecchio adoperato è riprodotto nella fig. 1.

Entro il fornello elettrico P si ha un bulbo di vetro (1) a doppia parete che è rappresentato nella fig. 2; la camera interna T di esso comunica, per la conduttura R, con la bolla A; nell'interno di T giunge una coppia termoelettrica G, F, in platino-platino rodio, collegata a un millivoltmetro; i fili della coppia termoelettrica sono saldati nel vetro in E; entro il fornello P viene posto anche un termometro a mercurio con scala a 400° C, che naturalmente vien tolto quando si vogliono raggiungere temperature più alte.

La bolla A (fig. 1) comunica, per la conduttura L, con una buona pompa a vapore di mercurio M; il tubo X giunge fino al fondo del serbatoio di mercurio K, nel quale si può fare il vuoto per la conduttura Y e si può fare rientrare l'aria essiccata su $CaCl_2$ e P_2O_5 per il robinetto O. La bolla A è sormontata da un capillare D il quale fu sostituito, dopo le prime esperienze, con un fine capillare termometrico accuratamente calibrato (100 divisioni del capillare corrispondono a 0,001805 cc.), in cima al quale è saldato un sottilissimo filo di platino. Un altro filo di platino è saldato nel vetro in C.

(1) Per la costruzione di questo apparecchio venne adoperata la stessa qualità di vetro che era stata impiegata nella costruzione dei tubi di scarica, che servirono nelle nostre ricerche sulla formazione dell'elio e del neon dall'idrogeno sottoposto alle scariche elettriche.

Descrizione delle esperienze. — Si fa il vuoto nell'apparecchio per le due condutture L ed Y contemporaneamente, allo scopo di evitare l'ascesa del mercurio in L, e si invia la corrente nel fornello elettrico P, portando a 480° C. il bulbo T che vi è racchiuso, mentre la bolla A, il capillare D, le condutture R, L. ecc., vengono scaldate lungamente al becco Bunsen; anche il mercurio del serbatoio K è riscaldato sino all'ebollizione.

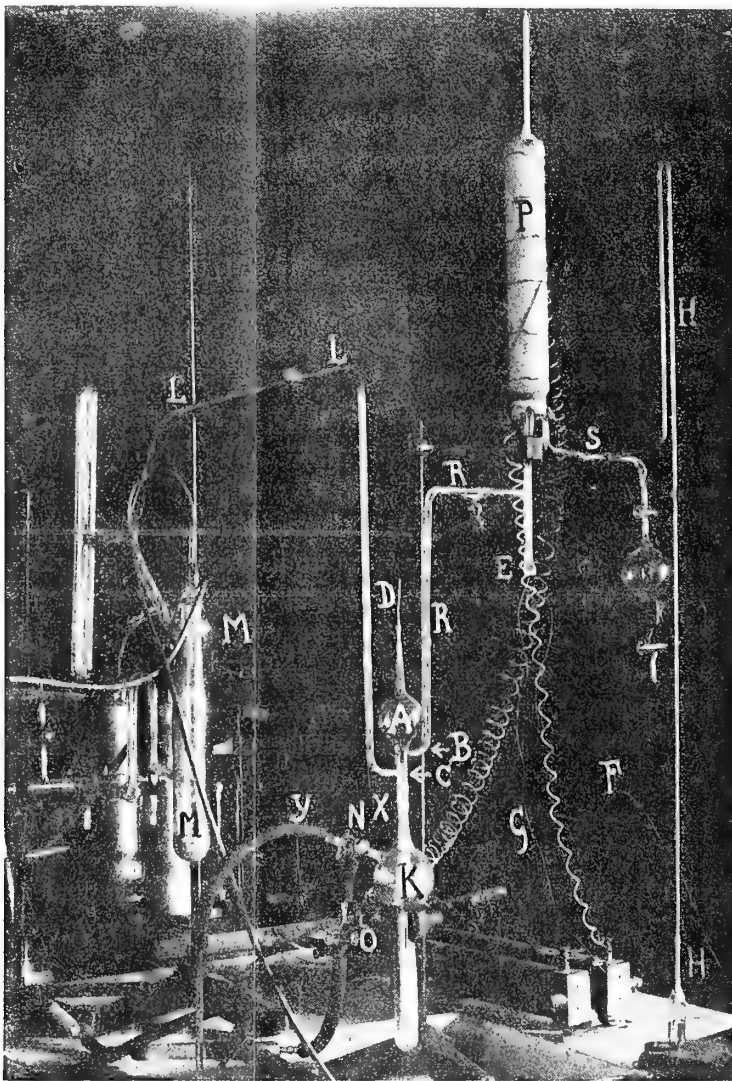



Fig. 1.

Si ripetono di tanto in tanto queste operazioni durante tre giorni, mantenendo sempre un vuoto elevato nell'apparecchio. Alla fine si lascia entrare molto lentamente l'aria per O: il mercurio si innalza nel tubo X e poi nella bolla A e nelle condutture R ed L: quando il livello del mercurio in questi ultimi ha raggiunto la sommità del capillare D, si chiude il robinetto O e si invia la corrente secondaria di un rocchetto d'induzione ai fili di platino saldati in C e in D; il mercurio penetra allora nel capillare D,

perchè la scarica determina una fortissima diminuzione della tensione superficiale del mercurio che diviene quasi nulla, e con essa diventa trascurabile la depressione capillare che raggiunge invece parecchi cm. nelle condizioni ordinarie, dato che il diametro del capillare è assai piccolo.

Se l'apparecchio è stato perfettamente purgato, il mercurio sale fino alla sommità del capillare. Si estrae allora l'aria da K per la conduttura Y, facendo ridiscendere il mercurio sino al livello di C: risulta così chiusa la comunicazione con L_0, mentre la comunicazione con R rimane libera; si scalda al becco Bunsen il capillare D per libe-

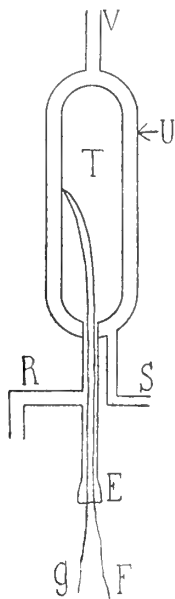



Fig. 2.

rarlo dal mercurio eventualmente rimastovi e si invia per V (fig. 2) una lenta corrente di aria, mantenendo a 400° C. la temperatura del bulbo T. Se l'elio atmosferico penetrasse in quantità spettroscopiche in T, esso perverrebbe anche in A. Dopo 12 ore si lascia entrare lentamente l'aria per O; il mercurio, salendo verso A, chiude la comunicazione con R appena giunge al livello B, e poi concentra l'elio, eventualmente contenuto in A, entro il capillare D [1]; si fa passare in questo la scarica del rocchetto d'induzione e se ne proietta l'immagine sulla fenditura di uno spettroscopio mediante una lente di 3 cm. di fuoco posta a 5 cm. di distanza dal capillare.

All'esame spettroscopico non abbiamo osservato, in queste condizioni, se non le righe del mercurio.

In seguito vennero saldati al tubo S una conduttura comunicante con una pompa Gaede, un manometro A e un sistema di pompa a mercurio comunicante con un pallone di vetro contenente elio puro, mentre il tubo V fu chiuso alla lampada; lo spazio

[1] Gli spostamenti del mercurio devono effettuarsi molto lentamente, così da impiegare alcuni minuti per farlo giungere fino a D.

compreso fra T ed U fu vuotato con la pompa Gaede e poi vi si introdusse elio puro, finchè il manometro A indicò una pressione di 30 cm.

Si portò il bulbo a 85° C. mediante il fornello elettrico e si mantenne questa temperatura per 3 ore, la comunicazione con L essendo chiusa dal mercurio in C. Alla fine si fece salire il mercurio quasi alla sommità del capillare, del quale rimanevano liberi solo 4 mm.; all'esame spettroscopico si ebbe, ben distinta, la D_3 dell'He, oltre le righe del mercurio.

Si fece poi ridiscendere il mercurio ristabilendo la comunicazione con la pompa a diffusione, che si lasciò agire per 10′ [1]; poi si fece risalire il mercurio fino a C, si portò a 105° C. il bulbo T e lo si mantenne a questa temperatura per 22 ore; dopo questo tempo, si potè raccogliere nel capillare una piccola quantità di gas che dava uno spettro completo dell'elio, in cui figurava, come sola impurezza, il mercurio, ed occupava 10 divisioni del capillare sotto la pressione di 12 mm. di mercurio [2].

Non potendo in alcun modo misurare la temperatura di questa minima quantità di gas durante il passaggio della scarica, abbiamo ammesso che questa temperatura fosse uguale a quella del capillare, e perciò a quella dell'ambiente (25° C.), poichè il capillare si riscalda in modo apprezzabile solo quando si continua la scarica per parecchi minuti.

Poichè 10 divisioni del capillare corrispondono a 0,0001805 cc., la quantità di He di cui sopra, portata a 0° e 760 mm. di pressione, occuperebbe il volume

$$A_1 = \frac{0{,}0001805 \times 12}{760 \times (1 + \alpha t)} = 0{,}000002613 \text{ cc.},$$

avendo indicato con α il coefficiente di dilatazione dell'He (0,003662) e con t la temperatura dell'ambiente (25° C.)

Per dedurre da questo dato la quantità complessiva di He che è penetrata nell'apparecchio, osserviamo che se la bolla A, di capacità c_1 (50,95 cc.) conteneva la quantità A_1 di He, la conduttura R, nella quale si hanno le stesse condizioni di temperatura e pressione, doveva contenere la quantità

$$A_2 = \frac{A_1 c_2}{c_1} = 0{,}00000058 \text{ cc.},$$

avendo indicato con c_2 la capacità della conduttura R (11,31 cc.); e il bulbo T, nel quale regna la temperatura t' (105° C.), doveva contenere la quantità

$$A_3 = A_1 \frac{c_3 (1 + \alpha t)}{c_1 (1 + \alpha t')} = 0{,}000002248,$$

(1) Abbiamo verificato che, sebbene il vuoto raggiungibile con la nostra pompa a diffusione fosse dell'ordine di $1/_{10000}$ di mm. di mercurio, più non si trova traccia di He nell'apparecchio dopo aver fatto agire per 10 o 15 minuti la pompa, anche se le quantità di elio inizialmente presenti erano notevoli; questo risultato si deve probabilmente al fatto che le piccole quantità di vapore di mercurio che si svolgono dall'apparecchio e procedono verso il refrigerante della pompa risciacquano l'apparecchio dai gas contenutivi.

(2) La pressione viene apprezzata misurando al catetometro la differenza di livello dei menischi del mercurio nel tubo L (od R) e nel capillare; come abbiamo già detto, sotto l'azione della scarica la depressione capillare diviene trascurabile.

avendo indicato con c_3 la capacità del bulbo T (55,11 cc.) e con t la temperatura della bolla A e della conduttura R (25° C.)

La quantità complessiva di elio che è penetrata nell'apparecchio, in 22 ore, a 105° C., è dunque

$$B = A_1 + A_2 + A_3 = 0,000005441$$

e quella penetrata in un'ora

$$B' = \frac{B}{22} = 2,473 \times 10^{-7} \text{ cc.}$$

Deduciamo infine che la quantità di He che si diffonde in un'ora attraverso ciascun cm². della superficie S del bulbo T (106 cm².) a 105° C. è

$$V_{105} = \frac{B'}{S} = 2,333 \times 10^{-9} \text{ cc.}\,.$$

Una serie di esperienze analoghe a quella già descritta venne compiuta mantenendo invariata la densità dell'atmosfera di He che circonda il bulbo T e portando successivamente la temperatura del bulbo T a 105°, 160°, 205°, 270°, 290°, 310°, 330°, 360°, 380°, 410, 450°, 460°, 480°, 505°, 510°, 520°, 540°, 550° C.

Con l'elevarsi della temperatura, la velocità di diffusione dell'elio cresce molto rapidamente e i tempi necessari per poter raccogliere quantità comodamente misurabili di He nel capillare divengono sempre più piccoli (bastano pochi minuti a 550° C.). Dalle misure fatte vennero dedotti i volumi di He diffusi in un'ora attraverso un cm² della parete del bulbo R (che ha mm. 1,26 di spessore) a ciascuna temperatura; questi volumi possono assumersi come espressione della velocità di diffusione dell'elio attraverso una parete di vetro di mm. 1,26 di spessore, in contatto con una atmosfera di elio di densità corrispondente al peso di gr. 0,06459 per litro.

Assumendo queste velocità di diffusione come ordinate e le temperature come ascisse, si è ottenuta la curva A della fig. 3.

La curva *a* della fig. 4 è stata invece ottenuta assumendo i logaritmi delle velocità di diffusione come ordinate, e le temperature come ascisse.

Si eseguì poi un'altra serie di analoghe determinazioni mantenendo il bulbo T in atmosfera di elio a pressione costantemente uguale a 770 mm.: con i risultati ottenuti furono costruite le curve B e *b* delle fig. 3 e 4, che dànno rispettivamente la velocità di diffusione e il logaritmo della stessa in funzione della temperatura.

Dall'esame della curva *b* della fig. 4 si rileva che al disopra di 400° C. i logaritmi delle velocità di diffusione sono sensibilmente proporzionali alle temperature, e quindi la velocità di diffusione può considerarsi come una funzione esponenziale della temperatura medesima; mentre invece, abbassando la temperatura da 400° a 100° C., la velocità di diffusione diminuisce molto più rapidamente di quanto richiederebbe la legge esponenziale stessa.

Un'altra serie di determinazioni fu eseguita mantenendo la temperatura del bulbo T costantemente eguale a 440° C. e facendo variare la pressione dell'elio fra 770 e 179 mm. Dai valori ottenuti risulta che la velocità di diffusione è proporzionale alla pressione dell'atmosfera di elio,

La curva B della fig. 3 mostra che la velocità di diffusione, a 260° C. e con atmosfera di elio alla pressione di 770 mm., è uguale a 0,0000012 cc. all'ora; questo dato ci interessa in modo particolare, perchè parecchie delle nostre esperienze sulla trasfor-

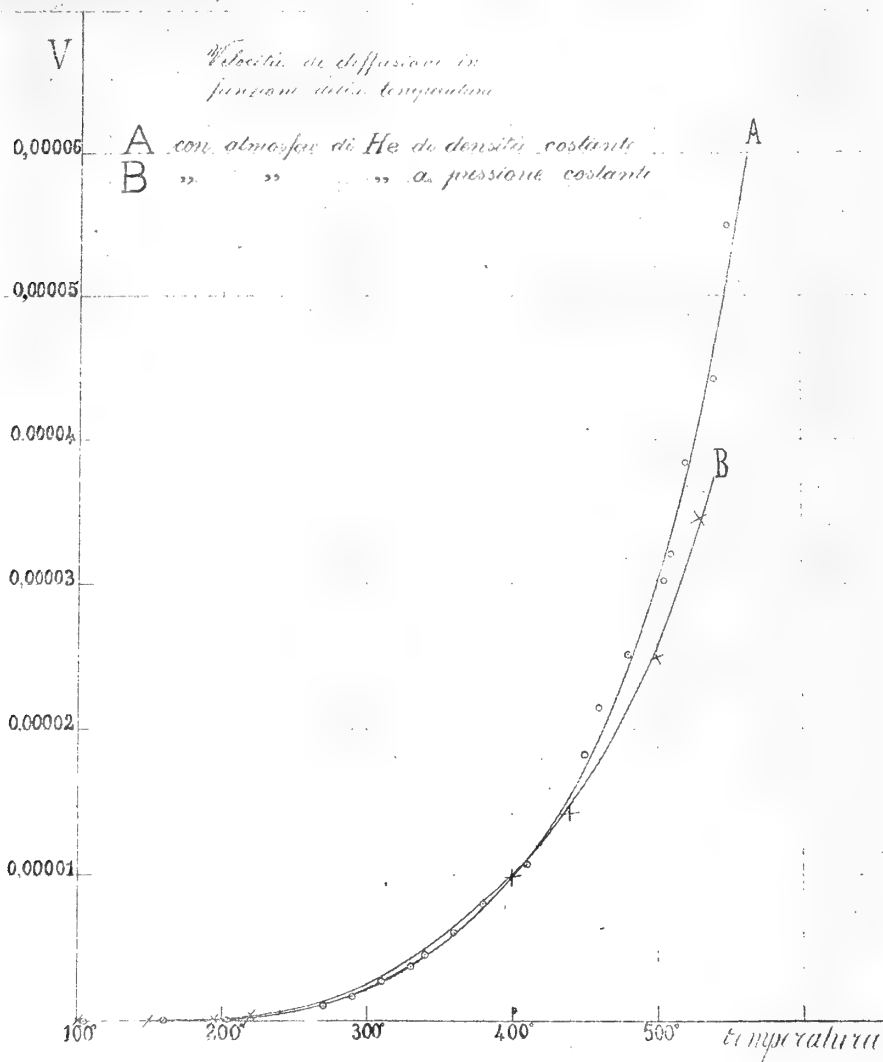



Fig. 3.

mazione dell'idrogeno in elio e neon furono compiute impiegando tubi di scarica di grandi dimensioni che, assoggettati per molte ore a scariche di grande intensità, raggiungevano temperature massime di circa 260° C. Il più grande dei tubi di scarica da noi adoperati aveva una superficie esterna di 2975 cm². e pareti dello spessore medio di 1,2 mm. Poichè la pressione parziale dell'elio nell'atmosfera è di 0,0038 mm. [1], il volume

[1] Questo valore è ricavato dalle determinazioni di G. Claude (Compt. Rend., V, 148, p. 1454) secondo le quali l'aria atmosferica conterrebbe $^1/_{200\,000}$ del suo volume di elio.

di elio che è penetrato durante 12 ore nel tubo di scarica sarà

$$h = 0{,}0000012 \, \frac{0{,}0038 \times 3975 \times 12}{770} = 2{,}822 \times 10^{-7} \text{ cc.}$$

questa quantità di elio corrisponde a quella contenuta in 0,056 cc. di aria, ed è inferiore a quella che può essere rivelata con i dispositivi impiegati nelle ricerche avanti ricordate dei sigg. Ramsay, Collie, Merton, Strutt, Piutti e Cardoso [1].

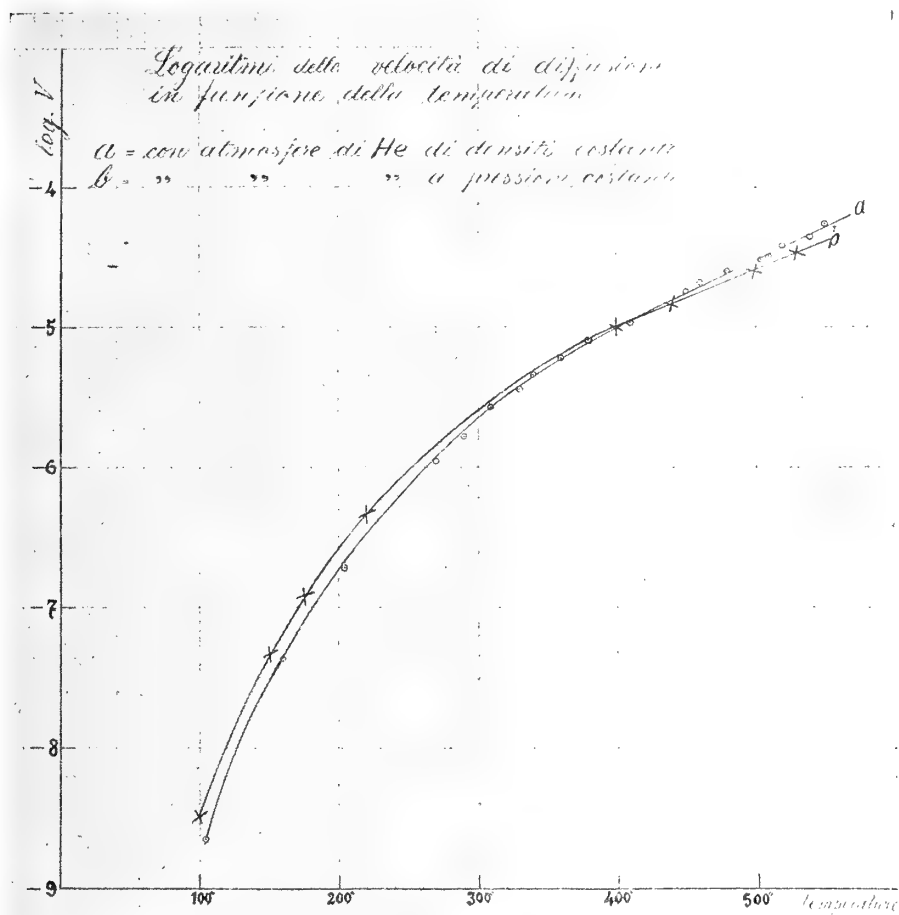



Fig. 4.

Conclusione. — La spiegazione data dal prof. Lo Surdo circa le divergenze fra i risultati ottenuti dai sigg. Ramsay, Collie, Patterson e quelli ottenuti dai sigg. Mer-

(1) Quantità di elio anche inferiori a quella sopra indicata si sono riconosciute spettroscopicamente nel corso delle presenti ricerche, raccogliendole in breve tratto del capillare D (fig. 1); ciò è dovuto alla favorevole circostanza che queste minime quantità di He erano esenti da impurezze. Quando invece l'elio è inizialmente mescolato a grandissime quantità di altri gas, la sua minima quantità spettroscopicamente riconoscibile è dell'ordine di quella contenuta in 3-4 cc. di aria. (ved. A. Piutti e E. Boggio-Lera, Memoria citata, pag. 700).

ton, Strutt, Piutti e Cardoso, non è dunque accettabile, perchè la quantità di He che dall'aria ambiente può penetrare in un tubo di scarica, anche di grande superficie, che si mantenga per molte ore a 260° C., è circa 100 volte più piccola di quella che si può spettroscopicamente riconoscere nelle condizioni in cui hanno operato i citati sperimentatori.

La velocità di diffusione dell'elio attraverso il vetro di Turingia è proporzionale alla pressione; essa cresce molto rapidamente con la temperatura e può ritenersi una funzione esponenziale di questa fra 400° e 550° C.

La diffusione dei gas attraverso i corpi solidi, ben distinta da quella che ha luogo attraverso i corpi porosi, è stata studiata da molti [1], non però in maniera da poterne ricavare le leggi.

Oggi che conosciamo, con una certa approssimazione, le dimensioni degli atomi e la intima struttura dei cristalli, lo studio quantitativo della diffusione degli uni attraverso gli altri può presentare un particolare interesse; epperò ci proponiamo di continuare lo studio della diffusibilità dell'elio (e di altri gas) attraverso setti amorfi ed anche cristallini e, in questo ultimo caso, secondo determinate direzioni.

[1] Mitchell, Journ. of the Roval Inst., 2, p. 101, 307, London 1831; Graham, Phil. Mag.. (3) 2. p. 175, 269, 351; Pogg. Ann., 28, p. 331, 1833; Phil. Trans., 1863; Liebigs Ann., 131, pI, 1864; Pogg. Ann., 129, p. 549, 1866; Wroblensky, W. A. 2, p. 481, 1877; 4, p. 268, 1878; 7, p. 11; 8, p. 29, 1879; Kayser, W. A., 43, p. 544. 1891; L. Rayleyg, Phil. Mag., (5) 49, p. 220, 1900; Villard, C. R., 130, p. 1752, 1900; Jacquefort e Perod, C. R., 139, p. 789, 1904; Arch. sc. phys. et natur. (4) 18, p. 613, 1904; Berthelot, C. R. 140, p. 821; Ann. Ch. Phys., (8), 7, p. 164, 1905; Belloc, C. R., 140, p. 1252, 1905; Lo Surdo, Rend. Acc. Lincei (5), 30, p. 85, 1921; Williams e Ferguson, J. Am. Chem. Soc., 44, p. 2160.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 9° Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 5°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIV, Fasc. 5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. Fasc. 5°.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XX. Fasc. 7° 9°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXX 1923)

Serie quinta — Volume XIV — Fascicolo VII.

Dott. FRANCESCO TRICOMI

SULLE EQUAZIONI LINEARI

ALLE DERIVATE PARZIALI DI 2° ORDINE

DI TIPO MISTO

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

RELAZIONE

letta dal Corrispondente SEVERI (relatore), a nome anche del Socio BIANCHI, nella seduta del 5 novembre 1922, sulla Memoria del dott. FRANCESCO TRICOMI, avente per titolo: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine, di tipo misto.*

In questa Memoria l'A. si occupa pel primo delle equazioni lineari a derivate parziali di 2° ordine, che, con Volterra, chiamansi di tipo misto: cioè delle equazioni ellittiche in una porzione di piano, iperboliche in un'altra.

La equazione che il Tricomi imprende particolarmente a studiare ha la forma

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{E}$$

ed occupa, nella teoria delle equazioni del nuovo tipo, una posizione, in certa guisa, analoga a quella dell'equazione di Laplace nella teoria delle equazioni di tipo ellittico; nel senso che il primo membro di (E) è la parte del 2° ordine di una equazione canonica a cui può ridursi in generale un'equazione di tipo misto, con un cangiamento reale delle variabili indipendenti.

L'equazione (E) è ellittica in un semipiano, iperbolica nell'altro: le sue caratteristiche sono cubiche cuspidate.

L'A. si occupa di stabilire i teoremi di unicità e di esistenza per l'equazione (E), in relazione ad un contorno costituito da due archi di caratteristiche uscenti da un punto del semipiano iperbolico e da un contorno qualunque che congiunga le intersezioni di quei due archi coll'asse x.

La dimostrazione richiede le più svariate e più elevate risorse dell'Analisi moderna, ed il Tricomi dimostra di saperne profittare con notevole acume e con piena padronanza. La natura dei risultati conseguiti, che gettano luce sopra una parte finora inesplorata della teoria delle equazioni lineari a derivate parziali di 2° ordine, e la trattazione interessante, chiara e accurata, rendono il lavoro degnissimo di figurare fra le Memorie accademiche; e pertanto ne proponiamo la stampa.

Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine, di tipo misto.

Memoria di FRANCESCO TRICOMI

INTRODUZIONE

Nella teoria delle equazioni alle derivate parziali di 2° ordine si sono ormai nettamente delineati due diversi indirizzi di studî, distinti dalla circostanza che nell'uno si introduce l'ipotesi che tutte le funzioni che si considerano siano reali, e nell'altro no.

Il primo di questi due indirizzi, che è forse il più importante, specie per le applicazioni alla Fisica matematica, può farsi risalire al Riemann, nella cui celebre *Inauguraldissertation* (1851) viene dimostrata, con metodo riconosciuto poi non rigoroso, l'esistenza ed unicità, in un campo dato, di una funzione armonica assumente al contorno valori arbitrariamente prefissati. A questa hanno fatto poi seguito innumerevoli altri lavori [1] mercè i quali, oggi, non solo il risultato di Riemann è stato stabilito con tutto il rigore desiderabile e sotto ipotesi sempre più generali, ma è stato altresì riconosciuto che, sotto opportune restrizioni, esso regge anche nel caso di funzioni soddisfacenti ad equazioni *di tipo ellittico* molto più generali di quella cui soddisfano le funzioni armoniche. Inoltre, per analogia, si sono studiate le con-

(1) Copiose indicazioni bibliografiche possono trovarsi nei due articoli attinenti all'argomento dell'Encykl. d. math. Wiss. [Bd. II-1, Ht. 4-5 (1904)] e cioè: (II-A-7-*b*) *Potentialtheorie* di H. Burkhardt u. W. F. Meyer, e (II-A-7-*c*) *Randwertaufgabe in d. th. d. partielldifferentialgleichungen* di A. Sommerfeld. Del pari numerose citazioni trovansi nel volume di V. Volterra, *Leçons sur l'intégr. des éq. différentielles aux dér. partielles, professées à Stockholm* (Upsal, 1906).

Fra i lavori posteriori mi limiterò a ricordare quello del Picard [Ann. scientif. de l'École Norm. Sup. (3), 23 (1906), pp. 509-516] sulle equazioni ellittiche; quelli del Goursat [Ann. Fac. Toulouse (2), 5 (1903), pp. 405-45?; (2), 6 (1904), pp. 117-144; (3), 1 (1909), pp. 129-143], del Picone [Rend. Circ. Mat. Palermo, 30 (1910 II), pp. 349-376; 31 (1911 I), pp 133-169; 32 (1911 II), pp. 188-190] e del Fubini [Atti Acc. Torino, 40 (1905), pp. 616-631] sulle equazioni iperboliche; e infine i lavori dell'Holmgren [Archiv för Math., Astr. och Fysik, t. 2, 3, 4 e 7 e Comptes Rendus Ac. Paris, 145 (30-12-1907)] e di Eugenio Elia Levi [Ann. di Matem. (3), 14 (1907-08), pp. 187 264] sulle equazioni di tipo parabolico.

dizioni atte ad individuare, in certi campi, delle soluzioni di equazioni di 2° ordine, non più di tipo ellittico, ma bensì *di tipo iperbolico* o *parabolico*, e sono ben noti i fondamentali risultati raggiunti in questo ramo dell'Analisi, per non citare altri, dal Picard e dal nostro Eugenio Elia Levi.

Però, pur restando sempre nell'àmbito di due variabili indipendenti x ed y, i tre tipi tradizionali: ellittico, iperbolico e parabolico cui ora si è accennato, sono ben lungi dall'esaurire la classe delle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine. Invero un'equazione siffatta, in generale, avrà le sue *caratteristiche* immaginarie (cioè sarà di tipo ellittico) in una parte del piano x,y, e le avrà invece reali (cioè sarà di tipo iperbolico) in un'altra parte del piano medesimo.

Ciò malgrado, lo studio di queste equazioni più generali, che diremo *di tipo misto* (1), è stato finora, per quanto sia a mia conoscenza, completamente trascurato, ed a torto, come mi lusingo riuscirà a dimostrare la presente Memoria che ad esso è completamente dedicata.

Più particolarmente, nella presente Memoria mi pongo decisamente dal punto di vista reale di Riemann e cerco di determinare delle condizioni al contorno atte ad individuare una soluzione di un'equazione di tipo misto in un campo in cui essa sia a volte di tipo ellittico, a volte di tipo iperbolico. A tale scopo, subito dopo il 1° Capitolo, imitando il processo di sviluppo storico della teoria delle equazioni di tipo ellittico, limito le mie considerazioni all'equazione

$$\text{(E)} \qquad y\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\,,$$

che può considerarsi il prototipo delle equazioni di tipo misto, alla stessa stregua che l'equazione di Laplace: $\Delta_2 z=0$, può riguardarsi come il prototipo delle equazioni di tipo ellittico.

Per l'equazione (E) mi è stato possibile risolvere completamente il problema accennato, ispirandomi ai metodi seguiti nei lavori indicati in principio, ma sopratutto avvalendomi continuamente e largamente di quel poderoso strumento analitico costituito dalla teoria delle equazioni integrali. Credo anzi di non andare errato asserendo che, senza di questa, in ricerche di questo genere, difficilmente si potrebbe andare oltre le prime e più superficiali proprietà.

Scendendo a qualche maggiore particolare noterò che, dopo aver trattato preliminarmente (nel Cap. I) della riduzione delle equazioni miste a forma canonica, anzitutto stabilisco un *teorema di unicità* relativo al caso in cui sian dati i valori di una soluzione della (E) su di un certo contorno (aperto) costituito da una curva arbitraria del semipiano in cui l'equazione è di tipo ellittico e da un pezzo di caratteristica dell'altro semipiano.

Successivamente, allo scopo finale di giungere all'inversione del precedente teorema, cioè a dimostrare l'*esistenza* della soluzione di cui esso assicura l'unicità,

(1) Questa denominazione è di Volterra che, nell'op. cit. (lez. 1a), accenna fugacemente a siffatte equazioni.

premesso lo studio di alcune importanti soluzioni particolari della (E), comincio a stabilire questa circostanza nel caso preliminare di un contorno chiuso svolgentesi nel semipiano ellittico ma di cui una parte sia costituita da un segmento dell'asse x, che è la curva attraversando la quale l'equazione cambia tipo.

Ciò premesso, ricavo una fondamentale relazione involgente le due funzioni $\tau(x)$ e $\nu(x)$ costituite dai valori assunti sull'asse x, rispettivamente da una soluzione qualsiasi z della (E) e dalla sua derivata rispetto ad y. Indi, associando a questa una consimile relazione già ottenuta durante la dimostrazione del teorema di unicità, pervengo ad un'equazione integrale in $\nu(x)$, la cui inversione è problema equivalente a quello della determinazione delle eventuali soluzioni della (E) soddisfacenti alle condizioni al contorno di cui nel teorema di unicità. Tutto sta dunque a far vedere che questa equazione è risolubile, e a ciò provvedono gli ultimi due Capitoli, nel primo dei quali essa viene ridotta ad un'equazione di Fredholm di 2ª specie singolare (invece di un integrale ordinario, c'è un integrale divergente, di cui si considera il *valor principale* nel senso di Cauchy) la cui risoluzione forma l'oggetto dell'ultimo Capitolo.

Riguardo ai metodi adoperati, mi permetto di richiamare qui l'attenzione soltanto sul procedimento con cui (nel Cap. IV) ho dimostrato il teorema di esistenza per uno speciale contorno chiuso, in parte costituito da un segmento dell'asse x. Infatti tale procedimento, fondato sullo sviluppo delle funzioni arbitrarie costituite dai valori prefissati nel contorno, in serie di soluzioni particolari dell'equazione differenziale, fornisce la soluzione richiesta sotto una forma insolitamente semplice. Inoltre credo che potrà presentare interesse, anche intrinseco, la discussione approfondita che, dell'equazione di Fredholm singolare, ho fatto nei primi §§ dell'ultimo Capitolo. All'uopo si consideri che essa mi ha permesso, come trovasi notato a suo luogo, di colmare una grave lacuna lasciata da un Autore francese che di recente si era occupato di equazioni di quella sorta.

Finalmente tengo a dichiarare che nel Cap. I, data la particolare natura della questione in esso trattata, a diversità di quanto ho fatto sempre nel seguito, non ho creduto di dovermi soffermare ad un esame approfondito delle eventuali singolarità che possono presentarsi nelle funzioni considerate. Non devesi però equivocare sul vero carattere del risultato cui lì pervengo, e cioè che un'equazione di tipo misto qualsiasi può *generalmente*, con sostituzioni reali, ridursi alla forma canonica adottata. In altre parole, non intendo escludere che in casi particolari si possano presentare, in tale riduzione, delle difficoltà da esaminarsi volta a volta.

Un brevissimo cenno dei principali risultati conseguiti in queste ricerche è stato già pubblicato in una Nota dallo stesso titolo [1].

[1] Rend. R. Acc. dei Lincei (5), XXX-2 (2° sem. 1921), pp. 495–498.

SOMMARIO DELLA MEMORIA

Cap. V. — **Il teorema di esistenza generale: sua riduzione ad un'equazione integrale.**

Cap. VI. — **Trasformazione dell'equazione integrale cui è stata ridotta la dimostrazione del teorema di esistenza.**

Cap. VII. — **Inversione dell'equazione integrale ottenuta nel Capitolo precedente.**

CAPITOLO PRIMO

Riduzione delle equazioni di tipo misto a forma canonica.

§ 1. — Consideriamo un'equazione lineare alle derivate parziali di 2° ordine, a due variabili indipendenti x ed y, della forma più generale

$$(1) \qquad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz + G = 0\,,$$

dove $A, B, \ldots, G$ sono certe funzioni date di x ed y.

Interpretando, come di consueto, x ed y quali coordinate cartesiane dei punti di un piano rispetto ad una certa coppia di assi ortogonali, è ben noto come, nello studio dell'equazione (1), assumano fondamentale importanza le curve rappresentate dall'equazione differenziale

$$(2) \qquad A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0$$

che, risoluta rispetto a dy/dx, si scinde nelle due

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}\,, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}\,.$$

Siffatte curve diconsi *caratteristiche* [1] dell'equazione; esse sono distribuite in due sistemi ∞^1, corrispondenti ciascuno ad una delle (3), tali che per un punto generico del piano passa una, ed una sola, curva del sistema.

Ponendoci dal punto di vista delle funzioni di variabili reali e supponendo che i coefficienti $A, B, \ldots, G$ siano sempre reali nel campo che si considera, sono ora manifestamente da distinguersi tre casi circa la realità o meno delle caratteristiche, *nell'intorno di un punto determinato del piano* x, y, e cioè:

1°) $B^2 - AC < 0$. Allora entrambe le caratteristiche sono immaginarie e l'equazione si dice *di tipo ellittico.*

2°) $B^2 - AC > 0$. Allora le due caratteristiche passanti pel punto sono reali e distinte, e l'equazione si dice *di tipo iperbolico.*

3°) $B^2 - AC = 0$. Allora le due caratteristiche sono reali e coincidenti e l'equazione si dice *di tipo parabolico.*

Però, allorchè l'equazione non si considera in un sol punto, ma in un certo campo, questi tre tipi, quantunque siano i soli finora studiati, non esauriscono la

[1] Per la teoria delle linee e varietà caratteristiche, nonchè per l'estensione del concetto di esse alle equazioni non lineari e di ordine superiore al secondo, ved. E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées part. du second ordre* (Paris, Hermann, 1896-98), e J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes* etc. (Paris, Hermann, 1903), Cap. IV e VII e Nota I.

classe delle equazioni di 2° ordine, perchè la quantità $B^2 - AC$, in generale, non conserverà sempre lo stesso segno in tutto il campo, epperò le caratteristiche saranno in parte reali e in parte immaginarie.

Sempre che ciò effettivamente accada, noi diremo che l'equazione è *di tipo misto*. La curva rappresentata dall'equazione $B^2 - AC = 0$ (che supporremo sia una curva nel senso ordinario della parola) si dirà la sua *curva parabolica*, e infine le parti in cui questa spezza il campo si diranno rispettivamente *ellittiche* od *iperboliche* secondochè in esse si ha $B^2 - AC < 0$ oppure $B^2 - AC > 0$.

È noto che le equazioni di tipo ellittico, con una sostituzione reale di variabili, possono sempre ridursi alla forma canonica

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z}{\partial y} + c_1 z + d_1 = 0 , \tag{4}$$

dove a_1, b_1, c_1 e d_1 sono dei nuovi coefficienti, facilmente esprimibili per mezzo degli antichi.

Le equazioni di tipo iperbolico, del pari con una sostituzione reale di variabili, possono invece ridursi alla forma canonica

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y} + c_2 z + d_2 = 0. \tag{5}$$

E finalmente le equazioni di tipo parabolico, sempre con una sostituzione reale di variabili, possono ridursi alla forma canonica

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial z}{\partial x} + b_3 \frac{\partial z}{\partial y} + c_3 z + d_3 = 0 . \tag{6}$$

Che cosa potrà dirsi per le equazioni di tipo misto? Noi vogliamo anzitutto occuparci di questo problema di riduzione.

§ 2. — Volendo restare nel campo reale, alle equazioni di tipo misto non potrà applicarsi nessuna delle sostituzioni cui ora si è fatto cenno, perchè, di queste, la terza riesce solo allorchè è identicamente $B^2 - AC = 0$, e le altre due sono tali che, se son reali in una certa parte del campo, non possono continuare ad esserlo in quelle altre parti in cui $B^2 - AC$ ha il segno opposto. Occorrerà perciò adottare per le nostre equazioni una forma canonica diversa dalle (4), (5) e (6).

Per evitare calcoli inutilmente complicati, faremo la riduzione in due tempi. All'uopo cominciamo con l'osservare che, se alle vecchie variabili x, y se ne sostituiscono due nuove x_1, y_1, legate alle prime da relazioni invertibili della forma

$$x_1 = x_1(x, y) \quad , \quad y_1 = y_1(x, y) , \tag{7}$$

l'equazione (1) si muta in un'altra equazione della stessa forma

$$A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \, \partial y_1} + C_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + D_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + E_1 \frac{\partial z}{\partial y_1} + F z + G = 0 , \tag{8}$$

di cui i coefficienti che non son rimasti invariati, son legati agli antichi dalle formule:

$$
(9)\qquad \begin{cases}
A_1 = A\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial x_1}{\partial y} + C\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)^2 \\
B_1 = A\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial x} + B\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial x}\right) + C\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial y} \\
C_1 = A\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y} + C\left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)^2 \\
D_1 = A\frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 x_1}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 x_1}{\partial y^2} + D\frac{\partial x_1}{\partial x} + E\frac{\partial x_1}{\partial y} \\
E_1 = A\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 y_1}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 y_1}{\partial y^2} + D\frac{\partial y_1}{\partial x} + E\frac{\partial y_1}{\partial y}\,.
\end{cases}
$$

Ciò posto, supponiamo scelta in un modo qualsiasi una delle due funzioni (7), p. es. y_1, e consideriamo l'equazione lineare ed omogenea nelle derivate parziali di prim'ordine di x_1, che si ottiene uguagliando a zero il 2° membro della seconda delle (9):

$$
(10)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial x}\left(A\frac{\partial y_1}{\partial x} + B\frac{dy_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial x_1}{\partial y}\left(B\frac{\partial y_1}{\partial x} + C\frac{\partial y_1}{\partial y}\right) = 0\,.
$$

Se si assume come x_1 un integrale particolare reale qualsiasi di quest'equazione, e ce ne sono quanti se ne vogliono, l'equazione (8) risulterà evidentemente priva del secondo termine, epperò, dividendo per uno dei coefficienti A_1 e C_1 che non sia identicamente nullo ([1]), per esempio per C_1, l'equazione potrà scriversi sotto la forma

$$
(11)\qquad a\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + b\frac{\partial z}{\partial x_1} + c\frac{\partial z}{\partial y_1} + fz + g = 0\,,
$$

dove $a, b, \ldots, g$ sono certe funzioni ben determinate delle nuove variabili x_1 ed y_1.

§ 3. — Con la (11) è compiuta la prima delle due fasi della riduzione. In essa la quantità che dianzi aveva l'espressione $B^2 - AC$ si è ridotta semplicemente a $-a$: cioè, per avere l'equazione della curva parabolica della (11), basta uguagliare a zero il primo coefficiente di essa. La seconda fase avrà lo scopo di portare la curva parabolica a coincidere con uno degli assi coordinati, e propriamente con quello delle ascisse, cioè di ridurre il primo coefficiente ad essere y_2, se x_2 ed y_2 sono le nuove variabili.

Supponiamo che queste nuove variabili siano legate alle antiche x_1, y_1 dalle relazioni invertibili

$$
(12)\qquad x_2 = x_2(x_1, y_1)\quad,\quad y_2 = y_2(x_1, y_1)\,;
$$

([1]) A_1 e C_1 non possono essere entrambi nulli, perchè il determinante della sostituzione lineare su ABC, costituita dalle prime tre delle (9), è uguale a $\left[\frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x, y)}\right]^3$ e quindi è diverso da zero.

tenendo conto delle (9), si vede subito che il nostro intento sarà immediatamente raggiungibile (dividendo l'equazione per un fattore) allorchè siano soddisfatte le due equazioni differenziali simultanee

$$(13)\qquad a\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_2}{\partial y_1}=0\ ,\quad a\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2=y_2\left[a\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_2}{\partial y_1}\right)^2\right].$$

Il problema della riduzione si muta quindi nell'altro di far vedere che è possibile determinare due funzioni reali x_2 e y_2 di x_1 e y_1, tali che il sistema (13) sia verificato.

All'uopo osserviamo che la seconda equazione del sistema, tenendo conto della prima, può scriversi

$$a\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2=\left[a\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(a\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2\right]y_2$$

cioè, ponendo in vista

$$\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)^2\Big/\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2$$

nel secondo membro e riducendo,

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2=ay_2\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)^2;$$

da cui, estraendo la radice quadrata, si ricava

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\mp\sqrt{ay_2}\,\frac{\partial y_2}{\partial x_1}=0:$$

equazione che, fatta coesistere con la prima delle (13), dà luogo al sistema

$$(14)\qquad \frac{\partial x_2}{\partial x_1}\pm\sqrt{\frac{y_2}{a}}\,\frac{\partial y_2}{\partial y_1}=0\quad,\quad \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\mp\sqrt{ay_2}\,\frac{\partial y_2}{\partial x_1}=0.$$

Per dimostrare come questo sistema sia sempre risolubile nel campo reale, operiamo la sostituzione

$$(15)\qquad y_2=a\varphi^2$$

che ci consentirà di scriverlo più semplicemente, sotto la forma

$$(16)\qquad \frac{\partial x_2}{\partial x_1}\pm\varphi\,\frac{\partial(a\varphi^2)}{\partial y_1}=0\quad,\quad \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\mp a\varphi\,\frac{\partial(a\varphi^2)}{\partial x_1}=0\,.$$

Fra queste equazioni si elimina immediatamente la x_2 derivando la prima rispetto ad y_1, la seconda rispetto ad x_1, e sottraendo i risultati; si perviene così all'equazione unica

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[a\varphi\frac{\partial(a\varphi^2)}{\partial x_1}\right]+\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\varphi\frac{\partial(a\varphi^2)}{\partial y_1}\right]=0$$

che, sviluppata, fornisce finalmente l'equazione di 2° ordine in φ:

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}+\mathrm{F}\left(\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)=0, \tag{17}$$

dove F simboleggia una funzione *razionale* dei tre argomenti, che può calcolarsi esplicitamente senza veruna difficoltà.

§ 4. — Determinata che sia una funzione reale φ soddisfacente alla (17), la (15) fornirà subito y_2; e quindi le (16), con semplici quadrature, forniranno x_2, e i valori di queste due funzioni risulteranno reali al pari di φ.

Pertanto, tutto è ridotto a mostrare che l'equazione di 2° ordine (17) ammette degli integrali reali. Noi dimostreremo ciò, facendo vedere come il *problema di Cauchy* relativo all'equazione (17), cioè il problema della determinazione della superficie integrale di essa passante per una data curva analitica c e tangente ad una sviluppabile S, del pari analitica, passante per la curva, supposti i dati reali, può risolversi senza alcuna introduzione di immaginarî.

Com'è noto [1], per dimostrare la risolubilità del problema di Cauchy (nel campo analitico), si comincia col far vedere che, risolvendo dei successivi sistemi ottenuti associando all'equazione differenziale proposta e a quelle desunte da essa con delle derivazioni, le equazioni ricavate derivando successivamente quelle che rappresentano parametricamente la curva c e la sviluppabile S; è possibile calcolare i valori in un punto O di c delle derivate di qualsiasi ordine della soluzione di cui occorre provare l'esistenza. Successivamente si fa vedere come, calcolandone i coefficienti per mezzo dei valori trovati, lo sviluppo in serie di potenze, riferita al punto O, della soluzione in discorso, ha un campo di convergenza non nullo, epperò rappresenta una soluzione effettiva dell'equazione, che soddisfa alle condizioni imposte.

Evidentemente la condizione necessaria e sufficiente, affinchè questa soluzione sia reale, è che siano reali i coefficienti dell'accennato sviluppo in serie, cioè che siano reali i valori trovati per le varie derivate nel punto O. Ora i successivi sistemi, mediante i quali esse vengono calcolate (ad eccezione del primo: quello che fornisce le derivate di secondo ordine) [2], sono tutti lineari, epperò nella loro risoluzione non s'introducono immaginarî; dunque, *supposti reali i dati, la condizione*

[1] Cfr. Goursat, *leç. cit.*, Cap. I, §§ 16 e 17 (t. 1°, pag. 24 e seg.).

[2] I valori delle derivate prime sono dati *a priori*, essendo data la sviluppabile S che è tangente in O alla superficie integrale da determinare.

necessaria e sufficiente, affinchè il problema di Cauchy sia risolubile nel campo reale, è che il sistema che fornisce i valori iniziali delle derivate seconde sia risolubile senza intervento di immaginari.

Nel caso nostro, supposto che la curva c e la sviluppabile S siano rappresentate parametricamente dalle equazioni

$$(18) \qquad x_1 = f_1(\theta)\ ,\ y_1 = f_2(\theta)\ ,\ \varphi = f_3(\theta)\quad ;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = f_4(\theta)\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = f_5(\theta)\,,$$

dove $f_1, f_2, \ldots, f_5$ sono certe funzioni reali del parametro θ, il sistema in discorso si ottiene associando alla (17) le due equazioni ottenute derivando rispetto ad x_1 ed y_1 la relazione

$$(19) \qquad \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{d\theta}$$

che manifestamente ha luogo su c; risulta in tal modo il sistema

$$(20) \qquad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + F\left(\varphi\,,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right) = 0\,, \\ f_4'(\theta) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} f_1'(\theta) + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_1} f_2'(\theta)\,, \\ f_5'(\theta) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_1} f_1'(\theta) + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} f_2'(\theta)\,. \end{cases}$$

Ma il sistema (20) è lineare nelle tre derivate di second'ordine di φ, dunque nel nostro caso il problema di Cauchy è risolubile nel campo reale, epperò è sempre possibile trovare quante si vogliano soluzioni reali dell'equazione differenziale (17).

Si conclude pertanto che:

Data un'equazione differenziale sotto la forma generale (1), *è possibile, con sostituzioni reali di variabili, porla sotto la forma*

$$(21) \qquad y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + d = 0\,,$$

dove a, b, c, d sono certe funzioni determinate di x ed y.

Può osservarsi che, per compiere la precedente riduzione, non ci è stato necessario avvalerci dell'ipotesi che l'equazione (1) fosse effettivamente di tipo misto, cioè che $B^2 - AC$ cambi di segno nel campo C considerato sul piano x,y, e, ciò malgrado, siamo arrivati alla (21) che sembra indubbiamente di tipo misto. Questa apparente contradizione si elimina però facilmente. Infatti, se $B^2 - AC$ non cambia mai di segno in C, evidentemente la funzione a che figura nella (11), essendo la sostituzione (7) invertibile, non potrà cangiar mai di segno nel campo C_1 corrispondente di C nel piano x_1,y_1. Ma se a non cambia mai di segno, per la (15),

neanche y_2 [cioè la y della (21)] cambierà mai di segno nel campo C_2 corrispondente di C e C_1 nel piano x_2, y_2, cioè *questo campo giacerà tutto da una stessa banda dell'asse* x_2, epperò in esso la (21) non sarà in realtà di tipo misto, bensì sempre di tipo ellittico o sempre di tipo iperbolico.

§ 5. — La curva parabolica dell'equazione (21) è l'asse delle x, il quale spezza l'intero piano in due semipiani, in uno dei quali (semipiano *superiore* o *ellittico*) si ha $B^2 - AC = -y < 0$, epperò le caratteristiche sono immaginarie, mentre nell'altro (semipiano *inferiore* o *iperbolico*), avendosi invece $B^2 - AC > 0$, le caratteristiche sono reali. Per studiare come si presentino queste caratteristiche allorchè sono reali, osserviamo che, nel caso in esame, l'equazione differenziale (2) diviene semplicemente

$$y\,dy^2 + dx^2 = 0\,, \tag{22}$$

epperò il suo integrale generale è

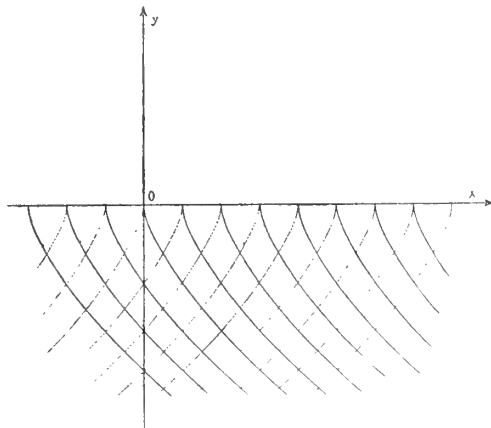
$$x = C \pm \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \qquad (C = \text{cost. arb.})\,, \tag{23}$$

che, passando C al primo membro ed elevando a quadrato, può scriversi

$$(x - C)^2 + \frac{4}{9}y^3 = 0\,. \tag{24}$$

con l'avvertenza però che in questa equazione, per effetto dell'elevazione a quadrato, le due caratteristiche uscenti da uno stesso punto dell'asse x vengono riguardate come costituenti una sola curva.

La (24) mostra che le caratteristiche, o, per meglio dire, queste coppie di caratteristiche, sono delle cubiche piane razionali dotate di cuspidi (con tangenti di regresso parallele all'asse y) nei punti in cui esse incontrano l'asse x. Dal punto di vista della teoria dei rami, ciascuna di queste coppie costituisce un unico *ramo completo*, mentre ciascuna caratteristica, isolatamente considerata, costituisce invece un *ramo parziale*.

Nella figura qui accanto sono state rappresentate con tratto pieno le caratteristiche di uno dei due sistemi, e con tratto spezzato quelle dell'altro.

§ 6. — Limitandoci a muoverci in uno solo dei semipiani determinati dall'asse x, potremo ridurre la (21) all'una o all'altra delle due forme canoniche classiche (4)

e (5). Per esempio, se restiamo nel semipiano ellittico, potremo ridurla alla forma (4), assumendo come nuove variabili la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di un integrale particolare qualsiasi dell'equazione delle caratteristiche; p. es. potremo porre

$$(25) \qquad \xi = x \ , \quad \eta = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \ ,$$

e con questa sostituzione, che è reale ed invertibile essendo $y > 0$, avremo

$$(26) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{3\eta} + b_1 \right) \frac{\partial z}{\partial \eta} + c_1 z + d_1 = 0 ,$$

dove a_1, b_1, c_1, d_1 sono dati dalle formule:

$$(27) \qquad a_1 = \mathrm{K}^2 a \ , \ b_1 = \mathrm{K} b \ , \ c_1 = \mathrm{K}^2 c \ , \ d_1 = \mathrm{K}^2 d \ , \ \left(\mathrm{K} = \sqrt[3]{\frac{2}{3\eta}} \right).$$

La (26) la diremo *ridotta ellittica* dell'equazione (21). I suoi coefficienti divengono infiniti sulla retta $\eta = 0$ corrispondente sul piano ξ,η della curva parabolica del piano $x.y$.

Analogamente, se restiamo sempre nel semipiano iperbolico, la (21) potrà ridursi alla forma canonica (5) assumendo come nuove variabili i primi membri delle equazioni finite di due qualsiasi caratteristiche di diverso sistema; per es. potremo porre

$$(28) \qquad \xi = x - \frac{2}{3} (-y)^{\frac{3}{2}} \ , \quad \eta = x + \frac{2}{3} (-y)^{\frac{3}{2}} \ ,$$

e con questa sostituzione, che è reale ed invertibile perchè $y < 0$, la (21) si muta nell'altra

$$(29) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \, \partial \eta} - \left(\frac{1/6}{\xi - \eta} + a_2 \right) \frac{\partial z}{\partial \xi} + \left(\frac{1/6}{\xi - \eta} + b_2 \right) \frac{\partial z}{\partial \eta} + c_2 z + d_2 = 0 ,$$

dove si è posto

$$(30) \quad a_2 = \mathrm{K}' (\tfrac{1}{2} b + \mathrm{K}' a) \ , \ b_2 = \mathrm{K}' (\tfrac{1}{2} b - \mathrm{K}' a) \ , \ c_2 = - \mathrm{K}'^2 c \ , \ d_2 = - \mathrm{K}'^2 d \ ,$$

$$\left(\mathrm{K}' = \sqrt[3]{\frac{1}{6(\xi - \eta)}} \right).$$

La (29) la diremo *ridotta iperbolica* dell'equazione (21). Anche i suoi coefficienti divengono infiniti sulla curva corrispondente alla curva parabolica del piano $x.y$, e cioè sulla retta $\xi - \eta = 0$.

Notiamo che la sostituzione (25) non stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i punti del semipiano ellittico di x,y ed il piano ξ,η, bensì una corrispon-

denza algebrica di indici $1, 2$, poichè la potenza di esponente $\frac{3}{2}$, contenuta in quelle formule, implica un'indeterminazione di segno; e precisamente ad un punto del piano x,y corrispondono due diversi punti del piano ξ,η, simmetricamente situati rispetto all'asse ξ. Noi però potremo limitarci a considerare uno solo dei due semipiani determinati dall'asse ξ, p. es. il semipiano superiore $(\eta > 0)$, e allora la corrispondenza in discorso potrà riguardarsi come biunivoca. Ciò s'intenderà tacitamente fatto sempre, nel seguito. Analoga osservazione vale per la sostituzione (28).

§ 7. — Per poter procedere oltre nello studio delle equazioni di tipo misto, è opportuno a questo punto abbandonare l'equazione generale (21) e limitarsi a considerare l'equazione particolare (E) di cui si è già accennato nell'Introduzione. Essa ci si presenta ora in un modo del tutto spontaneo, non essendo altro che *la parte di 2° ordine della* (21) *uguagliata a zero*. Veniamo così ad imitare perfettamente il processo di sviluppo storico della teoria delle equazioni ellittiche che, per un primo e non breve periodo, si limitò allo studio dell'equazione di Laplace: $\Delta_2 z = 0$, cioè dell'equazione ottenuta uguagliando a zero la parte di 2° ordine della (4), vale a dire di un'equazione cui può ricondursi ogni altra di tipo ellittico.

È pertanto da aspettarsi che, similmente a quel che succede nel caso delle equazioni ellittiche, anche qui le proprietà, che nella presente Memoria saranno stabilite per l'equazione (E), continueranno generalmente a valere, almeno *in piccolo*, cioè per contorni sufficientemente ristretti, anche per le equazioni miste generali.

Sotto qual forma si presentano le ridotte ellittica ed iperbolica della (E)? Nel caso in esame si ha $a = b = c = d = 0$: conseguentemente, per le (27) e le (30), avremo pure

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0\,,$$

epperò la ridotta ellittica si scriverà semplicemente

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0\,,$$

mentre la ridotta iperbolica si scriverà

$$(\mathrm{E}_2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\, \partial \eta} - \frac{1/6}{\xi - \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0\,.$$

Quest'ultima *non è altro che un'equazione di Eulero-Poisson nel caso di* $\beta = \beta' = 1/6$ [1]; questa circostanza è della più fondamentale importanza per quanto seguirà.

[1] Ved. G. Darboux, *Leçons sur la théorie gén. des surfaces* etc., 2e édit. (Paris, Gauthier-Villars, 1914-15) p. 2a, liv. IV, Cap. III (t. II, pag. 54 e seg.).

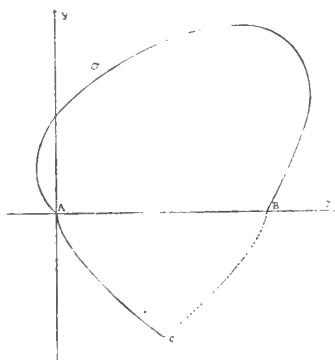
CAPITOLO II.

Il teorema di unicità.

§ 1. Consideriamo la nostra equazione differenziale

$$(E) \qquad y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

e siano A e B i punti in cui le due caratteristiche uscenti da un punto qualsiasi C del semipiano iperbolico vanno a finire sull'asse delle x. Sia poi σ una curva qual-

siasi, avente lo stesso grado di generalità di quelle che costituiscono i contorni considerati nella teoria delle equazioni ellittiche, la quale congiunga A con B senza uscir mai dal semipiano ellittico. Dico allora che:

Nel campo compreso fra σ, AC *e* CB *non può esistere più di una soluzione regolare* [1] *dell'equazione* (E), *assumente valori assegnati, con legge di continuità, sopra* σ *e sopra uno dei due pezzi di caratteristica* AC *e* BC, *per esempio su* AC.

Per dimostrare il teorema enunciato, conveniamo anzitutto, per comodità di notazioni, di scegliere come origine delle coordinate il punto A, come verso positivo sull'asse x quello da A verso B e come unità di misura la lunghezza del segmento AB. Queste convenzioni le rispetteremo costantemente nel seguito. In conseguenza di ciò i valori assunti su AB da una soluzione qualsiasi z della (E), della categoria indicata nell'enunciato, costituiranno una certa funzione finita e continua $\tau(x)$ definita nell'in-

[1] Diremo che una funzione è *regolare* in un certo campo se essa è sempre finita e continua in questo (contorno incluso) e così pure le sue derivate di prim'ordine (contorno escluso). *Qui però occorre supporre inoltre che se* $\partial z/\partial y$ *tende ad* ∞ *avvicinandosi indefinitamente ad* A *o* B, *l'ordine di questi infiniti sia minore di* $5/6$.

tervallo $(0, 1)$; e similmente i valori assunti sul medesimo segmento da $\partial z/\partial y$ costituiranno un'altra funzione $\nu(x)$, del pari definita fra 0 ed 1, la quale, conservandosi certamente finita e continua nell'interno di quest'intervallo, può divenire infinita, d'ordine minore di 5/6, per x tendente a 0 o ad 1.

Ciò premesso, cominceremo col far vedere come il valore di z in un punto qualsiasi del triangolo mistilineo ABC, possa esprimersi per mezzo delle funzioni $\tau(x)$ e $\nu(x)$.

All'uopo osserviamo che, essendo la ridotta iperbolica della (E) l'equazione di Eulero-Poisson $\beta = \beta' = 1/6$, ogni soluzione z della (E) potrà rappresentarsi, nell'interno del triangolo mistilineo ABC, con la formula

$$(1) \qquad z = (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}} \int_0^1 \Phi[\xi + (\eta - \xi) t]\, t^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{6}} dt + \\ + \int_0^1 \Psi[\xi + (\eta - \xi) t]\, t^{-\frac{5}{6}} (1-t)^{-\frac{5}{6}} dt,$$

dove Φ e Ψ sono due funzioni arbitrarie (¹); od anche, risalendo dalle variabili ξ, η alle x, y mediante le formule (28) del Cap. precedente,

$$(2) \qquad z = -\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} y \int_0^1 \Phi\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right] t^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{6}} dt + \\ + \int_0^1 \Psi\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right] t^{-\frac{5}{6}} (1-t)^{-\frac{5}{6}} dt.$$

Nella (2) facciamo $y = 0$; risulta allora

$$\tau(x) = \Psi(x) \int_0^1 t^{-\frac{5}{6}} (1-t)^{-\frac{5}{6}} dt,$$

da cui si trae

$$(3) \qquad \Psi(x) = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(1/6)}\, \tau(x),$$

dove il simbolo Γ denota, come al solito, la funzione euleriana di 2ª specie. Abbiamo così trovato il significato della funzione Ψ; per trovare ora anche quello di Φ, deriviamo la (2) rispetto ad y, avremo così

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \int_0^1 \Phi\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right] t^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{6}} dt + \\ + \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} (-y)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \Phi'\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right] (2t-1)\, t^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{6}} dt - \\ - (-y)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \Psi'\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right] (2t-1)\, t^{-\frac{5}{6}} (1-t)^{-\frac{5}{6}} dt,$$

(¹) Cfr. Darboux, loc. cit., tom. II, p. 68, form. (29). In altre parole: la (1), com'è facile verificare per sostituzione diretta, rappresenta una soluzione della (E_1), qualunque siano le funzioni Φ e Ψ.

da cui, facendo $y = 0$, segue

$$\nu(x) = -\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \Phi(x) \int_0^1 t^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{6}} dt ,$$

epperò sarà

$$\Phi(x) = -\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(5/6)} \nu(x) . \tag{4}$$

Se ne conclude che il valore di z, in un punto qualsiasi (x, y) del triangolo mistilineo ABC, può esprimersi con la formula

$$z = \gamma_1 \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right] t^{-\frac{5}{6}} (1-t)^{-\frac{5}{6}} dt + \\ + \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \gamma_2\, y \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right] t^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{6}} dt , \tag{5}$$

essendosi posto

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(1/6)} = \frac{\sqrt[3]{4}\,\pi}{3\Gamma^3(1/3)} , \quad \gamma_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(5/6)} = \frac{\sqrt[6]{3}\,\Gamma^3(1/3)}{4\pi^2} . \tag{6}$$

§ 2. — L'importanza della (5) apparisce subito considerando che il suo secondo membro, qualunque siano le funzioni $\tau(x)$ e $\nu(x)$, purchè finite e continue (o anche con dei punti d'infinito ma di ordine rispettivamente minore di 1/6 e 5/6), definisce nel Δ ABC una soluzione regolare della (E) che per $y = 0$ si riduce a $\tau(x)$, mentre la sua derivata rispetto ad y si riduce a $\nu(x)$. Dunque *esiste sempre in* ABC *una soluzione regolare della* (E) *assumente, assieme colla sua derivata parziale rispetto ad* y, *valori arbitrariamente fissati sul segmento* AB. In altre parole, malgrado che il segmento AB sia sul limite del campo in cui l'equazione (E) è di tipo iperbolico, dando su di esso le *condizioni di Cauchy*, esiste, in un campo limitrofo, una soluzione della (E) che vi soddisfa.

Vogliamo ora completare il risultato ottenuto, dimostrando che *la soluzione in discorso è unica*; cioè, riferendoci alla ridotta iperbolica (E_2), il che fa lo stesso, vogliamo far vedere che, *detti rispettivamente* A', B', C' *i punti corrispondenti ad* A, B, C *nel piano* ξ, η [1]; *nel triangolo* (*rettilineo*) A′ B′ C′ *non può esistere più di una soluzione regolare dell'equazione* (E_2) *assumente, assieme colle sue derivate prime, valori prestabiliti sul segmento* A′ B′ [2].

[1] Si tenga presente l'osservazione fatta in fine del § 6 del Cap. I. Qui, dei due semipiani determinati nel piano ξ, η dalla retta $\xi = \eta$, corrispondente della curva parabolica, considereremo quello in cui è $\eta > \xi$.

[2] Nel Darboux (loc. cit.) si dimostra che la (1) rappresenta *tutte* le soluzioni regolari della equazione (E_2) in corrispondenza alle varie scelte delle funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$. dal che segue senz'altro la propositione enunciata. Però, considerata l'importanza capitale di questa per quanto seguirà, riteniamo non inopportuno aggiungere la seguente dimostrazione diretta di essa.

Osserviamo inoltre che qui occorre manifestamente supporre che le derivate prime siano continue anche sul segmento A′B′.

Osserviamo preliminarmente che se la prima bisettrice degli assi ξ, η, che è la retta cui appartiene il segmento A′ B′, non fosse un luogo di punti singolari per l'equazione (E_2), la proposizione enunciata sarebbe una conseguenza immediata del teorema su cui poggia il metodo di Riemann per l'integrazione delle equazioni iperboliche; invece, divenendo i coefficienti della (E_2) infiniti per $\xi = \eta$, nulla si può dire *a priori* e si rende necessaria la dimostrazione che segue, fondata sull'ora ricordato metodo di Riemann:

Consideriamo nel triangolo A′B′C′ una curva qualsiasi $\boldsymbol{\Gamma}$ che sia incontrata in uno ed un sol punto dalle parallele ad entrambi gli assi (caratteristiche), e supponiamo assegnati su di essa i valori di una certa soluzione z della (E_2), nonchè delle derivate prime di questa. Indichiamo poi con $Z(\xi_0, \eta_0 | \xi, \eta)$ la *funzione di Riemann* della (E_2), cioè quella soluzione di quest'equazione assumente certi valori ben determinati sulle caratteristiche uscenti dal punto $P(\xi_0, \eta_0)$ (¹). È ben noto allora che, posto (²)

$$u(\xi_0, \eta_0 | \xi, \eta) = Z(\xi, \eta | \xi_0, \eta_0),$$

e detti P_1 e P_2 i punti in cui la curva $\boldsymbol{\Gamma}$ è incontrata rispettivamente dalle caratteristiche $\xi = \xi_0$ ed $\eta = \eta_0$ uscenti da P, il valore di z in P può esprimersi mediante la formula

$$(7) \qquad z(P) = \frac{1}{2}\Big[(uz)_{P_1} + (uz)_{P_2}\Big] -$$

$$- \int_{P_1}^{P_2} \left[\frac{1}{6}\frac{uz}{\xi - \eta} + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial \xi} - z\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\right] d\xi + \left[\frac{1}{6}\frac{uz}{\xi - \eta} - \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial \eta} - z\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right] d\eta$$

nella quale l'integrale va calcolato lungo la curva $\boldsymbol{\Gamma}$.

Nel caso in esame, per un fondamentale risultato, che risale al Riemann stesso, relativo all'equazione di Eulero-Poisson (³), è possibile determinare, sotto forma esplicita, la funzione u; e precisamente si ha

$$(8) \qquad u = \frac{(\eta - \xi)^{\frac{1}{3}}}{(\eta - \xi_0)^{\frac{1}{6}} (\eta_0 - \xi)^{\frac{1}{6}}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1 \,\middle|\, \sigma\right) \quad , \quad \sigma = \frac{(\xi - \xi_0)(\eta_0 - \eta)}{(\eta_0 - \xi)(\eta - \xi_0)},$$

(¹) Ved. Hadamard, *Leçons sur la prop. des ondes*, Cap. II, § 171, pag. 163 e seg.; ved. pure più avanti (Cap. IV, § 2).

(²) Facciamo questa posizione per conformarci alle notazioni di Darboux.

(³) Darboux, loc. cit., tom. II, pag. 83, form. (22).

dove F denota, come di solito, la funzione ipergeometrica di Gauss. Dalla (8), derivando rispetto a ξ e ad η, si ha poi, con qualche riduzione,

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{1}{36}\,\frac{(\eta_0-\xi_0)^{\frac{2}{3}}(\eta_0-\eta)}{(\eta-\xi_0)^{\frac{5}{6}}(\eta_0-\xi)^{\frac{11}{6}}}\,F\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6},2\,\middle|\,\sigma\right)- \\
&\qquad -\frac{1}{6}\,\frac{(\eta_0-\xi)+(\eta_0-\eta)}{(\eta-\xi)^{\frac{2}{3}}(\eta_0-\xi)^{\frac{7}{6}}(\eta-\xi_0)^{\frac{1}{6}}}\,F\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},1\,\middle|\,\sigma\right), \\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{36}\,\frac{(\eta_0-\xi_0)^{\frac{2}{3}}(\xi-\xi_0)}{(\eta_0-\xi)^{\frac{5}{6}}(\eta-\xi_0)^{\frac{11}{6}}}\,F\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6},2\,\middle|\,\sigma\right)+ \\
&\qquad +\frac{1}{6}\,\frac{(\eta-\xi_0)+(\xi-\xi_0)}{(\eta-\xi)^{\frac{2}{3}}(\eta-\xi_0)^{\frac{7}{6}}(\eta_0-\xi)^{\frac{1}{6}}}\,F\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},1\,\middle|\,\sigma\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Ci proponiamo ora anzitutto di trovare dei valori maggioranti dei valori assoluti delle funzioni u, $\partial u/\partial\xi$, $\partial u/\partial\eta$, sul tratto $P_1 P_2$ della curva $\boldsymbol{\Gamma}$; supposto che il punto $P(\xi_0, \eta_0)$ sia un punto qualsiasi del $\Delta A'B'C'$, purchè da banda opposta di $A'B'$ rispetto alla curva Γ, il che si traduce nelle disuguaglianze

$$\xi_0 \leq \xi < \eta \leq \eta_0 ,$$

le quali mostrano che tutti i binomî del tipo $(\eta-\xi), (\eta-\xi_0), \ldots.$ che figurano nelle (8) e (9), son sempre positivi o, alla peggior lettura, nulli.

Ciò premesso, particolarizziamo la curva $\boldsymbol{\Gamma}$ supponendo che essa sia una parallela alla prima bisettrice degli assi, di equazione

$$\eta = \xi + r , \quad (r > 0) ,$$

il che basta pel nostro scopo. Allora, sostituite a ξ_0 ed η_0 altre due costanti a e ϱ, per mezzo delle formule

$$(10)\qquad \xi_0 = a - r/2 - \varrho \;,\; \eta_0 = a + r/2 + \varrho ,\quad (\varrho \geq 0) ,$$

potremo rappresentare parametricamente il tratto $P_1 P_2$ di $\boldsymbol{\Gamma}$ mediante le equazioni

$$(11)\qquad \xi = a - r/2 + t \;,\; \eta = a + r/2 + t ,\quad (-\varrho \leq t \leq \varrho) ,$$

dalle quali segue

$$\sigma = \frac{\varrho^2 - t^2}{(\varrho + r)^2 - t^2} ,$$

il che mostra immediatamente che

$$0 \leq \sigma \leq \left(\frac{\varrho}{\varrho + r}\right)^2 < 1 .$$

Pertanto, osservato che le funzioni ipergeometriche

$$F(1/6\,,1/6\,,1\,|\,x) \quad \text{ed} \quad F(5/6\,,5/6\,,2\,|\,x)$$

son sempre finite nell'intervallo $(0\,,1)$, *estremi compresi*, e propriamente che si ha

$$1 \leq F(1/6\,,1/6\,,1\,|\,x) \leq \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma^2(5/6)} = \sqrt[3]{6}\,\gamma_2\,, \quad 1 \leq F(5/6\,,5/6\,,2\,|\,x) \leq \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(7/6)} = 36\,\gamma_1\,,$$
$$(0 \leq x \leq 1)\,;$$

sul segmento $P_1 P_2$ avremo manifestamente

$$(12)\quad \begin{cases} |u| \leq \sqrt[3]{6}\,\gamma_2 \dfrac{(\eta-\xi)^{\frac{1}{3}}}{(\eta-\xi_0)^{\frac{1}{6}}(\eta_0-\xi)^{\frac{1}{6}}}\,, \\[2ex] \left|\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right| \leq \gamma_1 \dfrac{(\eta_0-\xi_0)^{\frac{2}{3}}(\eta_0-\eta)}{(\eta-\xi_0)^{\frac{5}{6}}(\eta_0-\xi)^{\frac{11}{6}}} + \dfrac{\sqrt[3]{6}}{6}\gamma_2 \dfrac{(\eta_0-\xi)+(\eta_0-\eta)}{(\eta-\xi)^{\frac{2}{3}}(\eta_0-\xi)^{\frac{7}{6}}(\eta-\xi_0)^{\frac{1}{6}}}\,, \\[2ex] \left|\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right| \leq \gamma_1 \dfrac{(\eta_0-\xi_0)^{\frac{2}{3}}(\xi-\xi_0)}{(\eta_0-\xi)^{\frac{5}{6}}(\eta-\xi_0)^{\frac{11}{6}}} + \dfrac{\sqrt[3]{6}}{6}\gamma_2 \dfrac{(\eta-\xi_0)+(\xi-\xi_0)}{(\eta-\xi)^{\frac{2}{3}}(\eta-\xi_0)^{\frac{7}{6}}(\eta_0-\xi)^{\frac{1}{6}}}\,. \end{cases}$$

Trasformiamo ora le frazioni che figurano in queste formule avvalendoci delle (10) ed (11); si trova così (supposto $r \leq 1$) che

$$\frac{(\eta-\xi)^{\frac{1}{3}}}{(\eta-\xi_0)^{\frac{1}{6}}(\eta_0-\xi)^{\frac{1}{6}}} = \frac{r^{\frac{1}{3}}}{[(r+\varrho)^2-t^2]^{\frac{1}{6}}} \leq \frac{r^{\frac{1}{3}}}{(r^2+2r\varrho)^{\frac{1}{6}}} \leq 1\,,$$

$$\frac{(\eta_0-\xi_0)^{\frac{2}{3}}(\eta_0-\eta)}{(\eta-\xi_0)^{\frac{5}{6}}(\eta_0-\xi)^{\frac{11}{6}}} = \frac{(\varrho-t)(r+2\varrho)^{\frac{2}{3}}}{(r+\varrho-t)[(r+\varrho)^2-t^2]^{\frac{5}{6}}} \leq \frac{(r+2\varrho)^{\frac{2}{3}}}{(r^2+2r\varrho)^{\frac{5}{6}}} \leq \frac{1}{r}\,,$$

$$\frac{(\eta_0-\xi)+(\eta_0-\eta)}{(\eta-\xi)^{\frac{2}{3}}(\eta_0-\xi)^{\frac{7}{6}}(\eta-\xi_0)^{\frac{1}{6}}} = \left(1+\frac{\varrho-t}{r+\varrho-t}\right)\frac{1}{r^{\frac{2}{3}}[(r+\varrho)^2-t^2]} \leq \frac{2}{r}\,,$$

$$\frac{(\eta_0-\xi_0)^{\frac{2}{3}}(\xi-\xi_0)}{(\eta_0-\xi)^{\frac{5}{6}}(\eta-\xi)^{\frac{11}{6}}} = \frac{(\varrho+t)(r+2\varrho)^{\frac{2}{3}}}{(r+\varrho+t)[(r+\varrho)^2-t^2]^{\frac{5}{6}}} \leq \frac{(r+2\varrho)^{\frac{2}{3}}}{(r^2+2r\varrho)^{\frac{5}{6}}} \leq \frac{1}{r}\,,$$

$$\frac{(\eta-\xi_0)+(\xi-\xi_0)}{(\eta-\xi)^{\frac{2}{3}}(\eta-\xi_0)^{\frac{7}{6}}(\eta_0-\xi)^{\frac{1}{6}}} = \left(1+\frac{\varrho+t}{r+\varrho+t}\right)\frac{1}{r^{\frac{2}{3}}[(r+\varrho)^2-t^2]^{\frac{1}{6}}} \leq \frac{2}{r}\,,$$

e se ne conclude che sul segmento $P_1 P_2$ si ha

$$(13)\qquad |u| \leq c_1\,, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial \xi}\right| \leq \frac{c_2}{r}\,, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right| \leq \frac{c_2}{r}\,,$$

dove si è posto, per brevità,

$$c_1 = \sqrt[3]{6}\,\gamma_2 \quad , \quad c_2 = \gamma_1 + c_1/3 \,.$$

§ 3 — Determinati questi valori maggioranti, è agevole condurre a termine la dimostrazione del nostro assunto. Precisamente noi faremo vedere ora, ch'è impossibile che esista in $A'B'C'$ una soluzione regolare z della (E), annullantesi assieme colle sue derivate prime su $A'B'$, e, ciò malgrado, non identicamente nulla; il che evidentemente equivale alla proposizione enunciata nel § precedente.

All'uopo, supposto fissato nel $\Delta A'B'C'$ un punto $P(\xi_0, \eta_0)$ e dato ad arbitrio il numero positivo ε, determiniamo un r_1 tale che: 1°) P cada da banda opposta di $A'B'$ rispetto alla retta $\eta = \xi + r_1$; 2°) tanto sul segmento $A_1 B_1$ della retta $\eta = \xi + r_1$ interno ad $A'B'C'$, quanto nella striscia compresa fra $A_1 B_1$ ed $A'B'$ si abbia sempre

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \xi}\right| < \varepsilon \quad , \quad \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right| < \varepsilon :$$

condizioni manifestamente realizzabili perchè queste due derivate sono due funzioni continue che si annullano su $A'B'$.

Ciò posto, osserviamo che, essendo la funzione z regolare, il suo valore in un punto qualsiasi P' di $A_1 B_1$ può rappresentarsi con la formula

$$z(P') = z(P'') + r_1 \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)_{P'''} , \tag{14}$$

avendo chiamato P'' la proiezione di P' su $A'B'$, fatta parallelamente all'asse η, e P''' un opportuno punto compreso fra P' e P''; ma $z(P'') = 0$ perchè P'' è su $A'B'$ e $|(\partial z/\partial \eta)_{P'''}| < \varepsilon$ perchè P''' è compreso fra $A_1 B_1$ ed $A'B'$; dunque dalla (14) può trarsi

$$|z| < r_1 \varepsilon , \quad \text{(sul segmento } A_1 B_1) . \tag{15}$$

Serviamoci ora della (7) identificando la curva $\boldsymbol{\Gamma}$ con la retta $\eta = \xi + r_1$, di guisa che potremo porre $\eta - \xi = r_1$, $d\eta = d\xi$; avremo allora

$$z(P) = \frac{1}{2}\Big[(uz)_{P_1} + (uz)_{P_2}\Big] +$$

$$+ \frac{1}{3 r_1}\int_{P_1}^{P_2} uz\, d\xi - \frac{1}{2}\int_{P_1}^{P_2}\left[u\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) - z\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right] d\xi ,$$

da cui, passando al valore assoluto, si trova, in virtù delle (13) e (15),

$$|z(P)| < c_1 r_1 \varepsilon + \frac{1}{3 r_1} c_1 r_1 \varepsilon \int_{P_1}^{P_2} d\xi + \frac{1}{2}\left(2 c_1 \varepsilon + 2 r_1 \varepsilon \frac{c_2}{r_1}\right)\int_{P_1}^{P_2} d\xi =$$

$$= \left[c_1 r_1 + \left(\frac{4}{3} c_1 + c_2\right)\int_{P_1}^{P_2} d\xi\right]\varepsilon ;$$

cioè, osservando che, sia r_1, sia la differenza fra l'ascissa di P_2 e quella di P_1, non superano certo la differenza fra l'ascissa di B' e quella di A' che avrà un certo valore fisso M,

$$|z(P)| < \left(\frac{7}{3} c_1 + c_2\right) M \varepsilon .$$

Ma $(7 c_1/3 + c_2) M$ è un numero fisso, indipendente da P e da ε; dunque z deve necessariamente essere identicamente nulla in tutto il triangolo A' B' C'. c. d. d.

§ 4. — In particolare, la relazione fondamentale (5) permette di calcolare agevolmente i valori di z sulla caratteristica AC. Invero, indicando con $\varphi(x)$ questi valori, che costituiscono una certa funzione di x definita fra 0 ed 1/2, ed osservando che l'equazione di detta caratteristica è

$$x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 0 , \tag{16}$$

si ha subito

$$\varphi(x) = \gamma_1 \int_0^1 \tau(2tx)\, t^{-\frac{5}{6}} (1-t)^{-\frac{5}{6}} dt - \gamma_2 (2x)^{\frac{2}{3}} \int_0^1 \nu(2tx)\, t^{-\frac{1}{6}} (1-t)^{-\frac{1}{6}} dt$$

od anche, scrivendo $x/2$ al posto di x e sostituendo alla variabile d'integrazione t l'altra $y = tx$,

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \gamma_1 x^{\frac{2}{3}} \int_0^x \frac{\tau(y)\, dy}{y^{\frac{5}{6}} (x-y)^{\frac{5}{6}}} - \gamma_2 \int_0^x \frac{\nu(y)\, dy}{y^{\frac{1}{6}} (x-y)^{\frac{1}{6}}} . \tag{17}$$

Per quanto seguirà importa ricavare dalla (17) l'espressione di $\tau(x)$ per mezzo delle funzioni φ e ν. Ora, se riguardiamo φ e ν come due funzioni assegnate e τ come funzione incognita, la (17) è un'equazione di Volterra, prima specie, immediatamente invertibile con la formula di Abel; $\tau(x)$ potrebbe dunque subito ottenersi per questa via. Noi però, per ottenerlo direttamente sotto forma semplice, preferiamo seguire una via diversa che in questo caso conduce più rapidamente al risultato.

All'uopo cominciamo col riporre nella (17) la vecchia variabile t, ottenendo così

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \gamma_1 \int_0^1 \frac{\tau(tx)}{t^{\frac{5}{6}} (1-t)^{\frac{5}{6}}} dt - \gamma_2 x^{\frac{2}{3}} \int_0^1 \frac{\nu(tx)}{t^{\frac{1}{6}} (1-t)^{\frac{1}{6}}} dt .$$

e quindi, salvo a giustificare *a posteriori* la legittimità del risultato cui perverremo, supponiamo che le funzioni φ, τ, ν possano rappresentarsi con sviluppi della forma

$$\varphi(x/2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad , \quad \tau(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots ,$$

$$\nu(x) = x^{-\frac{2}{3}} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) ;$$

la precedente equazione, con delle integrazioni termine a termine, potrà allora scriversi

$$\sum_{h=0} a_h x^h = \gamma_1 \sum_{h=0}^{\infty} b_h \frac{\Gamma(h+1/6)\,\Gamma(1/6)}{\Gamma(h+1/3)} x^h - \gamma_2 \sum_{h=0}^{\infty} c_h \frac{\Gamma(h+1/6)\,\Gamma(5/6)}{\Gamma(h+1)} x^h ,$$

da cui si ricava

$$b_h = \frac{1}{\gamma_1} \frac{\Gamma(h+1/3)}{\Gamma(1/6)\,\Gamma(h+1/6)} c_h + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\Gamma(h+1/3)\,\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)\,\Gamma(h+1)} c_h , \quad (h = 0\,,1\,,2\,,....)$$

Quindi, se indichiamo con $\varphi_1(x)$ una funzione che non dipende se non dalle a_h, cioè da $\varphi(x)$, avremo

$$\tau(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h = \varphi_1(x) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)\,\Gamma(2/3)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma(h+1/3)\,\Gamma(2/3)}{\Gamma(h+1)} c_h x^h ,$$

da cui, posto per brevità

$$\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)\,\Gamma(2/3)} = \frac{3^{\frac{2}{3}}\,\Gamma^3(1/3)}{4\pi^2} , \tag{18}$$

si ha successivamente

$$\tau(x) = \varphi_1(x) + \gamma \sum_{h=0}^{\infty} c_h x^h \int_0^1 \frac{t^h\,dt}{t^{\frac{2}{3}}(1-t)^{\frac{1}{3}}} = \varphi_1(x) + \gamma \int_0^1 \frac{\Sigma c_h x^h t^h}{t^{\frac{2}{3}}(1-t)^{\frac{1}{3}}} dt =$$

$$= \varphi_1(x) + \gamma x^{\frac{2}{3}} \int_0^1 \frac{\nu(tx)}{(1-t)^{\frac{1}{3}}} dt ,$$

da cui, tornando a porre $y = tx$, si trae finalmente

$$\tau(x) = \varphi_1(x) + \gamma \int_0^x \frac{\nu(y)}{(x-y)^{\frac{1}{3}}} dy . \tag{19}$$

§ 5. — Per legittimare la (19) e determinare l'espressione di $\varphi_1(x)$, sostituiamo il valore di $\tau(x)$ da essa fornito nella (17); otterremo così

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \gamma_1 x^{\frac{2}{3}} \int_0^x \frac{\varphi_1(y)\,dy}{y^{\frac{5}{6}}(x-y)^{\frac{5}{6}}} + \gamma\gamma_1 x^{\frac{2}{3}} \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^{\frac{5}{6}}(x-\xi)^{\frac{5}{6}}} \int_0^\xi \frac{\nu(y)\,dy}{(\xi-y)^{\frac{1}{3}}} - \gamma_2 \int_0^x \frac{\nu(y)\,dy}{y^{\frac{1}{6}}(x-y)^{\frac{1}{6}}}$$

cioè, invertendo l'ordine delle due integrazioni successive con la formula di Dirichlet,

$$\gamma_1 x^{\frac{2}{3}} \int_0^x \frac{\varphi_1(y)\,dy}{y^{\frac{5}{6}}(x-y)^{\frac{5}{6}}} - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \tag{20}$$

$$= \gamma_2 \int_0^x \frac{\nu(y)\,dy}{y^{\frac{1}{6}}(x-y)^{\frac{1}{6}}} - \gamma\gamma_1 x^{\frac{2}{3}} \int_0^x \nu(y)\,dy \int_y^x \frac{d\xi}{\xi^{\frac{5}{6}}(x-\xi)^{\frac{5}{6}}(\xi-y)^{\frac{1}{3}}} .$$

Nell' ultimo termine del secondo membro poniamo ora $\xi = y + t(x - y)$, con che esso diviene

$$\gamma\gamma_1 x^{\frac{2}{3}} \int_0^x \frac{\nu(y)\, dy}{y^{\frac{5}{6}}(x-y)^{\frac{1}{6}}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}}(1-t)^{-\frac{5}{6}}\left(1 - \frac{y-x}{y}\, t\right)^{-\frac{5}{6}} dt :$$

ma l' integrale esteso fra 0 ed 1 è un integrale ipergeometrico il cui valore è, com'è noto,

$$\frac{\Gamma(2/3)\,\Gamma(1/6)}{\Gamma(5/6)} \mathrm{F}\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \,\Big|\, \frac{y-x}{y}\right) = \frac{\Gamma(2/3)\,\Gamma(1/6)}{\Gamma(5/6)}\left(1 - \frac{y-x}{y}\right)^{-\frac{2}{3}} :$$

dunque, con facili riduzioni, il termine in esame risulta uguale a

$$\gamma_2 \int_0^x \frac{\nu(y)\, dy}{y^{\frac{1}{6}}(x-y)^{\frac{1}{6}}},$$

epperò il secondo membro della (20) è identicamente nullo. Ne segue che la (17) sarà verificata sempre che $\varphi_1(x)$ sia tale che

$$\int_0^x \frac{\varphi_1(y)\, dy}{y^{\frac{5}{6}}(x-y)^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\gamma_1} x^{-\frac{2}{3}} \varphi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Riguardiamo l' uguaglianza ottenuta come un'equazione integrale in φ_1. Da essa potremo allora dedurre, avvalendoci della formula di Abel (1),

$$\frac{\varphi_1(x)}{x^{\frac{5}{6}}} = \frac{\operatorname{sen} \pi/6}{\pi\gamma_1} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\varphi(y/2)}{y^{\frac{2}{3}}(x-y)^{\frac{1}{6}}} dy,$$

cioè

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2\pi\gamma_1} x^{\frac{5}{6}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\varphi(y/2)}{y^{\frac{2}{3}}(x-y)^{\frac{1}{6}}} dy, \tag{21}$$

da cui, effettuando la derivazione dopo aver trasformato l' integrale in uno a limiti costanti con la solita sostituzione $y = tx$,

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{12\pi\gamma_1}\left[\int_0^1 \frac{\varphi(tx/2)}{t^{\frac{2}{3}}(1-t)^{\frac{1}{6}}} dt + 3x \int_0^1 \frac{\varphi'(tx/2)}{(1-t)^{\frac{1}{6}}} t^{\frac{1}{3}} dt\right]. \tag{22}$$

La conclusione è che la formula (19) è perfettamente valida allorchè, per $\varphi_1(x)$, si assuma l'espressione ora trovata.

(1) Volterra, *Leçons sur les éq. intégrales et intégro-differentielles* (Paris, Gauthier-Villars, 1913), pag. 37, form. (6).

§ 6. — Come si vedrà nel prossimo paragrafo, si perviene agevolmente alla dimostrazione del teorema di unicità, tosto che si sia fatto vedere che, *se z è una soluzione della* (E) *annullantesi sul tratto di caratteristica* AC, e cioè tale che si abbia $\varphi(x) = \varphi_1(x) = 0$, *l'integrale definito*

$$I = \int_0^1 \tau(x)\, \nu(x)\, dx$$

non può essere negativo. Pertanto nel presente paragrafo ci proponiamo di dimostrare questa proprietà.

All'uopo osserviamo che, avvalendosi della (19), l'integrale I potrà scriversi

$$I = \gamma \int_0^1 \nu(x)\, dx \int_0^x \frac{\nu(y)}{(x-y)^{\frac{1}{3}}}\, dy\,;$$

cioè, col solito cambiamento di variabile $y = tx$,

$$I = \gamma \int_0^1 \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} \nu(x)\, \nu(tx)\, dt\, dx. \tag{23}$$

Ciò posto, ricordiamo che $\nu(x)$ è una funzione sempre finita fra 0 ed 1 o, al più, infinita d'ordine minore di 5/6 per $x \to 0$ o ad 1, e quindi l'integrale doppio (23) è certamente convergente. Ne segue che, dato ad arbitrio il numero positivo ε, potrà determinarsi un numero positivo η $(< 1/2)$ tale che, posto

$$I_1 = \gamma \int_0^1 \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} \nu_1(x)\, \nu_1(tx)\, dt\, dx\,, \tag{24}$$

dove $\nu_1(x)$ è la funzione finita e continua senza eccezioni definita dalle formule

$$\nu_1(x) = \nu(\eta)\,,\ (0 \leq x \leq \eta)\ ;\ \nu_1(x) = \nu(x)\,,\ (\eta \leq x \leq 1 - \eta)\,;$$
$$\nu_1(x) = \nu_1(1-\eta)\,,\ (1-\eta \leq x \leq 1)\,;$$

il valor assoluto della differenza fra I ed I_1 non superi $\varepsilon/2$. Infatti basta considerare che la differenza in discorso può esprimersi come un integrale doppio esteso ad un campo di area evanescente per $\eta \to 0$.

Ulteriormente si osservi che l'integrale I_1 è tale che esso si altera di pochissimo se si altera di pochissimo la funzione $\nu_1(x)$. Precisamente dico che, se $\nu_2(x)$ è una funzione tale che

$$|\nu_2(x) - \nu_1(x)| < \theta\,, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

e si indica con I_2 ciò che diviene I_1 quando al posto di ν_1 si pone ν_2, si ha

$$|I_2 - I_1| < \frac{9\gamma}{10}(2N + \theta)\,\theta\,,$$

dove N è un valor maggiorante di $|\nu_1(x)|$ nell'intervallo $(0, 1)$.

Infatti può scriversi

$$I_1 - I_2 = \gamma \int_0^1 \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} \Big\{ [\nu_1(x)\, \nu_1(tx) - \nu_1(x)\, \nu_2(tx)] +$$

$$+ [\nu_1(x)\, \nu_2(tx) - \nu_2(x)\, \nu_2(tx)] \Big\} \, dt\, dx \,,$$

da cui segue subito

$$|I_1 - I_2| < \gamma \int_0^1 \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} [N\theta + (N+\theta)\,\theta] \, dt\, dx = \frac{9\gamma}{10} (2N + \theta)\, \theta \,.$$

Segue da ciò — ricordando che, data in un certo intervallo una funzione finita e continua qualsiasi, pel noto teorema fondamentale di Weierstrass [1], può sempre determinarsi un polinomio tale che, in tutto l'intervallo, esso si discosti dalla funzione assegnata per meno di una quantità arbitrariamente prefissata — che, nel nostro caso, potrà determinarsi un polinomio di un certo grado n

$$\nu^*(x) = u_0 + u_1 x + \cdots + u_n x^n \tag{25}$$

tale che, detto I^* ciò che diventa I_1 quando al posto di ν_1 si pone ν^*, si abbia

$$|I_1 - I^*| < \varepsilon/2 \,,$$

e conseguentemente

$$|I - I^*| < \varepsilon \,.$$

Sostituendo a $\nu^*(x)$ la sua espressione data dalla (25), l'integrale I^* può scriversi

$$I^* = \gamma \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} u_h\, u_k \int_0^1 \int_0^1 x^{h+k+\frac{2}{3}}\, t^k (1-t)^{-\frac{1}{3}} \, dt\, dx$$

od anche

$$I^* = \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \left[\gamma \frac{\Gamma(1+k)\, \Gamma(2/3)}{\Gamma(5/3+k)} \int_0^1 x^{h+k+\frac{2}{3}} \, dx \right] u_h\, u_k \,. \tag{26}$$

Questo sommatorio doppio può riguardarsi come una forma quadratica nelle u. Si presenta allora spontaneo considerare accanto ad essa l'altra forma, analoga ma più semplice:

$$G^* = \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \left[\int_0^1 x^{h+k+\frac{2}{3}} \, dx \right] u_h\, u_k \,. \tag{27}$$

[1] Ved. p. es. E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles* etc. (Paris, Gauthier-Villars, 1905), Cap. IV, pag. 50.

La forma quadratica G^* è definita positiva. Infatti la (27) può scriversi

$$G^* = \int_0^1 \left[x^{\frac{2}{3}} \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} u_h x^h \cdot u_k x^k \right] dx = \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} \left[\sum_{h=0}^{n} u_h x^h \right]^2 = \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} [\nu^*(x)]^2 dx,$$

il che dimostra l'asserto.

Ma *se due forme quadratiche*

$$F_1 = \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} A_{h,k} u_h u_k \quad , \quad F_2 = \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} B_{h,k} u_h u_k$$

sono tali che

$$A_{h,k} = M_h \cdot N_k \cdot B_{h,k}, \qquad (h, k = 0, 1, 2, \dots n),$$

dove le M_h *ed* N_k *siano numeri sempre positivi* (*o sempre negativi*) *dipendenti il primo solo dall'indice h ed il secondo solo dall'indice k, le due forme o sono entrambe definite positive o entrambe definite negative o entrambe indefinite* [1]; dunque, differendo i coefficienti della forma I^* dagli omologhi in G^* soltanto pel fattore positivo

$$\gamma \frac{\Gamma(1+k)\,\Gamma(2/3)}{\Gamma(5/3+k)}$$

che dipende dal solo indice k, la forma I^* sarà definita positiva al pari di G^*, epperò *l'integrale* I, che differisce da I^* per meno del numero arbitrario ε, *dovrà essere necessariamente positivo o nullo.*

§ 7. — Dimostrato che I non può essere negativo, è ora facile pervenire alla dimostrazione del teorema enunciato nel § 1.

Infatti, supponiamo che il teorema non si verifichi, cioè supponiamo che esistano due diverse soluzioni regolari z_1 e z_2 della (E) assumenti gli stessi valori sulla curva σ e sul pezzo di caratteristica AC, il che implica l'esistenza di una terza soluzione z (uguale a $z_1 - z_2$) annullantesi su σ ed AC senza essere identicamente nulla.

[1] Infatti, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le due forme siano p. es. definite positive sono, com'è noto, che si abbia rispettivamente

$$\Delta'_p = \begin{vmatrix} A_{00} \dots A_{0p} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ A_{p0} \dots A_{pp} \end{vmatrix} > 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots n) \quad ; \quad \Delta''_p = \begin{vmatrix} B_{00} \dots B_{0p} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ B_{p0} \dots B_{pp} \end{vmatrix} > 0, \ (p = 0, 1, 2, \dots n).$$

Ma nel caso in esame si ha

$$\Delta'_p = \left(\prod_{h=0}^{p} M_h N_k \right) \Delta''_p ;$$

quindi Δ'_p e Δ''_p hanno sempre lo stesso segno, epperò le precedenti condizioni o sono insieme soddisfatte o insieme non lo sono.

Essendo z una soluzione della (E), avremo identicamente, qualunque sia il campo d'integrazione,

$$\int\int z\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dx\,dy=0\,,$$

cioè, com'è facile verificare,

$$\int\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(yz\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial z}{\partial y}\right)-y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=0\,.$$

Intendiamo ora estesa l'integrazione al campo S compreso fra la curva σ ed il segmento AB dell'asse x, ed applichiamo il primo lemma di Gauss, il che è lecito; avremo così, indicata con n la direzione della normale a σ rivolta verso l'interno di S,

$$\int\int_S\left[y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+$$

$$+\int_\sigma z\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dn}\right)d\sigma+\int_0^1\tau(x)\,\nu(x)\,dx=0\,;$$

cioè, annullandosi z su σ,

$$\int\int_S\left[y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\int_0^1\tau(x)\,\nu(x)\,dx=0\,. \tag{28}$$

Ma l'integrale esteso fra 0 ed 1 non è altro se non l'integrale indicato con I nel paragrafo precedente, epperò, essendo $z=0$ su AC, esso è positivo o nullo; dunque l'uguaglianza (28) è assurda, perchè la somma di una quantità essenzialmente positiva, qual'è l'integrale doppio, se z non è identicamente nulla in S, e di una non negativa non è mai zero.

Se ne conclude che z deve essere di necessità identicamente nulla in S, epperò anche nel triangolo mistilineo ABC, in virtù di quanto è stato dimostrato nei §§ 2 e 3; e ne segue il teorema.

Si noti che il ragionamento svolto nel presente paragrafo permette di concludere, indipendentemente da ogni considerazione precedente, che z deve essere necessariamente nulla in S allorchè essa, oltre ad annullarsi nella curva σ, si annulla su AB, oppure se, su questo medesimo segmento, si annulla la sua derivata rispetto ad y. Infatti, in entrambi questi casi, il primo membro della (28) si riduce al solo integrale doppio il quale non è zero se non quando z è identicamente nulla in S. Può dunque enunciarsi che:

Nell'interno del contorno chiuso, costituito dalla curva σ e dal segmento AB *dell'asse x, non può esistere più di una soluzione regolare della equazione* (E) *assumente valori assegnati su tutto il contorno, oppure assumente valori assegnati sulla curva σ e tale che la sua derivata rispetto ad y assuma valori assegnati sul segmento* AB.

Si noti infine come la prima parte di questa proposizione continui evidentemente a valere anche nel caso in cui il contorno non sia più in parte costituito da un segmento dell'asse x, ma sia invece *tutto compreso nel semipiano ellittico.*

CAPITOLO III.

Studio di alcune classi di soluzioni particolari dell'equazione (E).

§ 1. — Allo scopo finale di pervenire all'inversione del teorema dimostrato nel precedente Capitolo, cioè di dimostrare l'esistenza della soluzione di cui esso assicura l'unicità, ci proponiamo nel presente Capitolo di determinare e studiare due classi di soluzioni particolari, singolarmente importanti, dell'equazione differenziale (E).

All'uopo cominciamo coll'indagare, seguendo il metodo così spesso usato in Fisica matematica, se è possibile soddisfare all'equazione ponendo $z = XY$, dove X denota una funzione della sola x, ed Y una funzione della sola y: Operando la sostituzione, si ha

$$y X'' Y + X Y'' = 0$$

che può scriversi

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{yY};$$

affinchè l'equazione sia soddisfatta, occorre dunque, e basta, che questi due rapporti abbiano un valore costante comune. Indichiamo con k questo valore costante; avremo allora, per determinare X ed Y, le due equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{d^2X}{dx^2} + kX = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - kyY = 0, \tag{2}$$

delle quali la prima si integra immediatamente ottenendo

$$X = C_1 \cos\sqrt{k}\,x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{k}\,x, \tag{3}$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti arbitrarie.

Invece l'integrale generale della (2) non è esprimibile mediante funzioni elementari, epperò lo studio della funzione Y richiederà delle considerazioni un po' più elevate.

Cominciamo intanto col porre in luce il modo con cui Y dipende dalla costante k, il che è molto agevole. Precisamente basterà operare il cambiamento di variabile $\xi = k^{\frac{1}{3}} y$, col quale la (2) si muta nell'altra equazione

$$\frac{d^2Y}{d\xi^2} - \xi Y = 0, \tag{4}$$

nella quale non v'è più traccia di k. Pertanto, se Φ e Ψ sono due qualsiasi integrali particolari linearmente indipendenti di quest'ultima equazione, potrà porsi

$$(5)\qquad Y = C_3 \Phi(k^{\frac{1}{3}} y) + C_4 \Psi(k^{\frac{1}{3}} y),$$

dove C_3 e C_4 sono due costanti arbitrarie.

In particolare, supponendo $k = n^2$, dove n è un numero intero positivo, si conclude che *l'equazione* (E) *ammette la soluzione particolare*

$$(6)\qquad z = [C_1 \cos nx + C_2 \operatorname{sen} nx][C_3 \Phi(n^{\frac{2}{3}} y) + C_4 \Psi(n^{\frac{2}{3}} y)].$$

§ 2. — La (4) è un'equazione lineare di 2° ordine a coefficienti lineari, appartiene cioè al tipo così detto di Laplace; epperò, per un risultato classico, il suo integrale generale si può esprimere per mezzo di integrali definiti. Prima però di occuparci di ciò, facciamo vedere come, col metodo d'integrazione per serie, possano subito ottenersi due integrali linearmente indipendenti dell'equazione in discorso, espressi mediante due serie di potenze sempre e rapidamente convergenti.

A questo scopo cerchiamo di soddisfare la (4), ponendo

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n ;$$

si trovano così, per determinare i coefficienti c_n, le equazioni

$$1 \cdot 2\, c_2 = 0 \quad ; \quad (h-1)\, h\, c_h = c_{h-3}, \qquad (h = 3, 4, 5, \ldots),$$

dalle quali anzitutto apparisce che deve porsi

$$c_2 = c_5 = c_8 = \cdots = 0 .$$

Per determinare gli altri coefficienti, occorre invece fissare preventivamente, in modo arbitrario, i valori di c_0 e c_1; per esempio, potremo porre $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, oppure $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, ed avremo in corrispondenza rispettivamente

$$c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad c_4 = 0, \quad c_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \quad c_7 = 0, \quad c_9 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \ldots$$

oppure

$$c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{3 \cdot 4}, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}, \quad c_9 = 0, \quad c_{10} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \ldots,$$

e se ne conclude che la (4), almeno formalmente, è soddisfatta dalle due serie

$$(7)\qquad R(\xi) = 1 + \frac{1}{3!}\xi^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!}\xi^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!}\xi^9 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{12!}\xi^{12} + \cdots$$

e

$$(8)\qquad S(\xi) = \xi + \frac{2}{4!}\xi^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!}\xi^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!}\xi^{10} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{13!}\xi^{13} + \cdots$$

Che si tratti di due soluzioni effettive e non soltanto formali, è facile persuadersi determinando il raggio di convergenza delle due serie che si constata non essere nullo, anzi si trova che esso è infinito, cioè *le funzioni* R *ed* S *sono due trascendenti intere.*

Infatti, considerando p. es. la serie (7) e riguardandola per semplicità come una serie di potenze di ξ^3, avremo che il rapporto fra il coefficiente di $(\xi^3)^n$ e quello di $(\xi^3)^{n+1}$ è dato da

$$\frac{(3n+3)!}{(3n)!}\,\frac{1}{3n+1} = (3n+2)\,(3n+3)\,,$$

epperò il suo limite per $n \to \infty$, che è il raggio di convergenza, è infinito.

Inoltre R ed S sono due integrali linearmente indipendenti perchè, essendo evidentemente

$$\mathrm{R}(0) = 1 \ , \ \mathrm{S}(0) = 0 \ , \ \mathrm{R}'(0) = 0 \ , \ \mathrm{S}'(0) = 1\,,$$

il loro wronskiano per $\xi = 0$ [e quindi *sempre* (¹)] è uguale a $+1$.

Ciò premesso, passiamo all'integrazione della (4) per mezzo di integrali definiti.

Com'è noto (²), in generale, data un'equazione di Laplace di ordine n

$$\sum_{h=0}^{n} (a_h + x\, b_h)\frac{d^h y}{dx^h} = 0\,, \tag{9}$$

se si pone

$$\varphi(z) = \sum_{h=0}^{n} a_h z^h \ , \ \psi(z) = \sum_{h=0}^{n} b_h z^h \ , \ \mathrm{Z} = \frac{1}{\psi(z)}\, e^{\int \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz}$$

dove z denota una variabile complessa, l'integrale generale della (9) può esprimersi come una combinazione lineare di integrali della funzione $\mathrm{Z}\,e^{xz}$ estesi a dei cappî involgenti le n radici dell'equazione $\psi(z) = 0$.

Nel caso in esame, si ha

$$\varphi(z) = -z^2 \ , \ \psi(z) = 1 \ . \ \mathrm{Z} = e^{-\frac{1}{3}z^3}\,,$$

e pertanto, volendo riguardare $\psi(z)$ come un polinomio di 2° grado, le sue radici dovranno ritenersi entrambe infinite, il che rende necessaria qualche speciale avvertenza.

All'uopo cominciamo col far vedere che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione

$$\overline{y}(\xi) = \int_{\mathrm{L}} \mathrm{Z}\, e^{\xi z}\, dz = \int_{\mathrm{L}} e^{\xi z - \frac{1}{3}z^3}\, dz\,,$$

(¹) Infatti, con la formula di Liouville, si può veder subito che il wronskiano di due qualsiansi integrali linearmente indipendenti della (4) è necessariamente costante.

(²) Ved. p. es. Goursat, *Traité d'Analyse* (2ª ed., Paris, Gauthier-Villars, 1910–'15), Cap. XX-2, § 408 (t. II, pag. 442 e seg.).

dove L è una curva qualsiasi del piano complesso, soddisfi all'equazione differenziale (4), è che sia

$$\int_L d\left(e^{\xi z - \frac{1}{3}z^3}\right) = 0. \tag{10}$$

Infatti, si ha manifestamente

$$\bar{y}''(\xi) = \int_L e^{\xi z - \frac{1}{3}z^3} z^2\, dz\,;$$

epperò, sostituendo $\bar{y}$ ad y, il primo membro della (4) diviene

$$\int_L e^{\xi z - \frac{1}{3}z^3}(z^2 - \xi)\, dz = -\int_L d\left(e^{\xi z - \frac{1}{3}z^3}\right).$$

Ciò premesso, indichiamo con L_1 ed L_2 le due curve del piano complesso che, partendo dal punto all'infinito, si dirigono sull'origine seguendo rispettivamente le semirette luogo dei punti d'argomento $2\pi/3$ e $4\pi/3$, e poi, coincidendo in quest'ultima parte del percorso, dall'origine tornano al punto all'infinito, seguendo il semiasse reale positivo. Dico che la condizione (10) è verificata identificando L con L_1 oppure con L_2. Infatti, detto ϱ il modulo di z, quando L coincide con L_1 od L_2 si ha evidentemente

$$\int_L d\left(e^{\xi z - \frac{1}{3}z^3}\right) = \lim_{\varrho \to \infty} e^{\xi\varrho - \frac{1}{3}\varrho^3} - \lim_{\varrho \to \infty} e^{-\frac{\xi\varrho}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\varrho^3} = 0.$$

Se ne conclude che l'equazione (4) ammette i due integrali particolari

$$Y_1(\xi) = \int_{L_1} e^{\xi z - \frac{1}{3}z^3} dz \quad , \quad Y_2(\xi) = \int_{L_2} e^{\xi z - \frac{1}{3}z^3} dz. \tag{11}$$

Per porre sotto forma esplicita gli integrali (11), osserviamo che, posto sempre $|z| = \varrho$, mentre sull'asse reale positivo si ha $z = \varrho$, e quindi $dz = d\varrho$; sulle rimanenti porzioni di L_1 ed L_2 si ha invece rispettivamente

$$z = -\frac{\varrho}{2}(1 - i\sqrt{3}) \quad , \quad dz = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\, d\varrho\,,$$

$$z = -\frac{\varrho}{2}(1 + i\sqrt{3}) \quad , \quad dz = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\, d\varrho\,;$$

perciò, tenendo conto che in ogni caso è $z^3 = \varrho^3$, potremo scrivere

$$\begin{cases} Y_1(\xi) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{\xi\varrho}{2}(1 - i\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\varrho^3}(1 - i\sqrt{3})\, d\varrho + \int_0^\infty e^{\xi\varrho - \frac{1}{3}\varrho^3} d\varrho\,, \\[2ex] Y_2(\xi) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{\xi\varrho}{2}(1 + i\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\varrho^3}(1 + i\sqrt{3})\, d\varrho + \int_0^\infty e^{\xi\varrho - \frac{1}{3}\varrho^3} d\varrho\,, \end{cases}$$

cioè, con facili trasformazioni,

$$\left\{\begin{aligned}
Y_1(\xi) &= \int_0^\infty e^{\xi\varrho-\frac{1}{3}\varrho^3}d\varrho+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\xi\varrho-\frac{1}{3}\varrho^3}\times\\
&\times\left[\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\varrho\xi+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\varrho\xi\right)+i\left(\mathrm{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\varrho\xi-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\varrho\xi\right)\right]d\varrho\\
Y_2(\xi) &= \int_0^\infty e^{\xi\varrho-\frac{1}{3}\varrho^3}d\varrho+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\xi\varrho-\frac{1}{3}\varrho^3}\times\\
&\times\left[\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\varrho\xi+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\varrho\xi\right)-i\left(\mathrm{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\varrho\xi-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\varrho\xi\right)\right]d\varrho
\end{aligned}\right.$$

da cui, per somma e sottrazione, si ricavano subito i due integrali reali

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
\lambda(\xi) &= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\xi\varrho-\frac{1}{3}\varrho^3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\varrho\right)d\varrho\,,\\
\mu(\xi) &= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\xi\varrho-\frac{1}{3}\varrho^3}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\varrho\right)d\varrho+\int_0^\infty e^{\xi\varrho-\frac{1}{3}\varrho^3}d\varrho\,.
\end{aligned}\right.$$

Anche gli integrali particolari λ e μ sono linearmente indipendenti, epperò l'integrale generale della (4) può porsi sotto la forma

$$(13)\qquad Y = c_1\,\lambda(\xi)+c_2\,\mu(\xi)$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie.

Infatti si ha

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}
\lambda(0) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}\varrho^3}d\varrho=\frac{1}{2}3^{-\frac{1}{6}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),\\
\mu(0) &= \frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}\varrho^3}d\varrho=\frac{1}{2}3^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),\\
\lambda'(0) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}\varrho^3}\varrho\,d\varrho=-\frac{1}{2}3^{\frac{1}{6}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right),\\
\mu'(0) &= \frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}\varrho^3}\varrho\,d\varrho=\frac{1}{2}3^{\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}\right.$$

epperò il wronskiano di λ e μ inizialmente, e quindi sempre, è uguale a π.

Essendo λ e μ linearmente indipendenti, R ed S potranno esprimersi per mezzo di essi e reciprocamente; precisamente, giovandosi delle (14), si trovano le formule

$$
(15) \quad \begin{cases} \mathrm{R}(\xi) = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{3}}\,\Gamma(1/3)} \left[\mu(\xi) + \sqrt{3}\,\lambda(\xi) \right] \\[2ex] \mathrm{S}(\xi) = \dfrac{1}{3^{\frac{2}{3}}\,\Gamma(2/3)} \left[\mu(\xi) - \sqrt{3}\,\lambda(\xi) \right], \end{cases}
$$

$$
(16) \quad \begin{cases} 2\lambda(\xi) = 3^{-\frac{1}{6}}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right) \mathrm{R}(\xi) - 3^{\frac{1}{6}}\,\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right) \mathrm{S}(\xi) \\[2ex] 2\mu(\xi) = 3^{\frac{1}{3}}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right) \mathrm{R}(\xi) + 3^{\frac{2}{3}}\,\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right) \mathrm{S}(\xi), \end{cases}
$$

di cui hanno particolare interesse le (16) che permettono di adoperare le convergentissime serie (7) ed (8) pel calcolo numerico di λ e μ.

L'aver posto l'integrale generale della (4) sotto la forma (13) ci fa scendere molto più a fondo nella conoscenza di quest'equazione rispetto al momento in cui di essa conoscevamo soltanto gli integrali R ed S. Invero, laddove le serie che definiscono queste due ultime funzioni non permettono di scorgere facilmente alcuna sostanziale differenza fra di esse, le (12) mostrano a colpo d'occhio la profonda differenza che intercede fra il comportamento di $\lambda(\xi)$ e $\mu(\xi)$ allorchè si fa crescere indefinitamente ξ *per valori reali positivi*: mentre $\lambda(\xi)$ resta sempre finita (anzi ha per limite 0, come si vede subito, essendo l'integrale uniformemente convergente), la funzione $\mu(\xi)$ cresce oltre ogni limite. In altre parole, gli integrali particolari della (4) sono distribuiti in due classi: una costituita dagli integrali del tipo $c\lambda(\xi)$ che tendono a zero per $\xi \to +\infty$, e l'altra costituita dai rimanenti i quali nella stessa ipotesi tendono all'infinito.

§ 3. — Queste osservazioni sono molto importanti per le applicazioni che dovremo fare delle soluzioni particolari (6) dell'equazione differenziale (E). Invero, se si considera una serie formata con queste soluzioni:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathrm{C}_1^{(n)} \cos nx + \mathrm{C}_2^{(n)} \operatorname{sen} nx \right] \left[\mathrm{C}_3^{(n)}\,\Phi(n^{\frac{2}{3}} y) + \mathrm{C}_4^{(n)}\,\Psi(n^{\frac{2}{3}} y) \right],
$$

e non si suppone che Φ e Ψ siano entrambi integrali della prima classe, il fatto che la serie converga per $y = 0$ non ci autorizza per nulla ad asserire che essa si conservi convergente per $y > 0$, poichè allora il secondo fattore del termine generale cresce indefinitamente al crescere di n. Invece, se Φ e Ψ sono integrali della prima classe, cioè *se si considera una serie della forma*

$$
(17) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{C}_1^{(n)} \cos nx + \mathrm{C}_2^{(n)} \operatorname{sen} nx \right) \lambda(n^{\frac{2}{3}} y),
$$

per asserire che essa è assolutamente ed uniformemente convergente in un campo C *compreso nel semipiano ellittico*, non è neanche necessario supporre che la serie

$$\lambda(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_1^{(n)} \cos nx + C_2^{(n)} \operatorname{sen} nx \right)$$

sia convergente, o, quanto meno, che le costanti $C_1^{(n)}$ e $C_2^{(n)}$ costituiscano un insieme limitato; ma *basta supporre che sia possibile fissare due numeri positivi* N *e* K *tali che si abbia*

$$(18) \qquad |C_1^{(n)}| < K\, n^N \quad , \quad |C_2^{(n)}| < K\, n^N ,$$

qualunque sia n.

Per dimostrare il teorema enunciato, occorre anzitutto esaminare, un po' più da vicino di quel che non si sia fatto sinora, il comportamento della trascendente $\lambda(\xi)$ per $\xi \to +\infty$. All'uopo operiamo nella prima delle (12) la sostituzione $t = \xi\varrho$; si ha così

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t^3/\xi^3} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\right) dt ,$$

dal che risulta già che $\lambda(\xi)$ diviene infinitesima almeno come $1/\xi$ per $\xi \to +\infty$.

Si sarebbe ora tentati di sviluppare in serie il fattore

$$e^{-\frac{1}{3}t^3/\xi^3}$$

che figura sotto il precedente integrale, per ottenere così, integrando termine a termine, $\lambda(\xi)$ espressa mediante una serie di potenze negative di ξ. Ma è facile persuadersi che nel nostro caso queste operazioni non sono lecite; potremo però sempre porre nella formula precedente

$$e^{-\frac{1}{3}t^3/\xi^3} = \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \frac{t^{3n}}{3^n\, n!\, \xi^{3n}} + (-1)^m \frac{t^{3m}}{3^m\, m!\, \xi^{3m}} R_m\left(-\frac{t^3}{3\,\xi^3}\right),$$

dove m è un numero positivo qualsiasi e

$$R_m(x) = 1 + \frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{(m+1)(m+2)} + \frac{x^3}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \cdots ;$$

avremo così

$$(19) \qquad \lambda(\xi) = \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \frac{a_n}{3^n\, n!\, \xi^{3n+1}} +$$

$$+ (-1)^m \frac{1}{3^m\, m!\, \xi^{3m+1}} \int_0^{\infty} R_m\left(-\frac{t^3}{3\,\xi^3}\right) e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{3m} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\right) dt ,$$

avendo posto

$$(20)\qquad a_n = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{3n} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) dt\,, \qquad (n = 0, 1, \dots, m-1).$$

Dico che i coefficienti a_n sono tutti nulli.

Infatti, avendosi in generale, qualunque sia α,

$$\int e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) dt = -e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right),$$

risulta senz'altro

$$a_0 = \left[-e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]_0^\infty = 0\,;$$

ma, con tre successive integrazioni per parti, è facile verificare che

$$a_{n+1} = -(n-1)\, n(n+1)\, a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)\,;$$

dunque anche $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ sono nulli.

Se ne conclude che la (19) può scriversi più semplicemente

$$(21)\quad \lambda(\xi) = (-1)^m \frac{1}{3^m\, m!\, \xi^{3m+1}} \int_0^\infty R_m\left(-\frac{t^3}{3\,\xi^3}\right) e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{3m} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) dt\,.$$

Ciò posto osserviamo che, in virtù di una nota formula, la funzione $R_m(x)$ può porsi sotto la forma

$$R_m(x) = m \int_0^1 e^{(1-t)x}\, t^{m-1}\, dt\,.$$

Risulta da ciò, che la funzione $R_m(x)$ è sempre crescente al crescere di x; quindi essa, per valori negativi dell'argomento, è sempre compresa fra $R(-\infty)$ ed $R(0)$, cioè fra 0 ed 1; avremo dunque, qualunque siano t e ξ, *purchè positivi*,

$$\left| R_m\left(-\frac{t^3}{3\,\xi^3}\right)\right| \leq 1\,.$$

Conseguentemente, per ξ positivo, dalla (21) può trarsi

$$|\lambda(\xi)| \leq \frac{1}{3^m\, m!\, \xi^{3m+1}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{3m}\, dt$$

ossia

$$|\lambda(\xi)| \leq \frac{(3m)!}{3^m\, m!} \left(\frac{2}{\xi}\right)^{3m+1}.$$

Ma m è un numero positivo qualsivoglia; dunque *la funzione* $\lambda(\xi)$ *per* $\xi \to +\infty$ *diviene infinitesima d'ordine superiore a qualsiasi numero positivo prefissato.*

Per di più è facile mostrare che, al crescere di ξ, $\lambda(\xi)$ tende a zero monotonicamente, e precisamente che a destra dello zero *è sempre decrescente.* Il breve ragionamento (che omettiamo per brevità) necessario per pervenire a questa conclusione, è fondato sulla circostanza che la curva $y = \lambda(\xi)$, che alla destra del punto $\xi = 0$ volge la sua convessità verso l'asse ξ, essendo $\lambda'' = \lambda\xi$, non può avere flessi in punti non appartenenti all'asse in discorso.

Premesse queste poche considerazioni sulla trascendente λ, la dimostrazione del teorema enunciato in principio del paragrafo è immediata.

Infatti, qualunque sia N, potrà trovarsi un numero positivo L tale che, per ogni valore positivo di ξ, si abbia

$$|\lambda(\xi)| < L/\xi^{\frac{3}{2}N+3}.$$

Ne segue che il valore assoluto del termine generale della serie (17) sarà minore di

$$[|C_1^{(n)}| + |C_2^{(n)}|]\, L/y^{\frac{3}{2}N+3}\, n^{N+2}$$

e quindi anche di

$$\frac{2KL}{\eta^{\frac{3}{2}N+3}} \frac{1}{n^2},$$

avendo detto η il minimo di y in C e tenuto conto delle (18). Ma la serie $\Sigma_n\, 1/n^2$ è convergente; dunque la serie (17) converge assolutamente ed uniformemente.

Naturalmente la precedente dimostrazione cade in difetto se nel campo C non è più, sempre, $y > 0$ ma soltanto $y \geq 0$. In questo caso però è evidentemente necessario supporre che la serie (18) sia essa stessa assolutamente ed uniformemente convergente; e allora, considerato che per $y \geq 0$ si ha $|\lambda(n^{\frac{2}{3}} y)| \leq \lambda(0)$, la dimostrazione dell'assoluta ed uniforme convergenza della (17) è immediata.

§ 4. — Passando ora alla seconda classe di soluzioni particolari della (E) di cui vogliamo occuparci, consideriamo la ridotta ellittica

$$(E_1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$$

della nostra equazione e, dette r e θ le coordinate polari nel piano ξ,η, cioè posto

$$r = +\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \theta = \eta/\xi,$$

indaghiamo se è possibile soddisfare la (E_1) ponendo $z = RT$, dove R denoti una

funzione della sola r e T una funzione della sola θ. All'uopo osserviamo che si ha

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \xi} &= -\mathrm{T'R}\frac{\eta}{r^2} + \mathrm{TR'}\frac{\xi}{r}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} &= \mathrm{T''R}\frac{\eta^2}{r^4} - 2\mathrm{T'R'}\frac{\xi\eta}{r^3} + 2\mathrm{T'R}\frac{\xi\eta}{r^4} + \mathrm{TR'}\frac{\eta^2}{r^3} + \mathrm{TR''}\frac{\xi^2}{r^2}, \\
\frac{\partial z}{\partial \eta} &= \mathrm{T'R}\frac{\xi}{r^2} + \mathrm{TR'}\frac{\eta}{r}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} &= \mathrm{T''R}\frac{\xi^2}{r^4} + 2\mathrm{T'R'}\frac{\xi\eta}{r^3} - 2\mathrm{T'R}\frac{\xi\eta}{r^4} + \mathrm{TR'}\frac{\xi^2}{r^3} + \mathrm{TR''}\frac{\eta^2}{r^2},
\end{aligned}\right.$$

di guisa che, praticando la sostituzione, risulta

$$\mathrm{TR''} + \frac{4}{3}\mathrm{T}\frac{\mathrm{R'}}{r} + \left(\mathrm{T''} + \frac{1}{3}\mathrm{T'}\operatorname{cotg}\theta\right)\frac{\mathrm{R}}{r^2} = 0. \tag{22}$$

La (22) suggerisce subito di porre $\mathrm{R} = r^k$, k essendo una costante qualsiasi; e allora, soppresso il fattore r^{k-2} che vien comune a tutti i termini, otterremo l'equazione lineare di 2° ordine in T:

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{d\theta^2} + \frac{1}{3}\operatorname{cotg}\theta\frac{d\mathrm{T}}{d\theta} + k\left(k + \frac{1}{3}\right)\mathrm{T} = 0, \tag{23}$$

ogni integrale della quale, moltiplicato per r^k, fornirà una soluzione delle equazioni (E_1) ed (E).

L'equazione (23) può subito ridursi ad un'equazione ipergeometrica. All'uopo basta porre

$$t = \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{r + \xi}{2r},$$

con che la (22) si muta nell'equazione differenziale ipergeometrica

$$t(1-t)\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}t\right)\frac{d\mathrm{T}}{dt} + k(k + 1/3)\,\mathrm{T} = 0, \tag{24}$$

di cui, com'è noto, due integrali fondamentali sono

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{F}(-k\,,\, k+1/3\,,\, 2/3\,|\,t) \quad , \quad \mathrm{T}_2 = t^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{F}(-k+1/3\,,\, k+2/3\,,\, 4/3\,|\,t),$$

ossia, tornando dalle coordinate (ξ, η) alle vecchie coordinate (x, y) mediante le (25) del Cap. I, e spostando indi, per comodità dei futuri calcoli, l'origine nel punto $(x = -1/2\,,\, y = 0)$,

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{F}\left(-k\,,\, k + \frac{1}{3}\,,\, \frac{2}{3}\,\middle|\, \frac{\varrho + x - 1/2}{2\varrho}\right),$$

$$\mathrm{T}_2 = \left(\frac{\varrho + x - 1/2}{2\varrho}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{F}\left(-k + \frac{1}{3}\,,\, k + \frac{2}{3}\,,\, \frac{4}{3}\,\middle|\, \frac{\varrho + x - 1/2}{2\varrho}\right).$$

dove si è posto

$$\varrho = + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9} y^3} . \tag{25}$$

Finalmente osserviamo che, per una nota formula relativa alle funzioni ipergeometriche, può porsi

$$T_2 = \left(\frac{\varrho + x - 1/2}{2\varrho}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{\varrho + x - 1/2}{2\varrho}\right)^{\frac{1}{3}} F\left(1 + k , \frac{2}{3} - k , \frac{4}{3} \middle| \frac{\varrho + x - 1/2}{2\varrho}\right) =$$
$$= y(2\varrho)^{-\frac{2}{3}} F\left(\frac{2}{3} - k , k + 1 , \frac{4}{3} \middle| \frac{\varrho + x - 1/2}{2\varrho}\right);$$

se ne conclude pertanto che l'equazione (E) ammette le due soluzioni particolari

$$\left\{ \begin{aligned} z_1 &= \varrho^{k_1} F\left(- k_1 , k_1 + \frac{1}{3} , \frac{2}{3} \middle| \frac{\varrho + x - 1/2}{2\varrho}\right), \\ z_2 &= y\, \varrho^{k_2 - \frac{2}{3}} F\left(\frac{2}{3} - k_2 , k_2 + 1 , \frac{4}{3} \middle| \frac{\varrho + x - 1/2}{2\varrho}\right), \end{aligned} \right. \tag{26}$$

dove k_1 e k_2 sono due numeri qualsiasi. In particolare si può supporre $k_1 = n$, $k_2 = n + 2/3$, dove n è un numero intero positivo, e si avrà allora che la (E) ammette le due soluzioni particolari

$$\left\{ \begin{aligned} z_1 &= \varrho^n F\left(- n , n + \frac{1}{3} , \frac{2}{3} \middle| \frac{\varrho + x - 1/2}{2\varrho}\right), \\ z_2 &= y\, \varrho^n F\left(- n , n + \frac{5}{3} , \frac{4}{3} \middle| \frac{\varrho + x - 1/2}{2\varrho}\right), \end{aligned} \right. \tag{27}$$

in cui le due funzioni ipergeometriche si riducono a due *polinomî di grado* n.

§ 5. — Entrambi i polinomî ipergeometrici che figurano nelle (27) sono tali che, indicando come di consueto con a, b, c i tre parametri, oltre ad aversi $a = - n$, è verificata la condizione

$$a + b + 1 = 2c .$$

Pertanto essi differiranno al più per un fattore numerico da due di quelle funzioni sferiche generalizzate che sogliono denotarsi col simbolo $C_n^\nu(x)$ e che, in epoca recente, sono state studiate da diversi Autori [1], ma specialmente dal Gegenbauer; in genere partendo dalla loro definizione come coefficienti dello sviluppo in serie di potenze di α della funzione $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\nu}$:

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n C_n^\nu(x) . \tag{28}$$

[1] Ved. l'articolo di A. Wangerin - A. Lambert, *Fonctions sphériques* in Encycl. des sciences mathém. (éd. fr.), II-5-(28), e l'articolo seguente (28 *a*) di P. Appell e A. Lambert, *Généralisations diverses des fonctions sphériques.*

Precisamente, essendo in generale [1]

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)}\,F\left(-n\,,\,n+2\nu\,,\,\nu+\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1-x}{2}\right), \tag{29}$$

si avrà

$$F\left(-n\,,\,n+\frac{1}{3}\,,\,\frac{2}{3}\,\middle|\,\frac{\varrho+x-1/2}{2\varrho}\right) = \frac{n!\,\Gamma(1/3)}{\Gamma(n+1/3)}\,C_n^{\frac{1}{6}}\left(\frac{1-2x}{2\varrho}\right),$$

$$F\left(-n\,,\,n+\frac{5}{3}\,,\,\frac{4}{3}\,\middle|\,\frac{\varrho+x-1/2}{2\varrho}\right) = \frac{n!\,\Gamma(5/3)}{\Gamma(n+5/3)}\,C_n^{\frac{5}{6}}\left(\frac{1-2x}{2\varrho}\right);$$

e quindi, prescindendo dai due fattori numerici, arriviamo alla conclusione che *l'equazione differenziale* (E) *ammette le due soluzioni particolari*

$$z_1^{(n)} = (2\varrho)^n\,C_n^{\frac{1}{6}}\left(\frac{1-2x}{2\varrho}\right)\quad,\quad z_2^{(n)} = y\,(2\varrho)^n\,C_n^{\frac{5}{6}}\left(\frac{1-2x}{2\varrho}\right). \tag{30}$$

Queste soluzioni avranno una parte essenziale nel prossimo Capitolo, per la circostanza che esse, o delle serie formate con esse, si riducono ad una forma molto semplice, sia sull'asse x, sia sulle speciali curve definite dall'equazione $\varrho = c$, dove c denota una costante positiva qualsiasi; curve che, dovendole spesso citare, chiameremo brevemente *curve normali* [2].

Infatti sull'asse x $z_2^{(n)}$ si annulla, mentre $z_1^{(n)}$, secondo il segno di $x-1/2$, assume i valori

$$z_1^{(n)} = \begin{cases} (1-2x)^n\,C_n^{\frac{1}{6}}\,(+1) = \dfrac{\Gamma(n+1/3)}{n!\,\Gamma(1/3)}\,(1-2x)^n & ,\ (x \leq 1/2\,,\ y=0) \\[2ex] (2x-1)^n\,C_n^{\frac{1}{6}}\,(-1) = \dfrac{\Gamma(n+1/3)}{n!\,\Gamma(1/3)} \times & \\[2ex] \times\,\dfrac{\Gamma(2/3)\,\Gamma(1/3)}{\Gamma(n+2/3)\,\Gamma(n+1/3)}\,(2x-1)^n = \dfrac{\Gamma(n+1/3)}{n!\,\Gamma(1/3)}\,(1-2x)^n & ,\ (x \geq 1/2\,,\ y=0) \end{cases}$$

[1] H. E. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen* (2ª ed., Berlino, 1878), t. I, pag. 298.

[2] Elevando a quadrato l'equazione $\varrho = c$, si ha

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}\,y^3 = c^2,$$

il che mostra come le curve in discorso siano delle cubiche piane ellittiche. Più generalmente chiameremo *curva normale* ogni curva rappresentata dall'equazione

$$(x-a)^2 + \frac{4}{9}\,y^3 = c^2$$

dove a e c sono due costanti qualsiasi, o, per meglio dire, *la parte compresa nel semipiano* $y > 0$ di una cubica siffatta. Tale parte, che esiste sempre se $c \neq 0$, ha la forma di un arco concavo verso l'asse x cogli estremi nei punti $(a-c\,,\,0)$ e $(a+c\,,\,0)$ e simmetrico rispetto alla retta $x=a$. Fra queste curve normali ha per noi speciale importanza quella corrispondente ad $a=c=1/2$, la cui equazione può scriversi sotto la forma

$$y^3 = \frac{9}{4}\,x(1-x);$$

noi la designeremo costantemente col simbolo $\mathfrak{C}$.

cioè si ha in ogni caso

$$(31)\qquad z_1^{(n)} = \frac{\Gamma(n+1/3)}{n!\,\Gamma(1/3)}(1-2x)^n \quad , \quad z_2^{(n)} = 0 \quad , \quad (\text{per } y=0).$$

Sulla curva normale di equazione $\varrho = c$ si ha invece

$$(32)\quad z_1^{(n)} = (2c)^n C_n^{\frac{1}{6}}\left(\frac{1-2x}{2c}\right) \quad , \quad z_2^{(n)} = y(2c)^n C_n^{\frac{5}{6}}\left(\frac{1-2x}{2c}\right) \quad , \quad (\text{per } \varrho = c),$$

e in particolare, sulla curva c di equazione $\varrho = 1/2$,

$$(32')\qquad z_1^{(n)} = C_n^{\frac{1}{6}}(1-2x) \quad , \quad z_2^{(n)} = y\, C_n^{\frac{5}{6}}(1-2x) \quad , \quad (\text{per } \varrho = 1/2).$$

§ 6. — Le funzioni C_n^ν godono di numerose ed importanti proprietà che per la più parte sono generalizzazioni di analoghe proprietà delle funzioni sferiche. A noi sarà però sufficiente ricordare:

1°) Che ogni funzione finita e continua $f(x)$, data nell'intervallo $(-1, +1)$, generalmente è sviluppabile in serie uniformemente convergente di funzioni $C_n^\nu(x)$:

$$(33)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n C_n^\nu(x) \quad (^1).$$

2°) Che ha luogo la formula

$$(34)\quad \int_{-1}^{+1} C_m^\nu(x)\, C_n^\nu(x)\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dx = \begin{cases} 0 & , \quad (m \neq n) \\ \dfrac{2^{1-2\nu}\pi}{\Gamma^2(\nu)}\,\dfrac{\Gamma(n+2\nu)}{(n+\nu)\,n!} & , \quad (m=n) \end{cases} \quad (^1).$$

3°) Che, posto l'argomento sotto forma di un coseno, si ha

$$(35)\qquad C_n^\nu(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+\nu)\,\Gamma(2n+\nu+1/2)}{\Gamma(2n+2\nu-1)\,n!} \times$$

$$\times \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \frac{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+h-1)}{(n+\nu-1)(n+\nu-2)\ldots(n+\nu-h)} \cos(n-2h)\theta \quad (^2).$$

La (34) permette di calcolare agevolmente i coefficienti c_n dello sviluppo (33) di una funzione $f(x)$ in serie di funzioni C_n^ν. All'uopo basta infatti moltiplicare ambo i membri della (33) per

$$C_n^\nu(x)\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx\,,$$

(1) L. Gegenbauer [Sitzungsber. Akad. Wien (2), 70 (1874), pp. 433-443].
(2) H. Burkhardt [Jahresb. der deutsch. Math. Vereinigung. v. 10-II (1901), pp. 62-69 e 71-92].

ed integrare quindi fra -1 e $+1$; si trova così

$$(36) \qquad c_n = \frac{\Gamma^2(\nu)}{2^{1-2\nu}\pi} \frac{(n+\nu)\, n!}{\Gamma(n+2\nu)} \int_{-1}^{+1} f(x)\, C_n^\nu(x)\, (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dx .$$

La (35) invece è importante pel fatto che i coefficienti del coseno nel sommatorio son tutti positivi; pertanto, qualunque sia θ, purchè reale, il valore assoluto del secondo membro non supererà mai il valore raggiunto allorchè, ponendosi $\theta = 0$, tutti i coseni vengono uguali a $+1$; si ha dunque

$$(37) \qquad |C_n^\nu(x)| \leq C_n^\nu(+1) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\, \Gamma(2\nu)} \quad (-1 \leq x \leq +1).$$

Finalmente notiamo che, tenendo conto che le funzioni

$$y_1 = F(-m\,, m+2\alpha-1\,, \alpha\,|\,x) \quad e \quad y_2 = [x(1-x)]^{1-\alpha} F(-n\,, n+3-2\alpha\,, 2-\alpha\,|\,x)$$

soddisfano rispettivamente alle equazioni differenziali

$$x(1-x)\, y_1'' + \alpha(1-2x)\, y_1' + m(m+2\alpha-1)\, y_1 = 0$$

$$x(1-x)\, y_2'' + \alpha(1-2x)\, y_2' + (n+1)(n-2\alpha+2)\, y_2 = 0\,,$$

è facile calcolare l'integrale esteso fra 0 ed 1 del prodotto

$$F(-m\,.\, m+2\alpha-1\,,\, \alpha\,|\,x)\, F(-n\,,\, n+3-2\alpha\,,\, 2-\alpha\,|\,x),$$

e si ottiene così una formula da cui si passa subito all'altra

$$(38) \quad \int_{-1}^{+1} C_m^\nu(x)\, C_n^{1-\nu}(x)\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2\pi\nu}{\pi} [1+(-1)^{m+n}] \frac{\Gamma(m+2\nu)\, \Gamma(n+2-2\nu)}{m!\, n!\, (m+n+1)\,(1-m+n-2\nu)}\,,$$

che è l'analoga della (34) nel caso in cui le due funzioni C_n^ν, invece di avere lo stesso indice superiore, hanno indici superiori la cui somma è 1.

Ora però, affinchè l'integrale sia nullo, più non basta che sia $m \neq n$, ma occorre che questi due numeri *abbiano parità diversa*. È questa una delle ragioni per cui nelle serie costituite con le soluzioni particolari (30), che dovremo considerare nel prossimo Capitolo, faremo intervenire le sole soluzioni $z_2^{(n)}$, lasciando da parte le $z_1^{(n)}$.

CAPITOLO IV.

Il teorema di esistenza per un contorno chiuso contenuto nel semipiano ellittico.

§ 1. — In fine del Cap. II si osservò come il teorema di unicità valga in particolare quando siano assegnati i valori di z su di un contorno chiuso σ, tutto compreso nel semipiano ellittico, e cioè tale che i suoi punti appartengano tutti al semipiano in discorso, asse x escluso. Ci proponiamo ora di invertire anzitutto questa proposizione dimostrando come, *data sopra σ una qualsiasi successione continua f di valori, esista sempre, nell'interno del campo, una soluzione regolare della* (E) *assumente al contorno quei valori dati.* Quest'intento raggiungeremo molto agevolmente con un metodo che sostanzialmente è quello ormai classico di Picard [1], con l'ausilio del quale la determinazione della soluzione, di cui occorre provare l'esistenza, viene ricondotta alla risoluzione di un'equazione integrale di Fredholm, 2ª specie, a due variabili indipendenti.

Consideriamo infatti la ridotta ellittica

$$(E_1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{3y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

della (E), indichiamo con σ' la curva in cui la trasformazione che dà luogo alla (E_1) muta σ, e operiamo ulteriormente la sostituzione

$$z = y^{-\frac{1}{6}} u ,$$

con la quale la (E_1) diviene

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{5}{36}\frac{u}{y^2} = 0 .$$

Ciò posto, fissato nell'interno di σ' un punto qualsiasi $P_0(x_0, y_0)$ e indicata con r la distanza di un punto variabile $P(x, y)$ da P_0, consideriamo, nel campo S' interno a σ', la funzione armonica, ben determinata, $g(x_0, y_0 | x, y)$ assumente al contorno i valori $\lg 1/r$ (*funzione di Green*); in virtù del teorema di Green, potremo scrivere

$$2\pi\, u(x_0, y_0) = \int_{\sigma'} \left[u \frac{d}{dn}\left(\lg\frac{1}{r} - g\right) - \left(\lg\frac{1}{r} - g\right)\frac{du}{dn}\right] d\sigma' - \iint_{S'} \left(\lg\frac{1}{r} - g\right) \Delta_2 u \, dS'$$

[1] Cfr. la Mem. cit. nell'Introduzione.

dove $\boldsymbol{n}$ denota la direzione della normale a σ' rivolta verso l'interno. Ma, per la definizione stessa di g, sul contorno σ' è $\lg 1/r - g = 0$; dunque avremo più semplicemente

$$(2) \qquad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma'} f_1 \frac{d}{dn} \left(\lg \frac{1}{r} - g \right) d\sigma' - \frac{1}{2\pi} \int\int_{S'} \left(\lg \frac{1}{r} - g \right) \Delta_2 u \, dS',$$

avendo indicato brevemente con f_1 i valori $y^{\frac{1}{6}} f$ che u assume su σ'.

Osserviamo, ora, che il primo termine del 2^o membro della (2) è quello cui si ridurrebbe $u(x_0, y_0)$ se fosse $\Delta_2 u = 0$; esso esprime dunque il valore in P_0 della funzione armonica, ben determinata, assumente sul contorno σ' gli stessi valori f_1 che vi assume u; pertanto, indicata con $A(x, y)$ questa funzione e sostituito a $\Delta_2 u$ il suo valore

$$\Delta_2 u = -\frac{5}{36} \frac{u}{y^2}$$

tratto dalla (1), la (2) potrà scriversi finalmente

$$(3) \qquad u(x_0, y_0) - \frac{5}{72\pi} \int\int_{S'} \frac{1}{y^2} G(x_0, y_0 | x, y) \, u(x, y) \, dx \, dy = A(x_0, y_0)$$

dove si è posto per brevità

$$(4) \qquad G(x_0, y_0 | x, y) = \lg 1/r - g(x_0, y_0 | x, y).$$

La (3) è un'equazione integrale di Fredholm, 2ª specie, a due variabili indipendenti, in cui l'incognita è la funzione u di cui occorre provare l'esistenza.

Essendosi supposto che il contorno σ non avesse alcun punto in comune con l'asse x, neanche σ' ne avrà, epperò il fattore $1/y^2$, che compare nel nucleo della (3), sarà sempre finito; ne segue che il nucleo in discorso non ha altre singolarità se non quelle proprie alla funzione G, le quali, come ha osservato E. E. Levi [1], non infirmano l'applicabilità all'equazione della teoria ordinaria di Fredholm, e pertanto l'equazione sarà certamente risolubile tutte le volte che $5/72\pi$ non sia un *parametro* del nucleo.

Indaghiamo se la quantità $5/72\pi$ possa eventualmente essere un parametro del nucleo della (3): Ove ciò avvenisse, la corrispondente equazione omogenea, cioè quella ottenuta facendo $A = 0$ nella (3), avrebbe delle soluzioni non identicamente nulle; ma il caso di $A = 0$ corrisponde a quello in cui i valori deposti su σ siano tutti nulli; dunque esisterebbero delle soluzioni non identicamente nulle della (E) annullantesi in ogni punto di σ, il che è in contradizione col teorema di unicità.

Si conclude che $5/72\pi$ non può essere un parametro, epperò la soluzione u esiste, ed esiste quindi anche z.

[1] E. E. Levi, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali* [Mem. Soc. Ital. d. Scienze (detta dei XL), (3), 16, (1909)], § 1, nota 3ª.

Si osservi che la condizione che i valori f dati sul contorno costituiscano una funzione continua, è sufficiente ma non necessaria. Infatti, se detti valori costituissero una funzione soltanto *generalmente continua*, cioè dotata di un numero finito di punti di discontinuità, attraversando i quali f passi bruscamente da un certo valore finito ad un altro valore del pari finito, la funzione A esisterebbe ugualmente e, nell'interno del campo, non cèsserebbe di essere continua [1]. Quest'osservazione sarà utile nel seguito.

Invece è una condizione imprescindibile quella che il contorno σ non abbia alcun punto comune con l'asse x. Invero, se questa condizione non si verifica, y si annullerà in qualche punto del campo S' e, in conseguenza, il nucleo della (3) presenterà dei poli di 2° ordine, di guisa che più non potremo applicare all'equazione l'ordinaria teoria di Fredholm; anzi non è nemmeno evidente *a priori* che l'equazione stessa resti valida in queste condizioni. Ora a noi nel seguito ci occorrerà proprio di dover considerare dei contorni costituiti in parte da un segmento dell'asse x, ed è pertanto indispensabile estendere a questi il precedente teorema esistenziale. A prima giunta sembrerebbe che la cosa potesse facilmente ottenersi con un passaggio al limite; non si tarda però molto a riconoscere che la legittimazione rigorosa di tale passaggio presenta delle serie difficoltà. Noi perciò seguiremo una via diversa, e all'uopo, avvalendoci del metodo di Green, cominceremo col porre sotto una forma più semplice le soluzioni la cui esistenza è stata dimostrata nel presente paragrafo.

§ 2. — Per applicare il *metodo di Green* [2] all'equazione a derivate parziali (E), o, meglio, alla sua ridotta ellittica (E_1), occorre anzitutto determinare le *soluzioni fondamentali* dell'aggiunta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{3y}\right)=0 \tag{5}$$

di questa, cioè quelle certe soluzioni particolari di quest'equazione dotate di una singolarità logaritmica in un punto dato $P_0(x_0, y_0)$.

All'uopo osserviamo preliminarmente che la (5), ponendo $u = y^{\frac{1}{3}} v$, si riconduce subito alla (E_1); potremo quindi limitarci a considerare quest'ultima equazione, chè, determinate che siano le soluzioni fondamentali di essa, basterà moltiplicarle per $y^{\frac{1}{3}}$ per avere quelle della (5).

Ciò premesso, consideriamo accanto alla ridotta ellittica (E_1), scritta in coordinate x, y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{3y}\frac{\partial z}{\partial y}=0\,, \tag{E_1}$$

la ridotta iperbolica, scritta in coordinate ξ, η:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}-\frac{1/6}{\xi-\eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0\,, \tag{E_2}$$

[1] Picard, *Traité d'Analyse* (2ª ed.), t. II, pag. 46 e seg.

[2] Cfr. p. es. Hadamard, op. cit., §§ 344 e 345, pag. 335 e seg.

ed osserviamo che la prima può pensarsi dedotta direttamente dalla seconda, ponendo

$$\xi = x - iy \quad , \quad \eta = x + iy \,. \tag{6}$$

Serviamoci ora del noto risultato (¹) che un'equazione iperbolica qualsiasi della forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y) = 0 \,,$$

ammette la soluzione fondamentale

$$z = Z(x_0, y_0 | x, y) \lg[(x - x_0)(y - y_0)] + \zeta(x_0, y_0 | x, y) \,, \tag{7}$$

dove $Z(x_0, y_0 | x, y)$ è la *funzione di Riemann* dell'equazione, vale a dire la soluzione perfettamente determinata, di cui si è già parlato nel § 2 del Cap. II, assumente sulle due caratteristiche $x = x_0$ ed $y = y_0$, uscenti dal punto P_0, rispettivamente i valori

$$e^{-\int_{y_0}^{y} a\,dy} \quad , \quad e^{-\int_{x_0}^{x} b\,dx} \,:$$

e ζ è una qualsiasi soluzione particolare (regolare) dell'equazione non omogenea

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} + a\frac{\partial \zeta}{\partial x} + b\frac{\partial \zeta}{\partial y} + c\zeta + \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + aZ\right) + \frac{1}{y - y_0}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + bZ\right) = 0 \,. \tag{8}$$

Segue da ciò, essendosi già visto nel citato § che la funzione di Riemann della (E_2) è data dalla formula

$$Z(\xi_0, \eta_0 | \xi, \eta) = \frac{(\eta_0 - \xi_0)^{\frac{1}{3}}}{(\eta_0 - \xi)^{\frac{1}{6}} (\eta - \xi_0)^{\frac{1}{6}}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1 \middle| \sigma_1\right) , \quad \sigma_1 = \frac{(\xi_0 - \xi)(\eta - \eta_0)}{(\eta - \xi_0)(\eta_0 - \xi)} \tag{9}$$ (²),

che l'equazione (E_2) ammette la soluzione fondamentale

$$z = (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{1}{3}} (\eta_0 - \xi)^{-\frac{1}{6}} (\eta - \xi_0)^{-\frac{1}{6}} F_1(\sigma_1) \lg[(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)] + \zeta(\xi_0, \eta_0 | \xi, \eta), \tag{10}$$

dove, per abbreviare, si è posto

$$F_1(x) = F(1/6 \,, 1/6 \,, 1 | x) \,, \tag{11}$$

e ζ denota una qualsiasi soluzione regolare dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \, \partial \eta} - \frac{1/6}{\xi - \eta}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right) - \tag{12}$$

$$- \frac{(\eta_0 - \xi_0)^{\frac{1}{3}} (\eta + \eta_0 - \xi - \xi_0)}{(\eta_0 - \xi)^{\frac{1}{6}} (\eta - \xi_0)^{\frac{1}{6}}} \left[\frac{F_1(\sigma_1)}{6(\eta - \xi)} + \frac{(\eta_0 - \xi_0) F_1'(\sigma_1)}{(\eta_0 - \xi)(\eta - \xi_0)}\right] = 0 \,.$$

(¹) Hadamard, loc. cit., pag. 336.

(²) Infatti questa funzione non è altro se non la u data dalla form. (8) del § cit., in cui si siano scambiati fra loro ξ con ξ_0 ed η con η_0.

Risaliamo ora dalla (E_2) alla (E_1) mediante la sostituzione (6). Si trova così, con calcoli facili, che, dette rispettivamente r ed r_1 le distanze del punto variabile $P(x, y)$ dal punto fisso $P_0(x_0, y_0)$ e dal simmetrico di questo $P'_0(x_0, -y_0)$ rispetto all'asse x, la (E_1) ammette la soluzione fondamentale

$$z = 2\left(\frac{2y_0}{r_1}\right)^{\frac{1}{3}} F_1\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right) \lg r + \zeta_1(x_0, y_0 | x, y), \tag{13}$$

dove ζ_1 è una qualsiasi soluzione regolare dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y^2} + \frac{1}{3y}\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + 2^{\frac{4}{3}} y_0^{\frac{1}{3}} \frac{y - y_0}{r_1^{\frac{7}{3}}} \left[\frac{1}{12\,y} F_1\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right) - \frac{2y_0}{r_1^2} F'_1\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)\right] = 0. \tag{14}$$

Si conclude pertanto finalmente, moltiplicando la (13) per $y^{\frac{1}{3}}$ e sopprimendo invece il fattor costante $2y_0^{\frac{1}{3}}$, che *l'equazione* (5), *aggiunta della* (E_1), *ammette la soluzione fondamentale*

$$u^*(x_0, y_0 | x, y) = \left(\frac{2y}{r_1}\right)^{\frac{1}{3}} F_1\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right) \log r + \zeta^*(x_0, y_0 | x, y), \tag{15}$$

dove si è posto

$$\zeta^*(x_0, y_0 | x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{1}{3}} \zeta_1(x_0, y_0 | x, y). \tag{16}$$

§ 3. — Determinata la soluzione fondamentale (15), la *formula di Green* per l'equazione (E_1) si ottiene senza difficoltà in modo perfettamente simile a quello che si segue per le funzioni armoniche:

Si parte dall'identità

$$0 = u\,\mathcal{E}_1(z) - z\,\mathcal{G}_1(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{3y}uz\right), \tag{17}$$

dove $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{G}_1$ simboleggiano rispettivamente le operazioni rappresentate dai primi membri dell'equazione (E_1) e della sua aggiunta (5), e z ed u sono due qualsiasi soluzioni delle medesime equazioni. Successivamente si assume $u = u^*$, mentre z si lascia indeterminata, sotto la sola condizione che sia regolare. Quindi, supposto data una curva chiusa qualsiasi σ, comprendente nel suo interno il punto $P_0(x_0, y_0)$ e *giacente tutta da una stessa banda dell'asse* x, *senza avere alcun punto in comune con questa retta*, si integra due volte la (17) estendendo l'integrale doppio all'area racchiusa da σ, da cui però sia stato escluso l'intorno del punto P_0, singolare per la u^*, mediante un cerchietto $\boldsymbol{s}$. Finalmente si applica all'integrale ottenuto il primo lemma di Gauss (il che è lecito) e si ottiene così

$$\left[\int_\sigma + \int_s\right] \left\{ \left(u^*\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)\frac{dx}{d\boldsymbol{n}} + \left(u^*\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{1}{3y}u^* z\right)\frac{dy}{d\boldsymbol{n}} \right\} d(\sigma) = 0, \tag{18}$$

dove $d(\sigma)$ denota l'elemento d'arco di σ o di $\boldsymbol{s}$, ed $\boldsymbol{n}$ la direzione della normale, *interna* se siamo su σ ed *esterna* se siamo su $\boldsymbol{s}$.

Ottenuta la (18) si passa al limite facendo tendere a zero il raggio di s. Senza che ci indugiamo nei particolari, è facile vedere, nello stesso modo che nel caso delle funzioni armoniche, che, tenuto conto che il coefficiente di $\lg r$ nella (15) si riduce ad 1 allorchè P coincide con P_0, il limite dell'integrale esteso ad s è

$$-2\pi\, z(x_0, y_0)\,;$$

sussiste dunque la formula fondamentale (*di Green*)

$$z(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left(u^* \frac{dz}{dn} - z\frac{du^*}{dn} + \frac{1}{3y}u^* z \frac{dy}{dn}\right) d\sigma \tag{19}$$

che fornisce il valore di z in un punto qualsiasi interno a σ mediante i valori di z e dz/dn al contorno.

Avvalendoci del teorema di esistenza dimostrato nel § 1, possiamo ora semplificare ulteriormente questa formula facendo sparire da essa la derivata normale di z.

Infatti, in virtù del teorema ora ricordato, esisterà una (ed una sola) soluzione regolare della (5) assumente sul contorno i valori $-u^*$: chiamiamola $\bar{u}$. Ponendo allora

$$U(x_0, y_0 \,|\, x, y) = u^* + \bar{u}\,, \tag{20}$$

potremo sostituire, nei calcoli che precedono, U al posto di u^*; regge quindi la formula

$$z(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left(U \frac{dz}{dn} - z\frac{dU}{dn} + \frac{1}{3y}Uz \frac{dy}{dn}\right) d\sigma\,.$$

Ma, per la sua stessa definizione, U è nulla su tutta la curva σ; dunque avremo in definitiva

$$z(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{dU}{dn} z\, d\sigma\,; \tag{21}$$

formula semplicissima che, una volta che si sia determinata la funzione U, la quale non dipende se non dalla forma del contorno, permette di calcolare con la massima rapidità i valori di z entro σ, dati che siano quelli al contorno.

Naturalmente, per applicare la (21) all'equazione (E), bisogna passare pel tramite della ridotta ellittica (E_1). Volendo evitare ciò, occorre trasformare la funzione U e l'integrale curvilineo, tenendo conto delle (25) del Cap. I e badando che la derivata normale non si muta in una derivata normale. A noi non occorre però entrare nei particolari di questi calcoli e ci basta osservare che, a conti fatti, si arriva ad una formula del tipo

$$z(x_0, y_0) = \int_{\sigma'} V(x_0, y_0 \,|\, x, y)\, z\, d\sigma'\,, \tag{22}$$

dove σ' è la curva corrispondente a σ, e $V(x_0, y_0 | x, y)$ una certa funzione dipendente soltanto dalla forma di σ'.

§ 4. — Una conseguenza immediata ma importante della validità del teorema di unicità allorchè sono dati i valori di z su di una curva chiusa qualsiasi del semi-

piano ellittico (avente o no punti in comune con l'asse x), è l'impossibilità che una soluzione regolare qualsiasi dell'equazione (E) abbia un massimo od un minimo in un punto del semipiano in discorso; fatto questo, che può anche enunciarsi, e con linguaggio più preciso, nel seguente modo:

I valori che una soluzione regolare qualsiasi dell'equazione (E) *raggiunge nell'interno di una curva chiusa del semipiano ellittico, avente o no punti in comune con l'asse x, non superano (non sono inferiori) al massimo (al minimo) valore che essa raggiunge sulla curva* [1].

Questa proposizione, unitamente alla formula di Green, ci permette di estendere facilmente alle soluzioni regolari dell'equazione (E) il teorema di Harnack sulle funzioni armoniche [2]; dico cioè che,

Se una serie di soluzioni regolari dell'equazione (E) *converge uniformemente su di una curva chiusa σ del semipiano ellittico, avente o no punti comuni con l'asse x, essa convergerà uniformemente anche nell'interno di σ e rappresenterà ivi una soluzione della* (E).

Infatti, sia data la serie di soluzioni della (E)

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

e siano rispettivamente $Z_1, Z_2, \ldots$ le funzioni cui si riducono $z_1, z_2, \ldots$ sul contorno σ. Essendo la serie $\Sigma_h Z_h$ uniformemente convergente, dato ad arbitrio un numero positivo ε, potrà determinarsi un indice N tale che, per $n > N$, qualunque sia p e su tutto il contorno, si abbia

$$|Z_{n+1} + Z_{n+2} + \cdots + Z_{n+p}| < \varepsilon ;$$

ma $z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}$ è manifestamente una soluzione della (E), epperò, pel teorema precedente, il massimo di $|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}|$ entro σ sarà inferiore

[1] Questa proposizione è vera, non soltanto per la (E), ma anche per ogni altra equazione di 2° ordine per cui valga il precedente teorema di unicità, purchè tale che una costante qualsiasi la soddisfi, di guisa che dal teorema in parola possa dedursi che, se una sua soluzione è costantemente uguale a C su di una curva chiusa σ, essa deve essere sempre uguale a C anche in tutta l'area interna a σ.

Infatti, se, nelle ipotesi precedenti, una soluzione regolare $f(xy)$ dell'equazione che si considera è massima (o minima) in un punto $P(x_0 y_0)$, vale a dire se f assume in P un valore *maggiore* (*minore*) di *tutti* quelli assunti in un intorno convenientemente piccolo di P; segando la superficie $z = f(xy)$ col piano $z = f(x_0, y_0) - \varepsilon$ [col piano $z = f(x_0, y_0) + \varepsilon$], dove ε denota un numero positivo convenientemente piccolo, e proiettando l'intersezione sul piano xy, si otterrà una curva chiusa σ, comprendente P nel suo interno, in ogni punto della quale si ha costantemente

$$z = f(x_0 y_0) \mp \varepsilon .$$

Seguirebbe da ciò, che anche in P dovrebbe essere

$$z = f(x_0 y_0) \mp \varepsilon ,$$

invece di $z = f(x_0 y_0)$ come si era supposto; e se ne conclude che non è possibile che f abbia un massimo o un minimo nel punto P.

[2] Harnack, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales* (Lipsia, Teubner, 1887), pag. 67.

al massimo di $|Z_{n+1} + Z_{n+2} + \cdots + Z_{n+p}|$ sul contorno; dunque, a più forte ragione, sarà

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon$$

in tutta l'area S interna a σ, il che mostra che la serie data converge uniformemente in questo campo.

Facciamo ora vedere che la somma della serie rappresenta essa pure una soluzione della (E).

All'uopo, immaginiamo tracciata entro S una curva chiusa qualsiasi σ', comprendente nel suo interno il punto $P(x_0, y_0)$ nel cui intorno vogliamo provare che la serie soddisfa alla (E), e non avente alcun punto in comune con l'asse x.

Detti rispettivamente $Z'_1, Z'_2, \ldots$ i valori di $z_1, z_2, \ldots$ sopra σ', i valori $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots$ di queste funzioni in P_0 potranno rappresentarsi, in virtù della (22), con le formule

$$z_1^{(0)} = \int_{\sigma'} V Z'_1 \, d\sigma' \ , \ z_2^{(0)} = \int_{\sigma'} V Z'_2 \, d\sigma' \ , \ldots , \ z_n^{(0)} = \int_{\sigma'} V Z'_n \, d\sigma' \ , \ldots \tag{23}$$

dove V denota una funzione dipendente solo dalla forma di σ'.

Ciò posto, indichiamo con Z' la somma della serie uniformemente convergente $\Sigma_h Z'_h$, e con R'_n il resto n-esimo di questa serie:

$$R'_n = \sum_{h=n+1}^{\infty} Z'_h ,$$

supponendo che n sia già tanto grande da aversi, su tutta σ',

$$|R'_n| < \frac{\varepsilon}{M l}$$

dove M è un valor maggiorante di $|V|$ sopra σ', ed l è la lunghezza di questa curva. Segue da ciò che, se consideriamo l'integrale

$$z^{(0)} = \int_{\sigma'} V Z' \, d\sigma' ,$$

potremo porre

$$\left| z^{(0)} - \sum_{h=1}^{n} \int_{\sigma'} V Z'_h \, d\sigma' \right| = \left| \int_{\sigma'} V R'_n \, d\omega' \right| < \varepsilon ;$$

cioè, tenendo conto delle (23),

$$|z^{(0)} - (z_1^{(0)} + z_2^{(0)} + \cdots + z_n^{(0)})| < \varepsilon .$$

Ma ciò mostra che la somma della serie data, nel punto P_0, è l'integrale $z^{(0)}$, cioè coincide col valore in P_0 della soluzione della (E) assumente i valori Z' sopra σ'; dunque è vero che questa somma rappresenta una soluzione dell'equazione (E).

§ 5. — Passiamo ora all'estensione del teorema esistenziale dimostrato nel § 1, al caso in cui una parte del contorno sia costituita da un segmento dell'asse x.

Precisamente, in un primo tempo, noi dimostreremo l'esistenza della soluzione nel caso di uno speciale contorno di questa specie e poscia, avvalendoci di un metodo *alternato*, generalizzeremo il risultato precedentemente ottenuto.

Lo speciale contorno, cui quì si allude, è quello costituito dal segmento A(0,0) B(1,0) dell'asse x e dalla curva normale c, di equazione $\varrho = 1/2$, che passa pei punti A e B. Tale contorno, per brevità di discorso, lo designeremo costantemente col nome di *contorno ellittico normale*; la proposizione che vogliamo dimostrare per prima potrà allora enunciarsi nel modo seguente:

Nell'interno di un dato contorno ellittico normale ABc, *esiste una* (*ed una sola*) *soluzione regolare dell'equazione* (E), *assumente valori arbitrariamente prefissati sul contorno*; *purchè le funzioni costituite da questi valori siano finite e continue, e, per di più, quella definita sulla curva normale* c, *sia dotata di derivata prima* (*rispetto all'arco*) *finita e continua nell'intorno dei punti* A *e* B.

Per dimostrare il teorema, cominciamo con l'osservare che non è restrittivo supporre che i valori deposti nei due punti A e B siano entrambi nulli. E invero, se questa condizione non è verificata e si indicano rispettivamente con a e b i valori deposti in A e B, basterà considerare la funzione

$$z_0 = a + (b - a)\,x\,, \tag{24}$$

che evidentemente soddisfa alla (E), e sostituire $z - z_0$ in luogo di z, per ottenere subito che, sia in A, sia in B, si trovi prefissato per z il valore *zero*.

Segue da quest'osservazione che, se si indicano rispettivamente con $\tau(x)$ ed $f(x)$ le funzioni costituite dai valori assegnati sul segmento AB e sulla curva normale c, potrà supporsi, in primo luogo, che si abbia

$$\tau(0) = \tau(1) = 0\,; \tag{25}$$

e, in secondo luogo, che la funzione $f(x)$ possa rappresentarsi con una formula del tipo

$$f(x) = y\,\bar{f}(x)\,, \tag{26}$$

dove $\bar{f}(x)$ denota una funzione sempre finita e continua.

Infatti, annullandosi $f(x)$ sia per $x = 0$, sia per $x = 1$, avremo, tanto per $x \to 0$, quanto per $x \to 1$:

$$\lim \frac{f(x)}{y} = \lim \frac{df}{dy} = \lim \frac{df}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dy} = \pm \lim \frac{df}{d\sigma}\,,$$

dove dovrà prendersi il segno + o il segno — secondo che si tratti di limite per $x \to 0$ o per $x \to 1$ e secondo il modo come è stato fissato il verso positivo degli archi sopra c. Ma, per ipotesi, $\dfrac{df}{d\sigma}$ è finita nell'intorno di A e di B; dunque i limiti del rapporto $f(x)/y$ per $x \to 0$ ed $x \to 1$ sono entrambi finiti, e ne segue la (26).

§ 6. — La soluzione z, di cui è d'uopo dimostrare l'esistenza, deve ridursi rispettivamente a $\tau(x)$ sul segmento AB dell'asse x e ad $f(x)$ sulla curva normale σ. Cerchiamo di soddisfare separatamente a queste due condizioni, cominciando dalla prima; facciamo vedere cioè che *è sempre possibile costruire una soluzione regolare dell'equazione* (E) *riducentesi a* $\tau(x)$ *sul segmento* AB *dell'asse* x.

Infatti, essendo $\tau(x)$ una funzione finita e continua, definita fra 0 ed 1 e soddisfacente inoltre alle condizioni (25); essa, sempre che non abbia infiniti massimi e minimi, potrà rappresentarsi, *senza eccezioni di sorta*, mediante una serie di Fourier di *soli seni* del tipo

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} n\pi x\,, \tag{27}$$

dove i coefficienti sono dati dalle note formule

$$a_n = 2\int_0^1 \tau(\xi) \operatorname{sen} n\pi\xi\, d\xi\,. \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{28}$$

Ciò posto, con questi stessi coefficienti costruiamoci la serie

$$\frac{1}{\lambda(0)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} n\pi x\, \lambda(n^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{2}{3}} y)\,, \tag{29}$$

del tipo della (17) del Cap. III, dove λ denota la stessa funzione indicata con questa lettera nel Cap. III.

Essendo la serie (27) convergente, i coefficienti a_n costituiranno un insieme limitato, epperò la serie (29) convergerà assolutamente ed uniformemente in ogni campo compreso nel semipiano ellittico; pertanto, mediante essa, resta definita in questo semipiano una certa funzione $\zeta(x, y)$, finita e continua al pari delle sue derivate prime, la quale, pel teorema di Harnack, soddisferà manifestamente all'equazione (E), al pari dei singoli suoi termini. Inoltre, per $y = 0$, si ha evidentemente

$$\zeta(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} n\pi x = \tau(x)\,;$$

ecco dunque trovata la richiesta soluzione regolare della nostra equazione riducentesi a $\tau(x)$ sul segmento AB dell'asse x.

Notiamo che, a differenza di quel che succede nei punti del semipiano ellittico a distanza finita dall'asse x, su quest'asse, in generale, le derivate parziali della funzione $\zeta(x, y)$ possono divenire infinite.

Per $\partial\zeta/\partial x$ la cosa è evidente perchè essa, per $y = 0$, coincide con la derivata $\tau'(x)$ della funzione $\tau(x)$ (supposto che esista) sulla quale non abbiamo fatta alcuna ipotesi.

Per costatare la cosa nel caso di $\partial\zeta/\partial y$, occorrerà invece che deriviamo la (29) termine a termine rispetto ad y [1] e passiamo indi al limite per $y \to 0$; avremo così

$$(30) \qquad \bar{\nu}(x) = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=0} = \pi^{\frac{2}{3}} \frac{\lambda'(0)}{\lambda(0)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2}{3}} a_n \operatorname{sen} n\pi x .$$

Osserviamo ora che la (28), con una integrazione per parti, può scriversi

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \tau'(\xi) \cos n\pi\xi \, d\xi$$

e sostituiamo questo valore nella (30); avremo così

$$\bar{\nu}(x) = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{3}}} \frac{\lambda'(0)}{\lambda(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \operatorname{sen} n\pi x \int_0^1 \tau'(\xi) \cos n\pi\xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi^{\frac{1}{3}}} \frac{\lambda'(0)}{\lambda(0)} \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi x \cos n\pi\xi}{n^{\frac{1}{3}}} \right] \tau'(\xi) \, d\xi ,$$

cioè

$$\bar{\nu}(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{3}}} \frac{\lambda'(0)}{\lambda(0)} \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi(x+\xi)}{n^{\frac{1}{3}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi(x-\xi)}{n^{\frac{1}{3}}} \right] \tau'(\xi) \, d\xi ,$$

da cui, ponendo

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n x}{n^{\frac{1}{3}}} ,$$

si trae finalmente

$$(31) \qquad \bar{\nu}(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{3}}} \frac{\lambda'(0)}{\lambda(0)} \int_0^1 \left\{ \theta[\pi(x+\xi)] + \theta[\pi(x-\xi)] \right\} \tau'(\xi) \, d\xi .$$

Per discutere la funzione $\bar{\nu}(x)$ occorrerà discutere anzitutto la $\theta(x)$ o meglio, più generalmente, la funzione

$$\theta(x, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^{\alpha}} , \quad (0 < \alpha < 1).$$

All'uopo partiamo dalla formula ben nota

$$\int_0^{\infty} y^{\alpha-1} \operatorname{sen} ny \, dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^{\alpha}} \operatorname{sen} \frac{\alpha\pi}{2} ,$$

e osserviamo che essa può manifestamente scriversi sotto la forma

$$\int_0^{\pi} y^{\alpha-1} \operatorname{sen} ny \, dy + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{(2r-1)\pi}^{(2r+1)\pi} y^{\alpha-1} \operatorname{sen} ny \, dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^{\alpha}} \operatorname{sen} \frac{\alpha\pi}{2} ,$$

[1] Quest'operazione è lecita perchè la funzione $\lambda'(x)$, per $x \to +\infty$, diviene, al pari di $\lambda(x)$, infinitesima d'ordine superiore ad ogni numero assegnabile; e da ciò segue immediatamente che la serie delle derivate converge assolutamente ed uniformemente.

od anche, trasformando opportunamente l'integrale sotto il sommatorio,

$$(32)\qquad \int_0^\pi y^{\alpha-1} \operatorname{sen} ny\, dy + \\ + \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^\pi \Big[(y+2r\pi)^{\alpha-1} - (-y+2r\pi)^{\alpha-1} \Big] \operatorname{sen} ny\, dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha} \operatorname{sen} \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Ciò posto,. osserviamo d'altra parte parte che

$$(y+2r\pi)^{\alpha-1} - (-y+2r\pi)^{\alpha-1} = (\alpha-1) \int_{-y}^{+y} (y+2r\pi)^{\alpha-2}\, dy\, ;$$

avremo quindi, tenuto conto che y varia fra 0 e π,

$$|(y+2r\pi)^{\alpha-1} - (-y+2r\pi)^{\alpha-1}| \leq (\alpha-1)\, 2y\, [(2r-1)\pi]^{\alpha-2} \leq \\ \leq 2(\alpha-1)\, \pi^{\alpha-1} (2r-1)^{\alpha-2}\, ;$$

ma la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} (2r-1)^{\alpha-2}$$

è convergente essendo $\alpha - 2 < -1$; dunque la serie (*armonica*)

$$(32')\qquad \sum_{r=1}^{\infty} [(y+2r\pi)^{\alpha-1} - (-y+2r\pi)^{\alpha-1}]$$

è assolutamente ed uniformemente convergente, epperò la (32) può anche scriversi

$$\int_0^\pi \Big\{ y^{\alpha-1} + \sum_{r=1}^{\infty} \Big[(y+2r\pi)^{\alpha-1} - (-y+2r\pi)^{\alpha-1} \Big] \Big\} \operatorname{sen} ny\, dy = \\ = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha} \operatorname{sen} \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

dal che, per la teoria della serie di Fourier, segue senz'altro che

$$(32'')\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^\alpha} = \frac{\pi}{2\,\Gamma(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha\pi/2)} \times \\ \times \Big\{ x^{\alpha-1} + \sum_{r=1}^{\infty} \Big[(x+2r\pi)^{\alpha-1} - (-x+2r\pi)^{\alpha-1} \Big\}, \quad (0 < x \leq \pi).$$

La formula trovata, tenuto conto che la serie (32′) converge uniformemente in tutto l'intervallo $(0, \pi)$ e quindi definisce in questo una funzione finita e continua senza eccezioni; mostra che la funzione $\theta(x, \alpha)$ non ha altre singolarità tranne quelle proprie al termine $x^{\alpha-1}$ che figura nella (32″), e cioè un infinito di ordine $1-\alpha$ per $x = 0$. In particolare, per $\alpha = 1/3$, si ha che la funzione $\theta(x)$ non ha altre singolarità che un infinito di ordine $2/3$ nel punto O e quindi, considerata la forma della (31), si conclude che se $\tau'(x)$ è finita o anche ha degli infiniti, ma di ordine minore di $1/3$, la funzione $\bar{\nu}(x)$ è sempre finita; nel caso contrario invece $\bar{\nu}(x)$ avrà generalmente dei punti d'infinito, il cui ordine però non può evidentemente superare i $2/3$.

§ 7. — Essendosi visto, nel precedente paragrafo, come sia sempre possibile trovare una soluzione regolare ζ della (E) assumente valori $\tau(x)$ arbitrariamente prefissati (sotto le condizioni indicate) sul segmento AB dell'asse x, è chiaro che il teorema enunciato nel § 5 resterà completamente dimostrato se ora riusciremo a far vedere che parimenti *è sempre possibile costruire una soluzione regolare* ζ^* *dell'equazione* (E), *annullantesi sull'asse* x, *e assumente valori* $f(x)$ *arbitrariamente prefissati sulla curva normale* c.

All'uopo cominciamo col porre

$$X = 1 - 2x \quad , \quad f(x) = y\, f^*(X)\,, \tag{33}$$

cioè chiamiamo f^* la funzione $\bar{f}$ che figura nella (26) allorchè la riguardiamo dipendente da X invece che da x; e poscia, supposto che siano verificate le relative condizioni, sviluppiamo la funzione finita e continua $f^*(X)$, che è definita fra -1 e $+1$, in serie di funzioni sferiche generalizzate $C_n^{\frac{5}{6}}$; avremo così

$$f^*(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, C_n^{\frac{5}{6}}(X)\,, \quad (-1 \leq X \leq +1)\,, \tag{34}$$

dove, in virtù della (36) del Cap. III, i coefficienti sono dati dalle formule

$$b_n = 2^{\frac{2}{3}}\, \frac{\Gamma^2(5/6)}{\pi}\, \frac{\Gamma(n+5/6)\cdot n!}{\Gamma(n+5/3)} \int_{-1}^{+1} f^*(\xi)\, C_n^{\frac{5}{6}}(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{1}{3}}\, d\xi\,, \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{35}$$

Ciò posto, analogamente a quanto si è fatto nel paragrafo precedente, con questi stessi coefficienti e le soluzioni $z_2^{(n)}$ dell'equazione (E) [Capitolo III, formula (30)], costruiamoci la serie

$$\zeta^*(x, y) = y \sum_{n=0}^{\infty} b_n (2\varrho)^n\, C_n^{\frac{5}{6}}\left(\frac{1-2x}{2\varrho}\right), \quad \left(\varrho = +\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}y^3}\right), \tag{36}$$

che si annulla sull'asse x; mentre, sulla curva c, si riduce a

$$y \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, C_n^{\frac{5}{6}}(X)\,,$$

cioè ad $f(x)$.

La serie ζ^*, evidentemente, converge uniformemente sull'asse x sul quale tutti i suoi termini si annullano; dico inoltre che essa è uniformemente convergente anche su tutte le curve normali $\varrho = \text{cost}$ contenute nel contorno ellittico normale.

Infatti, se $\varrho = r/2$ $(r < 1)$ è l'equazione di una curva siffatta c', la serie (36) su di questa si presenta sotto la forma

$$y \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, r^n\, C_n^{\frac{5}{6}}\left(\frac{1-2x}{r}\right), \tag{37}$$

epperò il valore assoluto del suo termine generale non supera

$$|b_n|\, r^n\, C_n^{\frac{5}{6}}(1)\,,$$

come si vede subito osservando che il rapporto $(1-2x)/r$ oscilla fra -1 e $+1$ e tenendo presente la (37) del Cap. III.

D'altra parte, essendo la serie (36) convergente su tutta la curva c, in partilare convergerà nel punto A, cioè sarà convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot C_n^{\frac{5}{6}}(1) ;$$

epperò esisterà certamente un numero M tale da aversi, qualunque sia n,

$$|b_n|\, C_n^{\frac{5}{6}}(1) < M .$$

Ne segue che i valori assoluti dei termini della (37) sono inferiori ai corrispondenti termini della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\, r^n ;$$

ma questa serie è convergente perchè $r<1$; dunque *la serie* (36) *converge assolutamente ed uniformemente sulla curva normale* c'.

Se ne conclude, in virtù del teorema d'Harnack, che la serie ζ^* converge uniformemente nell'interno dell'area compresa fra l'asse x e la curva c, e rappresenta ivi una soluzione dell'equazione (E) soddisfacente ai requisiti di cui in principio del paragrafo.

È interessante notare che questa soluzione ζ^* si presenta sotto una forma particolarmente semplice, oltre che sull'asse x e sulle curve normali $\varrho = \text{cost.}$, anche su di un altro sistema ∞^1 di curve, e precisamente sulle curve definite dalla equazione

$$\frac{1-2x}{2\varrho} = c \qquad (-1 \leq c \leq +1) , \tag{38}$$

che, elevata a quadrato, diviene

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - K^2 y^3 = 0 \quad . \quad \left(K^2 = \frac{4}{9}\,\frac{c^2}{1-c^2}\right) ;$$

il che mostra che si tratta di un *fascio di cubiche* dotate tutte di una cuspide nel punto $M(1/2\,,0)$ (che conta per 6 nel gruppo dei punti base) e di un contatto tripunto con la retta impropria nel punto improprio dell'asse y (che conta per 3 nel gruppo base).

Invero, se $(1-2x)/2\varrho = \alpha$ è l'equazione di una qualsiasi di siffatte cubiche, su di essa la serie (36) si riduce manifestamente a

$$y \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, C_n^{\frac{5}{6}}(\alpha)\, (2\varrho)^n ,$$

cioè ad una *serie di potenze di* ϱ.

§ 8. — Notiamo in secondo luogo come quì, diversamente da quel che succedeva per ζ, le derivate prime della soluzione ζ^* son finite, non solo nell'interno del contorno ellittico normale (il che si verifica agevolmente) *ma anche sull'asse delle* x. All'uopo basterà evidentemente che dimostriamo la cosa per $\partial\zeta^*/\partial y$ perchè, quanto a $\partial\zeta^*/\partial x$, essa sull'asse x è manifestamente sempre nulla, al pari di ζ^*.

Dalle (36) si ha

$$\frac{\partial\zeta^*}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (2\varrho)^n C_n^{\frac{5}{6}}\left(\frac{1-2x}{2\varrho}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=0}^{\infty} b_n (2\varrho)^n C_n^{\frac{5}{6}}\left(\frac{1-2x}{2\varrho}\right),$$

da cui, osservato che la derivata della serie si può fare termine a termine e che la serie che così si ottiene è convergente sull'asse x, per $y=0$ si trae

$$\bar{\nu}(x) = \left(\frac{\partial\zeta^*}{\partial y}\right)_{y=0} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (1-2x)^n C_n^{\frac{5}{6}}(+1), & (\text{per } x \leq 1/2) \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (2x-1)^n C_n^{\frac{5}{6}}(-1), & (\text{per } x \geq 1/2) \end{cases}$$

cioè si ha, in ogni caso,

$$\bar{\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(5/3)}\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(n+5/3)}{n!}(1-2x)^n.$$

Sostituiamo ora a b_n il suo valore tratto dalla (35); avremo così

$$\bar{\nu}(x) = 2^{\frac{2}{3}}\frac{\Gamma^2(5/6)}{\pi\Gamma(5/3)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+5/6)(1-2x)^n\int_{-1}^{+1} f^*(\xi)\, C_n^{\frac{5}{6}}(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{1}{3}}\,d\xi,$$

od anche

$$(39)\quad \bar{\nu}(x) = 2^{\frac{2}{3}}\frac{\Gamma^2(5/6)}{\pi\Gamma(5/3)}\int_{-1}^{+1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+5/6)(1-2x)^n C_n^{\frac{5}{6}}(\xi)\right] f^*(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{1}{3}}\,d\xi.$$

Per sommare la serie sotto integrale osserviamo che, se si moltiplicano ambo i membri della (28) del Cap. III per α^θ, dove θ è un numero qualsiasi, e poi si deriva rispetto ad α, si ha

$$(40)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+\theta)\,\alpha^n C_n^{\nu}(x) = [\theta - 2\alpha(\theta-\nu)\,x + (\theta-2\nu)\,\alpha^2]\,(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu-1},$$

relazione che, in particolare, per $\nu = \theta = 5/6$, fornisce

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+5/6)\,\alpha^n C_n^{\frac{5}{6}}(x) = 5/6\cdot(1-\alpha^2)\cdot(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{11}{6}};$$

ne segue che la (39) potrà scriversi

$$\bar{\nu}(x) = 5\,.\,2^{\frac{2}{3}}\frac{\Gamma^2(5/6)}{\pi\Gamma(2/3)}\,x(1-x)\int_{-1}^{+1}\frac{f^*(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{1}{3}}\,d\xi}{[1-2(1-2x)\,\xi+(1-2x)^2]^{\frac{11}{6}}},$$

da cui, praticando la sostituzione $\xi = 1 - 2\xi'$ e ricordando la (33) e l'equazione della curva normale $\boldsymbol{c}$, si ha finalmente

$$\overline{\overline{\nu}}(x) = \frac{5}{2\pi\gamma\sqrt{3}}\, x(1-x) \int_0^1 \frac{f(\xi')\,\partial\xi'}{[x^2 + (1-2x)\,\xi']^{\frac{11}{6}}}, \tag{41}$$

dove γ è la costante definita dalla (18) del Cap. II.

La formula ottenuta permette di constatare agevolmente che, come si è annunciato, la funzione $\overline{\overline{\nu}}(x)$ è sempre finita. Inoltre essa presenta un notevole interesse intrinseco, sia perchè esprime una semplice proprietà delle soluzioni della (E) annullantesi sull'asse x, sia perchè, come vedremo nel prossimo Capitolo, essa fornisce la soluzione di una notevole equazione integrale di Fredholm, 1ª specie.

Che la funzione $\overline{\overline{\nu}}(x)$ sia finita per ogni x compresa nell'intervallo $(0, 1)$, *estremi esclusi*, appare dalla semplice ispezione della (41), poichè in questa ipotesi il denominatore della funzione integranda non è mai nullo nell'intervallo di integrazione; non è però parimenti evidente che sia anche finito il limite di $\overline{\overline{\nu}}(x)$ per x tendente a 0 o ad 1, p. es. il limite per $x \to 0$. Per mostrare ciò, ricordando la (26), sostituiamo al posto di $f(\xi')$ la quantità ad essa uguale

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} [\xi'(1-\xi')]^{\frac{1}{3}}\, \overline{f}(\xi').$$

e quindi, supposto $x < 1/2$, poniamo

$$\xi' = \frac{x^2 t^2}{1-2x};$$

avremo così

$$\overline{\overline{\nu}}(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{5}{\pi\gamma\sqrt{3}} \frac{1-x}{(1-2x)^{\frac{5}{3}}} \int_0^{\frac{\sqrt{1-2x}}{x}} \overline{f}\left(\frac{x^2 t^2}{1-2x}\right) t^{\frac{5}{3}} (1+t^2)^{-\frac{11}{6}} (1-2x-x^2 t^2)^{\frac{1}{3}}\, dt,$$

da cui, passando al limite per $x \to 0$, si trae

$$\overline{\overline{\nu}}(+0) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{5}{\pi\gamma\sqrt{3}}\, \overline{f}(0) \int_0^{\infty} t^{\frac{5}{3}} (1+t^2)^{-\frac{11}{6}}\, dt;$$

cioè, calcolando l'integrale improprio per mezzo della sostituzione $t^2 = u/(1-u)$ che lo muta in un integrale euleriano, a riduzioni compiute risulta semplicemente

$$\overline{\overline{\nu}}(+0) = \overline{f}(0). \tag{42}$$

E similmente si trova

$$\overline{\overline{\nu}}(1-) = \overline{f}(1); \tag{43}$$

il che dimostra che anche il limite per $x \to 1$ è finito.

§ 9. — Prima di passare alla generalizzazione del teorema stabilito nei precedenti paragrafi, è opportuno rispondere ad una domanda che può essere sorta nella

mente di chi legge, indicando i motivi per cui, nella precedente dimostrazione, per costruire la soluzione ζ di cui si discorre nel § 6, non ci siamo avvalsi, analogamente a quello che poi si è fatto per ζ^*, delle soluzioni particolari $z_1^{(n)}$ della (E) [Cap. III, form. (30)]; con che si sarebbe evitato l'intervento di quelle soluzioni particolari scisse nel prodotto di una funzione della sola x per una della sola y, il cui studio ha richiesto una non brevissima digressione sull'integrazione dell'equazione differenziale $y'' - xy = 0$.

La principale ragione di ciò sta nel fatto che, come mostra la prima delle (31) del Cap. III, una serie di soluzioni $z_1^{(n)}$ si riduce sull'asse x ad una serie di potenze, e una funzione di cui, come di $\tau(x)$, si sappia solo che è finita e continua, chi lo sa se è sviluppabile in serie di potenze.

Ciò non toglie però che, avvalendosi del teorema di Weierstrass sulla rappresentazione approssimata delle funzioni continue mediante polinomî, non si possa dimostrare il teorema del § 5 facendo uso delle sole soluzioni particolari $z_1^{(n)}$ e $z_2^{(n)}$. Soltanto che, con questo metodo, si ottiene la soluzione sotto una forma più complicata e si approfondisce la questione meno bene anzichè col metodo da noi seguito. Indichiamo rapidamente come si conduca la dimostrazione in quest'altra maniera:

Si comincia col far vedere che, detto ε_h il termine generale di una qualsiasi serie convergente a termini positivi, sommando un certo numero finito di soluzioni $z_1^{(n)}$ e $z_2^{(n)}$ moltiplicate per opportuni coefficienti, è possibile costruire una soluzione z_h della (E) che, sia sull'asse x, sia sulla curva normale σ, assume valori che si discostano per meno di $\frac{1}{2}\varepsilon_h$ da quelli colà prefissati.

Ciò posto, si considera la serie

$$z = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots$$

e si osserva che essa converge uniformemente sul contorno, ammettendo come maggiorante la serie convergente $\Sigma_h \varepsilon_h$. Ne segue che la serie z converge uniformemente anche nell'interno del contorno ellittico normale e rappresenta una soluzione della (E), che, come si verifica subito, soddisfa alle assegnate condizioni al contorno.

Questo secondo metodo, come si vede, fornisce la soluzione sotto una forma molto più complicata del precedente. Presenta però su quello il vantaggio che, non dovendosi ricorrere a degli sviluppi in serie delle funzioni costituite dai valori deposti sul contorno, bensì alla rappresentazione approssimata di queste mediante polinomî, *basta supporre soltanto che le funzioni in discorso siano finite e continue.*

Pertanto, per la validità del teorema esistenziale dimostrato nei precedenti paragrafi, è sufficiente supporre verificata quest'ultima condizione.

§ 10. — Vediamo ora di generalizzare il teorema esistenziale del § 5, avvalendoci di un procedimento *alternato*.

Com'è noto [1], il *metodo alternato di Schwarz* per la risoluzione del problema di Dirichlet, cioè per la dimostrazione dell'esistenza di una funzione armonica assu-

[1] Ved. p. es. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II. pag. 81 e seg.

mente valori assegnati su di un contorno chiuso dato, conduce alla seguente proposizione finale:

Siano dati due contorni chiusi limitanti due aree aventi una parte in comune. Chiamiamo **a** *la parte del primo contorno esterna al secondo ed* α *la parte interna. Similmente* **b** *e* β *indicheranno rispettivamente le parti del secondo contorno esterna ed interna al primo. Supposto che si sappia risolvere il problema di Dirichlet pei due contorni* (**a**, α) *e* (**b**, β), *esso saprà risolversi anche pel contorno* (**a**, **b**).

La dimostrazione di questo teorema riposa esclusivamente sui tre principî seguenti:

1°) Il massimo (minimo) valore che una funzione armonica raggiunge nell'interno di un contorno chiuso, non supera (non è inferiore a) quello che essa raggiunge sul contorno.

2°) Il teorema di Harnack.

3°) Se una funzione armonica assume, su di un contorno chiuso σ valori sempre finiti ma tali che la funzione $f(\sigma)$ da essi costituita sia soltanto *generalmente* continua [1], il suo limite avvicinandosi ad un punto di discontinuità $\sigma = \sigma_0$ della funzione f, dalla parte interna a σ e con un cammino non tangente a questa curva, è una quantità compresa fra $f(\sigma_0 -)$ ed $f(\sigma_0 +)$.

Ora, come si è visto nei paragrafi precedenti, il primo ed il secondo di questi tre principî, nel semipiano ellittico, valgono immutati anche per le soluzioni della equazione (E): quindi, se riusciremo a far vedere che anche il terzo principio non cessa di esser valido per queste, potremo senz'altro applicare il teorema precedente anche nel nostro caso.

A tal uopo, riferendoci per semplicità alla ridotta ellittica (E_1), cominceremo col far vedere come una qualsiasi soluzione regolare di quest'equazione, nell'interno di σ, sia sempre compresa fra due certe funzioni poco diverse da due funzioni armoniche.

Infatti, consideriamo la trasformata della (E_1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{5}{36}\frac{u}{y^2} = 0 \tag{44}$$

che, come si è visto nel § 1, si ottiene da quella ponendo semplicemente $z = y^{-\frac{1}{6}} u$, e, accanto ad essa, consideriamo pure l'altra equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{5}{36}\frac{C}{y^2} = 0, \tag{45}$$

dove C è una costante qualsiasi; e siano rispettivamente $\overline{u}$ e $\overline{v}$ due soluzioni regolari qualsiasi di queste due equazioni, che assumano gli stessi valori sulla curva σ. Allora, dette x_0 e y_0 le coordinate di un punto qualsiasi P_0 dell'area S interna a σ,

[1] Cioè sia dotata di un numero finito di punti di discontinuità, attraversando i quali essa salti bruscamente da un certo valore finito ad un altro valore pure finito.

e detta $A(x,y)$ la funzione armonica assumente su σ gli stessi valori che vi assumono $\bar{u}$ e $\bar{v}$, in virtù della (3) potremo porre

$$(46)\qquad \begin{cases} \bar{u}(x_0, y_0) = A(x_0, y_0) + \dfrac{5}{72\pi}\displaystyle\iint_S \dfrac{1}{y^2}\, G(x_0, y_0 \mid x, y)\, \bar{u}(x, y)\, dx\, dy \\[2ex] \bar{v}(x_0, y_0) = A(x_0, y_0) + \dfrac{5}{72\pi}\displaystyle\iint_S \dfrac{1}{y^2}\, G(x_0, y_0 \mid x, y)\, C\, dx\, dy\,, \end{cases}$$

da cui, sottraendo membro a membro, si trae

$$(47)\qquad \bar{u}(x_0, y_0) = \bar{v}(x_0, y_0) - \frac{5}{72\pi}\iint_S \frac{1}{y^2}\, G(x_0, y_0 \mid x, y)\, [C - \bar{u}(x, y)]\, dx\, dy\,.$$

Ciò posto, dimostriamo che *la funzione* G *è sempre positiva nel campo* S. Infatti, ricordiamo che questa funzione è definita dalla formula

$$G(x_0, y_0 \mid x, y) = \lg 1/r - g(x_0, y_0 \mid x, y)\,, \qquad (r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\,)\,,$$

dove g è la funzione armonica assumente su σ i valori $\lg 1/r$; ciò che mostra che G è sempre armonica nel campo S, tranne nell'intorno del punto $P_0(x_0, y_0)$ dove diviene infinita *positivamente*. Potremo dunque certamente determinare un cerchietto Γ, di centro P_0 e tutto contenuto in S, tale che, dentro di esso e sul suo contorno, G sia sempre positiva. Resta da vedere quale può essere il segno di G nell'area S′ compresa fra Γ e σ. Ma, in quest'area, G è armonica, e, sul suo duplice contorno, in parte (su Γ) riceve valori positivi e in parte (su σ) valori nulli; dunque, anche in S′ G deve necessariamente essere sempre positiva.

Disponiamo ora dell'arbitrarietà della costante C che figura nella (45), supponendo una volta che essa coincida col limite inferiore l e un'altra volta col limite superiore L dei valori di $\bar{u}$ sopra σ, e diciamo rispettivamedte $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$ le funzioni $\bar{v}$ corrispondenti. Nel primo di questi due casi avremo evidentemente $C - \bar{u} \geq 0$ su tutta la curva σ, e quindi pure in tutta l'area S, mentre nel secondo avremo invece $C - \bar{u} \leq 0$. Ma s'è visto più sopra che G è positiva, dunque l'integrale doppio che figura nella (47) è certamente non negativo nel primo caso e non positivo nel secondo, di guisa che, in tutta l'area S, si avrà

$$(48)\qquad \bar{v}_1 \leq \bar{u} \leq \bar{v}_2\,.$$

Finalmente osserviamo che l'equazione (45), a differenza della (44), non differisce sostanzialmente dall'equazione di Laplace. Infatti, basta porre

$$(49)\qquad v = w + \frac{5}{36}\, C \lg y$$

per ottenere che la (45) si muti nell'equazione $\Delta_2 w = 0$.

Arriviamo così, tenendo conto della (49) e della relazione $z = y^{-\frac{1}{6}} u$ che lega le soluzioni delle equazioni (E_1) e (44), al seguente *teorema di confronto*:

Se si indicano con f i valori assunti da una qualsiasi soluzione regolare dell'equazione (E_1) *su di una curva chiusa σ, priva di punti comuni con l'asse x,*

e si denotano rispettivamente con l *ed* L *i limiti inferiore e superiore della funzione* $y^{\frac{1}{6}} f$ *sopra* σ; *in ogni punto interno a questa curva si ha*

$$y^{-\frac{1}{6}}\left(w_1 + \frac{5}{36}\, l \lg y\right) \leq z \leq y^{-\frac{1}{6}}\left(w_2 + \frac{5}{36}\, L \lg y\right), \tag{50}$$

dove w_1 *e* w_2 *sono le due funzioni armoniche, ben determinate, assumenti sul contorno* σ *rispettivamente i valori*

$$y^{\frac{1}{6}} f - \frac{5}{36}\, l \lg y \qquad \text{e} \qquad y^{\frac{1}{6}} f - \frac{5}{36}\, L \lg y .$$

Stabilito questo teorema, ne consegue subito la validità del terzo principio per le soluzioni regolari delle equazioni (E) ed (E_1).

Infatti, se σ_0 è un punto di discontinuità della funzione f, avvicinandosi ad esso dalla parte interna a σ e con un cammino non tangente a questa curva, i valori limiti delle funzioni armoniche w_1 e w_2 saranno dati rispettivamente da

$$\lim w_1 = y_0^{\frac{1}{6}} \left\{ f(\sigma_0 -) + \theta_1 [f(\sigma_0 +) - f(\sigma_0 -)] \right\} - \frac{5}{36}\, l \lg y_0$$

$$\lim w_2 = y_0^{\frac{1}{6}} \left\{ f(\sigma_0 -) + \theta_2 [f(\sigma_0 +) - f(\sigma_0 -)] \right\} - \frac{5}{36}\, L \lg y_0 ,$$

dove θ_1 e θ_2 denotano due numeri compresi fra 0 ed 1 (estremi esclusi), ed y_0 è il valore di y nel punto σ_0. Ne segue, per la (50), che il valor limite di z dovrà esser compreso fra

$$y_0^{-\frac{1}{6}} \left[y_0^{\frac{1}{6}} \left\{ f(\sigma_0 -) + \theta_1 [f(\sigma_0 +) - f(\sigma_0 -)] \right\} - \frac{5}{36}\, l \lg y_0 + \frac{5}{36}\, l \lg y_0 \right]$$

$$\text{e} \quad y_0^{-\frac{1}{6}} \left[y_0^{\frac{1}{6}} \left\{ f(\sigma_0 -) + \theta_2 [f(\sigma_0 +) - f(\sigma_0 -)] \right\} - \frac{5}{36}\, L \lg y_0 + \frac{5}{36}\, L \lg y_0 \right],$$

cioè dovrà aversi

$$f(\sigma_0 -) + \theta_1 [f(\sigma_0 +) - f(\sigma_0 -)] \leq \lim z \leq f(\sigma_0 -) + \theta_2 [f(\sigma_0 +) - f(\sigma_0 -)],$$

il che mostra che *il limite di* z *è compreso fra* $f(\sigma_0 -)$ *ed* $f(\sigma_0 +)$.

Con ciò resta dimostrata la validità del 3° principio per le soluzioni dell'equazione (E), supposto che la curva σ non abbia punti in comune con l'asse x. È però facile persuadersi che quest'ipotesi non è per nulla essenziale, ma bensì l'altra che *il punto di discontinuità che si considera non cada sull'asse* x. Infatti, sempre che quest'ultima ipotesi sia verificata, potremo ridurci al caso precedentemente considerato, asportando la parte dell'area S contigua all'asse x, mediante una curva che non tocchi il punto di discontinuità e non abbia punti comuni con l'asse x.

§ 11. — Dai ragionamenti del paragrafo precedente si conclude che il teorema di Schwarz è applicabile all'equazione (E), nel semipiano ellittico, e ciò ancorchè uno dei due contorni sia in parte costituito da un segmento dell'asse x, purchè i punti ad essi comuni siano fuori di questa retta. Fondandosi su ciò, è ora facile dimostrare il seguente teorema:

Esiste una (ed una sola) soluzione regolare dell'equazione (E) *assumente valori arbitrariamente fissati, con legge di continuità, sul contorno costituito da un*

segmento AB *dell'asse* x *e da una qualsiasi curva* σ *del semipiano ellittico passante pei punti* A *e* B, *purchè:*

1°) *la curva* σ *termini verso gli estremi con due archetti* AA′ *e* BB′, *di lunghezza piccola quanto si vuole ma finita, della curva normale* c *passante per* A *e* B, *e, nella restante sua parte, si svolga tutta all'esterno di detta curva;*

2°) *la funzione dell'arco costituita dai valori deposti su* σ *sia dotata di derivata prima finita e continua negli intorni dei due punti* A *e* B.

Infatti, indichiamo rispettivamente con c' e σ_1 le parti delle curve c e σ che restano dopo soppressi i due archetti AA′ e BB′ che esse hanno in comune, e, detta s una curva qualsiasi congiungente A′ con B′ senza mai uscire dall'interno di c nè incontrare mai l'asse x, consideriamo i due contorni (σ_1, s) e (AB, c) i quali racchiudono due aree S_1 ed S_2 aventi una parte in comune [quella interna al contorno (c', s)]. Per entrambi questi contorni sappiamo già risolvere il problema dei valori al contorno per l'equazione (E): invero il primo di essi non ha alcun punto in comune con l'asse x, ed il secondo rientra nella categoria di quelli considerati nel teorema del § 5. Ne segue, pel teorema di Schwarz, che il problema dei valori al contorno potrà risolversi anche pel contorno limitante le parti comuni e non comuni alle due aree S_1 ed S_2, e cioè pel contorno dato (AB, σ). c. d. d.

Indubbiamente le condizioni imposte alla curva σ dall'enunciato del teorema precedente sono sensibilmente restrittive e potranno notevolmente allargarsi.

Ad es. è facile vedere che alla prima di esse potrebbe sostituirsi l'altra che *la curva* σ *termini verso gli estremi con due archetti di due opportune curve normali, e, nella restante sua parte, si mantenga sempre a distanza finita dall'asse* x.

Infatti, limitandoci ad un semplice cenno del procedimento con cui si può pervenire a questo risultato, si comincia col dimostrare, sempre col metodo di Schwarz, il teorema di esistenza nel caso del contorno Γ limitante l'area complessiva di un numero qualsiasi di curve normali, poste l'una a fianco dell'altra e tali che due consecutive si compenetrino sempre in parte. Successivamente si costruisce su AB un contorno del tipo Γ che sia tutto contenuto in σ e, supposto che questa curva termini si con due archetti finiti di Γ, e cioè con due archetti di due opportune curve normali, completa la dimostrazione nella stessa maniera di poc'anzi, sostituendo Γ al posto di c.

Invece l'eliminazione della restrizione che σ debba ad ogni modo terminare con due archetti di curva normale, non è cosa agevole, non tardandosi a riconoscere che la legittimazione del passaggio al limite con cui a prima giunta parrebbe potersi raggiungere l'intento, presenta non lievi difficoltà.

D'altra parte, vedremo nel prossimo Capitolo che l'aver imposto a σ la condizione in discorso si presenta molto opportuno per la deduzione rigorosa della formula fondamentale su cui è imperniata la dimostrazione del teorema generale di esistenza: anzi (beninteso, senza che neanche allora si possa parlare di necessarietà della condizione) sarà facile persuadersi che, se anche fosse stato possibile eliminare quì tale condizione, si sarebbe dovuto ripristinarla in quell'occasione.

Per tutti questi motivi noi ci accontenteremo del teorema precedente, lasciando anche da parte, per amor di semplicità, la generalizzazione di cui abbiamo fatto cenno or ora.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 11°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXXI. (1892-1922). Fasc. 12°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIV, Fasc. 2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. Fasc. 3°.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XX. Fasc. 1°-3°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma*

CAPITOLO V.

Il teorema di esistenza generale: Sua riduzione ad un'equazione integrale.

§ 1. — Come abbiamo già avuto occasione di accennare, lo scopo principale che ci proponiamo nella presente Memoria è l'inversione del teorema di unicità dimostrato nel Cap. II, cioè la dimostrazione dell'esistenza della soluzione di cui quel teorema assicura l'unicità. Ora però che dovremo cominciare ad affrontare questa questione più direttamente di quel che non si sia fatto nei Capitoli precedenti (aventi prevalentemente carattere preparatorio), è opportuno impostare anzitutto il problema in termini netti e precisi. A tal uopo conveniamo, per brevità di discorso, di chiamare *contorno misto di prima specie* un contorno (aperto) come quello su cui erano assegnati i valori di z nel teorema di unicità, allorchè si suppone, per di più, che la curva σ soddisfi alle condizioni di cui nell'enunciato del § 11 del Capitolo precedente (¹). Conveniamo inoltre di chiamare campo *interno*, ad un siffatto contorno $CA\sigma B$, l'area compresa fra σ e le due caratteristiche CA e CB spiccate da C. Ciò premesso, il **teorema di esistenza** che ci proponiamo di dimostrare può essere enunciato nel modo seguente:

Esiste, nell'interno di un dato contorno misto di prima specie $CA\sigma B$, *una (ed una sola) soluzione regolare dell'equazione* (E) *assumente sul contorno valori arbitrariamente prefissati; purchè, dette rispettivamente* $f(\sigma)$ *e* $\varphi(s)$ *le funzioni dell'arco costituite dai valori deposti sulla curva* σ *e sul pezzo di caratteristica* AC:

1°) *le funzioni* f *e* φ *siano sempre finite e continue*;

2°) *la funzione* f *sia dotata di derivate dei primi due ordini finite e continue negli intorni dei punti* A *e* B;

3°) *la funzione* φ *sia dotata di derivate dei primi tre ordini finite e continue lungo tutta* AC;

4°) *i valori di* f *e* φ *in* A, *nonchè quelli delle loro derivate prime, coincidano.*

Sarà bene accennare anzitutto, in rapida sintesi, quale sia il concetto informatore della dimostrazione, che ci accingiamo ad intraprendere, del precedente teorema:

Indichiamo anche qui, analogamente a quanto si è fatto nei Capitoli precedenti, con $\tau(x)$ i valori assunti sull'asse x dalla soluzione z di cui occorre provare l'esistenza, e con $\nu(x)$ quelli della sua derivata rispetto ad y, ed osserviamo che se noi potessimo determinare la funzione $\tau(x)$, il teorema di esistenza sarebbe senz'altro

(¹) Invece se, come nel teorema di unicità, non si fa alcuna speciale ipotesi sulla curva σ, diremo che il contorno è *di seconda specie*, e lo diremo invece *di terza* se inoltre, nel semipiano iperbolico, il pezzo di caratteristica AC è sostituito da un pezzo di curva qualsiasi soddisfacente a certe condizioni; di questi ultimi contorni non avremo però mai ad occuparci nel presente lavoro. Finalmente un contorno misto si dirà *normale* se, essendo di 1ª specie, la curva σ si confonde addirittura con la curva normale c.

dimostrato, perchè potremmo allora calcolare effettivamente il valore di z in un punto qualsiasi P interno al contorno misto. Infatti, se P è nel semipiano ellittico, basterà all'uopo avvalersi dei risultati del precedente Capitolo; mentre invece, se P appartiene al semipiano iperbolico, basterà far ricorso alla formula (5) del Cap. II, dopo aver ricavata $\nu(x)$ dalla (19) del medesimo Capitolo, il che non presenta alcuna difficoltà, essendo questa, ove si consideri $\nu(x)$ come funzione incognita, un'equazione integrale di Volterra, prima specie, immediatamente invertibile con la formula di Abel.

Propriamente, per effettuare i calcoli ora accennati, quel che occorre è di aver fissata *una* funzione $\tau(x)$, ma non è menomamente richiesto che questa sia proprio *quella* che dev'essere in realtà. Soltanto che, se $\tau(x)$ è stata scelta a caso, le due funzioni z_1 e z_2, che nel modo anzidetto potranno costruirsi da una banda e dall'altra dell'asse x, non saranno legate da altra relazione oltre a quella di coincidere nei punti del segmento AB. Quindi, in particolare, i valori limiti delle loro derivate parziali rispetto ad y, per $y \to 0$, daranno luogo a due funzioni distinte $\nu_1(x)$ e $\nu_2(x)$. Anzi, tenendo presente una nota proprietà delle equazioni di 2° ordine, può dirsi che la condizione necessaria e sufficiente affinchè le due funzioni z_1 e z_2 siano, in certo senso, l'una la prosecuzione analitica dell'altra, cioè affinchè la funzione $\tau(x)$ sia quella che deve essere, è che risulti $\nu_1(x) = \nu_2(x)$.

Ciò premesso, osserviamo che le funzioni $\nu_1(x)$ e $\nu_2(x)$ risultano senz'altro univocamente determinate, appena sia fissata $\tau(x)$; cioè, col linguaggio della teoria delle funzioni di linee, che qui torna comodo adoperare, *le linee* $[\nu_1]$ *e* $[\nu_2]$ *sono certe funzioni della linea* $[\tau]$: $[\nu_1] = F_1([\tau])$, $[\nu_2] = F_2([\tau])$. Si vede con ciò, che *la condizione* $\nu_1(x) = \nu_2(x)$ *si traduce in una equazione funzionale in* $\tau(x)$:

$$F_1([\tau]) - F_2([\tau]) = 0 . \tag{1}$$

Tutto sta dunque nello stabilire quest'equazione e far vedere che essa è risolubile.

Scendendo a qualche maggior dettaglio, osserviamo primieramente che non è necessario arrivare proprio ad un'equazione della forma (1), pel che si richiede che le due relazioni funzionali fra $[\tau]$ e $[\nu_1]$ e fra $[\tau]$ e $[\nu_2]$ siano risolute rispetto a $[\nu_1]$ e $[\nu_2]$. Infatti, se le relazioni in discorso si presentano sotto forma implicita:

$$\Phi_1([\tau], [\nu_1]) = 0 \quad , \quad \Phi_2([\tau], [\nu_2]) = 0 ,$$

basterà porre in esse $[\nu_1] = [\nu_2] = [\nu]$ e considerare, in luogo dell'equazione (1), il sistema

$$\left\{ \begin{aligned} &\Phi_1([\tau], [\nu]) = 0 \\ &\Phi_2([\tau], [\nu]) = 0 . \end{aligned} \right. \tag{2}$$

In secondo luogo, osserviamo che una delle equazioni del sistema (2), e precisamente quella proveniente dalla considerazione della soluzione dal lato iperbolico, ce l'abbiamo di già, ed è precisamente la (19) del Cap. II:

$$\tau(x) = \varphi_1(x) + \gamma \int_0^x \frac{\nu(y)}{(x-y)^{\frac{1}{3}}}\, dy . \tag{3}$$

Quindi, per scrivere il sistema (2), basterà che determiniamo l'altra equazione, e cioè che, servendoci del fatto che la soluzione z assume certi valori conosciuti $f(\sigma)$ sulla curva σ, determiniamo una seconda relazione, del genere della (3), fra le funzioni $\tau(x)$ e $\nu(x)$.

§ 2. — La determinazione di questa seconda relazione fra $\tau(x)$ e $\nu(x)$ ha costituito una delle maggiori difficoltà che abbiamo dovuto superare nella presente ricerca. Si riconosce infatti agevolmente che il metodo di Green, che si presenterebbe come la via più naturale per ottenere la relazione in discorso, non serve a raggiungere lo scopo. E ciò principalmente a causa delle complicazioni che si presentano nella equazione (14) del Cap. IV, allorchè più non si esclude che la y possa annullarsi nel campo che si considera.

Il metodo che conduce al fine è invece un altro, non sostanzialmente dissimile da quello di Green, ma, che invece di fondarsi su delle soluzioni particolari dell'equazione aventi una singolarità logaritmica in un punto prefissato (le soluzioni fondamentali), si fonda su delle altre soluzioni particolari dotate di singolarità algebroidi.

Per ottenere queste soluzioni, torniamo a considerare la funzione ϱ che già ci si è presentata nel Cap. precedente ma che ora, introducendo in essa una costante x_0, scriveremo più generalmente così:

$$\varrho(x_0 | x, y) = +\sqrt{(x-x_0)^2 + \frac{4}{9}y^3}\,; \tag{4}$$

dico che *l'equazione* (E) *è soddisfatta ponendo*

$$z = [\varrho(x_0 | x, y)]^{-\frac{1}{3}}. \tag{5}$$

Infatti si ha

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x} = \frac{x - x_0}{\varrho}\ , \quad \frac{\partial\varrho}{\partial y} = \frac{2}{3}\frac{y^2}{\varrho}\,,$$

dalle quali si trae successivamente

$$\frac{\partial\varrho^{-\frac{1}{3}}}{\partial x} = -\frac{1}{3}\varrho^{-\frac{7}{3}}(x-x_0)\ , \quad \frac{\partial^2\varrho^{-\frac{1}{3}}}{\partial x^2} = -\frac{1}{3}\varrho^{-\frac{7}{3}} + \frac{7}{9}\varrho^{-\frac{13}{3}}(x-x_0)^2\,,$$

$$\frac{\partial\varrho^{-\frac{1}{3}}}{\partial y} = -\frac{2}{9}\varrho^{-\frac{7}{3}}y^2\ , \quad \frac{\partial^2\varrho^{-\frac{1}{3}}}{\partial y^2} = -\frac{4}{9}\varrho^{-\frac{7}{3}}y + \frac{7}{9}\cdot\frac{4}{9}\varrho^{-\frac{13}{3}}y^4\,,$$

e quindi si ha identicamente

$$y\frac{\partial^2\varrho^{-\frac{1}{3}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varrho^{-\frac{1}{3}}}{\partial y^2} = y\left\{-\frac{7}{9}\varrho^{-\frac{7}{3}} + \frac{7}{9}\varrho^{-\frac{13}{3}}\left[(x-x_0)^2 + \frac{4}{9}y^3\right]\right\} = 0\,, \quad \text{c.d.d.}$$

Le (5) sono le soluzioni cui si accennava più sopra; noi le chiameremo brevemente *soluzioni di Le Roux* perchè, a quanto ci consta, è stato quest'A. il primo

a considerare le equivalenti di esse nel caso dell'equazione di Eulero Poisson, in un suo interessante lavoro sulle equazioni iperboliche (¹). Ognuna di queste soluzioni è sempre reale, finita e continua in tutto il semipiano ellittico e sull'asse x, eccezion fatta soltanto del punto $(x_0, 0)$ nel quale essa diviene infinita d'ordine $1/3$. Invece, nel semipiano iperbolico essa diviene infinita d'ordine $1/6$ in tutti i punti delle due caratteristiche uscenti dal punto $(x_0, 0)$ e, mentre è reale *al di sopra* di queste due caratteristiche, è immaginaria *al di sotto* delle medesime.

Le curve normali, di cui a più riprese si è discorso in quanto precede, non sono evidentemente altro se non le *curve di livello costante* delle soluzioni di Le Roux. Non è però questa la sola proprietà di queste soluzioni in connessione a quelle curve; un'altra p. es. è quella rappresentata dal seguente teorema cui dovremo far presto ricorso:

Se **c** *è una curva normale incontrante l'asse* x *nei due punti* A *e* B, *ed* $M(x_1, 0)$ *e* $M'(x'_1, 0)$ *sono due punti di quest'asse separati armonicamente da* A *e* B, *il rapporto delle due soluzioni di Le Roux*

$$[\varrho(x_1 | x, y)]^{-\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad [\varrho(x'_1 | x, y)]^{-\frac{1}{3}}$$

è costante su tutta la curva **c**.

Infatti, supposto per semplicità che l'origine sia il punto medio di AB, sia

$$x^2 + \frac{4}{9} y^3 = c^2$$

l'equazione di **c**, e si consideri il semicerchio $\boldsymbol{k}$ (di raggio c) che ha per diametro AB e giace dalla parte delle y positive. Ciò posto, detto $P(x', y')$ un punto qualsiasi di **c**, si chiami $Q(x', y'')$ la sua proiezione sul semicerchio $\boldsymbol{k}$ fatta parallelamente all'asse y; avremo allora evidentemente

$$y' = \left[\frac{9}{4}(c^2 - x'^2)\right]^{\frac{1}{3}} \quad , \quad y'' = (c^2 - x'^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

dalle quali segue subito

$$\varrho(x_1 | x', y') = \sqrt{x_1^2 - 2x_1 x' + c^2} \quad , \quad \text{dist. } MQ = \sqrt{x_1^2 - 2x_1 x' + c^2} ,$$

cioè, *il valore della funzione* $\varrho(x_1 | x y)$ *in* P *è uguale alla distanza di* Q *da* M.

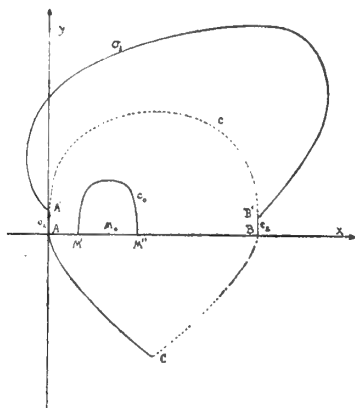
Ora, quello che si è detto per M può ripetersi per M′, quindi il rapporto dei valori delle due funzioni $\varrho(x_1 | x, y)$ e $\varrho(x'_1 | x, y)$ in P è uguale al rapporto delle distanze dei due punti M ed M′ da Q; ma quest'ultimo rapporto non muta al variare di Q sul semicerchio perchè il gruppo (A B M M′) è armonico; dunque anche il rapporto fra $\varrho(x_1 | x', y')$ e $\varrho(x'_1 | x', y')$ non muta al variare di P sulla curva normale, e ne segue il teorema.

(¹) J. Le Roux, *Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles*, ecc. [Annales scientif. de l'École Norm. Supérieure. (3), 12, (1895)]. § 45, pag. 295.

§ 3. — Sia $M_0(x_0, 0)$ un punto qualsiasi dell'asse x interno al contorno misto dato, ma, per ora, distinto dai due punti A e B e dal punto medio del segmento AB, cioè sia

$$0 < x_0 < 1/2 \quad \text{oppure} \quad 1/2 < x_0 < 1$$

e sia $M_1(x_1, 0)$ il coniugato armonico di M_0 rispetto ad A e B, cioè sia

$$x_1 = \frac{x_0}{2x_0 - 1}. \tag{6}$$

Quindi, con le due soluzioni di Le Roux

$$\varrho_0^{-\frac{1}{3}} = [\varrho(x_0 | x . y)]^{-\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad \varrho_1^{-\frac{1}{3}} = [\varrho(x_1 | x , y)]^{-\frac{1}{3}},$$

costruiamoci la funzione

$$w(x_0 | x , y) = [\varrho(x_0 | x , y)]^{-\frac{1}{3}} - [\,|2x_0 - 1|\, \varrho(x_1 | x , y)]^{-\frac{1}{3}} \tag{7}$$

che sarà anch'essa una soluzione della (E).

La funzione w si conserva sempre finita (assieme con tutte le sue derivate) in tutto il semipiano ellittico, asse x compreso, eccezion fatta soltanto dei due punti M_0 ed M_1, dei quali però il secondo è certamente esterno al contorno misto. Inoltre *la funzione w si annulla identicamente su tutta la curva c.* Infatti, per l'ultimo teorema, su c si ha

$$\left[\frac{\varrho(x_0 | x , y)}{\varrho(x_1 | x , y)}\right]^{-\frac{1}{3}} = \left[\frac{\varrho(x_0 | 0 , 0)}{\varrho(x_1 | 0 , 0)}\right]^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{x_0}{|x_1|}\right)^{-\frac{1}{3}} = |2x_0 - 1|^{-\frac{1}{3}}.$$

da cui segue subito $w = 0$.

Ciò posto, osserviamo che, in virtù di quanto è stato dimostrato nel Cap. precedente, esisterà una (ed una sola) soluzione W dell'equazione (E) assumente costantemente il valore *zero* sul segmento AB dell'asse x e sui due archetti AA′ e BB′ comuni alla curva c e alla curva σ, ed i valori $-w$ sulla rimanente parte, che diremo σ_1, di quest'ultima curva.

È facile persuadersi che le derivate prime della soluzione W risulteranno finite e continue anche sull'asse x. Infatti, essendo i valori deposti sull'asse x tutti nulli, per costruire W non è necessario far intervenire la soluzione ζ di cui nel § 7 del Cap. IV, che è quella che può introdurre delle singolarità nei valori sull'asse x della derivata parziale rispetto ad x. Inoltre, tanto la funzione W, quanto le sue derivate parziali di qualsivoglia ordine, si conserveranno finite *ancorchè si faccia tendere x_0 ad uno dei valori estremi* 0 *ed* 1. Infatti, nella definizione di W non entrano se non i valori di w su σ_1, cioè i valori di w *in un campo i cui punti son tutti a distanza finita dall'asse* x, e questi, come pure le loro derivate di qualsivoglia ordine, si conservano sempre finiti ancorchè x_0 tenda a 0 o ad 1. Quest'ultima proposizione, la cui importanza apparirà chiaramente nel seguito, non potrebbe invece stabilirsi, almeno in modo così semplice, se la curva σ non terminasse con quei due archetti AA' e BB' in comune con la curva c. Era a ciò che si alludeva in fine del Cap. precedente, allorchè si disse che, nel presente Cap., si sarebbe presentato molto opportuno l'aver imposto a σ la condizione in discorso.

Finalmente poniamo

$$u(x_0 | x, y) = w + \mathrm{W}\,; \tag{9}$$

siamo così venuti a costruire una soluzione della (E), regolare in tutto il semipiano ellittico, che si annulla su tutta la curva σ, mentre sull'asse delle x assume i valori

$$w(x_0 | x, 0) = \frac{1}{|x - x_0|^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(x_0 + x - 2x_0 x)^{\frac{1}{3}}}\,. \tag{10}$$

Premesso tutto ciò, sia z una soluzione regolare qualsiasi dell'equazione (E) e scriviamo l'identità, analoga alla (16) del Cap. precedente,

$$0 = u\mathcal{E}(z) - z\mathcal{E}(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left[y\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{11}$$

dove $\mathcal{E}$ simboleggia l'operazione rappresentata dal primo membro dell'equazione (E). Indi, detto S_1 il campo compreso fra σ ed AB dopo che sia stato tolto da esso il punto M_0 (singolare per la u) mediante una piccola curva normale $c_0 \equiv \mathrm{M'M''}$ di equazione $\varrho(x_0 | x, y) = \mathrm{R}$, integriamo due volte la (11) in S_1; avremo così l'altra identità

$$\iint_{\mathrm{S}_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[y\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} dx\,dy = 0\,,$$

da cui, applicando il primo lemma di Gauss, può trarsi

$$\left[\int_\sigma + \int_{c_0}\right]\left\{\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dn}\right)u - \left(y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dn}\right)z\right\} d(\sigma) + \\ + \left[\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{M'}} + \int_{\mathrm{M''}}^{\mathrm{B}}\right]\left(u\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} dx = 0\,,$$

dove $d(\sigma)$ denota l'elemento d'arco di σ o c_0, ed n la direzione della normale a σ

o c_0, rivolta verso l'interno di S_1. Ma u è nulla su tutta σ ed uguale a w su AB, e inoltre, essendo

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{2}{9} y^2 \left(\varrho_0^{-\frac{7}{3}} - |2x_0 - 1|^{-\frac{1}{3}} \varrho_1^{-\frac{7}{3}} \right),$$

su quest'ultimo segmento è pure $\partial w / \partial y = 0$; dunque avremo in definitiva

$$\int_\sigma \left(y \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dn} \right) z \, d\sigma - \tag{12}$$

$$- \int_{c_0} \left(y \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dn} \right) u \, dc_0 + \int_{c_0} \left(y \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dn} \right) z \, dc_0$$

$$- \left[\int_0^{x_0 - R} + \int_{x_0 + R}^1 \right] \left(w \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} dx = 0 .$$

§ 4. — Nella relazione trovata passiamo ora al limite per $R \to 0$ osservando:

1°) che il primo integrale è indipendente da R;

2°) che la funzione sotto il secondo integrale, al più, diventa infinita d'ordine minore di *uno* in qualche punto, epperò il suo integrale esteso ad una curva di lunghezza evanescente ha per limite lo zero;

3°) che, divenendo w, al più, infinita d'ordine 1/3 sull'asse x, esiste ed è finito il limite del 3° integrale.

Si perviene così alla relazione

$$\int_\sigma \left(y \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dn} \right) z \, d\sigma + \tag{13}$$

$$+ \int_0^1 [w(x_0 | x, 0) \, \nu(x) - W^*(x_0, x) \, \tau(x)] \, dx + \lim_{R \to 0} \int_{c_0} \left(y \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dn} \right) z \, dc_0 = 0,$$

avendo chiamato, come al solito, rispettivamente $\tau(x)$ e $\nu(x)$ i valori di z e $\partial z / \partial y$ sull'asse x, ed avendo posto brevemente

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=0} = W^*(x_0, x) . \tag{14}$$

Per calcolare il limite che figura nella (13), osserviamo anzitutto che, essendo $u = w + W$, l'integrale può spezzarsi in due parti di cui quella relativa a W ha certamente per limite 0, essendo la funzione sotto il segno sempre finita; quindi, detto per un momento L il limite da calcolare, potremo porre

$$L = \lim_{R \to 0} \int_{c_0} \left(y \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dn} \right) z \, dc_0$$

Ulteriormente osserviamo che la curva normale c_0 può rappresentarsi parametricamente con le equazioni

$$x = x_0 + R \cos \theta \quad , \quad y = \left(\frac{3}{2} R \operatorname{sen} \theta \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (0 \leq \theta \leq \pi) . \tag{15}$$

dalle quali si deduce agevolmente

$$(16)\quad dc_0 = \mathrm{R}\sqrt{\frac{\cos^2\theta + y\,\mathrm{sen}^2\theta}{y}}\,d\theta\,,\quad \frac{dx}{dn} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + y\,\mathrm{sen}^2\theta}}\,,\quad \frac{dy}{dn} = \frac{\sqrt{y}\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + y\,\mathrm{sen}^2\theta}}\,;$$

avremo dunque ancora

$$(17)\qquad \mathrm{L} = \lim_{\mathrm{R}\to 0} \mathrm{R}\int_0^\pi \left[\left(\frac{3}{2}\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta\right] z\,d\theta\,.$$

Ciò posto, calcoliamoci i valori delle derivate parziali di w, cioè calcoliamoci $\partial w/\partial x$ perchè $\partial w/\partial y$ ce l'abbiamo già, e sostituiamo i valori di queste derivate:

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{1}{3}\varrho_0^{-\frac{7}{3}}(x - x_0) + \dfrac{1}{3}\,|2x_0 - 1|^{-\frac{1}{3}}\varrho_1^{-\frac{7}{3}}(x - x_1)\,, \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = -\dfrac{2}{9}y^2\left(\varrho_0^{-\frac{7}{3}} - |2x_0 - 1|^{-\frac{1}{3}}\varrho_1^{-\frac{7}{3}}\right) \end{cases}$$

nella (17); troveremo così

$$\mathrm{L} = -\lim_{\mathrm{R}\to 0} \mathrm{R}\int_0^\pi \left[\left(\frac{3}{2}\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}(x - x_0)\cos\theta + \frac{2}{9}y^2\,\mathrm{sen}\,\theta\right]\varrho_0^{-\frac{7}{3}} z\,d\theta +$$

$$+ |2x_0 - 1|^{-\frac{1}{3}} \lim_{\mathrm{R}\to 0} \mathrm{R}\int_0^\pi \left[\left(\frac{3}{2}\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}(x - x_1)\cos\theta + \frac{2}{9}y^2\,\mathrm{sen}\,\theta\right]\varrho_1^{-\frac{7}{3}} z\,d\theta\,.$$

Ma il 2° termine, essendo l'integrale che in esso figura sempre finito (perchè ϱ_1 non è mai nullo su c_0), tende evidentemente a zero; dunque potremo scrivere, più semplicemente, essendo $\varrho_0 = \mathrm{R}$ su c_0,

$$\mathrm{L} = -\lim_{\mathrm{R}\to 0} \mathrm{R}^{-\frac{4}{3}} \int_0^\pi \left[\left(\frac{3}{2}\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}(x - x_0)\cos\theta + \frac{2}{9}y^2\,\mathrm{sen}\,\theta\right] d\theta\,,$$

cioè, tenendo conto delle (15) e con facili riduzioni,

$$(19)\qquad \mathrm{L} = -2^{-\frac{1}{3}}3^{-\frac{2}{3}} \lim_{\mathrm{R}\to 0}\int_0^\pi z\,\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\theta\,d\theta\,.$$

Per effettuare il passaggio al limite indicato nella (19), osserviamo che la funzione $\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\theta$ è sempre positiva fra 0 e π; potremo quindi applicare all'integrale il primo teorema della media, ottenendo così

$$\mathrm{L} = -2^{-\frac{1}{3}}3^{-\frac{2}{3}} \lim_{\mathrm{R}\to 0} z'\int_0^\pi \mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\theta\,d\theta\,,$$

dove z' denota il valore di z in un conveniente punto di c_0. Ma, allorchè R tende a zero, tutti i punti di c_0 tendono ad M_0; dunque, passando al limite, si avrà finalmente

$$(20)\qquad \mathrm{L} = -2^{-\frac{1}{3}}3^{-\frac{2}{3}} z(x_0, 0)\int_0^\pi \mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\theta\,d\theta\,.$$

Per calcolare l'integrale definito che figura nella (20), osserviamo anzitutto che esso è uguale al doppio dell'integrale della stessa funzione, ma esteso fra 0 e $\pi/2$, e pratichiamo quindi la sostituzione $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{t}$ che lo muta in un integrale euleriano; si ottiene così

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\theta\, d\theta = \frac{2^{\frac{7}{3}}\pi^2}{\Gamma^3(1/3)}\,.$$

Pertanto, scrivendo $\tau(x_0)$ in luogo di $z(x_0, 0)$ e ricordando la (18) del Cap. II, avremo in definitiva

$$\mathrm{L} = -\frac{1}{\gamma}\,\tau(x_0)\,.$$

Sostituiamo ora nella (13) il valore così trovato; otterremo in tal modo la relazione

$$\tau(x_0) + \gamma \int_0^1 [w(x_0 \,|\, x, 0)\,\nu(x) - \mathrm{W}^*(x_0, x)\,\tau(x)]\,dx =$$
$$= \gamma \int_\sigma \left(y\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{dy}{dn} \right) z\, d\sigma\,,$$

il cui secondo membro è manifestamente una certa funzione di x_0 *che non dipende se non dalla forma di* σ *e dai valori di* z *deposti su questa curva.* Chiamiamola $f_1(x_0)$, cioè, ricordando che i valori di z deposti su σ sono stati indicati con $f(\sigma)$, poniamo

$$f_1(x_0) = \gamma \int_\sigma \left(y\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{dx}{dn} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{dy}{dn} \right) f(\sigma)\, d\sigma\,: \tag{22}$$

avremo allora

$$\tau(x_0) - \gamma \int_0^1 \mathrm{W}^*(x_0, x)\,\tau(x)\,dx = f_1(x_0) - \gamma \int_0^1 \mathrm{W}(x_0 \,|\, x, 0)\,\nu(x)\,dx\,,$$

cioè finalmente, tenendo conto della (10),

$$\tau(x_0) - \gamma \int_0^1 \mathrm{W}^*(x_0, x)\,\tau(x)\,dx = f_1(x_0) - \gamma \int_0^1 \left[\frac{1}{(x - x_0)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(x + x_0 - 2xx_0)^{\frac{1}{3}}} \right] \nu(x)\,dx\,. \tag{23}$$

§ 5. — Occorre ora esaminare i casi esclusi nella deduzione della relazione (23), e cioè i casi di $x_0 = 1/2$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.

Cominciamo dal primo, che si esaurisce subito: In questo caso, essendo

$$\lim_{x_0 \to \frac{1}{2}} |2x_0 - 1|\; \varrho(x_1 \,|\, x, y) = 1/2\,,$$

la (7) diverrà più semplicemente

$$w(1/2 \,|\, x, y) = [\varrho(1/2 \,|\, x, y)]^{-\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2}\,, \tag{7'}$$

e conseguentemente si avrà

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x_0 = \frac{1}{2}} &= -\frac{1}{3}\,[\varrho(1/2 \,|\, x, y)]^{-\frac{7}{3}}\,(x - 1/2)\,, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x_0 = \frac{1}{2}} &= -\frac{2}{9}\,y^2\,[\varrho(1/2 \,|\, x, y)]^{-\frac{7}{3}}\,; \end{aligned} \right. \tag{18'}$$

quanto agli altri elementi che figurano nelle formule precedenti, non è necessaria per essi alcuna speciale avvertenza. Pertanto, potendo i precedenti ragionamenti ripetersi tal quali allorchè alle (7) e (18) si sostituiscono rispettivamente le (7′) e (18′), se ne conclude che la (23) sussiste immutata anche nel caso di $x_0 = 1/2$.

Passiamo ora ad esaminare i due casi limiti di $x_0 = 0$ ed $x_0 = 1$. All'uopo occorrerà anzitutto indagare cosa succeda allora di $f_1(x_0)$ perchè, mentre è chiaro che questa funzione è sempre finita e continua allorchè x_0 è compreso fra 0 ed 1, non si può invece escludere *a priori* che il suo limite per $x_0 \to 0$ o per $x_0 \to 1$ possa essere infinito. Invece non è luogo a preoccuparsi della funzione W^*, essendosi esplicitamente osservato nel § 3 che W non cessa di essere regolare nei casi limiti in esame.

Per discutere il comportamento di $f_1(x_0)$ nell'intorno di $x_0 = 0$ ed $x_0 = 1$, per fissare le idee: nell'intorno del primo di questi due punti, teniamo conto: 1°) che la curva σ si compone di due archetti $AA' \equiv \boldsymbol{c}_1$ e $BB' \equiv \boldsymbol{c}_2$ della curva normale $\boldsymbol{c}$, più una terza parte σ_1; 2°) che $u = w + W$. Potremo dunque spezzare in tre parti l'integrale mediante cui è definita la funzione $f_1(x_0)$, nel modo seguente:

$$f_1(x_0) = \gamma \left[\int_{\sigma_1} + \int_{\boldsymbol{c}_2} \right] \left(y \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\boldsymbol{n}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\boldsymbol{n}} \right) f(\sigma)\, d\sigma +$$
$$+ \gamma \int_{\boldsymbol{c}_1} \left(y \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{d\boldsymbol{n}} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{d\boldsymbol{n}} \right) f(\sigma)\, d\sigma + \gamma \int_{\boldsymbol{c}_1} \left(y \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{d\boldsymbol{n}} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{d\boldsymbol{n}} \right) f(\sigma)\, d\sigma,$$

e quindi, osservato che la funzione W è sempre finita su tutta σ e così pure, sulle curve σ_1 e $\boldsymbol{c}_2$, la funzione u stessa; passando al limite per $x_0 \to 0$, avremo

$$(24) \qquad f_1(+0) = \gamma \left[\int_{\sigma_1} + \int_{\boldsymbol{c}_2} \right] \left\{ y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \frac{dx}{d\boldsymbol{n}} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \frac{dy}{d\boldsymbol{n}} \right\} f(\sigma)\, d\sigma +$$
$$+ \gamma \int_{\boldsymbol{c}_1} \left\{ y \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_0 \frac{dx}{d\boldsymbol{n}} + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_0 \frac{dy}{d\boldsymbol{n}} \right\} f(\sigma) d\sigma + \gamma \lim_{x_0 \to 0} \int_{\boldsymbol{c}_1} \left(y \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{d\boldsymbol{n}} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{d\boldsymbol{n}} \right) f(\sigma)\, d\sigma,$$

dove gli indici 0 in basso denotano che, delle derivate fra parentesi, occorre considerare i valori per $x_0 = 0$.

Ciò posto, notiamo che dalla (7) risulta che, per $x_0 = 0$, w, e quindi pure W, sono *identicamente* nulle; pertanto le derivate di u e W che figurano nei primi due termini del 2° membro della (24), sono tutte zero, sicchè questa formula si ridurrà semplicemente a

$$(25) \qquad f_1(+0) = \gamma \lim_{x_0 \to 0} \int_{\boldsymbol{c}_1} \left(y \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{d\boldsymbol{n}} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{d\boldsymbol{n}} \right) f(\sigma)\, d\sigma .$$

Per calcolare i valori delle derivate di w che compaiono nella (25), ricordiamoci che sulla curva normale $\boldsymbol{c}$, di cui $\boldsymbol{c}_1$ è parte, si ha $\varrho_0 = |2x_0 - 1|\, \varrho_1$; tenendo conto di ciò, dalle (18), con facili calcoli, si trae

$$(26) \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{3} \varrho_0^{-\frac{7}{3}} x_0(1-x_0)(1-2x), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{8}{9} \varrho_0^{-\frac{7}{3}} x_0(1-x_0)\, y^2 .$$

D'altra parte, osservato che il tratto di curva c_1 può rappresentarsi con le equazioni parametriche

$$(27)\qquad x=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\quad,\quad y=\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta\right)^{\frac{2}{3}}\quad,\quad(\theta'\leq\theta\leq\pi)\ ,$$

si trova

$$(28)\ d\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\theta+y\operatorname{sen}^2\theta}{y}}\,d\theta\ ,\ \frac{dx}{dn}=\frac{-\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+y\operatorname{sen}^2\theta}}\ ,\ \frac{dy}{dn}=\frac{-\sqrt{y}\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+y\operatorname{sen}^2\theta}}\ ,$$

quindi, sostituendo nella (25), avremo finalmente

$$(29)\qquad f_1(+0)=\frac{\gamma}{\sqrt[3]{36}}\lim_{x_0\to 0}x_0(1-x_0)\int_{\theta'}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\theta\,\bar{f}(\theta)\,d\theta}{\left[x_0^2+\left(\frac{1}{2}-x_0\right)(1+\cos\theta)\right]^{\frac{7}{6}}}\ ,$$

avendo posto $f(\sigma)=\bar{f}(\theta)$.

Nella (29), supposto che x_0 sia già tanto prossimo a zero da aversi $x_0<1/2$, pratichiamo la sostituzione

$$(30)\qquad \cos\frac{\theta}{2}=\frac{x_0 t}{\sqrt{1-2x_0}}$$

e poniamo, per brevità di scrittura,

$$\xi=\frac{\sqrt{1-2x_0}}{x_0}\cos\frac{\theta'}{2}\ ;$$

avremo allora, con facili calcoli,

$$(32)\qquad f_1(+0)=\gamma\sqrt[3]{\tfrac{4}{9}}\lim_{x_0\to 0}\frac{1-x_0}{(1-2x_0)^{\frac{1}{3}}}\int_0^{\xi}\frac{\bar{f}\left(2\arccos\frac{x_0 t}{\sqrt{1-2x_0}}\right)t^{\frac{1}{3}}}{(1+t^2)^{\frac{7}{6}}(1-2x_0-x_0^2t^2)^{\frac{1}{3}}}\,dt\ ,$$

da cui, passando al limite, si trae

$$f_1(+0)=\gamma\sqrt[3]{\tfrac{4}{9}}\,\bar{f}(\pi)\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{3}}\,dt}{(1+t^2)^{\frac{7}{6}}}\ ,$$

cioè, calcolando l'integrale improprio con la stessa sostituzione $t^2=u/(1-u)$ già adoperata in un caso analogo nel § 8 del Capitolo precedente, e scrivendo $f(\mathrm{A})$ in luogo di $\bar{f}(\pi)$,

$$(33)\qquad f_1(+0)=f(\mathrm{A})\ .$$

In modo perfettamente analogo si trova che anche il limite per $x_0\to 1$ è finito, e precisamente che si ha

$$(34)\qquad f_1(1-)=f(\mathrm{B})\ .$$

La dimostrazione della validità della (23) nei due casi limiti $x_0=0$ ed $x_0=1$ è ormai una cosa immediata; invero, *convenuto di riguardare come valori della*

funzione $f_1(x_0)$ *nei punti* $x_0=0$ ed $x_0=1$ *i rispettivi suoi valori limiti* e visto che, come si è già osservato, per $x_0=0$ od $x_0=1$ si ha $w=\mathrm{W}=0$; la (23) nei due casi in discorso si riduce rispettivamente a

$$\tau(0)=f(\mathrm{A}) \qquad \text{e a} \qquad \tau(0)=f(\mathrm{B}),$$

uguaglianze manifestamente verificate.

§ 6. — La (23), la cui validità è stata ora stabilita senza alcuna restrizione, può riguardarsi come un'equazione integrale in $\tau(x)$, e precisamente un'equazione integrale lineare di Fredholm, 2ª specie, regolare [1], cui si dà subito l'aspetto consueto scrivendo x in luogo di x_0 ed y in luogo di x:

$$\tau(x)-\gamma\int_0^1 \mathrm{W}^*(x,y)\,\tau(y)\,dy= \tag{35}$$
$$=f_1(x)-\gamma\int_0^1\left[\frac{1}{|x-y|^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{(x+y-2xy)^{\frac{1}{3}}}\right]\nu(y)\,dy.$$

Ci proponiamo ora d'invertire quest'equazione, traendone l'espressione di $\tau(x)$ per mezzo di $\nu(x)$ e $f_1(x)$, con che avremo ottenuta la seconda relazione fondamentale di cui è cenno nel § 1. A tal uopo osserviamo anzitutto che, nel caso particolare molto interessante in cui la curva σ si confonde con la curva normale c, cioè nel caso che il contorno misto dato sia un *contorno normale*, essendo allora $\mathrm{W}(x_0|x,y)=0$ identicamente, la (35) fornisce senz'altro l'espressione di $\tau(x)$:

$$\tau(x)=f_1(x)-\gamma\int_0^1\left[\frac{1}{|x-y|^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{(x+y-2xy)^{\frac{1}{3}}}\right]\nu(y)\,dy. \tag{36}$$

Inoltre nel caso in esame è possibile trovare l'espressione esplicita della funzione $f_1(x)$ sotto una forma semplicissima. Precisamente, supposto che i valori f di z deposti sulla curva normale, si rappresentino con la formula

$$f=y\,\mathrm{F}(x), \tag{37}$$

dove x ed y sono l'ascissa e l'ordinata, con calcoli analoghi a quelli svolti nel § precedente, si trova che

$$f_1(x)=\frac{\gamma}{2}\,x(1-x)\int_0^1\frac{\mathrm{F}(y)\,dy}{[x^2+(1-2x)\,y]^{\frac{7}{6}}}. \tag{38}$$

La formula (36) si presta ad un'osservazione interessante: Supponiamo che si sappia che $\tau(x)=0$ e che, conoscendo $f(x)$ e quindi $f_1(x)$, si voglia determinare $\nu(x)$; dovrà allora risolversi l'equazione di Fredholm, di 1ª specie,

$$f_1(x)=\gamma\int_0^1\left[\frac{1}{|x-y|^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{(x+y-2xy)^{\frac{1}{3}}}\right]\nu(y)\,dy. \tag{39}$$

[1] Ricordiamo che un'equazione di Fredholm, 2ª specie, si dice *regolare* quando l'integrale è preso entro limiti finiti e, sia il nucleo, sia la funzione data, sono sempre finiti e continui.

Orbene; *quest'equazione di prima specie possiamo risolverla.* Infatti, nel § 8 del Capitolo precedente abbiamo dimostrato che, nelle condizioni in cui quì ci troviamo, $\nu(x)$ si esprime in funzione di $f(x)$ mediante la formula

$$\nu(x) = \frac{5}{2\pi\gamma\sqrt{3}} x(1-x) \int_0^1 \frac{f(y)\, dy}{[x^2+(1-2x)y]^{\frac{11}{6}}} . \tag{40}$$

Da queste formule è facile desumere che il nucleo

$$\frac{1}{|x-y|^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(x+y-2xy)^{\frac{1}{3}}} \tag{41}$$

è *chiuso.*

Infatti il nucleo

$$\frac{1}{[x^2+(1-2x)y]^{\frac{7}{6}}}$$

è manifestamente chiuso perchè, ponendo $1-y=2Y$, esso può svilupparsi, a meno di un fattore numerico, nella serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-2x)^n \, C_n^{\frac{7}{6}}(Y) ,$$

dove le C sono le funzioni di Gegenbauer studiate nel Cap. III, le quali, allorchè l'indice superiore resta fisso, costituiscono un sistema chiuso. Ne segue per la (38) che, sempre che è $f_1 \equiv 0$, è anche $F \equiv 0$, e quindi $f \equiv 0$. Ma se $f \equiv 0$, per la (40) è $\nu \equiv 0$; dunque, sempre che l'integrale a secondo membro della (39) è identicamente zero, la funzione ν è identicamente nulla, cioè il nucleo (41) è chiuso.

Dalla proposizione stabilita discende subito che γ non può essere un parametro del nucleo dell'equazione (35).

Infatti, se γ fosse parametro, la corrispondente equazione omogenea avrebbe delle soluzioni non identicamente nulle: Sia $\bar{\tau}$ una di queste soluzioni e $\bar{z}$ sia, corrispondentemente, la soluzione della (E) assumente valori f tutti nulli sulla curva σ e i valori $\bar{\tau}$ sul segmento AB. Poichè sempre che la funzione f è identicamente nulla anche f_1 è tale, nel caso in esame l'integrale a 2° membro della (35) è sempre zero; il che, essendo il nucleo (41) chiuso, implica che $\nu \equiv 0$. Ma, in fine del Cap. II, fu osservato che ogni soluzione della (E) per cui è $f \equiv 0$, $\nu \equiv 0$ è identicamente nulla; dunque $\bar{z}$, e quindi $\bar{\tau}$, dovrebbero essere identicamente nulle, in contradizione con l'ipotesi fatta.

Se ne conclude che l'equazione integrale (35) è invertibile, epperò da essa potremo trarre

$$\begin{aligned} \tau(x) = & -\int_0^1 H(x,y) f_1(y)\, dy - \gamma \int_0^1 \left[\frac{1}{|x-y|^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(x+y-2xy)^{\frac{1}{3}}} \right] \nu(y)\, dy + \\ & + f_1(x) + \gamma \int_0^1 \nu(y)\, dy \int_0^1 H(x,\xi) \left[\frac{1}{|\xi-y|^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(\xi+y-2\xi y)^{\frac{1}{3}}} \right] d\xi , \end{aligned} \tag{42}$$

dove si è posto

$$H(x,y)=\gamma H^*(x,y\,|\,\gamma)\,, \tag{43}$$

avendo indicato in generale con $H^*(x,y\,|\,\lambda)$ il nucleo risolvente di Fredholm corrispondente al nucleo $W^*(x,y)$.

Ulteriormente poniamo

$$f_2(x)=f_1(x)-\int_0^1 H(x,y)\,f_1(y)\,dy \tag{44}$$

$$L(x,y)=\int_0^1\left[\frac{1}{|\xi-y|^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{(\xi+y-2\,\xi y)^{\frac{1}{3}}}\right]H(x,\xi)\,d\xi\,, \tag{45}$$

e allora la (42) potrà scriversi sotto la forma più concisa

$$\tau(x)=f_2(x)+\gamma\int_0^1\left[L(x,y)-\frac{1}{|x-y|^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{(x+y-2\,xy)^{\frac{1}{3}}}\right]\nu(y)\,dy\,; \tag{46}$$

è questa la seconda relazione fondamentale fra le funzioni $\tau(x)$ e $\nu(x)$ di cui si era manifestata la necessità nel § 1.

Osserviamo ora che, per le note proprietà del nucleo risolvente di Fredholm, si avrà

$$H(x,y)+\gamma W^*(x,y)=\gamma\int_0^1 W^*(x,\xi)\,H(\xi,y)\,d\xi=\gamma\int_0^1 H(x,\xi)\,W^*(\xi,y)\,d\xi\,,$$

da cui, essendo $W^*(0,y)=W^*(x,0)=W^*(1,y)=W^*(x,1)=0$, si traggono le uguaglianze importanti

$$H(0,y)=H(x,0)=H(1,y)=H(x,1)=0\,. \tag{47}$$

Ricavata la relazione fondamentale (46), il sistema (2) del § 1 si scrive ora immediatamente, non essendovi altro da fare se non associare la (3) e la (46), con che si ottiene il sistema integrale

$$\left\{\begin{aligned}\tau(x)&=\varphi_1(x)+\gamma\int_0^x\frac{\nu(y)\,dy}{(x-y)^{\frac{1}{3}}}\,,\\ \tau(x)&=f_2(x)+\gamma\int_0^1\left[L(x,y)-\frac{1}{|x-y|^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{(x+y-2xy)^{\frac{1}{3}}}\right]\nu(y)\,dy\,,\end{aligned}\right. \tag{48}$$

immediatamente riducibile all'equazione unica in $\nu(x)$

$$\int_0^x\frac{\nu(y)\,dy}{(x-y)^{\frac{1}{3}}}-\int_0^1\left[L(x,y)-\frac{1}{|x-y|^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{(x+y-2xy)^{\frac{1}{3}}}\right]\nu(y)\,dy=\frac{1}{\gamma}\,\psi(x)\,, \tag{49}$$

dove si è posto

$$\psi(x)=f_2(x)-\varphi_1(x)\,. \tag{50}$$

CAPITOLO VI.

Trasformazione dell'equazione integrale cui è stata ridotta la dimostrazione del teorema di esistenza.

§ 1. — L'equazione integrale (49) cui, nel precedente Capitolo, è stata ridotta la dimostrazione del teorema di esistenza, non appartiene nè al tipo di Fredholm nè a quello di Volterra, ma partecipa sia dell'uno sia dell'altro, e noi perciò, seguendo la nomenclatura adottata da Andreoli, che alcuni anni or sono ebbe ad occuparsi di equazioni siffatte [1], la diremo un'*equazione di tipo misto, di prima specie.*

Che si sia incontrata un'equazione siffatta, non deve sorprendere ove si consideri che, in generale, le equazioni differenziali di tipo ellittico conducono ad equazioni di Fredholm, mentre quelle di tipo iperbolico conducono ad equazioni di Volterra. Era pertanto in certo modo da aspettarsi che la nostra equazione differenziale ci conducesse ad un'equazione integrale compartecipante sia del tipo di Fredholm sia di quello di Volterra.

All'equazione (49), però, non sono applicabili, a causa delle singolarità dei nuclei, i metodi di riduzione alla 2ª specie, e successivamente ad equazione di Fredholm, indicati dall'Andreoli nei lavori citati, ed occorre perciò seguire una via diversa. All'uopo si consideri che, se si pone per un momento

$$\varrho(x)=\int_0^1\left[\mathrm{L}(x,y)-\frac{1}{|x-y|^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{(x+y-2xy)^{\frac{1}{3}}}\right]\nu(y)\,dy+\frac{1}{\gamma}\,\psi(x), \tag{1}$$

l'equazione in discorso diviene semplicemente

$$\int_0^x\frac{\nu(y)}{(x-y)^{\frac{1}{3}}}\,dy=\varrho(x) \tag{2}$$

che, riguardata come un'equazione di Volterra in $\nu(x)$, con l'ausilio della formula di Abel, fornisce subito

$$\nu(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\varrho(y)\,dy}{(x-y)^{\frac{2}{3}}}$$

[1] G. Andreoli, *Sulle equazioni integrali miste ed integro-differenziali* [Rend. R. Acc. Nazionale Lincei, (5), 23, (1914)] e *Sulle equazioni integrali ed integro-differenziali di tipo più generale di quelle considerate da Volterra e da Fredholm.* [Giorn. di Matem. di Battaglini, v. 53 (1915)].

da cui, sostituendo a $\varrho(x)$ il suo valore, si ha

$$\nu(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{2}{3}}}\int_0^1\left[L(\xi\,,y)-\frac{1}{|\xi-y|^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{(\xi+y-2\xi y)^{\frac{1}{3}}}\right]\nu(y)\,dy+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\psi(y)\,dy}{(x-y)^{\frac{2}{3}}}$$

ovvero

$$(3)\qquad \nu(x)=\frac{d}{dx}\int_0^1\left\{L_1(x\,,y)-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left[I_1(x\,,y)-I_2(x\,,y)\right]\right\}\nu(y)\,dy+\psi_1'(x),$$

avendo posto

$$(4)\qquad L_1(x\,,y)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^x\frac{L(\xi\,,y)}{(x-\xi)^{\frac{2}{3}}}\,d\xi\ ,\ I_1(x\,,y)=\int_0^x\frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{2}{3}}|\xi-y|^{\frac{1}{3}}},$$

$$I_2(x\,,y)=\int_0^x\frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{2}{3}}(\xi+y-2\xi y)^{\frac{1}{3}}}\ ,\ \psi_1(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\int_0^x\frac{\psi(y)}{(x-y)^{\frac{2}{3}}}\,dy.$$

Se la derivazione che figura nella (3) potesse senz'altro effettuarsi sotto il segno, la riduzione della nostra equazione ad equazione di Fredholm di 2ª specie sarebbe evidentemente già compiuta, epperò la funzione $\nu(x)$, e quindi anche $\tau(x)$, almeno potenzialmente, sarebbero trovate. Si constata però agevolmente che ciò non è, richiedendosi speciali cautele per poter compiere l'accennata derivazione, e precisamente, che occorre far intervenire il concetto di *valor principale* di un integrale improprio, secondo Cauchy. Ad ogni modo, tutto ciò si vedrà cogli opportuni dettagli più in appresso; se abbiamo anticipato qui questo breve cenno, è stato solo per dare ragione del perchè non si derivava senz'altro l'integrale al 2º membro della (3).

§ 2. — Prim'ancora d'intraprendere lo studio della questione ora accennata, sarà però opportuno liberarsi della necessaria discussione della derivata prima della funzione $\psi_1(x)$ che figura nella (3), discussione che, per ragioni di opportunità, abbineremo con quella della derivata seconda $\psi_1''(x)$ che dovrà intervenire nelle nostre formule in fine del prossimo Capitolo.

All'uopo cominciamo con l'osservare che potremo sempre supporre, senza scapito della generalità, che le funzioni $f(\sigma)$ e $\varphi(s)$, costituite dai valori assegnati di z, siano tali da aversi

$$(5)\qquad f(A)=\varphi(A)=0\ ,\ f'(A)=\varphi'(A)=0\ ,\ f(B)=0\ ,\ f'(B)=0.$$

Infatti, se queste condizioni non sono verificate, poniamo, tenendo conto che, per le ipotesi fatte in principio, deve però essere sempre $f(A)=\varphi(A)$, $f'(A)=\varphi'(A)$:

$$f(A)=\varphi(A)=a\ ,\ f'(A)=\varphi'(A)=a'\ ,\ f(B)=b\ ,\ f'(B)=b'\,,$$

e, analogamente a quanto si è fatto nel Cap. IV (§ 5), osserviamo che la funzione bilineare

$$z_0=a+(b-a)x-a'y+(a'+b')xy\,,$$

che evidentemente è una soluzione dell'equazione (E), è tale che, dette $f_0(\sigma)$ e $\varphi_0(s)$ le funzioni costituite dai suoi valori nel contorno misto, si ha

$$f_0(A)=\varphi_0(A)=a \;,\; f_0'(A)=\varphi_0'(A)=a' \;,\; f_0(B)=b \;,\; f_0'(B)=b' \,,$$

come si vede immediatamente considerando che l'elemento d'arco di σ nell'intorno di B si confonde con dy mentre, nell'intorno di A, sia esso, sia quello di AC, si confondono con $-dy$ [1]. Ne segue che basterà sostituire $z-z_0$ a z per ottenere che le (5) siano verificate; il che, da ora innanzi, noi supporremo senz'altro abbia luogo.

Ricordiamo ora che fra le ipotesi fatte in principio vi è quella che, negli intorni di A e di B, le funzioni f e φ, oltre che di derivate prime, siano dotate di derivate seconde finite e continue; ciò che, unitamente alle (5), implica che i rapporti f/y^2 e φ/y^2 si conserveranno finiti anche al tendere di y a zero, ossia che le funzioni f e φ sono suscettibili di essere rappresentate con delle formule del tipo

$$f(\sigma)=y^2\bar{f}(\sigma) \quad , \quad \varphi(s)=y^2\bar{\varphi}(s) \,, \tag{6}$$

dove $\bar{f}$ e $\bar{\varphi}$ denotano due funzioni, sempre finite e continue.

Ciò premesso, osserviamo che l'ultima delle (4), la formula per mezzo della quale è stata definita la funzione $\psi_1(x)$, con un'integrazione per parti, può scriversi

$$\psi_1(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\left[\psi(0)\,x^{\frac{1}{3}}+\int_0^x \psi'(y)\,(x-y)^{\frac{1}{3}}\,dy\right];$$

ma, per le (44), (47) e (33) del Cap. precedente, si ha

$$f_2(0)=f_1(0)=f(A)=0$$

e, d'altra parte, per la (22) del Cap. II, si ha

$$\varphi_1(0)=\frac{\varphi(0)}{12\pi\gamma_1}\int_0^1 \frac{dt}{t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{\frac{1}{6}}}=0\,;$$

dunque

$$\psi(0)=f_2(0)-\varphi_1(0)=0\,,$$

epperò la formula precedente può scriversi più semplicemente

$$\psi_1(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\int_0^x \psi'(y)\,(x-y)^{\frac{1}{3}}\,dy$$

da cui, derivando rispetto ad x, si trae

$$\psi_1'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\int_0^x \frac{\psi'(y)}{(x-y)^{\frac{2}{3}}}\,dy\,. \tag{7}$$

[1] Ciò supposto che, come di consueto, il verso positivo degli archi sul contorno misto sia quello che va da B ad A e a C.

In modo simile, tranne la sparizione del termine fuori integrale, si trova

$$\psi_1''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\left[\psi'(0)x^{-\frac{2}{3}} + \int_0^x \frac{\psi''(y)}{(x-y)^{\frac{2}{3}}}dy\right]. \tag{8}$$

Le formule precedenti mostrano come lo studio delle derivate della funzione $\psi_1(x)$ si riduce a quello delle derivate di $\psi(x)$, ossia, in ultima analisi, allo studio delle derivate di $f_1(x)$ e $\varphi_1(x)$, osservato che il termine

$$\int_0^1 \mathrm{H}(x, y) f_1(y)\, dy$$

che, oltre ad $f_1(x)$, compare in $f_2(x)$, è manifestamente una funzione finita e continua assieme colle sue derivate.

§ 3. — Cominciando dallo studio delle derivate di $\varphi_1(x)$, che è quello che si esaurisce più rapidamente, osserviamo anzitutto che, per poter calcolare $\varphi_1(x)$ e le sue derivate a mezzo della formula (22) del Cap. II, occorre considerare la funzione φ, costituita dai valori di z deposti su AC, non già come una funzione dell'arco s, ma bensì come una funzione dell'ascissa x. Pertanto bisognerà far uso delle formule

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{1-y}{-y}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1-y}{y}\frac{d^2\varphi}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{y^2(1-y)^{\frac{1}{2}}}\frac{d\varphi}{ds}, \tag{9}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3} = \left(\frac{1-y}{-y}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{d^3\varphi}{ds^3} - \frac{3}{2}\frac{1}{(-y)^{\frac{5}{2}}}\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{4-5y}{(-y)^{\frac{7}{2}}(1-y)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\varphi}{ds}$$

leganti le derivate di φ rispetto ad x con quelle rispetto ad s, formule che si stabiliscono immediatamente considerando che l'equazione differenziale della caratteristica AC è

$$dx + \sqrt{-y}\, dy = 0,$$

da cui si trae

$$ds = \sqrt{\frac{1-y}{-y}}\, dx.$$

Le (9) mostrano che l'ipotesi da noi fatta, che esistano e siano finite e continue le derivate dei primi tre ordini di φ, *rispetto all'arco*; mentre basta ad assicurare che siano anche tali le prime tre derivate di φ rispetto ad x, in un punto generico di AC, più non è sufficiente ad assicurare che anche i valori limiti di queste per $x \longrightarrow 0$ siano finiti. Se però teniamo conto della seconda delle (6), dalla quale segue subito che può porsi

$$\frac{d\varphi}{ds} = y\,\varphi^*(s), \tag{10}$$

dove $\varphi^\star(s)$ denota una funzione sempre finita e continua, allora si vede immediatamente che, pur non potendosi ancora asserire che i limiti predetti siano finiti, potranno però determinarsi tre funzioni, sempre finite e continue, $\varphi_1^\star(x)$, $\varphi_2^\star(x)$, $\varphi_3^\star(x)$, tali da aversi

$$\text{(11)} \qquad \varphi'(x)=x^{\frac{1}{3}}\varphi_1^\star(x) \quad , \quad \varphi''(x)=x^{-\frac{2}{3}}\varphi_2^\star(x) \quad , \quad \varphi'''(x)=x^{-\frac{5}{3}}\varphi_3^\star(x) \, ,$$

e ciò è sufficiente ai nostri scopi.

Ciò premesso, deriviamo due volte, successivamente, la (22) del Cap. II; avremo così

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)=\dfrac{1}{24\pi\gamma_1}\left[7\displaystyle\int_0^1\frac{\varphi'(tx/2)}{(1-t)^{\frac{1}{6}}}t^{\frac{1}{3}}\,dt+3x\int_0^1\frac{\varphi''(tx/2)}{(1-t)^{\frac{1}{6}}}t^{\frac{4}{3}}\,dt\right] \\ \varphi_1''(x)=\dfrac{1}{48\pi\gamma_1}\left[13\displaystyle\int_0^1\frac{\varphi''(tx/2)}{(1-t)^{\frac{1}{6}}}t^{\frac{4}{3}}\,dt+3x\int_0^1\frac{\varphi'''(tx/2)}{(1-t)^{\frac{1}{6}}}t^{\frac{7}{3}}\,dt\right], \end{cases}$$

cioè, tenendo conto delle (11),

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} \varphi_1'(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{24\pi\gamma_1\sqrt[3]{2}}\displaystyle\int_0^1[7\,\varphi_1^\star(tx/2)+6\,\varphi_2^\star(tx/2)]\,t^{\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{6}}\,dt \\ \varphi_1''(x)=\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}}{24\pi\gamma_1\sqrt[3]{2}}\displaystyle\int_0^1[13\,\varphi_2^\star(tx/2)+6\,\varphi_3^\star(tx/2)]\,t^{\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{6}}\,dt. \end{cases}$$

Ma gli integrali che figurano in queste formule sono certamente finiti perchè le funzioni integrande divengono soltanto infinite d'ordine 1/6 per $t=1$; dunque:

La funzione $\varphi_1'(x)$ è sempre finita e continua, e per di più, ha uno zero d'ordine 1/3 nel punto $x=0$; invece la funzione $\varphi_1''(x)$, laddove per $x \neq 0$ è finita e continua al pari di $\varphi_1'(x)$, per $x \to 0$ diviene infinita d'ordine 2/3.

§ 4. — Passiamo ora alla discussione delle derivate della funzione $f_1(x)$.

A questo scopo, per comodità e simmetria di calcoli, cominciamo col definire sulla curva normale c una funzione finita e continua arbitraria $g(\sigma)$, ma che soddisfi alla condizione di ridursi ad $f(\sigma)$ sui due archetti AA′ e BB′ comuni a c ed a σ. Ciò posto, detta c' la parte di c che resta dopo soppressi i due archetti AA′ e BB′, consideriamo l'integrale

$$\gamma\int_{c'}\left(y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\boldsymbol{n}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\boldsymbol{n}}\right)g(\sigma)\,d\sigma$$

ed osserviamo che, aggiungendolo e togliendolo al secondo membro della (22) del Cap. precedente, la funzione $f_1(x)$ può mettersi sotto la forma

$$f_1(x_0)=\gamma\int_{\sigma_1}\left(y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\boldsymbol{n}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\boldsymbol{n}}\right)f(\sigma)\,d\sigma-\gamma\int_{c'}\left(y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\boldsymbol{n}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\boldsymbol{n}}\right)g(\sigma)\,d\sigma+$$
$$+\gamma\int_{c}\left(y\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\boldsymbol{n}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\boldsymbol{n}}\right)g(\sigma)\,d\sigma\,,$$

od anche, spezzando in due l'ultimo integrale col porre $u = w + W$,

$$f_1(x_0) = h_1(x_0) + h_2(x_0)\,, \tag{13}$$

avendo posto

$$\left\{\begin{aligned} h_1(x_0) = \gamma \int_{\sigma_1} \left(y \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\mathbf{n}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\mathbf{n}} \right) f(\sigma)\, d\sigma - \gamma \int_{c'} \left(y \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\mathbf{n}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\mathbf{n}} \right) g(\sigma)\, d\sigma + \\ + \gamma \int_{c} \left(y \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{d\mathbf{n}} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{d\mathbf{n}} \right) g(\sigma)\, d\sigma \\ h_2(x_0) = \gamma \int_{c} \left(y \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{d\mathbf{n}} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{d\mathbf{n}} \right) g(\sigma)\, d\sigma\,. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

In tal modo siamo venuti a scomporre $f_1(x_0)$ nella somma di due funzioni, la prima delle quali, $h_1(x_0)$, essendo la somma di due integrali *aventi i loro elementi tutti a distanza finita dall'asse* x e di un terzo in cui non figura la funzione w, sarà dotata di derivate di qualsivoglia ordine, sempre finite e continue. Potremo pertanto limitare le nostre ulteriori considerazioni soltanto all'altra funzione: $h_2(x_0)$ [1].

La funzione $h_2(x_0)$ non differisce dall'integrale

$$\gamma \int_{c_1} \left(y \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{d\mathbf{n}} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{d\mathbf{n}} \right) f(\sigma)\, d\sigma\,,$$

già incontrato nel § 5 del Cap. precedente, se non pel fatto che, invece di essere esteso ad un solo tratto di c, è esteso a tutta la curva normale, e che, in luogo di $f(\sigma)$, c'è $g(\sigma)$. Quindi, ricordando la (29) del Cap. V, senza bisogno di nuovi calcoli, *mutatis mutandis*, potremo porre

$$h_2(x_0) = \frac{\gamma}{\sqrt[3]{36}}\, x_0(1 - x_0) \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}} \theta\, \bar{g}(\theta)}{\left[x_0^2 + \left(\frac{1}{2} - x_0 \right) (1 + \cos\theta) \right]^{\frac{7}{6}}}\, d\theta\,, \tag{15}$$

in cui $\bar{g}(\theta) = g(\sigma)$.

Ciò posto, teniamo conto che la funzione g nei punti prossimi all'asse x si confonde con f, epperò è anch'essa suscettibile di essere rappresentata con una formula del tipo della prima delle (6); cioè, tenendo conto che, sulla curva normale c, è

$$y = \left(\frac{3}{4} \operatorname{sen}\theta \right)^{\frac{2}{3}}\,,$$

potremo porre

$$\bar{g}(\theta) = \operatorname{sen}^{\frac{4}{3}} \theta \cdot G\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right)\,, \tag{16}$$

dove G denota una funzione sempre finita e continua, il cui argomento abbiamo posto sotto quella forma per opportunità di calcolo.

[1] Può osservarsi che, nel caso in cui il contorno dato sia normale, mancando σ_1 e c' ed essendo $g(\sigma) = f(\sigma)$, $W = 0$ la funzione $f_1(x_0)$ si riduce ad $h_2(x_0)$.

Sostituendo nella (15) a $\bar{g}(\theta)$ il valore (16), si ha ora

$$h_2(x_0) = \frac{\gamma}{\sqrt[3]{36}} x_0(1 - x_0) \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^{\frac{5}{3}} \theta \, G\left(\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)}{\left[x_0^2 + \left(\frac{1}{2} - x_0\right)(1 + \cos\theta)\right]^{-\frac{7}{6}}} d\theta ,$$

da cui, ponendo $\cos^2 \frac{\theta}{2} = t$, segue finalmente

$$(17) \qquad h_2(x_0) = \frac{2\gamma}{\sqrt[3]{9}} x_0(1 - x_0) \int_0^1 G(t)\, t^{\frac{1}{3}} (1 - t)^{\frac{1}{3}} [x_0^2 + (1 - 2x_0)\, t]^{-\frac{7}{6}} dt .$$

Osserviamo che se, nel secondo membro della (17), al posto di x_0 si pone $1 - x_0$ e nel tempo stesso si muta t in $1 - t$, tutto resta tal'e quale, salvo che, in luogo di $G(t)$, verrà $G(1 - t)$. Ciò mostra che, almeno finchè si conserva a G tutta la sua generalità, il comportamento della funzione $h_2(x_0)$ nell'intorno di $x_0 = 0$ è lo stesso di quello nell'intorno di $x_0 = 1$; sarà pertanto sufficiente limitarci a considerare i limiti delle derivate di $h_2(x_0)$ per $x_0 \to 0$.

Premessa quest'osservazione, deriviamo successivamente due volte la (17) rispetto ad x_0 e, per brevità di scrittura, poniamo

$$(18) \quad \Phi_{m,n} = \int_0^1 G(t)\, t^{m - \frac{2}{3}} (1 - t)^{\frac{1}{3}} [x_0^2 + (1 - 2x_0) t]^{-\left(n + \frac{1}{6}\right)} dt \;, \quad (m, n = 1, 2, 3);$$

potremo allora scrivere concisamente le formole ottenute, nel modo seguente:

$$(19) \quad \begin{cases} h_2'(x_0) = \dfrac{2\gamma}{3\sqrt[3]{9}} [3(1 - 2x_0)\, \Phi_{11} - 7x_0^2(1 - x_0)\, \Phi_{12} + 7x_0(1 - x_0)\, \Phi_{22}] \\[2ex] h_2''(x_0) = \dfrac{2\gamma}{9\sqrt[3]{9}} [18\, \Phi_{11} + 21\, x_0(3 - 5x_0)\, \Phi_{12} - 42(1 - 2x_0)\, \Phi_{22} - \\ \qquad - 91 x_0^3(1 - x_0)\, \Phi_{13} + 182\, x_0^2(1 - x_0)\, \Phi_{23} - 91\, x_0(1 - x_0)\, \Phi_{33}] . \end{cases}$$

Consideriamo ora, che la funzione

$$t^{m - \frac{2}{3}} (1 - t)^{\frac{1}{3}} [x_0^2 + (1 - 2x_0)\, t]^{-\left(n + \frac{1}{6}\right)} ,$$

che compare sotto integrale nella (18), è sempre positiva nell'intervallo d'integrazione, pertanto, applicando il primo teorema della media, potremo porre

$$\Phi_{m,n} = G(\theta_{m,n}) \int_0^1 t^{m - \frac{2}{3}} (1 - t)^{\frac{1}{3}} [x_0^2 + (1 - 2x_0)\, t]^{-\left(n + \frac{1}{6}\right)} dt ,$$

ove $\theta_{m,n}$ è un conveniente valore di t compreso fra 0 ed 1. Ma l'integrale che figura in quest'ultima formula è un integrale ipergeometrico; dunque, servendoci della formula che fornisce il valore di siffatti integrali, avremo ancora

$$\Phi_{m,n} = \frac{\Gamma(m + 1/3)\, \Gamma(4/3)}{\Gamma(m + 5/3)} x_0^{-\left(n + \frac{1}{3}\right)} F\left(n + \frac{1}{6}, m + \frac{1}{3}, m + \frac{5}{3} \,\middle|\, \frac{2x_0 - 1}{x_0^2}\right) . G(\theta_{m,n}) ,$$

da cui, applicando la formula che lega i valori delle funzioni ipergeometriche nei punti x ed $1/(1-x)$, si ha finalmente

$$
(20) \quad \left\{
\begin{aligned}
\Phi_{m,n} = G(\theta_{m,n}) \Bigg[& \frac{\Gamma(4/3)\,\Gamma(m-n+1/6)}{\Gamma(m-n+3/2)} (1-x_0)^{-\left(2n+\frac{1}{3}\right)} \times \\
& \times F\left(n+\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, n-m+\frac{5}{6} \,\Big|\, \left(\frac{x_0}{1-x_0}\right)^2\right) + \\
& + \frac{\Gamma(m+1/3)\,\Gamma(n-m-1/6)}{\Gamma(n+1/6)} x_0^{2\left(m-n+\frac{1}{6}\right)} (1-x_0)^{-2\left(m+\frac{1}{3}\right)} \times \\
& \times F\left(m-n+\frac{3}{2}, m+\frac{1}{3}, m-n+\frac{7}{6} \,\Big|\, \left(\frac{x_0}{1-x_0}\right)^2\right) \Bigg].
\end{aligned}
\right.
$$

La precedente formula mostra che il limite di $\Phi_{m,n}$ per $x_0 \to 0$ è finito se $m \geq n$ ed è invece infinito d'ordine $2(n-m)-1/3$ se $n > m$. Da ciò segue immediatamente, per le (19), che $h_2'(x_0)$ *è una funzione sempre finita e continua fra* 0 *ed* 1, *ancorchè* x_0 *si avvicini indefinitamente a* 0 *o ad* 1, *mentre invece* $h_2''(x_0)$, *per* x_0 *tendente a zero o ad uno, diviene infinita d'ordine* $2/3$.

Il risultato cui siamo ora pervenuti, assieme con quello ottenuto nel § precedente, nonchè colle osservazioni fatte in principio del presente §, permette di concludere che *la funzione* $\psi'(x)$ *è sempre finita e continua, mentre invece la funzione* $\psi''(x)$ *è tale che può porsi*

$$
(21) \qquad \psi''(x) = [x(1-x)]^{-\frac{2}{3}} \psi^*(x),
$$

dove $\psi^*(x)$ *denota una funzione sempre finita e continua.*

Da ciò, per la (7), segue immediatamente che:

La funzione $\psi_1'(x)$ *è sempre finita e continua, ancorchè* x *tenda a zero o ad uno; anzi, per* $x=0$, *essa ha uno zero d'ordine* $1/3$.

Resta finalmente da determinare il comportamento di $\psi_1''(x)$, pel che basterà sostituire il valore (21) di $\psi''(x)$ nella (8); si ha così

$$
\psi_1''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma} \left\{ \psi'(0)\, x^{-\frac{2}{3}} + \int_0^x [y(1-y)(x-y)]^{-\frac{2}{3}} \psi^*(y)\, dy \right\},
$$

cioè, applicando all'integrale il primo teorema della media, dopo aver notato che la funzione fra parentesi quadra è sempre positiva nell'intervallo d'integrazione,

$$
\psi_1''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma} \left\{ \psi'(0)\, x^{-\frac{2}{3}} + \psi^*(\theta) \int_0^x [y(1-y)(x-y)]^{-\frac{2}{3}} dy \right\}, \quad (0 < \theta < x),
$$

da cui, operando la sostituzione $y = tx$, con la quale l'integrale si trasforma in un integrale ipergeometrico esprimibile per funzioni elementari, si ha finalmente

$$
\psi_1''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma} \left\{ \psi'(0)\, x^{-\frac{2}{3}} + \frac{\Gamma^2(1/3)}{\Gamma(2/3)} \psi^*(\theta) [x(1-x)]^{-\frac{1}{3}} \right\}.
$$

Si conclude pertanto che:

La funzione $\psi_1''(x)$, mentre è sempre finita e continua per x diverso da 0 e da 1, in generale, diviene infinita d'ordine 2/3 per $x \to 0$, e d'ordine 1/3 per $x \to 1$; se però è $\psi'(0)=0$, allora anche l'infinito per $x \to 0$ è d'ordine 1/3.

§ 5. — Esaurita così la discussione delle funzioni $\psi_1'(x)$ e $\psi_1''(x)$, intraprendiamo la derivazione dell' integrale che figura nella (3), cominciando dallo studiare le derivate parziali rispetto ad x delle funzioni $L_1(x, y)$, $I_1(x, y)$ e $I_2(x, y)$.

All'uopo osserviamo anzitutto che, con un' integrazione per parti, la prima delle (4) può scriversi

$$L_1(x,y) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left[L(0,y)\,x^{\frac{1}{3}} + \int_0^x \frac{\partial L(\xi,y)}{\partial \xi}(x-\xi)^{\frac{1}{3}}\,d\xi\right];$$

ma, in virtù delle (39) e (41) del Cap. prec., si ha

$$L(0,y) = \int_0^1\left[\frac{1}{|\xi-y|^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(\xi+y-2\xi y)^{\frac{1}{3}}}\right]H(0,\xi)\,d\xi = 0\,;$$

dunque potremo scrivere, più semplicemente,

$$L_1(x,y) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^x \frac{\partial L(\xi,y)}{\partial \xi}(x-\xi)^{\frac{1}{3}}\,d\xi\,,$$

da cui, derivando rispetto ad x, si trae

$$\frac{\partial L_1(x,y)}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^x \frac{\partial L(\xi,y)}{\partial \xi}\,\frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{2}{3}}} \tag{23}$$

od anche

$$\frac{\partial L_1(x,y)}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{2}{3}}}\int_0^1 \frac{\partial H(\xi,\eta)}{\partial \xi}\left[\frac{1}{|\eta-y|^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(\eta+y-2\eta y)^{\frac{1}{3}}}\right]d\eta. \tag{24}$$

La (24) mostra che la funzione $\partial L_1/\partial x$ è sempre finita e continua; da questo lato dunque non si presenta nessuna difficoltà e possiamo quindi scrivere senz'altro

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 L_1(x,y)\,\nu(y)\,dy = \int_0^1 \frac{\partial L_1(x,y)}{\partial x}\,\nu(y)\,dy\,. \tag{25}$$

Passiamo ora alle altre due funzioni I_1 ed I_2, di cui sarà sufficiente considerare solo la prima perchè il calcolo di I_2 si riconduce subito a quello di I_1 per mezzo della formula, di dimostrazione immediata,

$$I_2(x,y) = |1-2y|^{-\frac{1}{3}}\,I_1\left(x, \frac{y}{2y-1}\right). \tag{26}$$

Indichiamo con $J_1(x, y)$ lo stesso integrale mediante il quale è definita la funzione $I_1(x, y)$, ma esteso, invece che fra 0 ed x, *fra* 0 *ed il più piccolo dei* ***due***

numeri x *ed* y, di guisa che si avrà

$$\mathrm{I}_1(x,y)=\begin{cases}\mathrm{J}_1(x,y) & , \quad (x<y), \\ \mathrm{J}_1(x,y)+\displaystyle\int_y^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{2}{3}}(\xi-y)^{\frac{1}{3}}}=\mathrm{J}_1(x,y)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & (x>y);\end{cases}$$

cioè I_1 ed J_1 differiranno, al più, per una costante L'integrale J_1 può facilmente ridursi a quello di una funzione razionale e precisamente si raggiunge quest'intento con la sostituzione

$$\frac{x-\xi}{y-\xi}=t^3,$$

la quale fornisce

$$\mathrm{J}_1(x,y)=\int_u^\omega \frac{3\,dt}{t^3-1}, \quad \left[u=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \omega=\begin{cases}0, & (x<y)\\ \infty, & (x>y)\end{cases}\right]; \tag{27}$$

formula da cui, senza bisogno di ultimare i calcoli, derivando rispetto ad x, si deduce

$$\frac{\partial \mathrm{I}_1(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial \mathrm{J}_1(x,y)}{\partial x}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{y-x}. \tag{28}$$

Quanto a $\partial \mathrm{I}_2/\partial x$, tenendo conto della (26), si ha

$$\frac{\partial \mathrm{I}_2(x,y)}{\partial x}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x+y-2xy}. \tag{29}$$

Le formule trovate mostrano che, mentre $\partial \mathrm{I}_2/\partial x$ è una funzione sempre finita e continua allorchè $0\leq y\leq 1$ (escludendo, beninteso, che x *raggiunga* i valori estremi $x=0$ ed $x=1$), *invece* $\partial \mathrm{I}_1/\partial x$ *diviene infinita di prim'ordine per* $x=y$. Conseguentemente non è lecito applicare senz'altro la regola di derivazione sotto il segno al calcolo di

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \mathrm{I}_1(x,y)\,\nu(y)\,dy;$$

e perciò, allo stato attuale delle cose, potremo fare sparire solo in parte il segno di derivazione dell'equazione (3), scrivendola sotto la forma

$$\nu(x)-\int_0^1\left[\frac{\partial \mathrm{L}_1(x,y)}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x+y-2xy}\right]\nu(y)\,dy+ \\ +\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^1 \mathrm{I}_1(x,y)\,\nu(y)\,dy=\psi_1'(x). \tag{30}$$

§ 6. — Per poter effettuare sotto il segno la residua derivazione che figura nella (30), occorre far ricorso al concetto di *valor principale* di un integrale improprio divergente, secondo Cauchy [1].

[1] A. Cauchy, *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (Paris, 1823), leç. 24e [*Oeuvres complètes d'A. C.*, (2), 4 (Paris, Gauthier-Villars, 1899), pag. 140 e seg.].

Consideriamo l'integrale

$$G = \int_a^b f(x)\,dx$$

ed osserviamo che, mentre esso ha un significato ben determinato e finito sempre che la funzione $f(x)$ è finita nell'intervallo (a, b) o al più diventa infinita d'ordine minore di uno in qualche punto, ne è invece privo se $f(x)$ diviene infinita di prim'ordine in qualche punto compreso fra a e b. Si presenta però spontanea l'idea di considerare in tal caso come valore dell'integrale G il valor limite (se esiste) dell'integrale della funzione $f(x)$, esteso all'intervallo (a, b) da cui siano stati tolti i punti singolari mediante degli intervalletti di ampiezza evanescente. Così p. es., se di questi punti singolari non ve n'è che uno, c, si porrà

$$(31) \qquad G = \lim_{\varepsilon', \varepsilon'' \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon'} + \int_{c+\varepsilon''}^b \right] f(x)\,dx\,.$$

È però agevole persuadersi che così facendo, in generale, G non avrà un solo valore ma infiniti, dipendendo il limite (31) dal modo con cui ε' ed ε'' si fanno convergere a zero. Per esempio, se fosse $f(x) = 1/(x - c)$, risulterebbe $G = \lg[(b-c)/(c-a)] + \lim \lg(\varepsilon'/\varepsilon'')$. Fra questi infiniti valori di G ha speciale importanza quello che si ottiene facendo $\varepsilon' = \varepsilon''$ in tutti gli stadî del passaggio al limite, col che sparisce ogni indeterminazione. Tale valore lo chiameremo, con Cauchy, *valor principale* dell'integrale improprio; e, essendo opportuno distinguerlo con un simbolo speciale, lo indicheremo sovrapponendo un asterisco al solito segno d'integrazione. Sarà dunque, per definizione,

$$(32) \qquad \overset{*}{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b \right] f(x)\,dx\,.$$

In particolare, nell'esempio dianzi considerato, si avrà

$$\overset{*}{\int_a^b} \frac{dx}{x-c} = \lg \frac{b-c}{c-a}\,.$$

Più generalmente è facile vedere che, se $A(x)$ è una funzione finita e continua, dotata di derivata prima finita o, al più, infinita d'ordine minore di uno, si ha

$$(33) \qquad \overset{*}{\int_a^b} \frac{A(x)}{x-c}\,dx = A(b)\lg(b-c) - A(a)\lg(c-a) - \int_a^b A'(x)\lg|x-c|\,dx\,.$$

Così pure, nelle medesime condizioni, si ha

$$(34) \qquad \overset{*}{\int_a^b} \frac{A(x)}{x-c}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\int_a^c \frac{A(x)}{(c-x)^{1-\varepsilon}}\,dx + \int_c^b \frac{A(x)}{(x-c)^{1-\varepsilon}}\,dx \right],$$

come può agevolmente verificarsi tenendo conto della (33) e ricordando che $\lim_{\varepsilon \to 0} (x^\varepsilon - 1)/\varepsilon = \lg x$.

Finalmente, essendoci ciò necessario nel seguito, occupiamoci del problema dell'inversione dell'ordine di due successive integrazioni « con asterisco ».

Anzitutto è facile vedere che, se i punti critici della funzione integranda sono *fissi*, cioè non dipendono dalle variabili d'integrazione, è lecito invertire senz'altro l'ordine delle due integrazioni, come se si trattasse d'integrali ordinarî. Così pure è sempre lecito invertire l'ordine di un'integrazione ordinaria e di una « con asterisco ». Invece, se si tratta di due integrazioni entrambe « con asterisco » e i punti critici dipendono dalle variabili d'integrazione, si avrà in generale un residuo di cui bisogna tener conto. Precisamente, limitandoci al caso che ci interessa, *se* $f(x, y, z)$ *è una funzione finita e continua, nell'intorno del punto* $y = z = x$, *assieme colle sue derivate prime rispetto ad* y *e a* z [1], *si ha la formula*

$$(35) \qquad \overset{*}{\int_{a'}^{b'}} \frac{dz}{z - x} \overset{*}{\int_a^b} \frac{f(x, y, z)}{y - z} dy =$$

$$= \overset{*}{\int_a^b} dy \overset{*}{\int_{a'}^{b'}} \frac{f(x, y, z)}{(z - x)(y - z)} dz - \pi^2 f(x, x, x) \quad [2];$$

supposto, beninteso, che, nel piano y, z, il punto $P(x, x)$ sia interno al rettangolo $R \equiv (a, a'), (b, a'), (a, b), (a', b')$.

Infatti, osserviamo anzitutto che, se $R_1 \equiv (a_1, a'_1), (b_1, a'_1), (a_1, b'_1), (a'_1, b'_1)$ è un altro rettangolo analogo ad R, comprendente del pari il punto P nel suo interno, la differenza fra ciascuno dei due integrali doppî che compaiono nella (35) e gli analoghi estesi al rettangolo R_1, può esprimersi per mezzo di integrali doppî *con un solo asterisco*. Ne segue, essendosi già osservato che si può sempre invertire l'ordine di una integrazione ordinaria e di una con asterisco, che

$$\overset{*}{\int_{a'}^{b'}} \frac{dz}{z - x} \overset{*}{\int_a^b} \frac{f(x, y, z)}{y - z} dy - \overset{*}{\int_a^b} dy \overset{*}{\int_{a'}^{b'}} \frac{f(x, y, z)}{(z - x)(y - z)} dz =$$

$$= \overset{*}{\int_{a'_1}^{b'_1}} \frac{dz}{z - x} \overset{*}{\int_{a_1}^{b_1}} \frac{f(x, y, z)}{y - z} dy - \overset{*}{\int_{a_1}^{b_1}} dy \overset{*}{\int_{a'_1}^{b'_1}} \frac{f(x, y, z)}{(z - x)(y - z)} dz.$$

In particolare, supposto $0 < x < 1$, il che può sempre ottenersi, possiamo assumere come R_1 il quadrato $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$, e allora tutto sarà ridotto

[1] Queste condizioni, che qui imponiamo per semplificare la dimostrazione, possono notevolmente generalizzarsi.

[2] Posseggo questa formula fin dai primi del '21, ma non l'ho pubblicata per le stampe prima d'oggi. Pertanto la priorità di essa spetta al sig. Bertrand in una cui Nota, su cui dovrò tornare più avanti, pubblicata nei *Comptes rendus* del 13 giugno 1921 (tom. 172, pag. 1458), è data (senza dimostrazione) una formula che, trasportata nel campo reale, equivale sostanzialmente alla (35), per quanto risulti valida sotto condizioni assai più restrittive.

a far vedere che si ha

$$(35^{bis})\quad \varDelta = \overset{*}{\int_0^1} \frac{dz}{z-x} \overset{*}{\int_0^1} \frac{f(x,y,z)}{y-z}\,dy -$$

$$- \overset{*}{\int_0^1} dy \overset{*}{\int_0^1} \frac{f(x,y,z)}{(z-x)(y-z)}\,dz = -\pi^2 f(x,x,x).$$

Ciò premesso, osserviamo che, in virtù delle ipotesi fatte sulla funzione f, questa potrà assere rappresentata con la formula

$$f(x,y,z) = f(x,x,x) + (y-x)\,f_1(x,y,z) + (z-x)\,f_2(x,y,z),$$

dove f_1 ed f_2 denotano due funzioni finite e continue. Conseguentemente, tenuto conto che

$$\frac{1}{(z-x)(y-z)} = \frac{1}{y-x}\left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z}\right),$$

potremo porre

$$\varDelta = f(x,x,x)\left[\overset{*}{\int_0^1}\frac{dz}{z-x}\overset{*}{\int_0^1}\frac{dy}{y-z} - \overset{*}{\int_0^1}\frac{dy}{y-x}\overset{*}{\int_0^1}\frac{dz}{z-x} - \overset{*}{\int_0^1}\frac{dy}{y-x}\overset{*}{\int_0^1}\frac{dz}{y-z}\right] +$$

$$+ \overset{*}{\int_0^1}\frac{dz}{z-x}\int_0^1 f_1(x,y,z)\,dy + \int_0^1 dz \overset{*}{\int_0^1}\frac{f_1(x,y,z)}{y-z}\,dy +$$

$$+ \int_0^1 dz \overset{*}{\int_0^1}\frac{f_2(x,y,z)}{y-z}\,dy - \int_0^1 dy \overset{*}{\int_0^1}\frac{f_1(x,y,z)}{z-x}\,dz -$$

$$- \int_0^1 dy \overset{*}{\int_0^1}\frac{f_1(x,y,z)}{y-z}\,dz - \int_0^1 dy \overset{*}{\int_0^1}\frac{f_2(x,y,z)}{y-z}\,dz .$$

Ma la somma dei termini che non contengono come fattore $f(x,x,x)$ è nulla per l'invertibilità dell'ordine delle integrazioni ordinarie e con asterisco; quindi risulta semplicemente

$$\varDelta = f(x,x,x)\left[\overset{*}{\int_0^1}\frac{dz}{z-x}\overset{*}{\int_0^1}\frac{dy}{y-z} - \overset{*}{\int_0^1}\frac{dy}{y-x}\overset{*}{\int_0^1}\frac{dz}{z-x} - \overset{*}{\int_0^1}\frac{dy}{y-x}\overset{*}{\int_0^1}\frac{dz}{y-z}\right],$$

cioè

$$\varDelta = f(x,x,x)\left[2\overset{*}{\int_0^1}\lg\frac{1-y}{y}\cdot\frac{dy}{y-x} - \left(\lg\frac{1-x}{x}\right)^2\right].$$

Per valutare l'integrale con asterisco che figura nella precedente formula, poniamo $|y-x| = t$; avremo così

$$\mathrm{I} = \overset{*}{\int_0^1}\lg\frac{1-y}{y}\,\frac{dy}{y-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^x \lg\frac{x-t}{1-x+t}\,\frac{dt}{t} + \int_\varepsilon^{1-x}\lg\frac{1-x-t}{x+t}\,\frac{dt}{t}\right]:$$

ossia, per note formule di calcolo integrale,

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \left[\lg x \lg |t| - \omega\left(\frac{t}{x}\right) - \lg(1-x)\lg|t| + \omega\left(-\frac{t}{1-x}\right) \right]_\varepsilon^x + \right.$$

$$\left. + \left[\lg(1-x)\lg|t| - \omega\left(\frac{t}{1-x}\right) - \lg x \lg|t| + \omega\left(-\frac{t}{x}\right) \right]_\varepsilon^{1-x} \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\left(\lg\frac{x}{1-x} \right)^2 - 2\,\omega(1) + \omega\left(-\frac{x}{1-x}\right) + \omega\left(-\frac{1-x}{x}\right) + \right.$$

$$\left. + \omega\left(\frac{\varepsilon}{x}\right) - \omega\left(-\frac{\varepsilon}{1-x}\right) + \omega\left(\frac{\varepsilon}{1-x}\right) - \omega\left(-\frac{\varepsilon}{x}\right) \right],$$

avendo indicato con $\omega(x)$ la trascendente definita dalla serie

$$\omega(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots .$$

Ora, fra le proprietà di questa funzione si annoverano quelle espresse dalle formule

$$\omega(1) = \frac{\pi^2}{6} \quad ; \quad \omega(-x) + \omega\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}(\lg x)^2 - \frac{\pi^2}{6}, \ (x > 0); \quad \lim_{x \to 0} \omega(x) = 0 ;$$

quindi si avrà ulteriormente

$$I = \frac{1}{2}\left(\lg\frac{x}{1-x} \right)^2 - \frac{\pi^2}{2},$$

e ne segue che

$$\Delta = -\pi^2 f(x, x, x)$$

come era da dimostrare

§ 7. — Premessa questa breve digressione sul concetto di valor principale di un integrale, facciamo vedere ora come, nel caso nostro, possa porsi

$$(36) \qquad \frac{d}{dx}\int_0^1 I_1(x, y)\, \nu(y)\, dy = \int_0^{*1} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\nu(y)}{y - x}\, dy + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\, \nu(x).$$

All'uopo cominciamo col determinare l'espressione esplicita della funzione $I_1(x, y)$, compiendo la quadratura indicata nella (27); si trova così, con calcoli del tutto elementari,

$$(37) \quad I_1(x \cdot y) = -\lg|1-u| + \lg\sqrt{1+u+u^2} +$$

$$+ \sqrt{3}\, \operatorname{arc\,tg}\left[(1-2u)/\sqrt{3}\right] \pm \pi/2\sqrt{3} \quad , \quad u = (x/y)^{\frac{1}{3}},$$

formula nella quale va preso il segno superiore se $u > 1$, cioè se $x > y$, e quello

inferiore nel caso contrario. Ciò premesso, osserviamo che, qualunque sia il numero positivo ε, si ha identicamente

$$\int_0^1 I_1(x,y)\,\nu(y)\,dy = \left[\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1\right] I_1(x,y)\,\nu(y)\,dy + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} I_1(x,y)\,\nu(y)\,dy\,,$$

da cui, derivando rispetto ad x e tenendo conto che $\partial I_1/\partial x$ è sempre finita nel campo cui è esteso il primo integrale del 2° membro, si trae

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 I_1(x,y)\,\nu(y)\,dy = \left[\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1\right]\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\nu(y)}{y-x}\,dy +$$

$$+ I_1(x,x-\varepsilon)\,\nu(x-\varepsilon) - I_1(x,x+\varepsilon)\,\nu(x+\varepsilon) + \frac{d}{dx}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} I_1(x,y)\,\nu(y)\,dy\,;$$

epperò, passando al limite per $\varepsilon \to 0$, potrà porsi

$$\text{(38)}\quad \frac{d}{dx}\int_0^1 I_1(x,y)\,\nu(y)\,dy = \overset{*}{\int_0^1}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\nu(y)}{y-x}\,dy +$$

$$+ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,\nu(x) + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d}{dx}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} I_1(x,y)\,\nu(y)\,dy\,.$$

Per calcolare il limite che figura nella (38), è opportuno avvalersi della formula che ci ha servito originariamente per definire la funzione $I_1(x,y)$; si trova così

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dx}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} I_1(x,y)\,\nu(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dx}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \nu(y)\,dy \int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{\frac{2}{3}}\,|\xi-y|^{\frac{1}{3}}}$$

da cui, ponendo $y = x+z$, $\xi = x-\eta$, si deduce

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dx}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} I_1(x,y)\,\nu(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dx}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \nu(x+z)\,dz \int_0^x \frac{d\eta}{\eta^{\frac{2}{3}}\,|z+\eta|^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= x^{-\frac{2}{3}} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\nu(x+z)}{|x+z|^{\frac{1}{3}}}\,dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} I_1(x,y)\,\nu'(y)\,dy\,;$$

il che mostra che il limite in discorso è zero, essendo le funzioni sotto i due ultimi integrali al più infinite di ordine minor di uno, e le ampiezze degli intervalli cui questi sono estesi, evanescenti. E ne segue la (36).

Stabilita la (36), è ora cosa immediata il porre l'equazione integrale (30) sotto la sua forma definitiva. Invero basterà sostituire alla derivata di

$$\int_0^1 I_1(x,y)\,\nu(y)\,dy$$

il valore trovato, raccogliere indi i termini in $\nu(x)$, sommare i due integrali, e dividere infine pel coefficiente $3/2$ per cui risulta moltiplicata $\nu(x)$; si ottiene così l'equazione

$$(39)\quad \nu(x)-\frac{2}{3}\int_0^{*1}\left[\frac{\partial L_1(x,y)}{\partial x}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{3}}{}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{y-x}-\frac{1}{x+y-2xy}\right)\right]\nu(y)\,dy=\frac{2}{3}\,\psi_1'(x),$$

che noi scriveremo sotto la forma

$$(40)\qquad \nu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^{*1}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{y-x}-\frac{1}{x+y-2xy}\right)\nu(y)\,dy=\chi(x),$$

introducendo l'incognita ausiliare $\chi(x)$ definita dalla formula

$$(41)\qquad \chi(x)=\frac{2}{3}\left[\psi_1'(x)+\int_0^1\frac{\partial L_1(x,y)}{\partial x}\,\nu(y)\,dy\right].$$

Ci proponiamo ora anzitutto d'invertire l'equazione integrale singolare (40), riguardando $\chi(x)$ come una funzione nota; sostituiremo indi il valore trovato nella (41) ed otterremo così un'altra equazione integrale in $\chi(x)$ (ma questa regolare), che ci consentirà di determinare quest'ultima funzione; conosciuta la quale, si risale subito a $\nu(x)$ e a $\tau(x)$ [1].

[1] Nel caso particolare in cui il contorno misto dato sia normale, si ha $L_1(x,y)=0$ e conseguentemente $\chi(x)=2/3\ \psi_1'(x)$, di guisa che tutto è allora ridotto all'inversione della (40). Inoltre il caso particolare in esame si presta molto bene a controllare materialmente l'equazione (40) partendo da una determinata soluzione regolare della (E) e calcolando la funzione $\psi_1'(x)$ per mezzo dei valori assunti da questa soluzione sul contorno normale. Così per esempio, nel caso della soluzione $z=y$, si trova

$$\chi(x)=\frac{2}{3}\,\psi'_1(x)=2+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{3x-1}-U(x)-(2x-1)^{-\frac{5}{3}}\,U\left(\frac{x}{2x-1}\right)\right]$$

dove si è posto

$$U(x)=I_1(x,1)\pm 2\pi/\sqrt{3}=-\lg\left|1-x^{\frac{1}{3}}\right|+$$
$$+\lg\sqrt{1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}+\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\left[\left(1+2x^{\frac{1}{3}}\right)/\sqrt{3}\right]\pm\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}\qquad\begin{cases}+\ \text{se}\ x<1\\-\ \text{se}\ x>1;\end{cases}$$

il che è perfettamente d'accordo con la (40), essendo agevole verificare che il primo membro di quest'equazione, per $\nu(x)=1$, si riduce esattamente all'espressione precedente.

CAPITOLO VII.

Inversione dell'equazione integrale ottenuta nel Capitolo precedente.

§ 1. — Per dare all'equazione (40) l'aspetto consueto delle equazioni integrali, poniamo

$$
(1) \quad \begin{cases} K(x,y) = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\dfrac{1}{y-x} - \dfrac{1}{x+y-2xy}\right), \\ \varphi(x) = \nu(x) \quad , \quad f(x) = \chi(x) \quad , \quad \lambda = -\dfrac{1}{\pi\sqrt{3}} \end{cases}
$$

e alllora essa diverrà

$$
(2) \qquad \varphi(x) - \lambda \overset{*}{\int_0^1} K(x,y)\, \varphi(y)\, dy = f(x).
$$

La (2) ha l'aspetto di una delle solite equazioni di Fredholm, 2ª specie, soltanto che in essa, in luogo di un integrale ordinario, c'è un integrale « con asterisco » ([1]).

Per cercare di risolverla, cominciamo col definire gli *iterati* nel nucleo K con le formule

$$
(3)\ K_1(x,y) = K(x,y)\ ;\ K_{n+1}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \overset{*}{\int_0^1} K_{i+1}(x,z)\, K_{n-i}(z,y)\, dz\,,\ (n = 1, 2, 3 \ldots).
$$

Se si trattasse di un'ordinaria equazione di Fredholm, la precedente definizione coinciderebbe colla consueta perchè allora, per un noto teorema, i termini del sommatorio risulterebbero tutti uguali fra loro. Qui invece ciò non si verifica, più non reggendo il teorema ora ricordato, il che non deve sorprendere ove si consideri che la dimostrazione di questo è imperniata sull'invertibilità dell'ordine di due successive integrazioni ordinarie, invertibilità che nel nostro caso vien meno.

In particolare le (3) forniscono

$$
K_2(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \overset{*}{\int_0^1} \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{x+z-2xz}\right)\left(\frac{1}{y-z} - \frac{1}{z+y-2zy}\right) dz =
$$
$$
= K(x,y)\, 2 \lg \frac{(1-x)\,y}{x(1-y)}
$$

([1]) La Nota del sig. G. Bertrand, citata nel Capitolo precedente (§ 6), è dedicata appunto ad equazioni siffatte, su cui, secondo quanto mi consta, in lavori precedenti non si trovano se non cenni fuggevoli. Però neanche nel lavoro di Bertrand si procede ad uno studio organico della questione, ma soltanto, dopo premessi alcuni teoremi su quelli che io chiamo « integrali con asterisco », sono considerate tre speciali equazioni del tipo in discorso, di cui due di prima specie ed una di seconda. Inoltre all'A. sembrano sfuggire le analoghe di quelle che, nel caso della (2), dirò *soluzioni eccezionali* dell'equazione.

e s'intravede così la formula generale

$$K_{n+1}(x,y)=\frac{1}{n!}K(x,y)\left[2\lg\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^n,\quad (n=0,1,2,\ldots), \tag{4}$$

ch'è facile dimostrare per induzione. Infatti, supposto che la (4) sussista per $n \leq m-1$, potrà porsi

$$K_{m+1}(x,y)=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\overset{*}{\int_0^1}\frac{1}{i!}K(x,z)\left[2\lg\frac{(1-x)z}{x(1-z)}\right]^i\times$$

$$\times\frac{1}{(m-i-1)!}K(z,y)\left[2\lg\frac{(1-z)y}{z(1-y)}\right]^{m-i-1}dz=$$

$$=\frac{2^{m-1}}{m!}\overset{*}{\int_0^1}\left\{\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}\left[\lg\frac{(1-x)z}{x(1-z)}\right]^i\left[\lg\frac{(1-z)y}{z(1-y)}\right]^{m-i-1}\right\}K(x,z)\,K(z,y)\,dz,$$

cioè, osservando che il sommatorio non è altro che lo sviluppo della potenza $(m-1)$-*esima* della somma dei due logaritmi,

$$K_{m+1}(x,y)=\frac{1}{m!}\left[2\lg\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^{m-1}K_2(x,y)=\frac{1}{m!}K(x,y)\left[2\lg\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^m,$$

che non è altro se non la (4) nel caso di $n=m$.

Ciò posto, calcoliamoci il *nucleo risolvente* $H(x,y\,|\,\lambda)$ facendo uso della stessa formula che si adopera nel caso ordinario; cioè poniamo

$$H(x,y\,|\,\lambda)=-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,y)=-K(x,y)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[2\lambda\lg\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^n,$$

da cui risulta

$$H(x,y\,|\,\lambda)=-\left[\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^{2\lambda}K(x,y). \tag{5}$$

§ 2. — Se non avessimo a che fare con un'equazione singolare, determinato il nucleo risolvente, l'inversione della (2) sarebbe bell'e compiuta, e precisamente si avrebbe, com'è ben noto, che la soluzione dell'equazione in discorso è data da

$$f(x)+\lambda\overset{*}{\int_0^1}\left[\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^{2\lambda}K(x,y)\,f(y)\,dy. \tag{6}$$

Invece nel caso in esame è facile vedere che la (6) *non* soddisfa all'equazione integrale, il che è sempre da imputarsi alla non invertibilità delle integrazioni con asterisco. Però la (6) si discosta poco da una funzione che soddisfa effettivamente la (2), e precisamente vedremo ora che, per ottenere quest'ultima, basta moltiplicarla per un certo coefficiente costante ed alterare opportunamente l'esponente 2λ.

All'uopo poniamo

$$\varphi(x)=C\left[f(x)+\lambda\overset{*}{\int_0^1}\left[\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^{2\theta}K(x,y)\,f(y)\,dy\right], \tag{7}$$

essendo C e θ due costanti per ora indeterminate, e sostituiamo questo valore nella (2); avremo così

$$C\left\{f(x)+\lambda\overset{*}{\int_0^1}\left[\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^{2\theta}K(x,y)\,f(y)\,dy-\lambda\overset{*}{\int_0^1}K(x,y)\,f(y)\,dy-\right.$$
$$\left.-\lambda^2\overset{*}{\int_0^1}K(x,\xi)\,d\xi\overset{*}{\int_0^1}\left[\frac{(1-\xi)y}{\xi(1-y)}\right]^{2\theta}K(\xi,y)\,f(y)\,dy\right\}=f(x),$$

cioè, invertendo l'ordine delle due integrazioni con asterisco mediante la formula (35) del Cap. prec.,

$$(1+\pi^2\lambda^2)\,f(x)-\lambda\overset{*}{\int_0^1}\left\{K(x,y)-\left[\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^{2\theta}K(x,y)+\right.$$
$$\left.+\lambda\overset{*}{\int_0^1}\left[\frac{(1-\xi)y}{\xi(1-y)}\right]^{2\theta}K(x,\xi)K(\xi,y)\,d\xi\right\}f(y)\,dy=\frac{1}{C}\,f(x),$$

eguaglianza che, supposto assunto per C il valore

$$C=\frac{1}{1+\pi^2\lambda^2}, \tag{8}$$

si scrive semplicemente

$$\overset{*}{\int_0^1}\left\{K(x,y)-\left[\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^{2\theta}K(x,y)+\right.$$
$$\left.+\lambda\overset{*}{\int_0^1}\left[\frac{(1-\xi)y}{\xi(1-y)}\right]^{2\theta}K(x,\xi)\,K(\xi,y)\,d\xi\right\}f(y)\,dy=0\,;$$

e questa sarà identicamente soddisfatta sempre che si avrà

$$K(x,y)-\left[\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^{2\theta}K(x,y)+\lambda\overset{*}{\int_0^1}\left[\frac{(1-\xi)y}{\xi(1-y)}\right]^{2\theta}K(x,\xi)\,K(\xi,y)\,d\xi=0. \tag{9}$$

Notiamo ora che si ha identicamente

$$K(x,\xi)\,K(\xi,y)=K(x,y)\left(\frac{1}{\xi-x}+\frac{1-2x}{x+\xi-2x\xi}-\frac{1}{\xi-y}-\frac{1-2y}{y+\xi-2y\xi}\right);$$

pertanto la (10), sopprimendo il fattore $K(x,y)$ e moltiplicando per $y^{-2\theta}(1-y)^{2\theta}$, potrà scriversi

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\theta}-\left(\frac{1-y}{y}\right)^{2\theta}=\lambda\overset{*}{\int_0^1}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^{2\theta}\left(\frac{1}{\xi-x}+\frac{1-2x}{x+\xi-2x\xi}\right)d\xi- \tag{10}$$
$$-\lambda\overset{*}{\int_0^1}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^{2\theta}\left(\frac{1}{\xi-y}+\frac{1-2y}{y+\xi-2y\xi}\right)d\xi\,.$$

Ma entrambi i membri della (10) sono della forma $F(x) - F(y)$; quindi la condizione affinchè la (7) verifichi la (2) è che θ possa scegliersi in modo da aversi

$$\lambda \overset{*}{\int_0^1} \left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^{2\theta} \left(\frac{1}{\xi - x} + \frac{1-2x}{x+\xi-2x\xi}\right) d\xi = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\theta} + a, \tag{11}$$

dove a denota una costante qualsiasi.

Nella (11) operiamo la sostituzione

$$\frac{x(1-\xi)}{(1-x)\xi} = t \tag{12}$$

e nel contempo poniamo $x/(1-x) = X$; essa diverrà allora, più semplicemente,

$$2\lambda \overset{*}{\int_0^\infty} \frac{1+Xt}{X+t} \frac{t^{2\theta}}{1-t^2} dt = 1 + aX^{2\theta}. \tag{13}$$

Per calcolare l'integrale che compare in questa formula, cominciamo con l'osservare che, affinchè esso sia finito, è manifestamente necessario supporre che

$$-1/2 < \theta < 1/2. \tag{14}$$

Per un primo momento supponiamo anzi che θ varii soltanto fra $-1/2$ e 0 e teniamo conto che, com'è facile verificare, si ha identicamente

$$\frac{2(1+Xt)}{(X+t)(1-t^2)} = \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} + \frac{2}{X+t}; \tag{15}$$

avremo dunque

$$2\overset{*}{\int_0^\infty} \frac{1+Xt}{X+t} \frac{t^{2\theta}}{1-t^2} dt = \overset{*}{\int_0^\infty} \frac{t^{2\theta}}{1-t} dt - \int_0^\infty \frac{t^{2\theta}}{1+t} dt + 2\int_0^\infty \frac{t^{2\theta}}{X+t} dt,$$

ove gli integrali a secondo membro son tutti certamente finiti, essendo θ compreso fra $-1/2$ e 0.

Ciò posto, osserviamo, avvalendoci della (34) del Cap. prec., che si ha

$$\begin{aligned} \overset{*}{\int_0^\infty} \frac{t^{2\theta}}{1-t} dt &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_0^1 t^{2\theta}(1-t)^{\varepsilon-1} dt - \int_1^\infty t^{2\theta}(t-1)^{\varepsilon-1} dt\right] = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \Gamma(\varepsilon)\left[\frac{\Gamma(1+2\theta)}{\Gamma(1+2\theta+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(-2\theta-\varepsilon)}{\Gamma(-2\theta)}\right] = \pi \cot 2\pi\theta, \end{aligned} \tag{16}$$

mentre d'altra parte risulta

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{t^{2\theta}}{1+t} dt = \Gamma(-2\theta)\Gamma(1-2\theta) = -\pi \operatorname{cosec} 2\pi\theta, \\ &\int_0^\infty \frac{t^{2\theta}}{X+t} dt = X^{2\theta}\int_0^\infty \frac{t'^{2\theta}}{1+t'} dt' = -\pi X^{2\theta} \operatorname{cosec} 2\pi\theta; \end{aligned}\right. \tag{17}$$

avremo dunque finalmente

$$(18)\qquad 2\overset{*}{\int_0^\infty} \frac{1+Xt}{X+t}\,\frac{t^{2\theta}}{1-t^2}\,dt = \frac{2\pi}{\operatorname{sen} 2\pi\theta}\,(\cos^2\pi\theta - X^{2\theta}),$$

per ora sotto la restrizione $-1/2 < \theta < 0$. È però facile vedere che la formula trovata resta valida ancorchè $0 < \theta < 1/2$, di guisa che l'unica limitazione effettiva è rappresentata dalla (14). Infatti non c'è che da ripetere il precedente calcolo sostituendo alla (15) l'altra identità analoga

$$(19)\qquad \frac{2(1+Xt)}{(X+t)(1-t^2)} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2X}{X+t}\right).$$

Se ne conclude che l'uguaglianza da soddisfare è la seguente

$$(20)\qquad \frac{2\pi\lambda}{\operatorname{sen} 2\pi\theta}\,(\cos^2\pi\theta - X^{2\theta}) = 1 + aX^{2\theta},$$

cui va unita la diseguaglianza (14). Si perviene così all'equazione in θ

$$\frac{\pi\lambda \cos\pi\theta}{\operatorname{sen}\pi\theta} = 1$$

da cui, avendo riguardo alla (14), si trae

$$(21)\qquad \theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\lambda\pi \quad , \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg}\lambda\pi < \frac{\pi}{2}\right).$$

La conclusione ultima è che *l'equazione integrale (2) è certamente soddisfatta ponendo*

$$(22)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{1+\pi^2\lambda^2}\left\{ f(x) + \lambda \overset{*}{\int_0^1} \left[\frac{(1-x)y}{x(1-y)}\right]^{2\theta} K(x,y)\,f(y)\,dy \right\},$$

dove per θ sia posto il valore dato dalla (21).

§ 3. — Abbiamo dimostrato che la (22) soddisfa all'equazione (2), cioè ch'è *una* soluzione di questa; ma non abbiamo detto che ne è *la* soluzione, cioè che non ce ne sono altre. Infatti vedremo ora che *la (2) ha sempre infinite soluzioni* ossia che l'equazione omogenea ad essa corrispondente:

$$(23)\qquad \varphi(x) - \lambda \overset{*}{\int_0^1} K(x,y)\,\varphi(y)\,dy = 0,$$

qualunque sia il valore di λ, ammette delle soluzioni non identicamente nulle, dipendenti da una costante arbitraria. In altre parole, la (2) è dotata di uno *spettro continuo* di parametri, riempiente tutta la retta su cui si rappresentano i valori di λ.

In modo preciso, convenuto, per brevità di discorso, di chiamare *quasi regolare* una funzione $\omega(x)$ rappresentabile con una formula del tipo

$$(24)\qquad \omega(x) = A(x)\,x^r\,(1-x)^s.$$

dove $A(x)$ denota una funzione regolare nell'intervallo $(0, 1)$ ed r ed s due numeri reali qualsiasi, può enunciarsi il seguente teorema:

Nel campo delle funzioni regolari e quasi regolari, l'equazione omogenea (23) *non ammette altre soluzioni non identicamente nulle che quelle date dalla formula*

$$\varphi(x) = C x^{-\left(\frac{5}{3}+2\theta^*\right)} (1-x)^{2\theta^*}, \tag{25}$$

dove C *è una costante arbitrarta e* θ^* *è dato da*

$$\theta^* = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \lambda\pi \quad , \quad (-\pi < \operatorname{arc\,tg} \lambda\pi < 0). \tag{26}$$

Infatti, cominciamo col far vedere che i numeri r ed s non possono essere del tutto arbitrarî All'uopo, supposto che $\omega(x)$ soddisfi all'equazione e che sia $A(0) \neq 0$, $A(1) \neq 0$, sostituiamo l'espressione (24) nella (23); avremo così

$$A(x)\, x^r (1-x)^s = \lambda \overset{*}{\int_0^1} K(x, y)\, A(y)\, y^r (1-y)^s \, dy$$

da cui, trasformando l'integrale per mezzo della sostizione (12) e sopprimendo il fattore $x^r(1-x)^s$ che risulta comune ai due membri, si ha

$$A(x) = \lambda \overset{*}{\int_0^\infty} A\left[\frac{x}{x+(1-x)t}\right] \frac{2t^{s+1}\, dt}{[x+(1-x)\,t]^{r+s+5/3}\,(1-t^2)}, \tag{27}$$

uguaglianza nella quale, essendo il primo membro sempre finito, tale dovrà essere anche il secondo, e *a fortiori* per x generico. Ma affinchè l'integrale che figura nella (27), per x diverso da 0 e da 1, sia finito, è manifestamente necessario che sia

$$s + 1 \geq -1 \quad , \quad r + s + 5/3 + 2 - (s+1) \geq 1 ;$$

dunque si hanno le due limitazioni

$$r \geq -5/3 \quad , \quad s \geq -2. \tag{28}$$

Ciò premesso, sempre nell'ipotesi che $\omega(x)$ soddisfi alla (23), moltiplichiamo ambo i membri dell'identità

$$\omega(z) = \lambda \overset{*}{\int_0^1} K(z, y)\, \omega(y)\, dy$$

per la funzione

$$L(x, z \mid \mu) = - K(x, z) \left[\frac{(1-x)\, z}{x(1-z)}\right]^{2\mu} \tag{29}$$

e quindi integriamo « con asterisco » rispetto a z, fra 0 ed 1; avremo così, almeno formalmente,

$$\overset{*}{\int_0^1} L(x, z \mid \mu)\, \omega(z)\, dz = \lambda \overset{*}{\int_0^1} L(x, z \mid \mu)\, dz \overset{*}{\int_0^1} K(z, y)\, \omega(y)\, dy,$$

cioè, invertendo l'ordine delle due integrazioni « con asterisco »,

$$(30)\qquad \overset{*}{\int_0^1} L(x,z|\mu)\,\omega(z)\,dz = \lambda \overset{*}{\int_0^1} \omega(y)\,dy \overset{*}{\int_0^1} L(x,z|\mu)\,K(z,y)\,dz + \lambda\pi^2\,\omega(x)\,.$$

Sarà bene indagare subito sotto quali condizioni il precedente passaggio è lecito, cioè conduce ad una relazione effettiva e non soltanto formale. Evidentemente, affinchè ciò sia, è necessario e sufficiente che l'integrale costituente il primo membro della (30) abbia un significato ben determinato e finito, almeno per x generico. Ma, sostituendo ad $\omega(x)$ il valore (24) e servendosi ancora della sostituzione (12), l'integrale in discorso può scriversi

$$-x^r(1-x)^s \overset{*}{\int_0^\infty} A\left[\frac{x}{x+(1-x)t}\right] \frac{2t^{s+1-2\mu}\,dt}{[x+(1-x)t]^{r+s+5/3}\,(1-t^2)}\,;$$

dunque la condizione cercata è che sia

$$s+1-2\mu > -1 \quad , \quad r+s+5/3+2-(s+1-2\mu) > 1\,,$$

cioè che μ soddisfi alle ineguaglianze compatibili

$$(31)\qquad -r-5/3 < 2\mu < s+2\,.$$

Supponiamo ora che, per di più, μ soddisfi alla condizione [compatibile con le (31)]

$$(32)\qquad |\mu| < 1/2$$

e calcoliamoci l'integrale

$$\overset{*}{\int_0^1} L(x,z|\mu)\,K(z,y)\,dz\,,$$

per il che basterà osservare, ricordando la (29), che esso non differisce dall'integrale che figura nella (9), altro che pel segno e pel fatto che, al posto di θ, c'è ora μ; avremo così senz'altro

$$\overset{*}{\int_0^1} L(x,z|\mu)\,K(z,y)\,dz = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\mu\pi}\,[K(x,y) + L(x,y|\mu)]\,.$$

Sostituiamo il valore così trovato nella (30); avremo allora

$$\overset{*}{\int_0^1} L(x,z|\mu)\,\omega(z)\,dz =$$

$$= \frac{\lambda\pi}{\operatorname{tg}\mu\pi}\left[\overset{*}{\int_0^1} K(x,y)\,\omega(y)\,dy + \overset{*}{\int_0^1} L(x,y|\mu)\,\omega(y)\,dy\right] + \lambda\pi^2\,\omega(x)\,,$$

cioè, ricordando che $\omega(x)$ soddisfa per ipotesi alla (23),

$$\left(1-\frac{\lambda\pi}{\operatorname{tg}\mu\pi}\right)\overset{*}{\int_0^1}\mathrm{L}(x,y\,|\,\mu)\,\omega(y)\,dy=\left(\frac{\pi}{\operatorname{tg}\mu\pi}+\lambda\pi^2\right)\omega(x)$$

da cui, indicando con $\theta^*\pi$ uno qualsiasi (pel momento) degli archi la cui tangente è $\lambda\pi$, si ha finalmente

$$\omega(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}(\mu-\theta^*)\,\pi\overset{*}{\int_0^1}\mathrm{L}(x,y\,|\,\mu)\,\omega(y)\,dy\,. \tag{33}$$

§ 4. — Essendo la funzione $\mathrm{A}(x)$, che figura nella (24), una funzione regolare, potremo porre

$$\mathrm{A}(x)=\mathrm{A}(0)+x\mathrm{B}_0(x)=\mathrm{A}(1)+(1-x)\,\mathrm{B}_1(x)\,,$$

dove $\mathrm{B}_0(x)$ e $\mathrm{B}_1(x)$ denotano due funzioni sempre finite e continue; e conseguentemente si avrà

$$\omega(x)=x^r(1-x)^s\left[\mathrm{A}(0)+x\mathrm{B}_0(x)\right]=x^r(1-x)^s\left[\mathrm{A}(1)+(1-x)\,\mathrm{B}_1(x)\right].$$

Sostituiamo queste espressioni nella (33) ed operiamo indi la solita sostituzione (12); avremo così le due uguaglianze

$$\begin{cases}\mathrm{A}(0)+x\mathrm{B}_0(x)=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{tg}(\theta^*-\mu)\,\pi\left\{\mathrm{A}(0)\overset{*}{\displaystyle\int_0^\infty}\dfrac{2t^{s+1-2\mu}\,dt}{[x+(1-x)\,t]^{r+s+5/3}\,(1-t^2)}+\right.\\[2ex] \qquad\qquad\left.+\,x\overset{*}{\displaystyle\int_0^\infty}\mathrm{B}_0\left[\dfrac{x}{x+(1-x)\,t}\right]\dfrac{2t^{s+1-2\mu}\,dt}{[x+(1-x)\,t]^{r+s+8/3}\,(1-t^2)}\right\}\\[2ex] \mathrm{A}(1)+(1-x)\,\mathrm{B}_1(x)=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{tg}(\theta^*-\mu)\,\pi\left\{\mathrm{A}(1)\overset{*}{\displaystyle\int_0^\infty}\dfrac{2t^{s+1-2\mu}\,dt}{[x+(1-x)\,t]^{r+s+5/3}\,(1-t^2)}+\right.\\[2ex] \qquad\qquad\left.+\,(1-x)\overset{*}{\displaystyle\int_0^\infty}\mathrm{B}_1\left[\dfrac{x}{x+(1-x)\,t}\right]\dfrac{2t^{s+2-2\mu}\,dt}{[x+(1-x)\,t]^{r+s+8/3}\,(1-t^2)}\right\},\end{cases}$$

che si scindono [1] nella

$$1=\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}(\theta^*-\mu)\,\pi\overset{*}{\int_0^\infty}\frac{2t^{s+1-2\mu}\,dt}{[x+(1-x)\,t]^{r+s+5/3}\,(1-t^2)}\,, \tag{34}$$

[1] Questo passaggio risulterà pienamente giustificato fra poche pagine (§ 5) allorchè avremo discusso l'integrale che denoteremo con I. Infatti, con ragionamenti perfettamente analoghi a quelli che saranno svolti a proposito di I, si vede che i secondi membri delle precedenti identità per $x\to 0$ ed $x\to 1$ si comportano rispettivamente come $x^{-r-2\mu+1/3}$ e $(1-x)^{-s+2\mu}$. Discende da ciò facilmente l'impossibilità che le identità in discorso sussistano, fuori del caso in cui sono soddisfatte le (34), (35), (36′) e (36″).

con

(35) $$r + s + 5/3 = 0\,,$$

e rispettivamente nella prima e nella seconda delle due

(36′) $$B_0(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{tg}\,(\theta^* - \mu)\,\pi \overset{*}{\int_0^\infty} B_0\left[\frac{x}{x + (1-x)\,t}\right] \frac{2t^{s+1-2\mu}\,dt}{[x + (1-x)\,t]^{r+s+8/3}\,(1-t^2)}\,,$$

(36″) $$B_1(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{tg}\,(\theta^* - \mu)\,\pi \overset{*}{\int_0^\infty} B_1\left[\frac{x}{x + (1-x)\,t}\right] \frac{2t^{s+2-2\mu}\,dt}{[x + (1-x)\,t]^{r+s+8/3}\,(1-t^2)}\,.$$

Cominciamo dall'esaminare la (34). Affinchè essa possa essere soddisfatta, occorre che, qualunque sia μ (sotto le limitazioni che conosciamo), si abbia

$$1 = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{tg}\,(\theta^* - \mu)\,\pi \overset{*}{\int_0^\infty} \frac{2t^{s+1-2\mu}}{1-t^2}\,dt\,,$$

cioè, supposto $s - 2\mu > -1$,

$$1 = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{tg}\,(\theta^* - \mu)\,\pi \left[\overset{*}{\int_0^\infty} \frac{t^{s-2\mu}}{1-t}\,dt - \int_0^\infty \frac{t^{s-2\mu}}{1+t}\,dt\right]$$

da cui, sostituendo ai due integrali i loro valori forniti dalle (16) e (17), si ha

$$1 = \mathrm{tg}\,(\theta^* - \mu)\,\pi \cdot [\mathrm{cotg}\,(s - 2\mu)\,\pi + \mathrm{cosec}\,(s - 2\mu)\,\pi]\,,$$

ossia finalmente

(37) $$\mathrm{tg}\,(\theta^* - \mu)\,\pi = \mathrm{tg}\,(s/2 - \mu)\,\pi\,,$$

formula che, come è facile vedere, regge anche se $-2 < s - 2\mu < -1$, di guisa che non si hanno nuove limitazioni oltre le (31) e (32). Se ne conclude che, affinchè la (34) sia soddisfatta, è necessario e sufficiente che siano verificate le uguaglianze (35) e (37), cioè che r ed s abbiano i valori seguenti:

(38) $$s = 2\theta^* \quad , \quad r = -(5/3 + 2\theta^*)\,.$$

Passiamo ora alle (36) distinguendo i due casi di λ positivo e λ negativo.

Supposto per primo $\lambda < 0$, osserviamo che la (36′), pur essendo stata dedotta nell'ipotesi che fossero verificate le condizioni (31) e (32), non cessa di esser valida ancorchè si abbia solamente

(39) $$|\mu| < 1/2 \quad , \quad -r/2 - 4/3 < \mu < s/2 + 1\,,$$

essendo queste condizioni sufficienti ad assicurare al secondo membro di essa un significato ben determinato e finito. Potremo supporre allora $\mu = \theta^*$? Evidentemente no, se lasciamo a θ^* tutta l'arbitrarietà di cui finora ha goduto; ma sì invece se

stabiliamo che $\theta^*\pi$ sia quello degli archi la cui tangente è $\lambda\pi$, ch'è compreso fra $-\pi/2$ e 0, ipotesi perfettamente legittima perchè è $\lambda < 0$. Infatti il valore $\mu = \theta^*$ sarà allora compreso fra $-1/2$ e 0 epperò soddisferà certamente alle condizioni (39), come si vede subito tenendo conto della (38). Ma per $\mu = \theta^*$ il 2º membro della (36′) svanisce; dunque dovrà essere identicamente $B_0(x) = 0$.

Similmente si tratta il caso di $\lambda > 0$. Si comincia con l'osservare che, affinchè la (36″) sia valida, basta che sia

$$(40) \qquad |\mu| < 1/2 \quad , \quad -r/2 - 5/6 < \mu < s/2 + 3/2 \, ;$$

pertanto, se s'impone la condizione che $\theta^*\pi$ sia l'arco compreso fra $-\pi$ e $-\pi/2$ la cui tangente è $\lambda\pi$ (condizione perfettamente legittima perchè $\lambda > 0$), potremo porre $\mu = \theta^*$; ma per $\mu = \theta^*$ il 2º membro della (36″) svanisce; dunque dovrà essere identicamente $B_1(x) = 0$.

Arriviamo così alla conclusione che, qualunque sia il valore di λ, *la funzione* $A(x)$ *deve ridursi ad una costante* C, e pertanto *tutte e sole le soluzioni regolari o quasi regolari non identicamente nulle dell'equazione* (24) *sono quelle date dalla formula* (25) *in cui per* θ^* *si sia posto il valore dato dalla* (26).

Ne segue che *la più generale soluzione dell'equazione integrale singolare* (2) *è fornita dalla formula*

$$(41) \quad \varphi(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2} \left\{ f(x) + \lambda \overset{*}{\int_0^1} \left[\frac{(1-x)y}{x(1-y)} \right]^{2\theta} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x+y-2xy} \right) f(y)\, dy \right\} + C\, x^{-\left(\frac{5}{3}+2\theta^*\right)} (1-x)^{2\theta^*},$$

dove C *è una costante arbitraria e* $\theta\pi$ *e* $\theta^*\pi$ *sono rispettivamente gli archi compresi fra* $-\pi/2$ *e* $+\pi/2$ *e fra* $-\pi$ *e* 0, *la cui tangente è* $\lambda\pi$.

Le soluzioni racchiuse nel 2º termine della (41) le diremo le *soluzioni eccezionali* dell'equazione (2). Osserviamo che affinchè esse abbiano un significato *effettivo*, occorre manifestamente che sia $(5/3 + 2\theta^*) > -1$, $2\theta^* > -1$, dal che segue $\lambda < -\sqrt{3}/\pi$.

Finalmente notiamo che le proprietà dell'equazione (1) riconosciute nel presente § e nei precedenti, e di cui la più saliente è certo l'esistenza delle soluzioni eccezionali, non dipendono dalla peculiare natura del nucleo singolare $K(x,y)$ da noi considerato, ma *trovano la loro origine soltanto nel fatto che la parte singolare del nucleo è* $1/(x-y)$. Infatti, per persuadersene, basta, data un'equazione integrale con nucleo del tipo indicato, *estrarre* da essa la parte singolare, e introdurre quindi un'opportuna incognita ausiliare. In tal modo la risoluzione dell'equazione data si ridurrà all'inversione dell'equazione canonica

$$\varphi(x) - \lambda \overset{*}{\int_0^1} \frac{1}{x-y}\, \varphi(y)\, dy = f(x),$$

seguita da quella di un'ordinaria equazione di Fredholm di 2ª specie.

Non crediamo però sia il caso di soffermarci qui su tali generalizzazioni. Le cose cambiano invece notevolmente allorchè la parte singolare del nucleo ha la forma:

$$\frac{g(x)}{x-y}$$

dove $g(x)$ denota una funzione non costante. Di siffatte equazioni ci occuperemo in un prossimo lavoro.

§ 5. — Applicando la (41) al caso nostro, nel quale risulta

$$\theta = \theta^* = -1/6\,,$$

si perviene alla formula

$$(42)\quad \nu(x) = \frac{3}{4}\left\{ \chi(x) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \overset{*}{\int_0^1} \left[\frac{y(1-y)}{x(1-x)}\right]^{\frac{1}{3}} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x+y-2xy}\right) \chi(y)\,dy \right\} + C\,x^{-\frac{4}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\,.$$

Ciò posto, anticipando in parte la discussione di questa formula, su cui dovremo ritornare più avanti, facciamo vedere come, supposto che $\chi(x)$ sia una funzione finita e continua dotata di derivata prima al più infinita d'ordine minore di uno, *l'integrale che compare nella* (12) *è finito, non solo per x generico, ma anche per $x \to 0$.*

All'uopo, per evitare di dover poi spezzare il filo del ragionamento, cominciamo col calcolarci i valori di due integrali importanti, di cui veramente il primo non ci servirà se non più avanti ma è opportuno calcolarlo assieme coll'altro. Sono questi i due integrali seguenti:

$$(43)\quad T_1(\alpha,\beta|x) = \overset{*}{\int_0^\infty} \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{[x+(1-x)t]^\beta(1-t)}\,,\quad T_2(\alpha,\beta|x) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{[x+(1-x)t]^\beta(1+t)}\,,$$

in cui α e β sono due costanti qualsiasi soddisfacenti alle condizioni $0<\alpha<\beta+1$.

Per calcolare T_1 ci serviremo della (34) del Cap. precedente, con l'ausilio della quale si ha

$$T_1(\alpha,\beta|x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[x^{-\beta}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\varepsilon-1}\left(1-\frac{x-1}{x}t\right)^{-\beta} dt - \right.$$
$$\left. -(1-x)^{-\beta}\int_1^\infty t^{\alpha-1}(t-1)^{\varepsilon-1}\left(t-\frac{x}{x-1}\right)^{-\beta} dt\right]$$

cioè, ponendo nel 2° integrale $t=1/u$, col che anch'esso assume la forma canonica degli integrali ipergeometrici,

$$T_1(\alpha,\beta|x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+\varepsilon)} F\left(\beta,\alpha,\alpha+\varepsilon\,\middle|\,\frac{x-1}{x}\right) x^{-\beta} - \right.$$
$$\left. -\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1-\varepsilon)\,\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} F\left(\beta,\beta-\alpha+1-\varepsilon,\beta-\alpha+1\,\middle|\,\frac{x}{x-1}\right)(1-x)^{-\beta}\right]$$

ovvero, esprimendo le due funzioni ipergeometriche per mezzo di funzioni dell'argomento x, mediante le note formule,

$$T_1(\alpha,\beta|x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \Gamma(\varepsilon)\left[\frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1-\varepsilon)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\right] F(\beta,\varepsilon,\beta-\alpha+1|x) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)} F(\alpha\,,\alpha-\beta+\varepsilon\,,\alpha-\beta+1|x)\, x^{\alpha-\beta} \Big\}$$

da cui, passando al limite, si trae finalmente

$$(44)\quad T_1(\alpha,\beta|x) = \pi \operatorname{cotg}(\alpha-\beta)\,\pi + \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)} x^{\alpha-\beta} F(\alpha\,,\alpha-\beta\,,\alpha-\beta+1|x);$$

od anche, esprimendo $F(\alpha\,,\alpha-\beta\,,\alpha-\beta+1|x)$ per mezzo di funzioni ipergeometriche dell'argomento $(x-1)/x$,

$$(45)\quad T_1(\alpha\,,\beta|x) = \pi \operatorname{cotg} \alpha\pi -$$

$$- \frac{\Gamma(\alpha-1)\,\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)} x^{\alpha-\beta-1}(1-x)^{1-\alpha} F\left(1\,,\beta-\alpha+1\,,2-\alpha\,\middle|\,\frac{x-1}{x}\right).$$

Il calcolo di T_2 è molto più rapido; basta infatti porre $1/(1+t)=u$ per ottenere

$$T_2(\alpha\,,\beta|x) = \int_0^1 u^{\beta-\alpha}(1-u)^{\alpha-1}\left[(1-x)-(1-2x)\,u\right]^{-\beta} du\,,$$

dal che segue immediatamente

$$(46)\quad T_2(\alpha,\beta|x) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}(1-x)^{-\beta} F\left(\beta-\alpha+1\,,\beta\,,\beta+1\,\middle|\,\frac{1-2x}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)} x^{-\beta} F\left(\alpha\,,\beta\,,\beta+1\,\middle|\,\frac{2x-1}{x}\right),$$

da cui, con trasformazioni analoghe a quelle più sopra adoperate, si trae ancora

$$(47)\quad T_2(\alpha\,,\beta|x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi}(2x-1)^{-\beta} +$$

$$+ \frac{\Gamma(\alpha-1)\,\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)} x^{\alpha-\beta-1}(1-x)^{1-\alpha} F\left(1\,,\beta-\alpha+1\,,2-\alpha\,\middle|\,\frac{1-x}{x}\right),$$

$$(48)\quad T_2(\alpha\,,\beta|x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\,\pi}(1-2x)^{-\beta} +$$

$$+ \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)} x^{\alpha-\beta}(1-x)^{-\alpha} F\left(1\,,\alpha\,,\alpha-\beta+1\,\middle|\,\frac{x}{1-x}\right).$$

Premesse queste formule, trasformiamo l'integrale che figura nella (42), che indicheremo brevemente con I, con la solita sostituzione (12); avremo così

$$I = \int_0^{*\infty} \chi\left[\frac{x}{x+(1-x)t}\right] \frac{2t^{\frac{4}{3}}\,dt}{[x+(1-x)t]^{\frac{5}{3}}(1-t^2)} =$$

$$= \int_0^{*\infty} \chi\left[\frac{x}{x+(1-x)t}\right] \frac{t^{\frac{4}{3}}\,dt}{[x+(1-x)t]^{\frac{5}{3}}(1-t)} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \chi\left[\frac{x}{x+(1-x)t}\right] \frac{t^{\frac{4}{3}}\,dt}{[x+(1-x)t]^{\frac{5}{3}}(1+t)} .$$

Cominciando coll'esaminare il 2° dei due integrali ottenuti, che chiameremo rispettivamente I_1 ed I_2, osserviamo che la funzione che, sotto il segno $\int$, moltiplica χ è sempre positiva nell'intervallo d'integrazione; pertanto potremo porre

$$I_2 = \chi(\vartheta) \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{4}{3}}\,dt}{[x+(1-x)t]^{\frac{5}{3}}(1+t)} = \chi(\vartheta)\, T_2\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\middle| x\right),$$

avendo indicato con ϑ un conveniente numero compreso fra 0 ed 1; il che, tenendo presente la (48), mostra che I_2 è finito ancorchè x si faccia tendere allo zero.

Passando ora al primo integrale, fissiamo in un modo qualsiasi due valori t' e t'' di t, il primo compreso fra 0 ed 1 ed il secondo maggiore di uno, e spezziamo I_1 in tre integrali I_1', I_1'' ed I_1''' estesi rispettivamente agli intervalli $(0, t')$, (t', t''), $(t'', +\infty)$. Nel primo di questi intervalli la funzione integranda, *al più*, diventa infinita d'ordine 1/3 per $t=0$, e ciò nel caso che fosse proprio $x=0$, di guisa che I_1' è certamente finito, ancorchè $x \to 0$. Similmente, certamente finito è anche I_1''' perchè la funzione integranda è sempre finita per $t > t''$ e inoltre, escludendo che x possa raggiungere o avvicinarsi indefinitamente al valore 1, diviene infinitesima d'ordine 4/3 per $t \to +\infty$. Resta finalmente da considerare l'integrale I_1'' che, avvalendoci della formula (33) del Cap. prec., potremo scrivere

$$I_1'' = \left\{ \chi\left[\frac{x}{x+(1-x)t}\right] \frac{t^{\frac{4}{3}} \lg|1-t|}{[x+(1-x)t]^{\frac{5}{3}}} \right\}_{t=t''}^{t=t'} +$$

$$+ \int_{t'}^{t''} \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \chi\left[\frac{x}{x+(1-x)t}\right] \frac{t^{\frac{4}{3}}}{[x+(1-x)t]^{\frac{5}{3}}} \right\} \lg|1-t|\,dt ;$$

ma, in virtù delle nostre ipotesi, la derivata che figura sotto integrale è una funzione al più infinita d'ordine minor di 1 nell'intervallo d'integrazione; dunque anche l'integrale I_1' è finito, e ne segue la proposizione enunciata.

Da quanto precede si trae una conseguenza importante e cioè che, se non si vuole uscire dalla classe delle soluzioni della (E) cui si applica il teorema di unicità, *nella formula* (42) *deve porsi* $C = 0$. Infatti, essendo il limite dell' integrale per $x \to 0$ finito, se a C si attribuisse un qualsiasi valore non nullo, il limite di $\nu(x)$ per $x \to 0$ risulterebbe infinito d'ordine 4/3. Abbiamo dunque, in definitiva,

$$\nu(x) = \frac{3}{4} \left\{ \chi(x) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \overset{*}{\int_0^1} \left[\frac{y(1-y)}{x(1-x)}\right]^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x+y-2xy}\right) \chi(y)\, dy \right\}.$$

§ 6. — Torniamo ora alla formula (41) del Cap. prec., mediante la quale è stata definita la funzione $\chi(x)$, e sostituiamo in essa il valore trovato per $\nu(x)$; avremo così

$$\chi(x) = \frac{2}{3}\psi_1'(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial L_1(x,\xi)}{\partial x} \times$$

$$\times \left\{ \chi(\xi) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \overset{*}{\int_0^1} \left[\frac{y(1-y)}{\xi(1-\xi)}\right]^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{y-\xi} - \frac{1}{\xi+y-2\xi y}\right) \chi(y)\, dy \right\} d\xi$$

da cui, invertendo l'ordine dell' integrazione ordinaria e di quella « con asterisco » e ponendo

$$(50) \quad \begin{cases} L_2(x;y) = \dfrac{\partial L_1(x,y)}{\partial x}, \\[2ex] M(x,y) = L_2(x,y) - \dfrac{1}{\pi\sqrt{3}} \overset{*}{\displaystyle\int_0^1} \left[\dfrac{y(1-y)}{\xi(1-\xi)}\right]^{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{y-\xi} - \dfrac{1}{\xi+y-2\xi y}\right) L_2(x,\xi)\, d\xi, \end{cases}$$

si trae

$$(51) \qquad \chi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 M(x,y)\,\chi(y)\,dy = \frac{2}{3}\psi_1'(x).$$

La (51) è un'equazione integrale di Fredholm, 2ª specie, in $\chi(x)$; dico, per di più, che *si tratta di un'equazione regolare*, cioè che il suo nucleo $M(x,y)$ è una funzione finita e continua per $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

All'uopo, essendosi già dimostrato nel § 5 del Cap. precedente che la funzione $L_2(x,y)$ è sempre finita e continua, basterà far vedere che anche l' integrale che figura nella 2ª delle (50) è tale. A questo scopo, seguendo un procedimento perfettamente analogo a quello usato nel § prec. per l' integrale I, osserviamo anzitutto che, con la sostituzione

$$\frac{y(1-\xi)}{(1-y)\xi} = t,$$

l'integrale in discorso, che indicheremo brevemente con G, può porsi sotto la forma

$$G = \int_0^{*\infty} L_2\left[x, \frac{y}{y+(1-y)t}\right] \frac{t^{-\frac{1}{3}}\,dt}{[y+(1-y)t]^{\frac{1}{3}}(t-1)} +$$

$$+ \int_0^{\infty} L_2\left[x, \frac{y}{y+(1-y)t}\right] \frac{t^{-\frac{1}{3}}\,dt}{[y+(1-y)t]^{\frac{1}{3}}(t+1)} .$$

Anche qui considereremo per primo il secondo integrale, G_2, cui possiamo applicare il primo teorema della media ottenendo

$$G_2 = L_2(x, \vartheta') \int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{3}}\,dt}{[y+(1-y)t]^{\frac{1}{3}}(t+1)} = L_2(x, \vartheta')\, T_2\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \middle| y\right), \quad (0 < \vartheta' < 1),$$

il che, tenendo conto delle (47) e (48), mostra come G_2 sia sempre finito, ancorchè y si faccia tendere a 0 o ad 1.

Passando ora allo studio del primo dei due integrali la cui somma costituisce G, spezziamolo, con la stessa regola seguita per I_2, in tre parti, G_1', G_1'' e G_1''', estese rispettivamente agli intervalli $(0, t)$, (t', t''), $(t'', +\infty)$, ed osserviamo che, supposto $0 \leq y \leq 1$, nel primo di questi la funzione integranda, alla peggior lettura $(y=0)$, diviene infinita d'ordine $2/3$ per $t=0$; mentre nel terzo si conserva sempre finita e diviene infinitesima, nella peggiore delle ipotesi $(y=1)$, d'ordine $4/3$ per $t \to +\infty$. Ne segue che gl'integrali G_1' e G_1''' sono sempre finiti al pari di G_2, epperò tutto sta a vedere come si comporta l'integrale G_1'', che, avvalendoci della (33) del Cap. precedente, potremo scrivere sotto la forma

$$(52)\quad G_1'' = \left\{ L_2\left[x, \frac{y}{y+(1-y)t}\right] \frac{t^{-\frac{1}{3}} \lg|1-t|}{[y+(1-y)t]^{\frac{1}{3}}} \right\}_{t=t'}^{t=t''} -$$

$$- \int_{t'}^{t''} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ L_2\left[x, \frac{y}{y+(1-y)t}\right] \frac{t^{-\frac{1}{3}}}{[y+(1-y)t]^{\frac{1}{3}}} \right\} \lg|1-t|\,dt .$$

Si vede da ciò la necessità di discutere la funzione $\partial L_2/\partial y$, per fare il che osserviamo che la formula (39) del Cap. V, con un'integrazione per parti, può scriversi

$$(53)\quad L(x, y) = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{\partial H(x, \xi)}{\partial \xi} \left\{ y^{\frac{2}{3}} \pm |\xi - y|^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{1-2y}\left[(1-y)^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right] \right\} d\xi ,$$

ove va preso il segno $+$ se $\xi > y$ e il segno $-$ nel caso contrario. Dalla (53), derivando successivamente rispetto ad x e ad y, si ricava, con qualche riduzione,

$$\frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \int_0^1 \frac{\partial^2 H(x, \xi)}{\partial x\, \partial \xi} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{|\xi - y|^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{(1-2y)^2}\left[\frac{1+y}{y^{\frac{1}{3}}} - \frac{1+\xi+y-2\xi y}{(\xi+y-2\xi y)^{\frac{1}{3}}}\right] \right\} d\xi ,$$

formula che, osservando: 1°) che il limite della funzione integranda per $y \to 1/2$ è finito, come si vede agevolmente con la regola di L'Hospital; 2°) che il rapporto $|\xi - y|/(\xi + y - 2\xi y)$ è sempre finito per $0 \leq \xi \leq 1$; può mettersi sotto la forma

$$\frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial x \, \partial y} = \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}} \int_0^1 \frac{R(x, y, \xi)}{|\xi - y|^{\frac{1}{3}}} \, d\xi ,$$

avendo indicato con R una funzione finita e continua. Ma l'integrale precedente è finito; dunque potremo scrivere ancora

$$\frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial x \, \partial y} = y^{-\frac{1}{3}} S(x, y) , \tag{54}$$

dove S denota una funzione sempre finita e continua.

Ciò premesso, deriviamo rispetto ad y la (23) del Capitolo precedente; avremo allora

$$\frac{\partial L_2(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 L_1(x, y)}{\partial x \, \partial y} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial^2 L(\xi, y)}{\partial \xi \, \partial y} \frac{d\xi}{(x - \xi)^{\frac{2}{3}}} ,$$

cioè, tenendo conto della (54),

$$\frac{\partial L_2(x, y)}{\partial y} = y^{-\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^1 S(\xi, y) \, (x - \xi)^{-\frac{2}{3}} \, d\xi ,$$

il che mostra che $\partial L_2/\partial x$ *è, al più, infinita d'ordine* $1/3$ *per* $y \to 0$.

Se ne conclude, per la (52), che anche l'integrale G_1'', al pari di G_1', G_1''' e G_2, è sempre finito, epperò il nucleo M è sempre finito e continuo. c. d. d.

Dalla proposizione ora dimostrata consegue ch'è lecito applicare all'equazione integrale (51) l'ordinaria teoria di Fredholm; e pertanto esisterà una, ed una sola, funzione $\chi(x)$ che la soddisfa, sempre che $1/2$ non sia parametro del nucleo M. Ma può $1/2$ essere un parametro del nucleo? Dico che ciò non è possibile.

Supponiamo infatti che $1/2$ sia parametro e supponiamo inoltre che, sul contorno di cui si parla nel teorema di unicità, siano stati deposti dei valori tutti nulli, e si voglia determinare, se è possibile, una soluzione regolare $\bar{z}$ dell'equazione differenziale (E) soddisfacente a queste condizioni al contorno. Si verifica immediatamente che, essendo i valori al contorno tutti nulli, la funzione $\psi_1'(x)$ risulta identicamente nulla; pertanto la determinazione di $\bar{z}$ dipende dall'equazione integrale omogenea

$$\bar{\chi}(x) - \int_0^1 M(x, y) \, \bar{\chi}(y) \, dy = 0 , \tag{51'}$$

dove $\bar{\chi}(x)$ è una funzione legata a $\bar{z}$ dalle stesse relazioni che legano $\chi(x)$ a z.

Essendo, per ipotesi, $1/2$ un parametro della (51), la (51') avrà certamente soluzioni non identicamente nulle: sia $\bar{\chi}_1(x)$ una di queste. A $\bar{\chi}_1(x)$ corrisponderà una soluzione regolare $\bar{z}_1$ della (E) annullantesi sulla curva σ e sul pezzo di caratteristica AC, *senza essere identicamente nulla*. Infatti, se $\bar{z}_1$ fosse identicamente

nulla, posto

$$\left(\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial x}\right)_{x=0} = \bar{\nu}_1(x),$$

anche $\bar{\nu}_1(x)$ dovrebbe essere tale, epperò, per la (41) del Cap. precedente, essendo nel caso in esame $\psi_1'(x) \equiv 0$, dovrebbe essere anche $\bar{\chi}_1(x) \equiv 0$, contrariamente al supposto.

Mostra quanto sopra che l'ipotesi che $1/2$ sia parametro della (51), porta alla conclusione che esiste almeno una soluzione regolare $\bar{z}_1$ della (E), annullantesi sulla curva σ e sul pezzo di caratteristica AC. Essendo tale circostanza in contradizione col teorema di unicità, se ne conclude che la precedente ipotesi è da rigettare.

Possiamo dunque risolvere senz'altro l'equazione (51); a tal uopo, detto in generale $N(x, y \mid \lambda)$ il nucleo risolvente di Fredholm che corrisponde al nucleo $M(x, y)$, poniamo per semplicità

$$N(x, y) = N(x, y \mid 1/2),$$

avremo allora

$$\chi(x) = \frac{2}{3}\psi_1'(x) - \frac{1}{3}\int_0^1 N(x, y)\,\psi_1'(y)\,dy. \tag{55}$$

La (55), essendosi a suo tempo fatto vedere che la funzione $\psi_1'(x)$ è sempre finita e continua, mostra che anche *la funzione $\chi(x)$ è sempre finita e continua, ancorchè si faccia tendere x a zero o ad uno. Invece la derivata prima $\chi'(x)$*, contenendo il termine $\psi_1''(x)$, *diviene in generale infinita d'ordine $2/3$ per $x \to 0$ e d'ordine $1/3$ per $x \to 1$* (cfr. Capitolo VI, § 4).

§ 7. — Calcolata che sia $\chi(x)$ per mezzo della (55), si sostituiranno i valori così trovati nella (49), e in tal modo si otterrà $\nu(x)$; quindi questi ultimi valori si sostituiranno in una qualsiasi delle equazioni del sistema (48) del Capitolo V, p. es. nella prima, e così finalmente si perverrà alla conoscenza della funzione $\tau(x)$; per mezzo della quale, supposto che risulti una funzione finita e continua, possono calcolarsi effettivamente, nel modo indicato nel § 1 del Capitolo V, i valori della soluzione di cui dobbiamo dimostrare l'esistenza.

Per ultimare la dimostrazione del teorema di esistenza, dobbiamo pertanto dimostrare ora, soltanto che *la funzione $\tau(x)$, calcolata nel modo suaccennato, risulta sempre una funzione finità e continua.*

A questo scopo cominciamo con l'osservare che la funzione $\nu(x)$ che, come si è già visto nel § 5, è sempre finita per $0 \leq x < 1$, *per $x \to 1$ diviene, al più, infinita d'ordine* $1/3$.

Infatti, l'integrale I del § 5 può anche porsi sotto la forma

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty *} \chi\left[\frac{x}{x+(1-x)t}\right] \frac{t^{\frac{1}{3}}\,dt}{[x+(1-x)\,t]^{\frac{5}{3}}\,(1-t)} -$$

$$- \int_0^{\infty} \chi\left[\frac{x}{x+(1-x)\,t}\right] \frac{t^{\frac{1}{3}}\,dt}{[x+(1-x)\,t]^{\frac{5}{3}}\,(1+t)},$$

ossia, applicando il primo teorema della media al secondo integrale e chiamando brevemente I_3 il primo,

$$I = I_3 - \chi(\vartheta'')\, T_2\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\,\middle|\, x\right), \quad (0 < \vartheta'' < 1).$$

Ciò posto, spezziamo I_3 in tre parti nel solito modo ed osserviamo che le prime due sono sempre finite, ancorchè sia $x = 1$; potremo dunque scrivere ancora, indicando brevemente I_4 la somma di queste due prime parti,

$$I = I_4 + \int_{t''}^{\infty} \chi\left[\frac{x}{x + (1-x)\,t}\right] \frac{t^{\frac{1}{3}}\, dt}{[x + (1-x)\,t]^{\frac{5}{3}}\,(1-t)} - \chi(\vartheta'')\, T_2\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\,\middle|\, x\right)$$

ossia, applicando ancora una volta il primo teorema della media,

$$I = I_4 + \chi(\vartheta''') \int_{t''}^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{3}}\, dt}{[x + (1-x)\,t]^{\frac{5}{3}}\,(1-t)} - \chi(\vartheta'')\, T_2\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\,\middle|\, x\right), \quad (0 < \vartheta''' < 1)$$

da cui, aggiungendo e togliendo dal secondo membro la quantità sempre finita

$$I_0 = \chi(\vartheta''') \int_0^{*\,t''} \frac{t^{\frac{1}{3}}\, dt}{[x + (1-x)\,t]^{\frac{5}{3}}\,(1-t)},$$

si trae finalmente

$$I = I_4 - I_0 + \chi(\vartheta''')\, T_1\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\,\middle|\, x\right) - \chi(\vartheta'')\, T_2\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\,\middle|\, x\right). \tag{56}$$

Ma le (45) e (47) mostrano che il limite, sia di $T_1\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\,\middle|\, x\right)$, sia di $T_2\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\,\middle|\, x\right)$, per $x \to 1$ è infinito d'ordine $1/3$; dunque l'integrale I, epperò anche la funzione $\nu(x)$, diviene, al più, infinito d'ordine $1/3$ per x tendente ad uno.

In altri termini, la funzione $\nu(x)$ può rappresentarsi con la formula

$$\nu(x) = (1-x)^{-\frac{1}{3}}\, n(x), \tag{57}$$

dove $n(x)$ denota una funzione sempre finita e continua.

Finalmente sostituiamo l'espressione (57) nella prima equazione del sistema (48) del Capitolo V; avremo così

$$\tau(x) = \varphi_1(x) + \gamma \int_0^x \frac{n(y)\, dy}{(1-y)^{\frac{1}{3}}\,(x-y)^{\frac{1}{3}}} \tag{58}$$

il che, divenendo la funzione integranda alla peggior lettura infinità d'ordine $2/3$ per $x = y = 1$, mostra che la funzione $\tau(x)$ è sempre finita e continua. c. d. d.

§ 8. — Con la determinazione della funzione $\tau(x)$ e la dimostrazione che questa funzione è sempre finita e continua, il problema *misto* è completamente risoluto.

Intendiamo dire con ciò, che ormai lo studio di qualsivoglia proprietà della soluzione di cui è stata dimostrata l'esistenza, per esempio, del comportamento delle sue derivate parziali sull'asse x, è sempre riducibile ad un problema in cui l'equazione (E) vien considerata o soltanto nel semipiano ellittico o soltanto nel semipiano iperbolico.

Ad ogni modo, poichè i calcoli precedenti ci hanno condotti alla funzione $\tau(x)$ attraverso a $\nu(x)$, possiamo approfittarne per discutere direttamente quest' ultima funzione, cioè i valori di $\partial z/\partial y$ sull'asse x.

Precisando meglio le cose, ci proponiamo ora di decidere se effettivamente la funzione $\nu(x)$ divenga, in generale, infinita d'ordine $1/3$ per $x \to 1$, oppure se questa singolarità, che sembra risultare dal § precedente, è soltanto apparente.

Per semplicità di calcoli ci limiteremo ora a considerare il caso che il contorno misto dato sia normale; però, siccome la risposta al precedente quesito sarà affermativa, cioè riconosceremo che la singolarità è effettiva, è chiaro che la conclusione sarà del tutto generale.

Nel caso che il contorno dato sia normale, si ha

$$L(x,y)=0 \quad , \quad \chi(x)=\frac{2}{3}\,\psi_1'(x):$$

epperò, per determinare $\nu(x)$, non occorre invertire l'equazione integrale (55), bensì si ha direttamente dalla (49):

$$\nu(x)=\frac{1}{2}\left\{\psi_1'(x)-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\overset{*}{\int_0^1}\left[\frac{y(1-y)}{x(1-x)}\right]^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{y-x}-\frac{1}{x+y-2xy}\right)\psi_1'(y)\,dy\right\}. \tag{59}$$

Ciò posto, ricordando che $\psi_1'(x)$ ha un zero d'ordine $1/3$ per $y \to 0$, poniamo

$$\psi_1'(x)=x^{\frac{1}{3}}\,P(x) \tag{60}$$

e, sostituita quest'espressione nella (59), operiamo indi la solita sostituzione (12); avremo così

$$\nu(x)=\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{3}}\left\{P(x)-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\overset{*}{\int_0^\infty}P\left[\frac{x}{x+(1-x)\,t}\right]\frac{2t^{\frac{4}{3}}\,dt}{[x+(1-x)t]^2\,(1-t^2)}\right\},$$

cioè, scomponendo in parti semplici la funzione razionale che compare sotto integrale,

$$\nu(x)=\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{3}}\left[P(x)-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left\{\overset{*}{\int_0^\infty}P(y)\,\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1-t}\,dt+\frac{1}{(1-2x)^2}\int_0^\infty P(y)\,\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1+t}\,dt+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2x^2}{1-2x}\int_0^\infty P(y)\,\frac{t^{-\frac{2}{3}}\,dt}{[x+(1-x)\,t]^2}\,dt-\frac{4x(1-x)^2}{(1-2x)^2}\int_0^\infty P(y)\,\frac{t^{-\frac{2}{3}}\,dt}{x+(1-x)\,t}\right\}\right],$$

dove, per brevità, si è scritto $P(y)$ in luogo di $P\{x/[x+(1-x)t]\}$; od anche, tornando alla vecchia variabile y negli ultimi due integrali,

$$v(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}\left[P(x)-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left\{\int_0^{*\infty}P(y)\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1-t}dt+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{(1-2x)^2}\int_0^{\infty}P(y)\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1+t}dt+\frac{2}{1-2x}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\int_0^1 P(y)\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{2}{3}}dy-$$

$$\left.\left.-\frac{4}{(1-2x)^2}x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}\int_0^1\frac{P(y)}{y^{\frac{1}{3}}(1-y)^{\frac{2}{3}}}dy\right\}\right].$$

Passiamo ora al limite $x\to 1$ osservando che i due integrali improprî sono manifestamente uniformemente convergenti perchè in essi x figura solo nell'argomento della funzione finita e continua P; avremo quindi

$$v(1-)=\frac{1}{2}P(1)\left[1-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\int_0^{*\infty}\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1-t}dt+\int_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1+t}dt\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\lim_{x\to 1}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\int_0^1\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{2}{3}}P(y)\,dy,$$

cioè, essendo la parentesi quadra identicamente nulla,

$$v(1-)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\lim_{x\to 1}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\int_0^1\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{2}{3}}P(y)\,dy. \tag{61}$$

Risulta quindi che, *in generale il limite di $v(x)$ per $x\to 1$ è infinito d'ordine* $1/3$, *e che, affinchè sia finito, è necessario e sufficiente che i valori deposti sul contorno misto siano tali da aversi*

$$\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}P(x)\,dx=0, \tag{62}$$

cioè, tornando da P a ψ_1, è necessario e sufficiente che sia

$$\int_0^1\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\psi_1'(x)\,dx=0. \tag{63}$$

In altre parole: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè il limite di $v(x)$ per $x\to 1$ sia finito è che la funzione $\psi_1'(x)$ sia ortogonale alla funzione $x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}$ rispetto all'intervallo* $(0,1)$.

Tenendo conto dell'espressione analitica di $\psi_1(x)$, è facile trasformare questa condizione in modo da renderla più agevolmente verificabile nella pratica. Precisamente,

con calcoli facili ch'è inutile star qui a riportare, si trova che, supposto che i valori deposti sul contorno misto normale siano rappresentati rispettivamente con le formule

$$(64)\qquad f = y\,\mathrm{F}(x)\quad,\quad \varphi = y\,\Phi(2x)\quad,\quad [\mathrm{F}(0) = \Phi(0)]\,,$$

dove x ed y sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata, la condizione precedente equivale all'altra

$$(65)\qquad \Omega = \Omega_0 + \frac{\pi\gamma}{\sqrt[6]{3}}\left\{\int_0^1 \frac{\alpha(1)-\alpha(x)}{x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{4}{3}}}\,dx - 2\int_0^{*1} \frac{x^{\frac{2}{3}}\,\beta(x)}{(1-x)^{\frac{1}{3}}(1-2x)}\,dx\right\} = 0$$

dove si è posto

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha(x) = x^{\frac{5}{6}}\int_0^x \frac{\Phi'(y)\,dy}{(x-y)^{\frac{1}{6}}}\quad,\quad \beta(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{F}'(y)\,dy}{[x^2+(1-2x)\,y]^{\frac{1}{6}}}\,,\\ &\Omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left\{\alpha(1) - 3^{\frac{5}{6}}\,\pi\gamma\,[\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(0)]\right\}.\end{aligned}\right.$$

Per esempio, per mezzo di queste formule si vede a colpo d'occhio che la condizione $\Omega = 0$ è soddisfatta nel caso della soluzione $z = y$, come effettivamente dev'essere perchè allora è sempre $\nu(x) = 1$.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 10° Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 5°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. XIV. Fasc 7°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. Fasc. 5°.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XX. Fasc. 7°-9°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

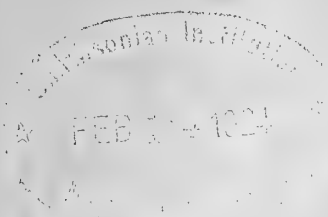
MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO VIII.

Prof. EMILIO REPOSSI

AZZURRITE E MALACHITE

DELLA MINIERA DI CAMPO PISANO (IGLESIAS)

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1923

RELAZIONE

letta dal Socio **Millosevich**, a nome anche del Socio **Artini**, nella seduta del 1° giugno 1923, sulla Memoria del prof. E. **Repossi**, intitolata: *Azzurrite e Malachite della miniera di Campo Pisano (Iglesias).*

Il prof. Emilio Repossi descrive in questo suo lavoro l'azzurrite e la malachite da lui osservate e raccolte nella calamina cavernosa della miniera di Campo Pisano presso Iglesias. Dopo un breve opportuno cenno sulle condizioni di giacitura, egli espone i risultati delle sue osservazioni sui cristalli di azzurrite; questi presentano un notevole interesse, sia per il gran numero delle forme semplici sicure (46), sia per il grande sviluppo di alcune di queste, a simbolo relativamente complicato, sia anche per l'abito non comune, costantemente tabulare secondo $\{101\}$; il Repossi aggiunge anche otto forme nuove nel lungo elenco di quelle già note per l'azzurrite, e calcola le costanti del minerale. La breve Memoria termina con la descrizione delle pseudomorfosi di malachite in azzurrite.

A nostro giudizio il lavoro del prof. Repossi porta un notevole contributo alla conoscenza della forma cristallina dell'azzurrite; l'esposizione è chiara e concisa; per questo la nostra Commissione propone che la Memoria sia integralmente stampata negli Atti dell'Accademia.

Azzurrite e Malachite della miniera di Campo Pisano (Iglesias).

Memoria di E. REPOSSI

presentata nella seduta del 15 aprile 1923

La miniera di Campo Pisano (¹), esercita dalla Società di Monteponi, è poco discosta da Iglesias e trovasi precisamente circa un chilometro a meridione di questa città.

La caratteristica di questa miniera, le cui condizioni di giacitura non si discostano da quelle delle altre miniere zincifere della regione, è una fitta frantumazione di tutta la massa mineralizzata ed una conseguente profonda alterazione. Il reticolato di filoni eruttivi di tipo diabasico, che la traversano, è affetto da una così accentuata alterazione, che nella maggior parte dei casi essi sembrano trasformati in un impasto argilloso, in cui riesce difficile riconoscere la stessa natura eruttiva della roccia (²).

Questo fatto, del resto, non è isolato, ed una notevole massa diabasica, affiorante presso la miniera, con la quale sono in evidente relazione i filoni sopra detti, è pur essa tanto alterata che nelle sezioni sottili non vi è più sicuramente riconoscibile nessun minerale e, tutt'al più, vi è serbata nella sua fisonomia caratteristica la struttura ofitica.

In probabile vicinanza di uno di tali filoni, in uno dei più profondi livelli della miniera, la calamina cavernosa, abbondantemente accompagnata da limonite, presenta per un piccolo tratto tutte le sue cavità tappezzate di cristalli di azzurrite, spesso completamente trasformati in malachite.

(¹) Debbo alla squisita cortesia degli ingegneri F. Sartori ed A. Binetti, della Società di Monteponi, l'aver potuto visitare la miniera di Campo Pisano per raccogliervi io stesso l'abbondante materiale che forma oggetto di questo studio. Un piccolo numero di esemplari mi era stato già antecedentemente donato dallo stesso ing. F. Sartori e dal signor C. Piga di Iglesias. A tutti questi signori vadano i miei ringraziamenti più vivi e sinceri.

(²) Credo che non sia senza interesse ricordare che alcuni di questi filoncelli si sono recentemente svelati abbastanza ricchi di piombo e argento da poter essere industrialmente sfruttati. In principio si utilizzavano solo gl'impasti argillosi in cui sono visibili sparsi cristalli di cerussite. In seguito si son presi in considerazione anche quelli apparentemente costituiti da sola argilla. I minatori avvicinano ad essi la fiamma delle lampade ad acetilene e riconoscono la presenza del minerale utile dal formarsi di goccioline di piombo ridotto: curioso saggio analitico questo, casualmente scoperto e poi regolarmente applicato dai minatori stessi.

Il fatto è pure ricordato nel « Notiziario » dei Resoconti della Associazione mineraria sarda dell'anno XXVI, 7 (Iglesias, 1921).

Il collegamento della venuta dei minerali di rame con un filoncello eruttivo sembra indubitabile, quantunque nel breve tratto in cui la galleria taglia il supposto filone non sia visibile se non una massa argilloso-ocracea, con sparse concentrazioni di silice opalina. In questo impasto argilloso si trova però diffusa, in quantità non scarsa, specialmente la malachite.

L'aspetto che presenta la calamina in quel limitatissimo punto del giacimento è quanto mai caratteristico. Le sue numerosissime cavità, alcune delle quali larghe parecchi centimetri, sono talvolta completamente tappezzate da una crosta cristallina di azzurrite, tal'altra sono sparse di cristallini isolati o riuniti a piccoli gruppi irregolari. E questi cristalli presentano tutti i gradi di trasformazione in malachite; e se non sono rari gli individui perfettamente sani, brillantissimi e trasparenti, non mancano neppure, anzi sono abbondanti, le pseudomorfosi complete di malachite su azzurrite.

La malachite, oltre che in questa forma, è presente in caratteristici ciuffetti di minuti individui aciculari, limitati però ai tratti di superficie delle cavità, che non sono coperte da azzurrite.

L'aspetto di questa associazione di minerali, che ricorda tanto da vicino per esempio quello dei minerali della celebre località di Otavi presso Tsumeb nell'Africa sud-occidentale, può far sperare nella presenza di altre specie interessanti, oltre la azzurrite e la malachite. In realtà poi, almeno nei campioni a mia disposizione, certo molto abbondanti, non ho potuto riscontrare se non la eccezionale comparsa di un gruppetto di mal formati cristalli di cerussite e in qualche esemplare abbondanti incrostazioni cristalline di calcite, prive di ogni interesse.

Il minerale di gran lunga più degno di studio appare dunque l'azzurrite.

Gli individui cristallini di questo minerale hanno di solito il diametro di pochi millimetri, ma in non rari casi le dimensioni loro si avvicinano al centimetro e lo superano. Essi, di consueto, formano fitte croste cristalline, in cui riesce difficile od anche impossibile separare individui abbastanza completi. E, di solito, anche là dove i cristalli sono riuniti a gruppetti essi sono così addossati l'uno all'altro che non se ne può ricavare un buon materiale per misure goniometriche; tanto più che spesso, piuttosto che con individui semplici, si ha che fare con vere associazioni subparallele o ventagliformi di cristalli.

Ma, fortunatamente, non mancano neppure degli aggruppamenti di individui, in cui i vari cristalli sono assai bene sviluppati, e cristalli isolati a sviluppo quasi completo; di guisa che non mi riescì troppo difficile ottenere, dai numerosi campioni raccolti, un copioso materiale da studio.

Già con una prima sommaria ispezione del materiale si rilevano due fatti: la costanza pressochè assoluta dell'*habitus* dei cristalli e la loro ricchezza di forme.

I cristalli infatti, siano essi aggruppati oppure isolati, hanno tutti un *habitus* nettamente tabulare ed in alcuni casi sono propriamente laminari; i cristalli grossetti e passanti ad un aspetto quasi prismatico sono eccezionali.

Essi sono di consueto impiantati o riuniti per un'estremità dell'asse y, che può essere la negativa o la positiva, e sono pure assai spesso alquanto allungati secondo questo asse. Non mancano però casi in cui la prevalenza di y è appena percettibile, mentre i casi in cui i cristalli abbiano uno sviluppo epidotico assai pronunciato sono rari.

Gli individui di azzurrite appaiono subito assai ricchi di forme. I cristalli poveri di facce sono una vera eccezione; ed anche gli stessi individui laminari, se osservati bene, mostrano i loro margini smussati da numerose faccette.

Fu quest'ultimo fatto, naturalmente, quello che mi indusse a studiare con qualche cura l'azzurrite di Campo Pisano, tanto più che, se in moltissimi esemplari, e specie in quelli con più grandi cristalli, le facce sono di consueto smosse e multiple, non mancano fortunatamente esemplari in cui i cristalli mostrano una rara perfezione e faccette pianissime e brillantissime.

E dico subito che le misure hanno svelato nell'azzurrite di Campo Pisano una ricchezza anche superiore a quella sin da principio supposta, e vengono a porla tra le azzurriti cristallograficamente più ricche che si conoscano. Non sono infatti meno di 46 le forme semplici in essa accertate con misure perfettamente attendibili, e di qualche altra ancora potrebbe darsi che nuove misure venissero a confermar l'esistenza. Non siamo dunque lontani dalle 50 forme semplici elencate dal Lacroix (1) per la classica azzurrite di Chessy, mentre, ad esempio, ci stacchiamo notevolmente da quell'altra pur bella azzurrite sarda di Calabona, per la quale il compianto Manasse (2) enumera solo 16 forme semplici.

Un altro fatto caratteristico fu inoltre svelato dalle misure: quello che i cristalli di Campo Pisano sono costantemente tabulari secondo il pinacoide $\{101\}$, abito questo decisamente raro nell'azzurrite, e corrispondente, non però interamente, al tipo IV stabilito dal Lacroix per l'azzurrite di Chessy.

L'azzurrite di Calabona, quando è tabulare, lo è per lo sviluppo prevalente del pinacoide $\{\bar{1}01\}$, molto comune. L'azzurrite di Rosas non è mai tabulare; quella di Gonnesa è tabulare secondo $\{100\}$ o secondo $\{001\}$.

---

(1) A. Lacroix, *Minéralogie de la France et de ses colonies*, III, pag. 751, Parigi, 1901.

(2) E. Manasse, *Azzurrite di Calabona presso Alghero* (Atti Soc. toscana d. sc. nat.; memorie, vol. XXIX, Pisa, 1913).

Le forme osservate da questo autore sono le seguenti: $\{100\}$, $\{001\}$, $\{110\}$, $\{101\}$, $\{\bar{1}04\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{\bar{2}01\}$, $\{023\}$, $\{021\}$, $\{223\}$, $\{111\}$, $\{221\}$, $\{\bar{2}45\}$, $\{\bar{2}43\}$, $\{\bar{1}34\}$. Tutte queste forme furono ritrovate anche a Campo Pisano.

Poco meno ricca dell'azzurrite di Calabona appare quella di Rosas, studiata da C. Riva (*Sopra la formazione diabasica e sopra alcuni minerali di Rosas nel Sulcis.* Rend. R. Istit. Lombardo, serie II, vol. XXXII, fasc. IV; Milano 1899), in cui questo Autore enumera quindici forme, fra le quali due nuove nella zona [010]: $\{\bar{7}02\}$ e $\{\bar{7}04\}$.

E dodici forme, di cui una nuova, la $\{032\}$, e una assai rara, la $\{\bar{2}25\}$, ha riscontrato F. Balzac nell'azzurrite di Gonnesa (*Osservazioni cristallografiche sull'azzurrite di Gonnesa.* Atti R. Acc. d. Scienze di Torino, vol. LV, Torino, 1920).

Gli abiti presentati da tutte queste azzurriti sarde, fra i quali rari e interessanti quelli di Gonnesa, sono interamente diversi e assai più variabili di quello dell'azzurrite di Campo Pisano.

L'azzurrite di Mara, studiata da F. Millosevich (*Appunti di mineralogia sarda. Il giacimento di azzurrite del Castello di Bonvei, presso Mara, con alcune osservazioni sulla formazione dei carbonati di rame naturali.* Rend. R. Acc. di Lincei, vol. XV, fasc. 11, 2° sem., Roma, 1906), non si presenta in cristalli misurabili.

Le forme semplici osservate sinora nell'azzurrite di Campo Pisano sono le seguenti:

{100} {201} {101} {001} {$\bar{1}$05} {$\bar{2}$09}* {$\bar{1}$04} {$\bar{3}$011} {$\bar{2}$07} {$\bar{3}$010} {$\bar{1}$03} {$\bar{2}$05}* {$\bar{1}$02} {$\bar{1}$01} {$\bar{5}$04} {$\bar{3}$02} {$\bar{5}$03} {$\bar{2}$01} {010} {320} {110} {120} {230}* {150}* {023} {011} {021} {051}* {223} {111} {221} {$\bar{2}$21} {125}* {243} {121} {241} {212} {$\bar{1}$23}* {$\bar{2}$45} {$\bar{2}$43} {$\bar{2}$41} {$\bar{1}$34} {$\bar{1}$41}* {$\bar{6}$83} {16 2 9}* {$\bar{2}$ 18 3}.

Di queste forme, le *nove* segnate con asterisco sarebbero nuove. Sono costantemente presenti nei cristalli le seguenti:

{100}, {101}, {001},

E pressochè costanti:

{110}, {023}, {011}, {021}, {223}, {221},

Molto frequenti:

{$\bar{3}$02}, {120}, {111}, {121}, {$\bar{2}$45}, {$\bar{2}$43}, {$\bar{2}$41}.

Sono ancora abbastanza frequenti:

{$\bar{1}$01} {201} {$\bar{2}$01} {$\bar{3}$010} {$\bar{2}$07} {$\bar{2}$09} {$\bar{1}$34}.

Mentre tutte le altre si presentano raramente e, nei cristalli da me scelti e misurati, solo una o due volte.

In generale, riguardo allo sviluppo delle varie forme presenti nei cristalli, si nota che, nella zona parallela ad y, dopo la {101} prevalente, è di solito marcatamente sviluppata la base {001}, mentre la {100} ha spesso un'estensione alquanto minore, fino a rendersi, in qualche caso, quasi lineare. Le altre numerosissime forme della stessa zona hanno un modo di presentarsi irregolarissimo; e se talvolta or l'una or l'altra di esse raggiunge uno sviluppo abbastanza notevole, di solito sono tutte pressochè lineari.

E pressochè negli stessi termini si trovano le cose in riguardo alle forme appartenenti alle altre numerose zone osservate. Sono spesso assai ampie le facce appartenenti a {023}, a {011}, a {021}, a {223}, a {221}, a {110}. Meno frequentemente hanno un grande sviluppo {$\bar{2}$45}, {$\bar{2}$43} e {120}. Ma tutte queste possono essere ridotte a minuscole proporzioni o mancare del tutto.

Le altre forme sono ordinariamente assai ristrette; ed in moltissimi casi, pur essendo presenti nei cristalli ed identificabili per la loro giacitura zonale, non si possono neppure misurare al goniometro.

Curioso il fatto che in uno dei molti esemplari raccolti sono pressochè costantemente presenti le facce, assai caratteristiche, di {$\bar{2}$ 18 3}, con un fortissimo sviluppo, tanto che gli individui ne ricevono una particolare fisonomia, mentre questa forma si riscontra eccezionalmente nei cristalli appartenenti alle altre geodine e con facce ristrettissime.

Questo fatto e la sopra accennata variabilità di sviluppo di molte delle forme riscontrate nell'azzurrite di Campo Pisano mi hanno indotto a moltiplicare le osservazioni ed a misurare un grande numero di cristalli; e se questi fossero tutti allo stesso grado di perfezione riscontrato in alcuni di essi, assai più lunga apparirebbe sicuramente la serie delle forme e delle misure elencate. Come pure credo che una nuova raccolta di ma-

teriale (per il momento non più possibile) potrebbe arricchire ancora la mèsse delle forme, già tanto numerose, della nostra azzurrite.

Riguardo ai caratteri delle varie forme fin qui osservate, noteremo quanto segue.

Le facce di {101} si presentano, nella maggior parte dei casi, alquanto smosse e sono quasi costantemente multiple. Però, di solito, nella serie delle immagini che si vedono al goniometro una prevale per luminosità sulle altre. Si nota anche assai spesso una fina striatura parallela allo spigolo di combinazione con {111}, ma non mancano per fortuna cristalli in cui le ampie facce di {101} sono perfette, con immagine unica e nettissima.

Nella ricca zona dei pinacoidi paralleli ad y la {001} e la {100}, oltre ad essere sempre presenti, con sviluppo prevalente della prima, sono quasi costantemente rappresentate da facce belle, talvolta bellissime, che permettono ottime misure su tutte le altre.

In qualche caso (parlo sempre dei cristalli scelti per la misura) esse presentano una più o meno marcata striatura parallela all'asse della zona, che però non altera sensibilmente l'aspetto dell'immagine, appena un po' slargata.

Nei cristalli più grandi ed in quelli aggruppati l'imperfezione delle facce è, come di consueto, assai maggiore; e questo vale anche per tutte le altre forme.

Nella stessa zona è rappresentata da facce buone, con impercettibile striatura, la {201}, che non è però molto frequente.

Tutti gli altri pinacoidi della zona appartengono al tipo $\{\bar{m}0p\}$ e fra questi prevale nettamente, sia per frequenza sia per la bellezza delle facce, $\{\bar{3}02\}$, mentre $\{\bar{1}01\}$, di solito abbastanza comune nell'azzurrite e non di rado prevalente sugli altri pinacoidi della zona, è assai più raro e meno perfetto nei cristalli di Campo Pisano.

Riguardo a questi due ultimi pinacoidi ed a tutti gli altri numerorissimi sopra elencati si possono fare alcune considerazioni generali. Innanzitutto si nota che essi sono, nella grande maggioranza dei casi, striati fortemente secondo l'asse della zona e spesso sono ridotti ad esilissime liste. Di quando in quando però or l'uno or l'altro di essi compare con facce abbastanza ampie e perfette: ciò che permette di tenerne conto nell'elenco delle forme.

Di solito, portando i cristalli al goniometro, mentre le immagini di {100}, {101}, {001}, e anche di {201}, quando c'è, sono nettamente separate l'una dall'altra, fra {001} e $\{\bar{1}00\}$ e fra $\{00\bar{1}\}$ e {100}, si ha una serie numerosa di immagini staccate di pochi gradi o di una frazione di grado fra le quali riesce difficile riconoscere le buone. Pertanto nella moltitudine di misure eseguite ho ritenuto opportuno conservare solo quelle che corrispondono alle rare facce riconoscibili senza dubbio alcuno e quelle che concordano in buon numero, entro limiti ragionevoli, scartando tutte le altre. Come ognuno può immaginare, tenendo conto di tutte le misure fatte, il numero delle forme appartenenti a questo gruppo sarebbe ancora cresciuto di molto. In genere, furono pure scartate tutte le misure che avrebbero portato a forme nuove, eccezion fatta delle misure rispondenti a $\{\bar{2}09\}$, che sono in numero di cinque, in soddisfacente accordo e buone, e l'unica corrispondente a {205}, perchè ottima e data da una bella faccia ben riconoscibile. Del resto sarebbe stato facile calcolare dalle misure fatte i simboli complessi di un'altra diecina di forme vicinali nuove, con quanto vantaggio della conoscenza cristallografica dell'azzurrite ognuno può facilmente intendere.

Il pinacoide {010}, raro nel minerale, fu osservato con qualche sicurezza solo in un cristallo e dubitativamente in altri, per causa dell'estrema piccolezza delle sue facce.

Anche nel caso in cui parmi che la presenza di }010{ sia indubitabile, la misura fu fatta solo a bagliore; e se non fosse il buon accordo delle misure col calcolo, eseguite in due zone diverse, non avrei ritenuto opportuno elencare anche questa forma per l'azzurrite di Campo Pisano.

Come appare dal quadro delle forme, la nostra azzurrite possiede cinque prismi paralleli a z. Di questi, }110{ è molto più frequente degli altri e rappresentato sempre da facce perfettamente piane e lucenti. Le immagini che esse forniscono sono fra le migliori, e solo in rari casi si presentano sdoppiate o multiple.

Meno frequente, ma pure fornito di buonissime facce, è il prisma }120{, e ancora meno frequente }320{, che di solito ha anche uno sviluppo molto minore dei primi due.

Una sola volta furono osservate facce di }230{ e di }150{, ma in entrambi i casi quelle erano riconoscibili senza dubbio alcuno e discrete. Tanto che l'esistenza di queste due forme, che risulterebbero nuove per l'azzurrite, sebbene fondata su una sola misura, mi pare sicura.

Ottime sono pure tutte le facce dei tre prismi paralleli ad x, più frequenti. Queste, che sono tra le più consuete forme dell'azzurrite di Campo Pisano, sono quasi costantemente associate, con sviluppo spesso eguale, e contribuiscono ad imprimere una particolare fisonomia a tutta una serie di cristalli, e specialmente a quelli che, pur essendo spiccatamente tabulari, hanno uno spessore abbastanza notevole. In molti individui le facce pianissime e lucentissime di questi tre prismi sono fra le più caratteristiche.

Sono ottime sempre ed in soddisfacentissimo accordo anche le misure ch'essi forniscono, tanto che gli angoli di uno di essi furono scelti fra gli angoli di partenza pel calcolo delle costanti.

In questa zona si è trovata una sola volta una faccia di }051{, che sarebbe nuova per l'azzurrite. Anche in questo caso, data la soddisfacente qualità della faccia ed il non meno soddisfacente accordo della misura col calcolo, si ritiene accertata l'esistenza della forma, nonostante la rarità della sua presenza nei cristalli di Campo Pisano.

La }223{, che di solito non è tra le forme più frequenti nell'azzurrite e che, ad esempio, è rara a Calabona e manca nelle altre azzurriti sarde, è una delle forme comuni nei cristalli di Campo Pisano ed in non rari casi il suo sviluppo prevale anche su quello di altre forme assai più frequenti. Le sue facce sono, di solito, anche assai buone; e se pure sono qualche volta un po' slargate per una lieve curvatura delle facce stesse, le misure si fanno bene e sono contenute entro limiti molto soddisfacenti.

E le stesse cose si possono ripetere pressochè negli stessi termini per il prisma }221{, che però se a Campo Pisano ha una frequenza equivalente a quella del precedente, di solito è assai più diffuso di questo. Non è raro il caso che le sue facce presentino una sottile striatura parallela allo spigolo di combinazione con }110{. Le misure sono buone e in buon accordo col calcolo.

La }111{ ha una frequenza non inferiore a quella di }223{ e di }221{, ma le sue facce hanno di solito uno sviluppo assai più ristretto e sono alquanto meno perfette. Frequente una striatura parallela allo spigolo di combinazione con }101{, fina e serrata.

Decisamente più rara la }$\bar{2}$21{, riscontrata solo poche volte con facce tali da dare misure attendibili. Il suo sviluppo sembra essere simile a quello delle altre forme ora citate della stessa zona.

Due zone interessanti, per la ricchezza delle forme che vi appartengono e per le modalità di sviluppo di queste, sono la $[\bar{2}10]$ e [210] determinate, oltre che dalla base e da {120}, dalle facce di ben otto prismi, e precisamente {125}, {243}, {121}, {241}, $\{\bar{1}23\}$, $\{\bar{2}45\}$, $\{\bar{2}43\}$, $\{\bar{2}41\}$. Di questi, alcuni sono frequenti, ed anche molto frequenti, come {121}, $\{\bar{2}45\}$ e $\{\bar{2}43\}$; altri assai meno, come $\{\bar{2}41\}$; altri infine decisamente rari.

Riguardo allo sviluppo delle varie forme, si nota pure un grande squilibrio ; e mentre in alcuni cristalli $\{\bar{2}45\}$ e $\{\bar{2}43\}$ sono rappresentati da faccette minuscole, in altri queste forme hanno facce notevolmente ampie. In genere, però, nell'azzurrite di Campo Pisano si tratta di facce di modestissime dimensioni, non di rado lineari o misurabili solo a bagliore.

Un fatto che mi parve di notare nei varii cristalli, è che là dove sono sviluppate le forme appartenenti alle due zone ora dette, siano invece assai ridotte le forme delle zone determinate dalla base con le quattro facce di {110}, e viceversa.

Le forme più frequenti hanno facce discrete e bene misurabili, salvo i casi in cui la loro piccolezza le renda difficilmente percettibili, e salve le facce lineari, che dànno in certe zone immagini enormemente dilatate.

Le {241} e {243} sono rare e quasi sempre mediocri. Una sola volta si sono riscontrate facce di {125} e di $\{\bar{1}25\}$. Anche in questo caso però la qualità delle facce stesse e il buon accordo della misura col calcolo sembrano mettere fuor di dubbio l'esistenza delle due forme, che sarebbero nuove per l'azzurrite. Frequente, ma sempre rappresentata da facce sottili listiformi, con immagini mediocri, è la $\{\bar{1}34\}$.

Una sola volta si sono pure osservate facce di $\{\bar{1}41\}$, di $\{\bar{6}83\}$ e di {16 2 9}. Le prime due di queste forme furono già trovate nell'azzurrite di altre località ; e, sebbene le relative facce siano mediocri, il sufficiente accordo della misura col calcolo permette di affermare con sicurezza la loro presenza. La {16 2 9} invece sarebbe nuova. Essa è rappresentata da una sola larga faccia, alquanto imperfetta, ma tale che non può ritenersi come una faccia di contatto, ed è esattamente in zona tra {201} e {111}. La inclinazione di questa faccia su (201), assai piccola, permette di considerarla come una vicinale di tale forma. Il simbolo calcolato è il più semplice che sia in soddisfacente accordo col dato d'osservazione, ma la sua complicazione induce a considerare questa forma come dubbia.

Più volte furono invece osservate tra {101} e {111} facce di {212}, forma rara nell'azzurrite, e in due casi tali facce, sempre ridotte ad esili liste, erano abbastanza ampie da dare buone immagini (1).

La $\{\bar{2}183\}$ è, sotto certi riguardi, la forma più singolare riscontrata nell'azzurrite di Campo Pisano, e si è già accennato alla eccezionalità della sua presenza. In molti cristalli essa è rappresentata da piccolissime facce, appena percettibili. Nei cristalli appartenenti ad un gruppo di geodine riunite in un solo campione, le facce di questa forma sono amplissime e veramente caratteristiche, tanto che si è creduto opportuno rappresentarle con la maggior fedeltà possibile in due disegni. Di solito tali facce, sebbene lucentissime, sono smosse ed ondulate tanto da non essere affatto misurabili ; ma in qual-

---

(1) Questa forma fu osservata da prima da G. Aminoff sull'azzurrite di Bisbee nell'Arizona (Arkiv för Kemi, Min. Geol., vol. VII, n. 7º ; 1919).

che caso si sono fortunatamente trovate facce ottime e si sono quindi determinate le loro inclinazioni su quasi tutte le altre forme caratteristiche dell'azzurrite di Campo Pisano, ottenendo valori in buonissimo accordo col calcolo. La complicazione del simbolo rende strani il modo di presentarsi e la frequenza di questa forma, le cui coppie di ampie facce imprimono a tutta una serie di cristalli una fisonomia affatto particolare.

La lunga serie delle misurazioni fatte sulle facce delle forme più frequenti, e la possibilità di scegliere tra queste misure un buon numero di valori riferentisi a facce ottime ed in soddisfacente accordo tra di loro, mi han persuaso a calcolare, per l'azzurrite di Campo Pisano, delle nuove costanti, sebbene i valori ottenuti dalle osservazioni in genere non si distacchino molto da quelli calcolati, ad esempio, dal Manasse per l'azzurrite di Calabona.

In un primo calcolo delle costanti ho tenuto come angoli di partenza:

(100). (001), misurato 29 volte con valori oscillanti tra 87°,26′ e 87°,50′ e con una media di **87°,42′**.

(001). (011), misurato 14 volte con valori oscillanti tra 41°.19′ e 41°.39′ e con una media di **41°,29**.

(100). (110), misurato 15 volte con valori oscillanti tra 40°,1′ e 40°,42′ e con una media di **40°,24′**.

Da questi valori medii si ottengono le seguenti costanti:

$$a : b : c = 0{,}85175 : 1 : 0{,}88492$$
$$\beta = 87°{,}42'.$$

Il ricalcolo degli angoli però mi ha dato delle differenze tra misura e calcolo, in qualche caso assai maggiori di quanto non mi facessero supporre la perfezione e il numero delle misure degli angoli di partenza.

Credetti quindi opportuno di sostituire l'ultimo dei tre angoli sopra citati con il seguente:

(001), (101), misurato 23 volte con valori oscillanti tra 44°,25′ e 45°,18′ e con una media di **44°,50′**.

Di modo che gli angoli fondamentali rimasero definitivamente i seguenti:

(100). (001) = 87°,42′;
(001). (011) = 41°,29′;
(001). (101) = 44°,50′;

e le costanti che se ne ottengono sono

$$a : b : c = 0{,}85385 : 1 : 0{,}88492$$
$$\beta = 87°{,}42',$$

le quali si avvicinano alquanto a quelle calcolate dal Manasse per l'azzurrite di Calabona e specialmente a quelle calcolate dal Farrington (¹) per l'azzurrite dell'Arizona, mentre si staccano da quelle dello Schrauf e più ancora da quelle del Lacroix, determinate per l'azzurrite di Chessy (²).

Mi pare però di poter notare che, se per la maggior parte degli angoli (e mi riferisco naturalmente ed in ispecial modo a quelli misurati un buon numero di volte su buone facce) l'accordo della misura col calcolo è maggiore per i valori dedotti dalle nostre costanti che non per gli altri, non mancano i casi opposti. Il che dimostrerebbe che, in verità, dal punto di vista cristallografico, l'azzurrite non è da porsi tra i minerali di maggiore perfezione.

Nella tabella dei valori angolari mi parve anzi opportuno riportare, oltre ai dati d'osservazione e di calcolo riguardanti l'azzurrite di Campo Pisano, anche alcuni valori calcolati con le costanti del Manasse, del Lacroix e dello Schrauf, che sono qui elencate in confronto con le prime

	a	b	c	β
Manasse	0.85755	1	0.88803	87°. 41′
Lacroix	0.8469	1	0.8789	87. 39
Schrauf...............	0.85072	1	0.88054	87. 36
Repossi...............	0.85385	1	0.88492	87. 42

Aggiungeremo, da ultimo, che non mi fu dato di rilevare la presenza di geminati. Non mancano invece associazioni subparallele di individui dotate di una tal quale regolarità ed aggruppamenti ventagliformi in cui i varii cristalli, riuniti per un'estremità di y, sono addossati l'uno all'altro in corrispondenza delle facce di (101). In genere, però, anche queste associazioni, che ricordano alquanto quelle descritte e illustrate dal Manasse per l'azzurrite di Calabona, non sono molto più evidenti di quelle che si osservano di solito nell'azzurrite, e prevalgono invece aggruppamenti privi di ogni regolarità.

(¹) O. C. Farrington, *On crystallized azurite from Arizona* (Amer. Journal of Science; vol. XLI, 1891); $a:b:c = 0.85676:1:0.88603$; $\beta = 87°37'$.

(²) A. Lacroix, op. cit. La maggior parte degli Autori accetta invece le costanti dello Schrauf, quantunque, come ben nota F. Balzac nel suo studio sull'azzurrite di Gonnesa, esse debbano ritenersi meno esatte di quelle del Farrington, accettate anche dal Toborffy pel suo studio sull'azzurrite di Tsumeb.

Angoli misurati	N.	Osservazioni limiti	Osservazioni medie	Calcolo azzurrite Campo Pisano	Manasse — azzurrite Calabona	Lacroix — azzurrite Chessy	Schrauf —
100.001	29	87°.26′–87°.50′	87°.42′	*	87°.41′	87°.39′	87°.36′
100.101	26	42.32–43.3	42.49	42.52	42.53	42.48	42.50
101.001	23	44.25–45.18	44.50	*	44.48	44.51	44.46
001.023	18	30.23–30.48	30.34	30.31	30.36	30.21	30.25
001.011	14	41.19–41.39	41.29	a	—	41.17	41.20 ½
023.011	20	10.37–11.00	10.52	10 58	—	10.56	10.56 ½
001.021	10	60.24–60.32	60.29	60.31	60.36	60.21	60.23
011.021	21	18.44–19.37	19.4	19.2	—	19.4	19.2 ½
001.051	1	— —	16.35	16.44	—	—	—
021.010	1	— —	29.48	29.29	29.24	29.39	29.37
021.02$\bar{1}$	9	58.53–59.5	58.59	58.58	58.48	59.18	59.14
100.320	2	29.11–29.51	29.31	29.38	—	29.25	—
100.110	15	40.1 –40.42	40.24	40.28	40.35	40.14	40.21
320.110	4	10.42–11.1	10.51	10.50	—	10.49	—
110.230	1	— —	11.32	11.32	—	—	—
100.120	7	59.30–59.47	59.40	59.38	—	59.25	59.31
110.120	7	18.56–19.34	19.11	19.10	—	19.9	19.10
120.150	1	— —	17.35	17.10	—	—	—
110.$\bar{1}$10	2	98.53–98.57	98.55	99.4	98.50	99.32	99.18
120.$\bar{1}$20	2	59.59–60.5	60.2	60.44	—	61.10	60.58
100.201	4	25.9 –25.39	25.20	25.19	—	25.16	25.18
201.101	4	17.20–17.33	17.27 ½	17.33	—	17.32	17.32
001.$\bar{2}$01	3	65.8 –65.36	65.25	66.7	—	66.12	66.11 ½
001.$\bar{5}$03	2	61.28–61.34	61.31	61.40	—	—	—
001.$\bar{3}$02	11	58.35–59.34	59.12	58.53	—	58.57	58.56 ½
001.$\bar{5}$04	1	— —	52.55	52.18	—	53.51	53.50
001.$\bar{1}$01	6	46.32–48.25	47.14	47.13	47.12	47.17	47.15
001.$\bar{1}$02	1	— —	27.33	27.55	—	27.55	27.52 ½
001.$\bar{2}$05	1	— —	22.44	22.51	—	—	—
001.$\bar{1}$03	1	— —	19.20	19.17 ½	—	19.19	19.17
001.$\bar{3}$010	4	17.18–17.45	17.31	17.28	—	—	—
001.$\bar{2}$07	4	15.51–16.36	16.7	16.1	—	16.31	16.40
001.$\bar{3}$011	1	— —	15.13	15.29	—	—	—
001.$\bar{1}$04	2	14.27–14.32	14.29 ½	14.20	14.39	14.30	14.39
001.$\bar{2}$09	5	12.47–13.16	13.5	13.5	—	—	—
001.$\bar{1}$05	3	11.36–12.7	11.51	11.48	—	11.49	—
001.223	8	41.13–42.00	41.30 ½	41.27	41.29	—	41.21
001.111	9	52.27–52.55	52.41	52.35	52.36	52 30	52.28
111.223	8	10.55–11.3	11.7 ½	11.8	11.7	—	11.7
001.221	8	68.13–68.44	68.21	68.19	68.19	68.24	68.12

Angoli misurati	N.	Osservazioni limiti	Osservazioni medie	Calcolo azzurrite Campo Pisano	Manasse — azzurrite Calabona	Lacroix — azzurrite Chessy	Schrauf =
111.221	9	15°.27′-15°.50′	15°.41′	15°.44′	15°.43′	15°.54′	15°.44′
001.110	12	88.3 -88.44	88.18	88.15	88.14	88.22	88.10
221.110	9	19.43-20.9	19.57	19.56	19.55	19.58	19.58
001.2̄21	1	— —	71 47	71.24	71.25	71.24	71.25
221.1̄10	1	— —	20.9	20.21	20.21	20.14	20.25
001.125	1	— —	22.28	22.7	—	—	—
001.243	2	52.37-53.25	53.1	53.3	—	52.54	—
001.121	1	— —	63.16	63.3	—	62.56	—
243.121	1	— —	9.52	10.—	—	10.2	—
241.120	1	— —	13.9	13.36	—	—	—
001.120	2	89.10-89.30	89.20	88.44	—	88.48	—
001.1̄23	1	— —	34.50	34.43	—	—	—
001.2̄45	7	39.42-40.12	39.55	39.49	39.53	39.42	39.43
001.2̄43	9	54.12 54.46	54.30	54.34	54.38	54.27	54.32
2̄45.2̄43	5	14.36-14.48	14.43	14.45	14.45	14.45	14.46
001.2̄41	9	76.53-77.40	77.11	77.23	—	77.21	77.25
243.2̄41	9	22.14-23.18	22.42	22.49		22.54	22.53
241.1̄20	3	13.49-14.23	14.1	13.53	—	13.51	—
121.241̄	4	39.18-39.35	39.27	39.34	—	39.43	—
001.1̄34	1	— —	35.57	35.44	35.49	—	35.37
001.2̄ 18 3	1	— —	79.41	79.43	—	79.38	—
100.223	2	57.43-57.57	57.50	57.47	57.49	—	57.42
100.023	1	— —	88.29	88.1	88.—	—	87.56
223.023	1	— —	30.5	30.14	30.11	—	—
100.221	—	— —	—	—	—	—	—
221.121	2	18.8 -18.10	18.9	18.12 $\frac{1}{2}$	—	—	—
121.021	2	26.42-26.48	26.45	26.47 $\frac{1}{2}$	—	—	—
100.021	3	88.51-88.52	88.51 $\frac{2}{3}$	88.52	88.52	—	88.49
021.2̄21	1	— —	46.3	46.9	—	—	—
221.1̄00	2	44.38-45.8	44.53	44.59	45.5	—	—
100.245̄	2	72.50-73.6	72.58	73.—	73.2	—	—
100.2 18 3̄	1	— —	83.8	83.8	—	—	—
101.212	2	15.31-16.29	16.—	16.45	—	—	—
101.111	12	30.20-31.17	30.46	31.3	—	—	—
212.111	2	14.8 -14.32	14.20	14.18	—	—	—
101.121	10	49.21-51.2	50.5 $\frac{1}{2}$	50.17	—	—	—
111.121	5	19.14-19.21	19.17	19.14	—	—	—
121.010	1	— —	39.51	39.43	—	—	—
111.11̄1	1	— —	62.11	62.6	—	—	—
121.12̄1	3	78.59-79.24	79.15	79.26	—	—	—

ANGOLI MISURATI	N.	OSSERVAZIONI		Calcolo azzurrite Campo Pisano	Manasse — azzurrite Calabona	Lacroix — azzurrite Chessy	Schrauf —
		limiti	medie				
320.101	2	50°.13′–50°.31′	50°.22′	50°.25′	—	—	—
101.023	12	51.59–52.46	52.17	52.21	52.22	—	52.14
023.$\bar{2}$21	3	53.44–54.—	53.52	54.1	—	—	—
101.22$\bar{1}$	4	73.48–74.12	74.2	73.38	73.41	—	73.36
320.22$\bar{1}$	2	22.23–23.17	22.50	23.13	—	—	—
110.101	11	55.29–56.58	56.5	56.7	56.11	55.66	56.1
101.011	5	57.16–58.25	57.41	57.55	—	—	—
011.$\bar{1}$10	6	65.54–66.9	66.4	65.58	—	—	—
120.221	12	27.21–28.6	27.45	27.44 ½	—	—	—
221.101	11	40.13–40.44	40.28	40.30 ½	40.36	—	40.22
101.223	11	26.51–27.48	27.26	27.34	—	—	27.27
223.021	11	41.52–42.36	42.14	42.—	—	—	—
101.021	6	68.47–69.55	69.25	69.34	—	—	69.28
021.$\bar{1}$41	1	— —	21.43	21.11	—	—	—
$\bar{1}$41.$\bar{1}$20	1	— —	20.32	21.—	—	—	—
021.$\bar{1}$20	11	41.25–42.36	42.7	42.11	—	—	—
110.201	1	— —	46.26	46.33	—	—	—
201.111	1	— —	35.33	35.14	—	—	—
201.16 2 9	1	— —	6.7	5.53	—	—	—
16 2 9.111	1	— —	29.26	29.21	—	—	—
111.243	1	— —	15.41	15.14 ½	—	—	—
111.021	2	41.31–41.37	41.34	41.35	—	—	—
243.021	1	— —	25.49	26.20 ½	—	—	—
021.$\bar{2}$41	3	32.13–32.46	32.34	32.49 ½	—	—	—
$\bar{2}$41.$\bar{1}$10	3	23.49–24.19	24.1	23.48 ½	—	—	—
021.$\bar{1}$10	3	56.31–56.41	56.35	56.38	—	—	—
023.$\bar{2}$45	6	19.22–19.37	19.32	19.34	19.32	—	19.35
023.$\bar{1}$34	6	12.29–12.44	12.36	12.42	12.40	—	12.42
$\bar{1}$34.$\bar{2}$45	6	6.42– 6.55	6.47	6.52	6.52	—	6.53
$\bar{2}$45.$\bar{2}$21	2	35.7 –35.18	35.12 ½	35.5	35.3	—	35.11
011.$\bar{2}$43	1	— —	25.49	25.50	—	—	—
$\bar{2}$43.$\bar{2}$21	1	— —	23.49	23.54	—	—	—
023.$\bar{2}$43	7	30.53–31.55	31.10	31.4	—	—	—
$\bar{2}$43.$\bar{1}$10	7	41.1 –41.29	41.19	41.28	—	—	—
$\bar{2}$43.$\bar{6}$83	1	— —	21.26	21.16	—	—	
$\bar{6}$83.$\bar{1}$10	1	— —	19.53	20.12	—	—	—
$\bar{2}$01.$\bar{2}$21	1	— —	38.1	37.59	—	37.46	—
$\bar{2}$01.$\bar{2}$41	2	57.1 –57.6	57.3 ½	57.22	—	57.10	—
$\bar{2}$21.$\bar{2}$41	1	— —	25.5	19.23	—	19.26	—
$\bar{2}$43.$\bar{2}$ 18 3	1	— —	32.35	32.40	—	—	—

Angoli misurati	N.	Osservazioni limiti	Osservazioni medie	Calcolo azzurrite Campo Pisano	Manasse — azzurrite Calabona	Lacroix — azzurrite Chessy	Schrauf —
$\bar{2}183\ 218\bar{3}$	2	25°.11′–25°.15′	25°.13′	25°.20′	—	—	—
$021.\bar{2}183$	3	20.24–20.26	20.25	20.24	—	—	—
$111\ \bar{2}183$	2	57.20–57.27	57.23 ½	57.39	—	—	—
$121\ \bar{2}183$	2	39.7 –39.9	39.8	39.17	—	—	—
$223\ \bar{2}183$	1	— —	32.35	32.40	—	—	—
$\bar{2}183.\bar{1}2\bar{1}$	1	— —	43.24	43.45	—	—	—
$\bar{2}183.\bar{2}2\bar{1}$	3	52.14–52.17	52.16	52.15	—	—	—

Nelle figure che accompagnano questa breve descrizione si è inteso specialmente di rappresentare, nella consueta orientazione, la fisonomia generale dei cristalli con un indi-

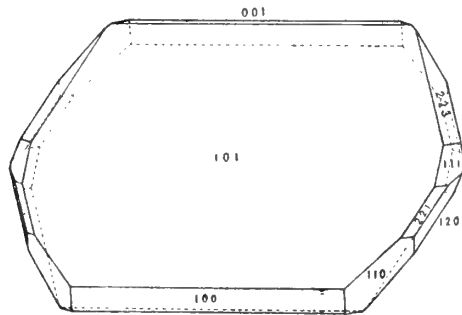
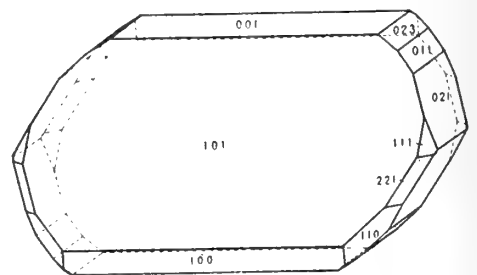



Fig. 1. Fig. 2.

viduo (fig. 1) laminare e con un individuo tabulare alquanto grossetto (fig. 2). Individui

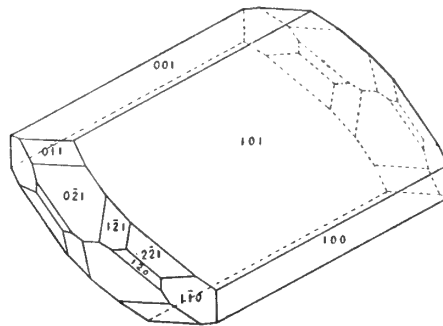



Fig. 3.

così semplici sono però relativamente rari. La fig.3, in cui, pur conservandosi la orientazione ordinaria, x è scambiato con y, rappresenta invece un cristallo un po' più ricco di forme.

Le tre figure 4–5–6 sono invece disegnate proiettando i cristalli su (010). La prima di esse rappresenta sia per la ricchezza delle forme [sia per il vario sviluppo di queste,

il più consueto aspetto dei cristalli di Campo Pisano, che furon scelti per la misura. Le altre due, che pure riproducono con la maggior fedeltà possibile cristalli misurati, dànno

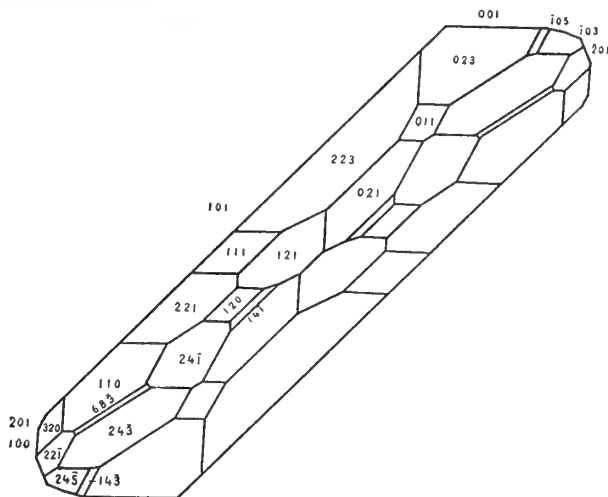



Fig. 4.

un'idea delle più singolari combinazioni cristalline trovate, con una grande sviluppo delle facce di $\{\bar{2}183\}$.

Nella proiezione stereografica (fatta sulla base) furono rappresentate tutte le forme finora osservate nella nostra azzurrite, eccezion fatta di alcune di quelle della zona parallela

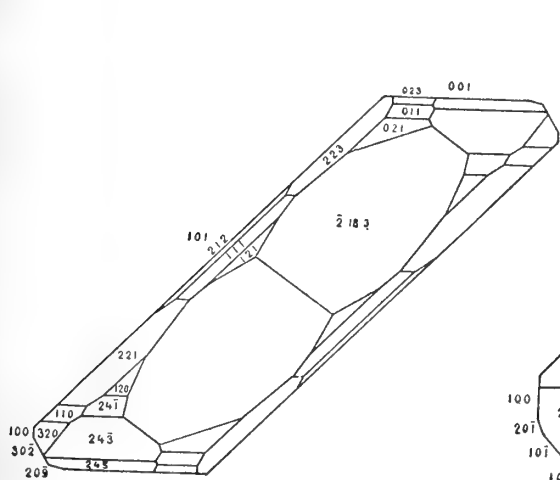
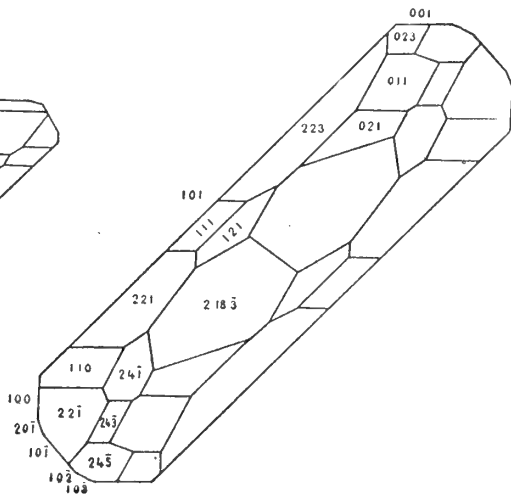
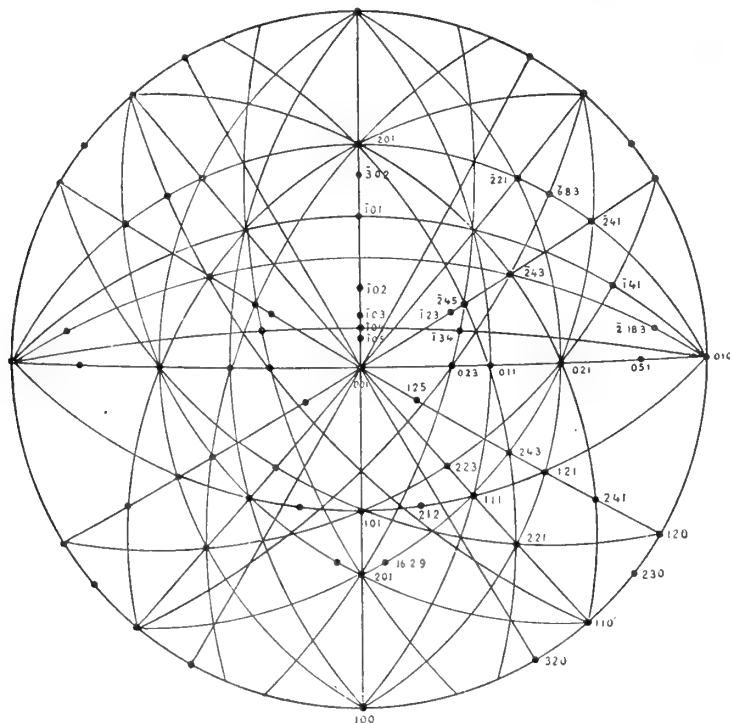



Fig. 5. Fig. 6.

ad y, sul cui valore cristallografico fu già detto più sopra. Le forme di quest'ultima zona che furono riportate sul disegno sono, naturalmente, le più caratteristiche e le più frequenti.

Ed ora, a guisa di conclusione di quanto si è detto fin qui, parmi di poter affermare che l'azzurrite di Campo Pisano è distinta dalle seguenti caratteristiche :

a) dalla costanza assoluta di abito ;

b) dallo sviluppo costante di {101}, tanto che tutti i cristalli sono tabulari o laminari secondo questo pinacoide, e dal prevalente allungamento secondo *y*. Questo abito è raro nell'azzurrite e se pure, ad esempio, il Lacroix cita per la classica località di Chessy

cristalli dotati di un analogo sviluppo, dalla semplice ispezione dei suoi disegni si rileva che, almeno ordinariamente, essi assomigliano assai poco ai nostri ;

c) dalla notevole ricchezza di forme. Quelle osservate finora sommano a 46e, anche se si vogliano scartare alcune delle forme della zona {010}, rimangono sempre almeno una quarantina. Questo numero pone l'azzurrite di Campo Pisano tra quelle più ricche che si conoscano ;

d) dalla frequenza di cristalli ricchi. Anche quelli che a tutta prima sembrano poveri spesso mostrano una moltitudine di faccette, minutissime magari e non misurabili, che complicano la combinazione cristallina ;

e) dalla presenza, non infrequente, di forme rare o relativamente rare nell'azzurrite, alcune delle quali con sviluppo spesso molto notevole. Caratteristico sotto questo riguardo il prisma {2183}, molto più frequente e molto più sviluppato di quanto ci si potrebbe attendere data la complicazione del suo simbolo ;

h) dalla presenza di otto forme nuove, alcune delle quali dotate di simboli semplici o relativamente semplici.

Come si è detto sin da principio, il giacimento di Campo Pisano offre un certo interesse anche per la frequenza delle pseudomorfosi di malachite su azzurrite. Aggiungiamo ora qualche altra considerazione su questo argomento.

La trasformazione dell'azzurrite in malachite sembra, in molti casi almeno, iniziarsi dal punto di inserzione dei cristalli sulla matrice. Si osservano individui che sono per la metà inferiore, aderente alla matrice, formati da malachite, mentre la metà libera è ancora azzurrite perfettamente sana. Spesso si ha anche una sorta di scheletro malachitico entro i cristalli di azzurrite. E pure non di rado mi parve di notare una neoformazione di azzurrite su individui interamente pseudomorfosati. In quest'ultimo caso si hanno individui minori di azzurrite perfettamente limpida appiccicati in posizione regolare su di un più grande individuo alterato, fatto questo ricordato anche dal Lacroix per l'azzurrite di Chessy.

Il caso più frequente è però dato dalle pseudomorfosi complete di malachite su azzurrite con una conservazione solo grossolana della forma primitiva.

L'azzurrite si trasforma in una malachite fibrosa a lucentezza sericea e di aspetto abbastanza elegante. Nella disposizione di queste fibre, che sembrano irraggiarsi da diversi centri posti sull'inserzione del cristallo alla matrice, non ho potuto riscontrare regolarità alcuna.

Durante la trasformazione, il cristallo perde alquanto della sua coesione e sembra rigonfiarsi. Solo in qualche caso, oltre alla fisonomia generale del cristallo primitivo, si conservano bene riconoscibili anche le facce principali.

Negli esemplari da me raccolti l'alterazione della azzurrite in malachite è abbondante, e sono in maggioranza quelli in cui più non c'è traccia del minerale primitivo inalterato. Tali esemplari, dal punto di vista collezionistico, sono spesso altrettanto interessanti che quelli e, come dissi, ricordano molto da vicino quelli di alcune classiche località.

La malachite, oltrechè sotto forma di pseudomorfosi, si osserva con una certa abbondanza, come si disse, anche in piccoli ciuffetti di cristallini aciculari molto caratteristici. Questi ciuffetti raggiati sono distribuiti in grande numero, regolarmente, sulle pareti di certe geodine e specialmente là dove non esistono sulla matrice altri individui di azzurrite o di malachite. È raro il caso che questi ciuffetti siano fissati sull'azzurrite o sulle pseudomorfosi di malachite.

S'è pure già detto che nell'impasto argilloso della vena eruttiva alterata, attraversante in quel punto il giacimento, è diffusa con una certa frequenza la malachite, mentre vi è eccezionale l'azzurrite.

Nelle geodi di Campo Pisano non si sono finora riscontrati altri minerali degni di speciale attenzione. Un gruppetto di cristalli di cerussite è in condizioni tali da non prestarsi in nessun modo a misura. In una parte dei campioni esiste un'abbondante in- crostazione di calcite in piccoli cristalli che ricopre gli altri minerali. Anche questa non merita uno studio.

Nella matrice calaminare ed ocracea, su cui sono fissati i cristalli, si notano concentrazioni compatte di limonite, ed una sottile spalmatura di questo minerale in alcuni tratti ricopre i cristalli di azzurrite, rendendoli inadatti alla misura cristallografica.

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 12° Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 5°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIV. Fasc 8°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. Fasc. 5°.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XX. Fasc. 7° 9°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXX 1923)

Serie quinta — Volume XIV — Fascicolo IX.

Dott. CARLO JUCCI

SU LA DIFFERENZIAZIONE DE LE CASTE NE LA SOCIETÀ DEI TERMITIDI

1. I NEOTENICI

REALI VERI E NEOTENICI
L'ESCREZIONE NEI REALI NEOTENICI
LA FISIOLOGIA DE LA BIOLOGIA

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RELAZIONE

presentata dal Corrispondente SILVESTRI relatore, a nome anche del Socio GRASSI, nella seduta del 18 dicembre 1921, sulla Memoria del dottore CARLO JUCCI, avente per titolo: *Su la differenziazione de le caste ne la società dei Termitidi - 1° I Neotenici. (Reali veri e neotenici - L'escrezione nei reali neotenici - La fisiologia de la biologia).*

Il dr. Jucci, col suo lavoro « Sulla differenziazione delle caste nella società dei Termitidi - I neotenici », affronta un problema biologico di sommo interesse, perchè cerca di precisare se le varie forme componenti la società dei Termitidi sono già tutte predeterminate nell'ovo oppure se si differenziano, almeno le neoteniche, da neonati uguali sotto l'azione di un nutrimento speciale. Egli tratta particolarmente della differenziazione degli individui neotenici, cioè delle regine e dei re di complemento e di sostituzione, argomento che negli ultimi tempi era stato ristudiato da autori nord-americani, i quali avevano sostenuto che i neotenici rappresentano forme completamente distinte fra loro e predeterminate tutte nell'ovo, contrariamente a quanto avevano dimostrato altri. Le accurate ricerche del dr. Jucci confermano, invece, che il cambiamento di cibo può arrestare lo sviluppo delle ninfe in un dato momento e far loro acquistare gli organi genitali maturi.

Molto interessante e affatto originale è la parte del lavoro che tratta del diverso metabolismo che si osserva nei neotenici e nelle altre forme. Nei primi egli scopre il differenziarsi di cellule ipodermiche in cellule ghiandolari escretrici, l'accumularsi di concrezioni nelle cellule pericardiali, il passaggio di prodotti di escrezione pigmentati granulari nei tubi malpighiani, la comparsa di prodotti simili nel tessuto adiposo e negli ovidotti.

Egli mette in evidenza la relazione che esiste tra il progredire dell'attività riproduttiva dei neotenici e l'aumentare del materiale pigmentario escrementizio, e ne trae ragionevolmente la conclusione che tale materiale si origina nei processi di ricambio degli ovarî durante il formarsi del vitello, mentre nei reali veri giovani, fino a quando essi provvedono da sè al proprio nutrimento e a quello della propria prole, si osserva solo l'accumularsi di urati nel tessuto adiposo e in seguito, quando la nutrizione della colonia è assunta dagli operai, anche nei reali veri compaiono depositi ptialurici nell'ipoderma, nelle cellule pericardiali, negli ovidotti. Mette ancora in evidenza che prodotti urosferitici nel tessuto adiposo si trovano in tutti gli individui di tutte le caste che si nutrono

di legno, e che scompaiono nei neotenici e nei reali veri vecchi, per azione di un diverso cibo; parallelamente alla scomparsa di detti prodotti si ha quella dei protozoi che vivono nell'ampolla cecale dell'intestino.

Dalle ricerche del dr. Jucci, che, come si è detto, contengono una notevole parte originale, scaturisce manifesta la correlazione tra presenza di urosferiti, regime alimentare legnoso e presenza di protozoi, e comparsa di prodotti ptialurici quale indice dei processi metabolici che si verificano in seguito al regime alimentare speciale a cui sono sottoposti gli individui neotenici.

Il lavoro del dr. Jucci è anche un contributo alla conoscenza del sistema escretore negli insetti.

La Commissione ritiene che il lavoro del dr. Jucci, per l'importanza dell'argomento e per il modo come è trattato, possa essere pubblicato intero nelle Memorie dell'Accademia.

Su la differenziazione de le caste ne la società dei Termitidi.
I. I Neotenici.
(Reali veri e neotenici. - L'escrezione nei reali neotenici. - La fisiologia de la biologia).

Memoria del dott. CARLO JUCCI

presentata nella seduta del 18 dicembre 1921.

(Con quattro tavole)

> La vita delle Termiti, o formiche bianche, dimostra colla massima evidenza che, malgrado le fatiche e le ricerche zelanti dell'uomo, la natura si compiace di celare gelosamente i suoi misteri. Perciò non sarà mai ripetuta abbastanza, a chi ha sete di verità, l'antica raccomandazione che dice: " CERCATE E TROVERETE ".
>
> A. E. BREHM
> (*La vita degli animali*).

INTRODUZIONE

PROGRAMMA

I. Il problema dei neutri.

Consigliato dal prof. Grassi a studiare « le Termiti e i loro parassiti », rivolsi subito la mia attenzione al gran problema della differenziazione delle caste.

A questo problema il Grassi aveva data una soluzione che fu generalmente accettata per lungo tempo, ma contro la quale, negli ultimi anni, si levarono voci discordi.

Il Grassi, senza poterne fornire prove irrefragabili, estese a tutte le caste il processo di differenziazione e sviluppo osservato dapprima e verificato sperimentalmente per una delle caste: i reali di complemento e di sostituzione.

Ora, se è facile ammettere che la diversa nutrizione possa provocare diverso sviluppo di genitali e più specificatamente la nutrizione salivare portare alla maturazione precoce delle gonadi, onde differenziazione di individui reali neotenici (analogamente a ciò che avviene nelle api), ben più difficile è sembrato ammettere che questa diversità di nutrimento causi la differenziazione delle due caste di neutri, gli operai e i soldati.

La seconda specialmente. Perchè gli operai possono considerarsi come individui arrestati nello sviluppo in cui l'atrofia dei genitali porti come conseguenza la mancanza dei caratteri correlativi alla maturità sessuale; ma i soldati no: i soldati, con la loro diversa organizzazione, appaiono almeno profondamente deviati dallo sviluppo normale.

Che questa diversa organizzazione sia una profonda deviazione dallo sviluppo normale ottenuta nel corso dello sviluppo per mezzo d'un cangiamento nella nutrizione, Bugnion non può indursi a crederlo:

« Il serait étrange », egli dice, « que le soldat dont la structure anatomique (*mandibules, menton, tentorium*) est si entièrement différente de celle du type primitif (*imago*), pût se différencier au cours de l'époque larvaire en suite d'un changement de régime ».

Ed è convinto che ben più profonda la causa e ben più precoce sia la differenziazione:

« Ma convinction est que la différenciation du type soldat remonte à une cause beaucoup plus profonde (mode spécial de fécondation?), analogue probablement à celle qui produit le sexe » (1910; pag. 135, *30*).

Una volta ammessa l'ereditarietà della casta per il soldato, finisce per estenderla alle altre.

Riconosce, è vero, che:

« Pour ce qui est de l'ouvrier, l'idée d'une différenciation tardive (liée à un arrêt de développement) est déjà plus plausible. L'ouvrier est, en effet, relativement à la structure de la tête, beaucoup plus voisin de l'imago ».

Ma, essendo, secondo Bugnion, presso gli insetti in generale il sesso determinato al momento della fecondazione, e non potendosi ammettere che i Termiti facciano eccezione al riguardo:

« Si le mâle et la femelle », egli dice, « sont déterminés déjà dans la phase embryonnaire, il doit, semble-t-il, en être de même de l'ouvrier ».

Conclusione alquanto arbitraria: perchè l'essere il maschio e la femmina determinati già nella fase embrionale, ci autorizza ad ammettere che anche gli operai lo siano, come maschi e femmine, ma non come operai.

Generalizzando dunque:

« Mon opinion », egli dichiara, « quant à la différenciation des castes, est que celle-ci s'effectue pendant la période embryonnaire (à l'intérieur de l'oeuf) ».

E, se si trattasse solo d'un opinione, potremmo... rispettarla, come vanno rispettate tutte le opinioni serie, e spiegarla psicologicamente come reazione ad una teoria troppo semplicista che pretendesse d'aver dato fondo al gran problema della differenziazione delle caste additandone il mezzo nel nutrimento. Ciò che non pretese il Grassi.

Che il nutrimento, *deus ex machina*, produca la comparsa di complessi di nuovi caratteri *ex nihilo*, dovè parere poco credibile allo stesso Grassi, che, accennando alcuni fatti che qui sarebbe troppo lungo esporre, riflette:

« Ciò farebbe credere che, restando sempre indiscutibili i meravigliosi effetti prodotti dalla diversità del nutrimento, siavi però, nell'intima struttura dei Termitidi, un terreno, a così dire, adattato opportunamente a produrli ».

Questo dal punto di vista della morfogenesi.

E poco sotto, dal punto di vista filogenetico:

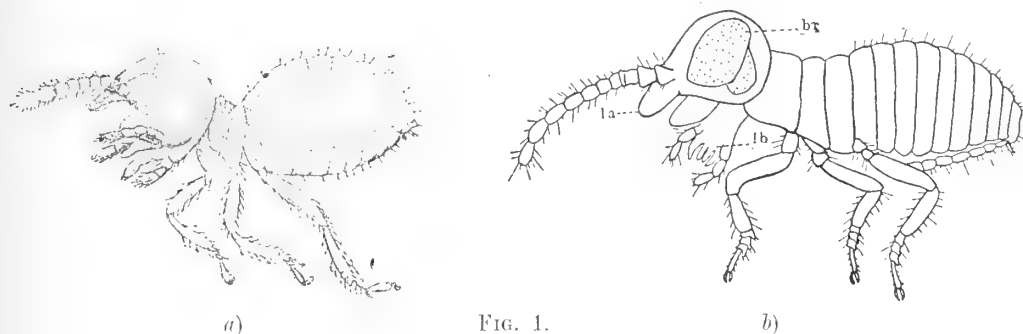
« È possibile, a mio parere, che i caratteri di operai, di soldati e d'individuo neotenico siansi manifestati repentinamente perchè, come ho sopra accennato, forse esistevano già tendenze latenti nei Termitidi ancora indifferenziati » (1893; pag. 107, *92*).

Se dunque si trattasse solo d'un'opinione... ma:

« Cette manière de voir », afferma il Bugnion, « est, pour ce qui concerne le soldat, fondée sur des preuves irréfutables ».

Perbacco! Sentiamole queste inconfutabili prove!

« Ayant, en décembre 1911, placé sous le microscope des larves fraîchement écloses d'*Eutermes lacustris* j'ai, après quelques recherches infructueses, trouvé une de ces larves, longue de 1.3 mm. (fig. 1 *a*) qui avait une corne frontal déjà distincte. Le même individu montrait par transparence une ampoule céphalique bien visible et un canal excréteur parfaitement conformé. Je ne pouvais m'y tromper: c'était bien un soldat en miniature qui ce trouvait sous mes yeux, un soldat formé de toutes pièces au sortir de l'oeuf! On sait que la présence d'une corne frontale est le trait caractéristique des soldats d'*Eu-*

a) Fig. 1. *b*)

a) *Eutermes lacustris* Neonato, lungo mm. 1,3, munito già del corno frontale e dell'ampolla cefalica che distinguono il soldato. Ingrand. 27 volte. Da Bugnion (pl. I 2, *34*).

b) *Eutermes pilifrons* Larva neonata, vista di profilo. la = labbro, lb = labio, br = cervello, Oc. 6, ob. 16, rid. a 1/2. Da Thompson (fig. 10, pag. 395, *214*).

termes, les autres castes (ouvriers et imagos) ne montrant aucune trace d'un tel appendice » (1913, pag. 5, *34*) (1).

(1) Il mio scetticismo circa «la inconfutabile prova» non si è dimostrato davvero eccessivo. Nel 1919 la Thompson, studiando 3 altre specie di *Eutermes*, *pilifrons*, *morio e sanchezi*, riconosce che i soldati (come già Grassi aveva trovato per *Reticulitermes* e *Calotermes* [1893] e Knower per un *Eutermes rippertii*? [= *pilifrons* Holm.; 1894, *128 b*] e Snyder [1915] confermato su R. *flavipes* e *virginicus*) non sono esternamente differenziati al tempo della nascita, ma conservano anzi, sino all'ultima muta, forma «vorker-like»; e dichiara: «Altough I am fully in accord with the wiew of Bugnion that the castes of termites are not produced by food or other external influences, and that they are due to intrinsic deepseated causes, I am inclined to believe, for several reasons ... that Bugnion's account of the newly hatched soldier (nasutus) nymph of E. lacustris may be capable of a different interpretation» (pag. 395, *214*).

E cioè: Bugnion, esaminando il suo neonato per trasparenza, in acqua o formolo, avrebbe scambiato il lungo labbro per corno frontale, il cervello per ghiandola frontale e l'esofago per dotto escretore della ghiandola stessa!!! (confronta figg. 1 *a*, 1 *b*).

Pare quasi impossibile che un distinto embriologo come Bugnion possa avere preso un granchio di questa portata!

A Bugnion, cui del resto dobbiamo tante interessantissime conoscenze sulla biologia dei Termiti, però va riconosciuto un merito: quello di avere riaperto, col suo errore, il problema della differenziazione castale, stimolando nuove, più profonde ricerche. Nelle nostre scienze positive il preconcetto teorico arriva spesso a falsare non solo l'interpretazione, ma l'osservazione stessa dei fatti; rende però in compenso, spesso, l'errore stesso fecondo.

Dunque il soldato uscirebbe tale dall'uovo? non si differenzierebbe, per deviazione dallo sviluppo normale, nel corso dello stadio larvale? Dunque le caste sarebbero ereditarie?

Ecco il problema.

Riprendiamo dunque minutamente lo studio delle neonate nel nostro *Termes lucifugus*. Osserviamone con paziente e scrupolosa attenzione un gran numero: vediamo se è possibile trovare una qualche differenza che mostri nelle piccole larve, testè uscite dall'uovo, predeterminazione verso questa o quella casta.

« La distinction des futurs soldats », avverte Bugnion, « est, chez les *Termites* vrais, plus difficile à établir. On peut cependant, grâce à la structure des mandibules, distinguer ici encore, dès le premiere âge, la larve du soldat d'avec celle de l'ouvrier » (pag. 6, *34*).

Ebbene, studiamo le neonate: misuriamole, confrontiamo la grandezza relativa della testa, lo sviluppo delle mandibole, contiamone le dentellature, contiamone i peli... Nulla. Nessun accenno della netta differenziazione che al 2º stadio ci farà distinguere, a vista d'occhio, i futuri neutri dai futuri sessuati.

Ma la mancanza di indici esterni non ci toglie il dubbio che la differenziazione esista. Un carattere ci vorrebbe, legato intimamente all'organizzazione di una delle caste e che quindi, colla sua presenza o meno...

Ma questo carattere esiste! È la glandola fontanellare. L'ampolla frontale degli *Eutermes* trova nel *Termes lucifugus* la sua omologa in una glandola retrocerebrale che s'apre per una fontanella nella faccia dorsale della capsula cefalica. Questa ghiandola, bene sviluppata nei soldati e negli adulti, è affatto rudimentale negli operai e nei sessuati di complemento.

Sarà la ghiandola fontanellare il carattere spia che strapperà il gran segreto di stato a questo piccolo popolo meraviglioso?

Purchè sia sviluppata nelle larve: perchè se il suo sviluppo fosse legato alla sua funzionalità (e nelle larve non funziona), pure fossero differenziate larve di soldati e di sessuati, esse non potrebbero riconoscersi per maggiore sviluppo della ghiandola.

Ma, a quanto pare, negli *Eutermes* la ghiandola è sviluppata anche nelle giovani larve, giacchè il famoso soldatino di Bugnion, se probabilmente non è un neonato, è però certo un'assai giovane larva. Ora la fontenellare del *lucifugus* è omologa all'ampolla frontale degli *Eutermes*. Come omologa è pure, a giudizio di Bugnion, la borsa latticifera dei *Coptotermes*, enorme sacco ghiandolare che occupa da solo la maggior parte del corpo.

« Il est clair qu'une ampoule tapisée d'épithélium représente un organe d'origine ectodermique invaginé à l'intérieur ».

« L'invagination doit se faire au niveau du pore frontal à l'époque où se différencie l'organisme du soldat, c'est-à-dir, suivânt nôtre manière de voir, dans la phase de l'embrion » (1910, *29*).

Benissimo: vedremo dunque quand'è che si differenzia l'organismo del soldato: anzi, tutto il problema delle caste riprenderemo sotto questo punto di vista, seguendo, attraverso tutti gli stadii, lo sviluppo della ghiandola fontenellare.

Maggio 1917

II. Il problema delle forme neoteniche.

Questo scrivevo nel maggio 1917, riassumendo a me stesso il problema come mi si poneva in base allo studio bibliografico e alle osservazioni fino allora compiute, e cercando di fissare un metodo di lavoro che mi avviasse alla soluzione del problema stesso.

Ma, tornando agli studi nell'aprile del '19, dopo la guerra, ho trovato spostati i termini del problema.

Bugnion ed altri non mettevano in dubbio la differenziazione della casta neotenica (reali di complemento e di sostituzione) a mezzo del nutrimento (saliva); solo si rifiutavano di estendere, col Grassi, questo processo di differenziazione all'origine delle caste di neutri · e il loro rifiuto *a priori* (motivato da ragioni teoriche) convalidavano con poche e frammentarie osservazioni sulla differenziazione primitiva delle caste. Ora, invece, autori quali Thompson e Snyder non solo affermavano di avere incontrovertibilmente dimostrata, in base allo studio dei caratteri strutturali interni, la differenziazione primitiva, intraembrionale delle caste neutri dalla casta sessuati; ma, per uno di quei processi di generalizzazione tanto pericolosi quanto seducenti, negavano recisamente anche la base sperimentale delle induzioni teoriche del Grassi: negavano, nonchè la differenziazione nel corso dello sviluppo a mezzo di cangiamento della nutrizione, l'esistenza stessa di individui reali neotenici, e, decretando lo « sfacelo delle fantastiche teorie del Grassi », sicuri della differenziazione intrinseca nell'ontogenesi, passavano ad affrontare il problema filogenetico.

Bisognava cominciare daccapo.

Non che i lavori della Thompson sul « The Brain and gland fontenellare of the termite castes » rendessero ormai superfluo il mio progettato analogo studio sul *Reticulitermes Lucifugus* (¹), che anzi diveniva sempre più opportuno ed interessante; ma appariva certo conveniente, allo stato presente della questione, rifarsi dalle fondamenta, riprendendo, nel *Calotermes flavicollis* che più si presta all'allevamento e nel *Reticulitermes lucifugus* che più vasto campo presenta all'osservazione, lo studio delle casta neotenica.

Aprile 1919

Mi è grato dovere esprimere la mia riconoscenza al prof. Grassi per la benevolenza con la quale mi ha ospitato al suo laboratorio, iniziandomi al bello studio dei Termiti.

Roma, Marzo 1920

Nel licenziare alle stampe il mio lavoro sento il bisogno di riesprimere a Battista Grassi il mio sentimento di sempre più viva gratitudine e di sempre più profonda devozione affettuosa.

La vera influenza che l'uomo di genio esercita non è immediata come non è transitoria. Io sento dentro di me, di anno in anno più grande, svilupparsi, come germe affidato al terreno, l'influenza del mio Maestro.

Portici (²), Dicembre 1923

(¹) *Reticulitermes L.* Homgren – *Leucotermes L.* Silvestri – *Termes L.* dei vecchi autori.

(²) Il mio pensiero ricorre con particolare riconoscenza alla prof. Foà che nell'Istituto bacologico di Portici mi ha permesso di continuare le mie ricerche, al prof. Silvestri, direttore della Scuola Superiore di Agricoltura, che mi è stato generoso d'incoraggiamenti, al prof. Grandi, del Laboratorio di Zoologia Agraria, che volle affettuosamente aiutarmi nella preparazione di disegni.

CENNI BIOLOGICI

La società del **Calotermes flavicollis**.

Lo studio di questa specie ha una storia molto limitata. Prima del Grassi, non si avevano se non poche imperfette notizie e di mero carattere sistematico (Hagen). Grassi nel suo classico lavoro (1893) illustrò in modo completo costituzione e sviluppo di questa, come dell'altra specie europea. Le mie ricerche, condotte nella campagna romana, generalmente confermano, anche per la cronologia dello sviluppo, le osservazioni compiute dal Grassi in Sicilia (prov. di Catania). Mi limiterò dunque a tratteggiare, nelle sue linee essenziali, in base alle osservazioni del Grassi da me direttamente controllate, il quadro biologico del *Calotermes flavicollis.*

È il *Termes lignorum* per eccellenza: abita esclusivamente nel legname e in genere nei tronchi delle vecchie piante ancor vive ma necrosate in qualche parte. Nelle regioni basse della campagna romana (Magliana, Maccarese) infesta a preferenza la quercia, la quercia da sughero ecc., ma invade anche le altre piante arboree (pino, ecc.) della zona. Nuovi nidi si formano in genere dove la necrosi è ancora limitata (ceppaie delle macchie tagliate); man mano che la parte necrosata va estendendosi, la colonia cresce, e, se la pianta muore, ma per l'umidità del terreno (presso acquitrini, lungo canali di scolo) non dissecca del tutto, il *Calotermes* continua a prosperare e ad accrescersi. Appunto nei grossi tronchi morti rinvengonsi le più numerose colonie.

Il *Calotermes* non costruisce un vero nido: non fa che scavare, rosicchiando il legno, gallerie di varie dimensioni, con allargamenti più o meno regolari ove accumula feccia e tritume; rispetta lo strato di corteccia che rimane a proteggere il nido dagli agenti atmosferici, e, man mano che la necrosi si estende, va approfondandosi nel tronco lasciando libere le parti superficiali che restano barricate dalla parte abitata da cumuli di feccia, e vengono per lo più invase da formiche.

Quando si apre un nido, i primi a comparire sono i soldati. Sporgono la testa minacciosi dalle gallerie e spalancano le mandibole aspettando che qualche nemico venga a loro portata.

Gli altri individui della colonia, larve e ninfe, invasi dalla paura, fuggono disordinatamente, o con movimenti convulsivi caratteristici (fissi i tarsi, spingono il corpo oscillatoriamente dall'avanti all'indietro) manifestano la loro inquietudine e diffondono l'allarme. Ma presto ritorna la calma, e gli abitanti del nido si affaccendano a trasportare in luogo più sicuro uova e neonati.

Talvolta un colpo d'accetta assestato verso il cuore del nido, ove la popolazione è più affollata, mette allo scoperto la coppia reale. Manca una vera cella reale: re e regina risiedono, di solito assai vicini, in una delle gallerie centrali; non di rado qualche soldato è di guardia all'ingresso.

I reali spiccano nettamente tra la popolazione circostante per il loro colore nero, proprio degli insetti perfetti: alle volte il re o la regina, o ambedue, si presentano bianchi

o giallastri, in abito di larva o di ninfa: la colonia, rimasta orfana di padre o di madre o d'ambedue, ha provveduto con individui reali di sostituzione.

La colonia non ha operai specializzati: qualunque lavoro può venire eseguito da qualsiasi individuo. Si vedono dei neonati trasportare un frantume di legno più pesante del loro corpo. Scavano gallerie tutti gli individui appena le loro mandibole sono sufficientemente robuste. Rosicchiano, trasportano feccia, uova, tritume anche i reali.

I soldati pure, oltre proteggere il nido dai nemici (e del resto pare che riservino le loro armi per i nemici maggiori; nei casi comuni provvedono alla difesa le ninfe e forse anche le grosse larve), s'adattano anche ad altri uffici, portando per es. sulle loro mandibole piccoli ed uova. Queste loro mandibole però non si prestano per rosicchiare il legno, e perciò i soldati restano molte ore della giornata inerti quando gli altri individui della colonia sono in grande attività (Grassi).

Dal mese di novembre a quello di aprile lo sviluppo dei Calotermiti è stazionario ed anche le uova svernano e attendono i tepori del maggio. Lo sviluppo allora ripiglia, la regina ovifica abbondantemente, le uova si schiudono, le larve crescono e subiscono una serie di mute. Le larve dei neutri possono divenir soldati l'anno stesso in cui nascono, ma le larve dei sessuati vengono sorprese dai freddi invernali in uno stadio ancora arretrato e raggiungeranno lo stato di insetti perfetti nell'anno successivo. Si sviluppano dal luglio all'ottobre. Abbandonano il nido pochi giorni dopo diventati neri. E siccome in uno stesso nido non diventano tali tutti contemporaneamente, sciamano man mano in piccoli gruppi. Così la colonia può frazionare anche in 10 o 12 sciami il suo contributo annuale alla propagazione della specie.

La società del Reticulitermes lucifugus.

Prima e più del *Calotermes flavicollis*, fu oggetto di ricerche il *Termes lucifugus*.

Già ben noto a Linneo, descritto nel 1792 da Rossi, studiato poi da Latreille (1796), verso la metà dell'800 s'impose all'attenzione degli entomologi per i gravi danni che causò nelle città della Charente-inférieure. Bobe Moreau (1843), Boffinet (1853), de Quatrefages (1853), Gassies (1855) s'interessarono sopratutto del lato pratico della questione, mentre Leone Dufour (1841), Joly (1849) e Lespès (1856) studiarono l'anatomia e la biologia dell'insetto.

Dopo la bella monografia del Lespès (*138*), contenente purtroppo ipotesi che la brevità delle osservazioni non permise all'autore di verificare, il *Termes* non sarà più oggetto di studi speciali fino al 1893 quando compare, preceduta da Note preliminari del Grassi (1885-89, *90* e *91*), la classica Memoria del Grassi e Sandias sulla biologia dei Termitidi europei [*92* [1]]. Nuove osservazioni vengono compiute da J. Pérez (1894) e Ch. Pérez (1907); Feytaud (1912) consacra un interessante lavoro all'etologia e alla anatomia del *Lucifugus* [*69* [1]]; Snyder (1915) ed altri in America, nello studiare le specie indigene dello stesso genere, parlano anche del nostro *Reticulitermes lucifugus*.

[1] A questa Memoria si riferiranno, salvo dove sarà altrimenti indicato, tutte le citazioni che dell'A. verranno fatte, risparmiando la notazione bibliografica.

Abita anch'esso nel legno, di solito nelle piante, tutt'altro che raro però nelle abitazioni. Ma alla parte necrosata degli alberi preferisce gli alberi morti, i vecchi ciocchi rammolliti, i tronchi tagliati e semidisfatti. Legno morto insomma che, come ben si comprende, è tutt'altro che adatto a mantenere un grado costante di moderata umidità come quello che il *Calotermes* sembra cercare; legno che si inumidisce e si secca a seconda degli agenti atmosferici. E sovente al nostro Termite non deve bastare ritrarsi nel mezzo del tronco a cercare l'umidità che sfugge dagli strati superficiali sotto i raggi cocenti del sole; o portarsi presso alla corteccia che il sole benefico rasciuga e riscalda dopo tanti giorni di pioggia. Non estranea a questa condizione di cose dev'essere l'abitudine migratoria caratteristica del *Termes*. «Mentre i *Calotermes* stanno limitati alla pianta che invasero primitivamente, i Termiti invadono man mano nuove piante, nuovo legname».

Una colonia di Termiti è capace di diffondersi rapidamente in una foresta. Nel sottosuolo le radici dei grossi alberi diramandosi formano una rete intricata; ed è sotterra, scavando le piccole radici, che i Termiti passano da un albero all'altro. Altre volte il passaggio avviene per anfrattuosità del terreno o, più di rado, addirittura all'aperto. Che le abitudini migratorie dei Termiti siano in relazione con la precarietà delle buone condizioni di esistenza nell'ambiente in cui vive (legno morto), lo mostra anche l'osservazione di nidi artificiali: quando il contenuto del vaso diventa improprio per la loro vita (troppo umido, ammuffito, troppo secco), i Termiti migrano in massa, e, se non vi riescono, muoiono. Queste migrazioni dai nidi artificiali o in via naturale da una parte all'altra di edifici sovente avvengono per gallerie tubulari o a doccia e per camini che i Termiti, «i quali sono perciò non solo minatori ma anche muratori», abilmente costruiscono.

Correlativa (non voglio certo parlare di una relazione causale) a questa differenza di abitudini tra i Calotermiti stazionari e i Termiti migratori è la presenza e lo sviluppo sovrabbondante nei secondi, di una casta che manca assolutamente nei primi: gli operai.

Il *Termes* vive sempre in numerosissime colonie, di migliaia e migliaia di individui; orbene, per la maggior parte essi sono operai. La testa grossa, munita di corte ma robuste mandibole, già dice in parte la loro funzione precipua: compiere tutti i lavori di costruzione e di scavo di cui la colonia ha bisogno.

Assai meno frequenti sono i soldati, dei quali la testa rettangolare, armata di lunghe e taglienti mandibole, indica a prima giunta la funzione caratteristica: la difesa della colonia. Come nel *Calotermes* dunque; però gli svelti soldatini del *Termes* mostrano, nell'esercizio di questa loro funzione, un istinto, uno spirito, a dir così, offensivo, molto più vivo che non i grossi soldati del *Calotermes*. E anche ciò appare in relazione colle abitudini diverse delle due specie. I soldati del *Calotermes* invero non hanno che da sbarrare il passo agli invadenti, agli intrusi; i soldati del *Termes* debbono altresì, nelle migrazioni della colonia, spianare la via alla penetrazione, spesso tutt'altro che pacifica.

Ma la grande caratteristica che la società del *Termes* presenta, rispetto a quella del *Calotermes*, è che la coppia reale vera, derivata da insetti perfetti sciamati, manca sempre; s'incontrano invece schiere di individui sessualmente maturi, facilmente riconoscibili al colorito giallo, spesso con macchie brune, addome rigonfio e peloso, corti abbozzi di ali più o meno sviluppati e rare volte mancanti: individui reali di complemento. Veramente, imbattersi in questi reali è tutt'altro che facile, e non solo perchè essi stanno

di solito in una parte molto recondita del nido, ma sopratutto perchè, delle piante invase dai Termiti, ben poche contengono reali. La pianta che ne contiene è, a così dire, una capitale, intorno alla quale s'estendono e dalla quale sembrano dipendere a guisa di città, sobborghi, villaggi, numerosissime colonie senza reali, propaggini più o meno stabili e vaste della colonia madre.

Questa condizione di cose è un adattamento secondario in evidente relazione colle abitudini migratorie della specie, per le quali, mentre gl'individui di complemento non mutano mai di sede, la popolazione dei *Termes* passa facilmente da un albero all'altro, trasportandovi anche uova e neonati ([1]).

Le uova trovansi nei mesi di maggio, giugno, luglio e schiudono un venti giorni dopo deposte. Dai neonati, per varî stadii giovanili, possono raggiungere nello stesso anno lo stato adulto i neutri, operai e soldati; ma non è così dei sessuati, che potranno acquistare le ali solo alla nuova primavera, superando quindi l'inverno, e due inverni anzi se, nati nell'autunno, hanno svernato allo stato di giovanissime larve.

La larva a grado a grado si accresce, presenta i primi accenni di ali, e merita il nome di ninfa. Lo sviluppo prosegue uniformemente: e la ninfa matura, cogli occhi già pigmentati, subìsce, in aprile o maggio, l'ultima muta, dalla quale esce insetto perfetto. I primi trasformati sembrano attendere gli altri e, dopo qualche giorno, in un bel mattino primaverile, sciamano in massa.

Appare ben strano che delle migliaia di alati sciamanti, che ogni colonia ogni anno produce, non uno riesca a fondare una nuova colonia: vanno tutti inesorabilmente perduti. Ma non per questo la diffusione delle specie è compromessa: come quelle piante che non si riproducono più o quasi affatto per semi, ma suppliscono ad usura coi varî mezzi di propagazione vegetativa, così il *Termes*, meglio del *Calotermes* con tutti i suoi alati fondatori di nuove colonie, più rapidamente e più abbondantemente si diffonde.

([1]) Recentemente (1920) Bugnion segnala «le Termite lucifuge dans les basses Pirénées» e trova, tra gli altri, un nido di qualche centinaio d'operai e larve e qualche ninfa e 6 soldati agglomerati alla faccia inferiore d'un pietrone. «La couple royal se déroba à nos recherches. La présence de nombreux nouveau-nés parmi les larves fait toutes-fois supposer qu'une femelle se trouvait à proximité, cachée dans le sous-sol; des œufs pondus par cette reine avaient probablement été portés sur la pierre par les soins des ouvriers afin de les faire bénéficier encore des derniers rayons du soleil automnal» (*35*).

I REALI DEL *TERMES* (R.) *LUCIFUGUS*

> Il en est de nos *Termites* comme de la plupart des choses de ce monde. Nous observons quelques unes de leurs habitudes; nous disons: elles font ceci, travaillent de cette façon, leurs reines naissent ainsi, leurs ouvrières restent vierges, elles essaiment à telle époque. Nous croyons le connaître et n'en demandons pas davantage : leur existence nous semble bien simple et bornée comme les autres aux soucis instinctifs de la nourriture et de la réproduction. Mais que l'oeil s'approche et tâche de se rendre compte, et voilà la complexité effroyable des phénomènes les plus naturels, l'enigme de l'intelligence, de la volonté, des destinées, du but, des moyens et des causes, l'organisation incomprehensible du moindre acte de la vie.
>
> M. MAETERLINCH
> (*Les abeilles*).

I REALI VERI

I diversi autori che hanno studiato il *Termes lucifugus* si sono occupati in modo particolare del re e della regina: questa sopratutto ha fermato la loro attenzione.

Léon Dufour, che per molti anni esplorò le lande della Guascogna, cercò a lungo invano la regina del *Termes*.

« Si vous êtes assez heureux pour découvrir la femelle (reine) du *Termes* », scriveva a Joly nel 1843, « je vous envie ce bonheur, car je ne l'ai jamais rencontrée, quoique cet insecte fourmille dans nos souches de Pin ».

Il successo coronò la perseveranza di Leone Dufour: nel 1849 egli annunciava a Joly di aver finalmente trovato, dopo 30 anni di ricerche, una regina di *Termes lucifugus*. Il disegno di Dufour, riprodotto da Joly con una descrizione sommaria in nota alla sua monografia (1849), parrebbe riferirsi a una regina vera, a giudicare dalla tinta scura della testa, del torace e delle placche addominali, sebbene non vi siano figurati i monconi alari (*123*).

Boffinet invece (1853) descrive la regina del *Termes* di Rochefort « presque blanche ou d'un rou pâle, longue de 8 à 10 millimètres, sans corselet, sans ailes », e dice di non conoscerla che per 7 esemplari trovati nel medesimo ciocco (*18*). Certamente questo autore non ha visto se non femmine di sostituzione.

Lespès (1856) raccolse 4 esemplari di regina che, dalla descrizione che egli ne dà, sembrano essere regine vere, caratterizzate dalla tinta nera e dalla porzione basilare delle ali. Veramente è strano che Lespès non abbia osservato i sessuati di sostituzione, pure così comuni nel *Lucifugus*. Ci si potrebbe domandare se le 4 regine che ha raccolto

sono tutte vere regine. Ma per lo meno una ne ha trovata, quella che ha disegnata e descritta [1].

Grassi (1893), non avendo mai trovato in alcun nido i veri reali del *Termes*, conclude: « La nota caratteristica della società fondata dal *Termes lucifugus* è la seguente: manca sempre la coppia reale vera, derivata cioè da insetti perfetti alati che hanno perduto le ali (tranne un moncone). Questa mia asserzione sembrerà ardita, ma, dopo di aver esaminato migliaia di nidi lungo un periodo di circa 7 anni, io posso sostenerla senza il più lontano timore di una smentita. Soltanto artificialmente, chiudendo cioè in vasetti di vetro, in parte riempiti di legno, dei *Termes* alati, si può arrivare ad ottenere piccole colonie fondate da una coppia reale vera. In natura non trovai mai nulla di simile. Una volta sola m'imbattei in una coppia reale vera e ancora senza uova nel mese di gennaio, ossia 6 mesi dopo la sciamatura » (pag. 55).

Grassi però si guarda bene dal generalizzare il fatto osservato e si chiede: « come devesi interpretare il fatto singolare offerto dai *Termes*, che cioè tutti gli alati vanno inesorabilmente perduti? Questa perdita irremissibile succede da per tutto? Non accadono in Francia casi frequenti in cui si verifica la fondazione di nuovi nidi come io ho descritto per i *Calotermes*? È questa una domanda a cui non posso rispondere con sicurezza perchè i fatti osservati in Francia da Lespès non sono del tutto sicuri, come ha già notato l'Hagen » (pag. 110).

Silvestri continua le ricerche compiute dal Grassi in Sicilia ed estese nel Lazio, senza trovare, anch'egli, coppia reale in alcuna colonia. Ammette però (1903) che possa aversi, all'inizio dell'esistenza della colonia, una coppia reale vera che sparisce ben presto, prima della fine del primo anno, lasciando a sostitutivi, scelti tra i suoi discendenti, la cura di continuare la sua opera. La colonia non potrebbe prendere la sua estensione se non con sessuati neotenici.

A questa opinione non contraddicono sostanzialmente le osservazioni compiute nel S-W della Francia.

Già Perris (1876) aveva trovato in giugno, entro piccole cavità del suolo, sotto un tronco di pino atterrato, due coppie di *Termes lucifugus*, ciascuna con 4 uova, e vi aveva visto l'inizio di nuove colonie (*177*); J. Pérez (1894) aveva dimostrato la possibilità, già ammessa del resto dal Grassi, di questa fondazione di nuove colonie per individui sciamanti [2].

Di tale possibilità Feytaud (1911) dà una dimostrazione più completa, osservando giovani colonie in natura ed ottenendone un gran numero coll'allevamento: « Après de nombreuses recherches, j'ai réussi à trouver dans la nature deux petites colonies en formation, analogues à celles de mes élevages. L'une, trouvée en avril dans un échalas un peu au-dessous du niveau du sol, renfermait, outre le couple d'imagos, six ouvriers, un soldat, deux nymphes et une quinzaine de larves de divers âges. L'autre, trouvée

[1] Vedi Feytaud: *Contribution à l'étude du Termite lucifuge*, pag. 500.

[2] Egli potè conservare 3 coppie viventi al laboratorio per 6 mesi dopo lo sciamamento: le ritrovò ad ottobre riunite in una cavità del legno con un uovo e 2 piccolissime larve. « Les Termites ailés provenant des essaims », egli conclude, « sont parfaitement capables de vivre sans le secours d'ouvriers de leur espèce, et leurs couples se développent en roi et reine fondateurs d'une nouvelle colonie » (*176*).

au mois de juillet suivant dans une pièce de bois enfoncée dans le sable de la dune, comprenait une vingtaine d'individus, dont cinq ouvriers jeunes.

Dan l'un de deux case il ne me fut pas possible de découvrir le roi, qui était sans doute tombé dans le sol au moment de l'ouverture de la galerie; dans l'autre il y avait, à côté de la reine, non pas un vrai roi, mais seulement un mâle substitutif. L'examen anatomique dex sexués de ces deux colonies et la comparaison avec ceux de mes élevages, me font penser que la couple pris en juillet provenait de l'essaimage de 1910, et que celui du mois d'avril avait essaimé en 1909, soit depuis près de deux ans» (pag. 521).

Più ancora che le osservazioni in natura, hanno interesse gli esperimenti del Feytaud circa la fondazione di nuove colonie per coppie d'insetti perfetti. Secondo il Feytaud, «gli insetti perfetti pervengono alla maturazione sessuale già fin dall'epoca dello sciamamento e possono accoppiarsi fin dai primi giorni che lo seguono. La deposizione delle uova può cominciare 15 giorni dopo lo sciamamento e aversi i primi individui verso la fine del 3º mese. «I primi nati divengono sempre operai. Dal 3º stadio essi cominciano a provvedere ai lavori del nido e alla alimentazione dei piccoli, uffici fino allora disimpegnati dai genitori. Assai presto, all'ottavo mese, la colonia presenta individui evolventisi verso la forma sessuata per assicurare la sostituzione eventuale dei fondatori.

«L'insetto perfetto subisce, per divenire re o regina, certe modificazioni anatomiche importanti. Le principali modificazioni esterne consistono nella caduta delle ali, di cui la squamma solo persiste, e nella distensione lenta e progressiva dell'addome, distensione che non diventa assai netta se no a partire dal 2º anno dopo lo sciamamento.

«Le modificazioni interne più importanti interessano il tubo digestivo e gli organi genitali, il tessuto muscolare e il tessuto adiposo.

«Il ventricolo chilifico s'allarga durante i primi mesi quando l'insetto perfetto si nutre di sostanza legnosa; si restringe più tardi, mentre il suo epitelio prolifera e secreta abbondantissimamente. L'ampolla cecale, tanto dilatata e riempita di protozoi nell'insetto perfetto fondatore, che si nutre esclusivamente di legno, perde i suoi parassiti e si riduce ad un semplice tubo nei vecchi reali nutriti esclusivamente della saliva degli operai. Gli organi genitali restano poco sviluppati finchè l'ampolla cecale è assai grossa; solo dopo la sua scomparsa essi si distendono.

«Il ritardo dello sviluppo genitale sembra essere dovuto non ad una castrazione parassitaria, conseguenza della presenza dei protozoi, ma all'influenza del regime alimentare.

«I muscoli che fanno muovere le ali, e che nello sciamante occupano quasi tutto il torace, spariscono entro 18 mesi dallo sciamamento. La degenerazione, che colpisce, indipendentemente gli uni dagli altri, i diversi fasci, ha luogo per due processi distinti: talvolta il mioplasma si contrae in una nodosità che s'isola, si rammollisce e si liquefà a poco a poco, contemporaneamente ai nuclei picnotici; tal'altra il sarcoplasma e i nuclei proliferano e s'individualizzano in cellule che inglobano e digeriscono il mioplasma liquefatto e che rappresentano veri fagociti.

«Il tessuto adiposo subisce, qualche anno dopo lo sciamamento, una trasformazione completa che porta alla comparsa di un nuovo tessuto adiposo. Questo tessuto reale si

forma sopratutto a spese delle vecchie masse adipose per penetrazione e proliferazione dei nuclei leucocitari. E a poco a poco gli elementi neoformati arrivano a sostituirsi completamente agli antichi » [1].

Dopo Feytaud, il *Termes lucifugus* non è più stato oggetto di studi speciali in Europa. Ma in America il genere *Leucotermes* è stato molto studiato e, oltre alle indigene specie *flavipes* e *virginicus*, sono state compiute interessanti osservazioni anche sul *lucifugus* (che, secondo Schwarz, è probabilmente nativo dell'America: Messico).

Già nel 1878 Hubbard aveva rinvenuto (« this ist the first istance know of a true queen in the genus *Termes* ») in una non grande colonia di *Termes*, probabilmente *lucifugus*, con uova, larve, operai e soldati, una regina lunga 13 mm. « wich certainly had been winged *(116)* »; e nel 1903 Heath, osservando il ciclo biologico del *Termes lucifugus* in California, aveva scoperto in natura 4 piccole colonie contenenti (oltre la coppia reale) la prima 7 uova e 6 piccoli, la seconda 9 uova e 3 piccoli, la terza 13 uova e 8 piccoli, la quarta 7 uova e una trentina d'individui, tra i quali larve di diversi stadî, parecchi operai e un soldato *(98)*.

In California anche Parker trovò due fertili regine di *Termes lucifugus*, una di 8, l'altra di circa 6 mm. di lunghezza *(171)*. Quanto al *Termes flavipes*, secondo lo Snyder (1915), i riproduttori di complemento o neotenici sono apparentemente più comuni nelle colonie, ma il reperto di vere coppie reali non è raro. Ad es., « a large fertilized true queen and a king of flavipes were found on August in a large colony associated with workers, soldiers, and young and several hundred unhatched eggs.... The king was hidden beneath the queen, which was about 14 mm. in lenght. The antennae of the queen were mutilated and the workers and soldiers were very solicitous. It is evident that the queen is fed on food prepared by the workers, since her abdomen became markedly shrunken when she was isolated » (fig. 2 *a*, *b*).

Ed ancora: « A large true queen of flavipes was found in a decayed oak stump on July 17, 1914. This queen, wich was oblong but somewhat quadrate – 4 mm. in width, was 14 ½ mm. in lenght (measured while alive) and in color had a slight tinge of greenish-yellow or opaqueness. The colony was very large. Numerous eggs were present in the galleries in the decayed wood, and the queen was found in an elliptical cell about 2 inches in the wood from the exterior: the sides of the cell were cleanly eaten out. The royal cell was situated about 1½ feet above the surface of the ground. The male was not found » (pag. 62, *198*) [2]. Nello stesso pezzo di legno, nota sempre Snyder, si rinvengono spesso parecchie giovani coppie reali, ciascuna in una cella

[1] Ved. Feytaud, op. cit. « Résumé et conclusions », pag. 603.

[2] Recentemente (1920) Snyder dà notizia di nuovi reperti tra i quali notevoli 3 coppie con regine lunghe, rispettivamente, mm. 10, 13 (e il re mm. 6, 5) e 15. Conclude: « Quasi tutte le regine di prima forma trovate sono grosse, ma nessuna supera, misurata vivente, i 14 ½ mm. di lunghezza. Da questa e dalle precedenti liste resta evidente che i riproduttori di prima forma sono non rari in colonie di *flavipes* negli Stati Uniti dell' Est » pag. 159, *200*). « Ma nella regione dei Great Plains pare che si approfondino molto nel suolo durante la stagione secca, giacchè non ne sono stati rinvenuti finora. Potrebbe darsi che le condizioni di questa regione sieno simili a quelle della Sicilia » (pag. 130).

angusta scavata nel legno e circondata da poche giovani larve (da 6 a 12) e qualche volta da uova. Sovente in una cella stanno 3 adulti invece di 2.

Queste osservazioni dimostrano che, oltre alla propagazione per diffusione con formazione di reali neotenici, nei *Leucotermes* in America avviene fondazione di nuove colonie per individui sciamanti come per il *Calotermes* in Europa: « un certo numero di alati, in seguito alla sciamatura, arriva a posarsi sui tronchi degli alberi, là dove questi

a) *b*)

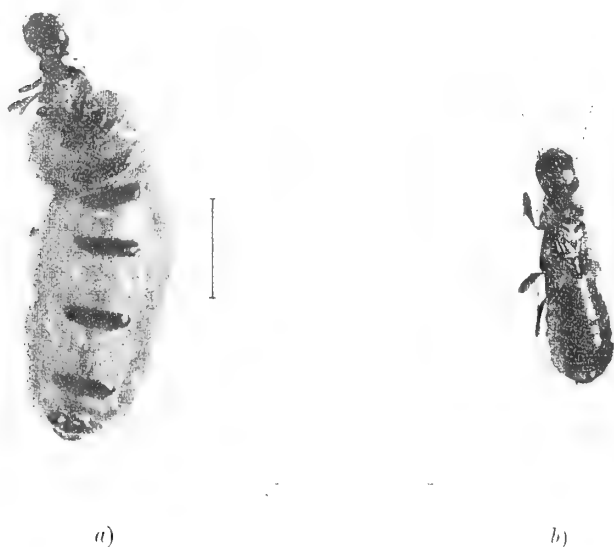



Fig. 2. — *Leucotermes* (R.) *flavipes*.

a) Re maturo, di forma normale, di parecchi anni di età. Esemplare eterizzato. Ingrand. 6 volte.
b) Regina vera, con monconi alari e pigmentazione castanea nelle parti chitinizzate. Ingrad. 6 volte. Da Snyder (pl. II, *199*).

sono cariati. Quivi, se il caso non li aiuta ad abbandonare le ali, abilmente se ne liberano e poscia cominciano a rodere il legno cariato. Quest'è l'occasione che fa incontrare individui di sesso differente: si appaiano ed ogni coppia comincia a fondare una nuova colonia » (Grassi, pag. 116).

Io, nelle mie ricerche (1917, '19, '20), condotte nella campagna romana, esaminando centinaia e centinaia di colonie, non ho mai trovato altri reali se non di complemento e di sostituzione. In Italia non è dunque ancora stato descritto un reale vero a capo di una colonia di *Termes lucifugus*.

Ma assoluta impossibilità che colonie possano venire fondate, anche in natura, da individui sciamanti non parrebbe ammissibile dopo i reperti in Francia ed in America.

In ogni modo sta il fatto generale che, se non mai, quasi mai trovansi a capo della colonia del *Termes* individui reali veri, derivati da insetti perfetti sciamanti.

« Come devesi interpretare questo singolare fenomeno? », s'era dimandato il Grassi.

Fritz Müller, mentre nega la possibilità che gli alati formino nuovi nidi e suppone invece che entrino in nidi orfani, ci porge con un confronto originalissimo la chiave per spiegare il fenomeno.

Egli paragona gli alati ai fiori perfetti e le supposte ninfe di sostituzione ai fiori cleistogamici. Gli alati, come i fiori perfetti, avrebbero per iscopo di rendere difficili le nozze consanguinee; le supposte ninfe di sostituzione, come i fiori cleistogamici, sarebbero riparo per sfuggire ai pericoli troppo grandi cui necessariamente vanno incontro gli alati.

Precisando, i Termitidi fabbricano, secondo Fritz Müller, individui reali di sostituzione solamente quando divengono orfani in un'epoca in cui non ci sono alati. In realtà le cose procedono differentemente; sta però sempre il fatto che le condizioni dei Termitidi trovano riscontro in quelle piante che hanno fiori perfetti e fiori cleistogamici. I Calotermiti sarebbero paragonabili a piante in cui i fiori perfetti produrrebbero semi, e i fiori cleistogamici non produrrebbero semi se non nel caso che cadessero i fiori perfetti. I *Termes* si potrebbero rassomigliare a piante in cui i fiori perfetti non produrrebbero semi, e li produrrebbero invece abbondanti i fiori cleistogamici.

La sciamatura separata dei maschi e delle femmine, da me scoperta, conferma perfettamente il confronto. In conclusione il fatto presentato dai *Termes* esprime un fenomeno successivo a quello che verificasi nei *Calotermes* » (pag. 110).

Il paragone di Fritz Müller appare veramente geniale, tanto più se si pensi che i botanici oggi dichiarano, sì, inadeguata la spiegazione teleologica che Herman Müller dava della cleistogamia [1], ma trovano i cleistogami essere formazioni di arresto differenziantisi dai fenomeni di sviluppo incompleto, così frequenti nei fiori, per il fatto che lo sviluppo dei fiori subisce sì un arresto ad uno stadio più o meno avanzato, ma, ciò nonostante, si ha la maturazione degli organi sessuali: fiori neotenici insomma, diremmo noi.

Di più, negano che la comparsa dei fiori cleistogami sia in rapporto causale colla mancanza di pronubi, ma la riconoscono dipendente da condizioni nutritizie (insufficiente quantità di sali e deficienza di luce). Infine, per le piante adattatesi alla cleistogamia ritengono non che i fiori cleistogami compaiano perchè i casmogami non maturano semi, ma che la formazione dei semi nei casmogami si arresta perchè son presenti i fiori cleistogamici [2]; proprio come io ho creduto dover ammettere per il *Termes*.

[1] Secondo Müller, nei progenitori delle attuali forme a fiori cleistogami sarebbero, per variazioni individuali, comparsi fiori con petali colorati più grandi e più piccoli sugli stessi rami (es. *viola tricolor*) e i micropetali, in conseguenza della non sufficiente visita degli insetti, si sarebbero trasformati in fiori cleistogami (*viola brasiliana* scoperta da Fritz Müller). Le due forme di fiori sono poi divenute separate nel tempo: sicchè i cleistogami compaiono come garanzia quando i casmogami vanno a male. Quella di alcune specie che portano fiori cleistogami soltanto (es. *viola biflora*) sarebbe una regressione occasionata da condizioni fisiche sfavorevoli.

[2] « Kleistogame blüten unterscheiden sich von den gewöhlichen bei Blüten sehr haüfigen Hemmungsbildungen dadurck das zwar die Entwickelung der Blüte auf einem früheren oder späteren Entwickelungstadium eine Hemmung erfahrt, die Reife der sexualorgane aber trotzdem eintritt... Die Kleistogamie ist vielmehr bedingt durck unzureichende Ernahrung verhältnisse... Fur manche Pflanzen ist die Fähigkeit kleistogame Blüten zu bilden deshalb von groser Bedeutung geworden, weil die chasmogamen bei ihnen nicht regelmäsig samen aüsetzen. Dar Verhältnis ist aber hier unge-

Non che i neotenici compaiano perchè gli insetti perfetti non sono più capaci di fondare nuove colonie — l'esperimento ne li mostra capacissimi; ma questa capacità vien meno perchè resa inutile dalla presenza dei neotenici.

Così il paragone genialmente concepito si mostra sempre più mirabilmente rispondente dopo che uno studio più completo e profondo ha meglio chiarita la natura dei fenomeni e nel campo zoologico e nel botanico.

Grassi, dunque, aveva riconosciuto, nel fenomeno che ci presentano i *Termes*, un adattamento secondario.

Di questo adattamento Silvestri cerca le determinanti e, non avendo rinvenuto tra i Termiti del Sud-America alcuna specie che possieda sempre o quasi soltanto individui reali di sostituzione, crede di trovare tali determinanti nelle condizioni del clima.

« Infatti nelle regioni tropicali la deposizione delle uova di Termitidi avviene durante tutto l'anno, e l'accrescimento della regina può durare continuo per molti anni in modo da renderla straordinariamente grande in confronto ad un alato e sommamente prolifica; invece nelle regioni temperate, al sopravvenire del freddo, cessa la deposizione delle uova ed anche l'accrescimento della regina diviene stentato, di modo che essa, non potendo diventare molto più grande di un alato e potendo solo dare un numero abbastanza limitato di uova, dovrebbe essere madre di una colonia molto piccola. Il *Termes lucifugus* però, come gli altri Termitidi, ha l'istinto di vivere in grandi società, ed è riuscito vittorioso sul clima sfavorevole fabbricandosi ogni anno molti individui reali di sostituzione, che nel corto periodo di un'estate possono, per il loro numero, deporre tante uova quante ne depone una sola ed enorme regina in un anno. Con tale interpretazione, che fino ad oggi non è corroborata da alcun fatto ma che mi sembra abbastanza plausibile, s'intenderebbe anche l'ufficio degli alati di *Termes lucifugus*, che io credo anche in natura (come accadde in un esperimento fatto dal Grassi e ripetuto più tardi dal Pérez), sarebbero destinati a fondare nuove colonie dove presto e sempre verrebbero sostituiti poi da altri individui derivati specialmente da ninfe con breve abbozzo di ali. *La colonia del « Termes lucifugus » è provvista di coppia reale vera forse solo nel primo anno della sua esistenza; più tardi solamente di individui reali di sostituzione* (1903. pag. 148, *196*).

Ma Feytaud non è di questo parere: questa sostituzione nello sviluppo ontogenetico della colonia gli sembra inverosimile. « Dans l'hypothèse de Silvestri, il faut supposer que la substitution des sexués de remplacement aux sexués vrais est due à un véritable calcul de la part des ouvriers: ceux-ci, supputant la supériorité de production de plusieurs reines substitutives comparée à celle d'une seule reine vraie, sacrifieraient la reine! ». E crede di poter spiegare senza di essa la rarità delle forme reali vere.

« La fragilité des sexués, la diffusion des colonies, la brièveté de la période d'essaimage, seule favorable à l'adoption des imagos, me paraissent expliquer de façon satisfai-

---

kehrt als es gewöhlih betractet wird: die kleistogame Blüten treten nicht auf weil die chasmogamen Keine samen ansetzen, sondern die Samenbildung in diesen kann unterbleiben weil kleistogame Blüten vorhanden sind ». Goebel Kleistogame blüten. *Biolog. Centralbl.* 1904.

sante la rareté des formes royales vraies chez le *L. lucifugus* et la très grande fréquence des formes royales substitutives..... (1).

D'autre part, si la disparition des reines vraies était déterminée par leur insuffisante fécondité, pourquoi le roi disparaîtrait-il aussi? Et les mêmes conditions de climat n'agiraient-elles pas de même sur le *Calotermes flavicollis* qui, nous le savons, présente presque toujours, dans chaque colonie, une reine vraie? » (pag. 506).

La prima obiezione è veramente notevole: in realtà se esistesse nei primordii della colonia una coppia reale vera, parrebbe ben naturale (2) che il re vero permanesse, costituendosi così un *harem* come quelli osservati da Fritz Müller (1873) in *Eutermes* e da Holmgren (1906) in *Hamitermes neotenicus* dove un bruno sultano circola tra un centinaio di bionde odalische (3).

Alla seconda obiezione potrebbe rispondersi che il *Calotermes* non ha l'istinto di vivere in grandi colonie, che insomma di ogni specie è specifica la reazione alle condizioni esterne di vita.

Ma tale risposta non mi sembra esauriente. Ricordo, piuttosto, che una certa differenza di condizioni ambientali tra le due specie esiste.

Il *Calotermes* occupa di preferenza la parte necrosata degli alberi ove trova quel grado costante di moderata umidità di cui sembra aver tanto bisogno (4).

(1) Questa spiegazione mi pare affatto insufficiente; perchè la fragilità dei sessuati e la brevità del periodo di sciamamento possono sì contribuire a spiegare la rarità delle forme reali vere, ma esigono a lor volta una spiegazione, non potendosi ritenere come condizione primitiva. Queste a me sembrano non cause determinanti l'adattamento alla sostituzione con neotenici, ma piuttosto effetti conseguenti all'adattamento stesso, indici della riduzione che la forma alata sciamante, ormai inutile, va subendo. Questa riduzione può essere più o meno affrettata o ritardata dall'influenza di condizioni climatiche: alla quale per es. sembra doversi attribuire il lungo periodo di sciamamento che il nostro *lucifugus* presenta in America (da ottobre ad aprile, secondo Heath), onde forse la minore rarità ivi di reali veri. Quanto alla « diffusion de colonies », vedi più innanzi.

(2) Tanto più naturale in quanto vediamo nel *Calotermes* i nidi orfanati, sia in natura sia in esperimento, fabbricarsi « soltanto un re se sono privi soltanto del re e soltanto una regina se sono privi soltanto della regina. In questi casi amoreggiano individui gialli con individui neri » (Grassi).

(3) Ultimamente (1922) Hill ha fatto interessanti osservazioni sulla biologia dell'*Hamitermes*. Manca sempre la regina vera, sostituita da ♀ neoteniche, da poche a cento e più. C'è invece spesso un re vero. Questo di rado si trova insieme ad una delle regine madri che stanno sparse isolatamente nel nido, ognuna al centro di un'area piena di uova e neonati. Più spesso si trova in una delle celle più larghe, con 10–40 reginelle di varia grandezza, alcune appena riconoscibili come tali, altre già evidentemente gravide di uova. A spiegare la mancanza costante della regina vera, Hill avanza un'ipotesi simile a quella del Silvestri.

Un piccolo numero di alati sopravvive allo sciamamento, sfuggendo agli attacchi nemici: si accoppiano e diventano i progenitori delle colonie. Queste per qualche tempo vivono in gallerie nel suolo; poi s'ingrandiscono sì che diventa possibile e quasi necessaria la costruzione d'una termitiera. Ma intanto i fondatori hanno compiuto la loro breve vita e il posto nella comunità è stato assunto da neotenici derivati da ninfe. Con ciò non resta spiegata la presenza di giovani re veri in vecchie termitiere (raramente il re può rappresentare il progenitore di tutta la colonia): chè se alati ♂ vengono trattenuti in colonia come mariti delle regine neoteniche, perchè alati ♀ non vengono trattenuti a sostituire le vecchie neoteniche? (pag. 388, *107*).

(4) Come nota il Grassi, negli allevamenti in provetta « il legno non deve essere nè troppo secco nè troppo umido. Nel primo caso si veggono i *Calotermes* a poco a poco rattrappirsi, disseccare e morire. Nel secondo caso, sulla parete interna della provetta si deposita del vapore acqueo e i Calotermiti

Il *Termes*, invece, suole invadere il legno morto (ved. cenni biologici) che si inumidisce e si secca, a seconda degli agenti atmosferici. A questa precarietà delle buone condizioni di esistenza nell'ambiente in cui vive non deve essere estranea l'abitudine migratoria caratteristica del *Termes* [1].

Ora è ragionevole supporre che, per questa tendenza diffusiva particolare, la sostituzione della coppia reale vera fondatrice (che nel *Calotermes* avviene così raramente, quando la colonia risulti orfanata) sia divenuta frequente nel *Termes* [2].

Così veniva a prendere importanza, allato alla fondazione di colonie per coppie d'individui sciamanti, la propagazione per diffusione delle colonie, con formazione di coppie reali di sostituzione quando la propaggine coloniale veniva a perdere i suoi rapporti colla colonia madre. Ma gl'individui neotenici hanno una potenzialità di sviluppo riproduttivo minore dei reali veri [3], e, d'altra parte, il *Termes*, come nota

---

muoiono, evidentemente per soverchia umidità, talvolta rapidissimamente come se fossero stati asfissiati o cloroformizzati. La morte lenta per soverchia umidità è accompagnata talvolta evidentemente da un rigonfiamento e arrossamento del corpo: l'arrossamento dipende da un batterio (pag. 5).

... In complesso sta il fatto fondamentale che ai Calotermiti, per vivere e prosperare, occorrono principalmente due condizioni: una certa temperatura ed un certo grado di umidità. Laddove però sino ad un certo punto la temperatura è loro tanto più confacente quanto più alta, invece il grado di umidità può oscillare soltanto in limiti assai ristretti » (pag. 10).

[1] Dico prudentemente « non dev'essere estranea », ma non è improbabile un diretto rapporto causale. Il *Calotermes* vive nella parte necrosata degli alberi e s'estende con questa. Quando l'albero è interamente morto e disseccato, il *Calotermes*, che non sa abbandonarlo, muore esso pure (come osservò Grassi). Ma il *Termes* ha sviluppato facoltà migratrici che gli permettono di abbandonare il nido divenuto improprio alla vita ed ha potuto così adattarsi a vivere nel legno morto, divenendo così padrone di un campo ben più vasto di quello che il *Calotermes* può sfruttare.

[2] Nota bene il Feytaud: « Tandis que les nids réguliers des espèces tropicales (*T. bellicosus, natalensis* [e, aggiungo io, Termitidi sud-americani] ceux mêmes du *Calotermes flavicollis* sont ramassés et concentrés, les nids du *Termite lucifuge* sont au contraire diffus et mal définis. L'habitude qu'a cet insecte de passer d'une souche à l'autre par l'intermédiaire des racines, dans la forèt, ou d'une pièce de bois à une autre, dans les maisons, par les chemins naturels qu'il y trouve (baguettes, plinthes etc), ou sous le couvert de galeries qu' il y construit, lui fait étendre et ramifier considérablement son nid et disperser sa colonie, dont le défaut de cohésion peut compromettre l'unité » ed aggiunge :

« Est-il téméraire de supposer que l'éloignement des diverses portions de la colonie favorise l'installation, dans les endroits écartés du nid, des sexués substitutifs et, avec la dispersion des lieux de ponte et d'élevage, l'extension croissante et peut-être ensuite le morcellement de la colonie? » (pag. 507).

A me non sembra affatto temerario e non capisco anzi... come potesse sembrarlo a Feytaud, dato che Grassi, 19 anni prima di lui, aveva scoperto il fenomeno e ricavatane la stessa considerazione.

[3] Nei *Calotermes* la regina è sempre piccola, appena più grande del re, onde, la potenzialità di sviluppo riproduttivo dei reali veri non essendo superiore a quello dei neotenici, la coppia reale di sostituzione è sempre unica (come osservò Grassi nel *flavicollis* e Silvestri nei Calotermiti sud-americani).

Ma nei Termitini la regina diventa di dimensioni enormi e fecondità prodigiosa e, la potenzialità di sviluppo riproduttivo dei neotenici rimanendo di molto inferiore, la colonia deve sostituire la regina vera con moltissime ♀ neoteniche, tante insomma da ottenere l'equivalenza. Difatti dalle belle osservazioni del Silvestri risulta che, essendo gli individui di sostituzione derivati da ninfe di seconda forma capaci solo di raggiungere dimensioni poco superiori a quelle degli alati, mentre gli individui di sostituzione derivati da alati bianchi (cui sono state mozzate le ali pochi giorni prima della sciamatura) sono capaci di raggiungere dimensioni non molto inferiori a quelle dei reali veri, quando la colonia provvede

Silvestri. ha bisogno di vivere in numerosissime colonie (questo bisogno è correlativo allo sviluppo della casta operai): onde nelle nuove colonie, formatesi per diffusione,

---

alla sostituzione coi primi, ne fabbrica un grandissimo numero; quando provvede coi secondi, ne fabbrica molto più pochi (ad es. in *Cornitermes cumulans* a sostituzione della coppia reale vera [regina lungh. corp. mm. 37 ; largh. add. 8] ha trovato solo un re e 9 regine, la più grande lungh. 20 mm., la più piccola 9,5).

Del resto Silvestri nota che « gli individui reali di sostituzione si trovano abbastanza frequenti nelle colonie di specie che fabbricano un nido basso sopra al terreno, mentre debbono essere molto rari, non avendone raccolti. in quei nidi che, per essere sotterranei (*Cornitermes striatus e longilabius*) o molto resistenti (*Cornitermes similis, Anaplotermes turricula, Eutermes Rippertii*), difficilmente vengono distrutti e, con la loro distruzione, uccisa la coppia reale vera » (*196*).

È ben certo dunque che nei paesi tropicali (Sud-America) la sostituzione con ♀ neoteniche alla regina vera è non determinata da aspirazione ad una maggiore fecondità, ma necessitata da mancanza (per morte o altro accidente) della regina vera ; e la pluralità di queste ♀ di sostituzione ha e raggiunge lo scopo non di superare ma di equivalere la capacità riproduttiva della regina vera.

Ora, dato che le condizioni del clima sono le stesse per la regina vera e per le ♀ neoteniche, favorevoli alla continuità dello sviluppo nei paesi tropicali, sfavorevoli nei nostri, mi sembra doversi ammettere che anche nel nostro *Reticulitermes* la pluralità di ♀ neoteniche è mezzo necessario per equivalere alla regina vera che manca e non mezzo scelto per raggiungere una fecondità maggiore di quella che una regina vera permetterebbe. Non nego affatto, del resto, che col progredire dell'adattamento questo secondo effetto, questa sovracompensazione siasi ottenuta ed abbia a sua volta stimolato le facoltà migratorie della specie. (Evidentemente allora la propagazione per diffusione è venuta ad avere, sulla propagazione per fondazione di nuove colonie da parte di individui sciamanti, il doppio vantaggio d'un assai più rapido non solo, ma anche molto più rigoglioso sviluppo della nuova colonia ; fenomeno analogo a quello che si verifica nelle piante superiori, dai corpi propagatori delle quali si sviluppano subito individui vigorosi fioriferi e fruttiferi, mentre gli individui che nascono dai semi hanno spesso bisogno di parecchi anni per raggiungere questo stato).

Si obbietterà : forse la regina vera del *Reticulitermes* non sarebbe capace di raggiungere grandi dimensioni e perciò, come nel *Calotermes*, per equivalerla basterebbe una sola ♀ neotenica.

Ma non c'è niente che ci autorizzi ad ammettere pel *lucifugus*, a questo riguardo, un comportamento diverso da quello di tutti i Termitini e simile a quello dei Calotermitini. Il clima forse ? Ma sotto lo stesso clima tropicale vediamo la regina dei Termitini raggiungere dimensioni enormi e la regina dei *Calotermes* rimanere piccina come nel *flavicollis* dei nostri paesi.

Inoltre anche nel genere *Reticulitermes* è stata osservata la minore capacità di sviluppo riproduttivo dei neotenici rispetto ai reali veri. « In neither of the types of supplementary reproductive forms do the queen become as large as the normal queens, but there are usually many present in the same colony » (Snyder, 1916, pag. 7, *199*). « R. flavipes is one of the smaller termites, the smallest adults, the workers, measuring only 5, 5 mm. in length, the soldiers from 6 to 7 mm., and the winged first forms, not including the wings, 6 mm. After mating has occurred, the abdomens of the reproductive forms undergo the postadult growth, characteristic of all termites, and which is particularly marked in this genus, although less so than in many tropical genera. The first form adults (queens) increase from a body length of 6 mm. at the time of maturity up to 14,5 mm., the second forms from 6 mm. to 12 mm., the third forms from 6 mm. to 9 mm. The size increase, although marked, is considerably less in males » (1920, pag. 595, *203*).

Molto interessanti sono a questo riguardo i recenti reperti (1921) del Feytaud che dimostrano il rapido sviluppo delle giovani regine fondatrici di nuove colonie : «...des colonies, que j'ai tout lieu de considérér comme fondées depuis 24 mois, presentent des reines à gros abdomen distendu, capables de pondre 100 oeufs et plus par jour. La longueur de ces reines varie, selon les individus et les moments, de 10 mm. à 14 mm. dont 7 mm. à 11 mm pour l'abdomen ; la largeur, qui est de 1 mm. au niveau du thorax,

invece di coppie reali di sostituzione si sono andate formando schiere di individui reali neotenici [1].

Ma così gli individui di una colonia venivano ad essere non più tutti fratelli, com'è in colonie a coppia reale vera e neotenica, cioè con re e regina unici, padre e madre di tutti gli individui. Invero, come nota il Feytaud, per dimostrare la possibilità di unioni feconde tra sciamanti della stessa colonia, « nelle colonie a reali multipli di complemento gl'individui nati da due ♀ differenti non hanno tra loro che una parentela lontana, sopratutto se le due ♀ sono nate esse pure da madre differenti. In altri termini se una colonia è occupata per più generazioni da sessuati di complemento essa può presentare ad un dato momento gruppi di individui che non hanno tra loro alcun legame di prossima parentela » (pag. 515).

Veniva così a mancare la finalità dello sciamamento che aveva lo scopo essenziale di impedire l'autogamia (come dimostra lo sciamamento separato dei due sessi osservato dal Grassi in *Calotermes* e *Termes*, ma contestato pel *Termes* da Feytaud); e la fondazione di nuove colonie da parte di individui sciamanti diveniva d'importanza del tutto secondaria di fronte alla propagazione diffusiva che, essendo divenuto il mezzo di propagazione normale della specie, ha indotto la formazione normale dei neotenici (che perciò meritano il nome di reali di complemento) da una forma ninfale speciale, la ninfa di seconda forma; mentre resta eccezionale, limitata ai casi in cui manchino ninfe di seconda forma, la formazione di individui reali di sostituzione da individui qualunque in uno stadio più o meno avanzato di sviluppo (larve senza traccia di ali, ninfe di prima forma, alati bianchi), come nel *Calotermes* [2].

Mi sembra che, senza complicazioni di ipotesi, possa così spiegarsi l'adattamento secondario dei *Reticulitermes*, non specifico del nostro *Lucifugus*, ma comune a tutto il genere (*Leucotermes* Silvestri).

Ma se in America la fondazione di nuove colonie da parte di individui sciamanti è restata assai meno frequente, se in Francia è divenuta molto rara, in Italia sembra assolutamente scomparsa.

---

comme au moment de l'essaimage, atteint 2 mm. 5 au niveau de l'abdomen chez la reine mûre au stade considéré » (*71*).

Del resto, se anche veramente risultasse essere oggi la regina vera del *Reticulitermes* incapace di raggiungere grandi dimensioni, dovrebbe ritenersi questo per un carattere secondario, di riduzione, in rapporto al prevalente adattamento alla sostituzione con reali neotenici.

[1] Non voglio precisamente affermare l'esistenza, nello sviluppo filogenetico della società del *Reticulitermes*, di uno stadio a coppia unica di sostituzione; l'ho ammesso semplicemente per chiarezza, per scomporre la determinante dell'adattamento che ci presenta oggi il *Reticulitermes* nelle sue due componenti: la necessità della sostituzione con neotenici e la necessità che questa sostituzione sia plurale.

Come il *Termes* sia passato (o direttamente dall'unicità della coppia vera, o indirettamente attraverso l'unicità della coppia di sostituzione) alla pluralità dei sostitutivi neotenici, si spiega facilmente, dato che anche il *Calotermes* (dimostrò Grassi in nidini in provetta orfanati) fabbrica un certo numero di individui reali di sostituzione, sebbene poi ne assuma appena uno, se manca solo un individuo reale; o appena due, se la colonia era stata privata e del re e della regina.

[2] In questo capitolo ho dato come indiscussa la conclusione che dimostrerò nel capitolo seguente: essere veramente, come ha scoperto Grassi, i reali di complemento e di sostituzione individui neotenici la cui neotenia è essenzialmente subordinata alla nutrizione.

Ma allora perchè da ogni colonia ogni anno seguitano a sciamare migliaia di alati? se non uno riesce a fondare una nuova colonia o essere almeno adottato da una colonia orfana? Sembra così strano questo fatto, questo sperpero enorme di forze senza scopo, che Silvestri, senza appoggio di fatti, anzi malgrado il risultato completamente negativo delle sue stesse ricerche, suppone possa aversi, all'inizio dell'esistenza della colonia, una coppia reale vera.

Questa ipotesi si accorderebbe con la sperimentalmente dimostrata capacità degli insetti perfetti di fondare nuove colonie, chiarirebbe il reperto di reali veri raro in Francia e in America e limitato a giovani colonie, spiegherebbe il permanere dello sciamamento non destituito di scopo. Ma essa è rimasta «non corroborata da alcun fatto» come era quando nel 1903 Silvestri la formulava nel bello studio sui Termitidi americani.

Ed a me sembra che possa farsene a meno.

Ma allora perchè da ogni colonia ogni anno continuano a sciamare centinaia di alati? Perchè.... non sappiamo precisamente; ma certo per la stessa ragione per la quale, in ogni adattamento filogenetico, alla funzione sopravvive di molto la forma (¹).

(¹) Qualcosa di analogo si verifica nel regno vegetale.
Abbiamo già rilevato una certa analogia tra la propagazione per diffusione del *Termes* e la riproduzione per mezzi di propagazione vegetativa delle piante superiori (mentre la fondazione di nuove colonie per individui sciamanti è paragonabile alla riproduzione per semi delle piante). Ora «molte piante spontanee e coltivate fanno a meno della riproduzione sessuale e basta loro la riproduzione vegetativa»; pure possono seguitare a portare semi e questi semi essere germogliabili. «Tra le piante superiori non hanno più alcun discendente sessuale aa es. i banani coltivati, parecchie diocoracee, il calamo aromatico, le varietà della vite, dell'arancio, delle fragole di giardino. L'aglio che al posto dei fiori forma dei piccoli bulbilli, il giglio bianco e il *Ranunculus ficaria* che si propaga mediante tuberetti radicali, quando la propagazione dei loro organi vegetativi non è impeuita, non sviluppano quasi più semi germogliabili. Possono tuttavia prodursi in speciali circostanze, ad es. talvolta in infiorescenze recise, ma d'ordinario si propagano esclusivamente per via agamica, senza degenerare per questo in alcun modo come si supponeva altra volta» (Strassburger, *Trattato di botanica* 1913).

Nota. — Dopo che questo capitolo era stato già scritto ho avuto conoscenza d'una recentissima nota del Feytaud presentata da Paul Marchal all'Accademia di scienze di Parigi (25 maggio 1920) «sur les rois et reines du *Termite lucifuge*». Feytaud afferma d'aver trovato in natura, riprendendo la questione dei reali dopo la lunga interruzione della guerra, numerosissime colonie di sciamamento, cioè fondate da insetti perfetti che ritrova come re e regine tra mezzo alla loro prole. «Il ne s'agit point ici de petits fondateurs pris quelque mois après le vol au milieu d'un groupe restreint de descendants; il s'agit de rois et reines en plein fonctionnement génital, celles-ci pourvues d'un gros abdomen et pondant 100 oeufs et plus par jour, dans une colonie déjà populeuse. Pour donner une idée de la fréquence des individus royaux dans les conditions où je me suis placé, je signale qu'en trois jours, sur une cinquantaine de colonies d'essaimage examinées et dont la fondation date de 1918, j'ai recueilli trente reines et douze rois. L'infériorité du nombre des rois capturés tient à la petite taille et à la teinte foncée générale, qui rendent leur découverte plus ardue, ainsi qu'à leur agilité qui leur permet de se perdre dans la terre au pied des souches ou de s'enfuir dans les galeries du bois. Mes observations... démontrent que la fondation de colonies nouvelles par les imagos essaimantes du *termite lucifuge* est assez commune dans la nature et que l'existence de rois et des reines, niée par Grassi, n'est même pas une rareté si on les recherche dans les colonies de formation récente» (*70*).

Ma Grassi, stabilito dopo lunghe ricerche il fatto della ireperibilità delle forme reali vere, in natura, nelle nostre regioni (fatto poi confermato dalle seguenti ricerche di Silvestri e mie) si guardava dal generalizzarlo in modo assoluto (segnalava ansi la capacità, sperimentalmente dimostrandola, degli

alati sciamanti di fondare nuove colonie); e minore prudenza dimostra Feytaud nel ritenere generale la frequenza dei reali veri ch'egli ha riscontrata in una data regione. Come spiegare i reperti del Feytaud?

Finchè si trattava di qualche raro individuo reale rinvenuto dopo lunghe ricerche, tale reperto non poteva destar meraviglia: gli alati sciamanti, concludevamo, hanno virtualmente piena capacità di fondare nuove colonie, ma in realtà solo eccezionalmente vi riescono in natura; mai, pare, in Italia, raramente in Francia, assai poco frequentemente in America, e questa differenza dipenderà da differenti condizioni d'ambiente. Ma ora?

Che si tratti d'una specie o meglio forse razza biologica diversa? A questa ipotesi ci spingerebbe non solo l'accennata differenza quanto alle forme reali vere, ma anche il fatto che in Francia, specie negli ultimi anni, si lamentano danni gravi prodotti dal *Termes* agli alberi ancora viventi, agli arbusti, ai legumi, ai cereali, alle piante erbacee dei giardini e dei campi (ved. Chaine, *L'attaque des vegetaux par les Termites*, 30 avril 1920 « Revue générale des sciences »).

Ora non pare proprio che questo si verifichi in Italia: da noi il *Termes lucifugus* non attacca che il legno morto; preferendo anzi alla parte necrosata degli alberi vivi (dove preferibilmente il *Calotermes* si stabilisce), gli alberi morti, i vecchi ciocchi rammolliti, i tronchi tagliati e semidisfatti. (Ultimamente però Cavara a Catania ha osservato invasione di Termiti in una pianta erbacea, *Crysanthemum:* « del quale avevano invaso la parte ipogea e particolarmente distrutti i tessuti erbacei, cioè il cribro e la corteccia, contrariamente a quanto si usa fare negli alberi dei quali rodono d'ordinario il legno » (*38*).

Bisogna del resto ricordare che in Francia la più parte degli autori (Bobe-Moreau, Boffinet, de Quatrefages, Lespès) ammettevano che il *Termes* di Rochefort e della Rochelle e il *Termes* delle Lande fossero due specie differenti; anzi Bobe-Moreau fissava al mese di marzo l'epoca di sciamamento del *Termes* di Rochefort (*17*). Fu Gassies (1855) che, segnalando la comparsa delle Termiti nelle abitazioni della città di Bordeaux (*78*), combattè questa idea e, riprendendo quella di Latreille, affermò l'identità del Termite « citadin » e del Termite « rural » (ved. Feytaud, pag. 483).

Che convenga tornare all'opinione degli antichi osservatori? che esistano in Francia, sotto il nome di *Termite lucifugo*, due specie o razze biologiche distinte, l'una delle quali, capace d'invadere le piante arboree vive e le erbacee, si diffonde ancora abbondantemente per individui sciamanti, mentre l'altra, come la nostra, limitata al legno morto, presenta il singolare adattamento pel quale mai o quasi rinvengonsi forme reali vere?

Del resto la coesistenza, sotto il nome di *Termes lucifugus*, di specie o razze biologiche diverse, appare tutt'altro che inverosimile anche per la considerazione che nell'America del Nord (ove pure piuttosto frequenti sono le forme reali vere e ove pure si lamentano i danni che il *lucifugus* apporta alle piante) il *Termes lucifugus* (lungo, ali comprese, non 10 mm., ma da 11 a 12) sciama non dalla seconda metà di aprile alla prima di giugno, come da noi, ma dal marzo all'ottobre: il che non sembra potersi riportare senz'altro a differenze climatiche che rendano equivalenti nelle diverse regioni i diversi periodi giacchè, sempre nell'America del Nord, gli altri *Leucotermes* sciamano: il *flavipes* in maggio e giugno, il *virginicus* in giugno o a stagione estiva inoltrata.

Checchè ne sia, un'ipotesi emerge anche dai nuovi fatti più plausibili: che la rarità delle forme reali vere nel genere *Leucotermes* sia l'espressione d'un adattamento biologico singolare (nel senso minutamente suesposto) particolarmente spinto nel nostro Termite lucifugo.

Ma in una seconda Nota (luglio 1920) Feytaud porta nuovi interessanti fatti. « Il semble qu'en pleine nature le développement des ovaires et l'extension consécutive de l'abdomen soient bien plus rapides que dans le milieu confiné des tubes, puisque des colonies, que j'ai tout lieu de considérer comme fondées depuis 24 mois, présentent des reines à gros abdomen distendu, capables de pondre 100 oeufs et plus par jour. La longueur de ces reines varie, selon les individus et les moments, de 10 mm à 14 mm., dont 7 mm. à 11 mm. pour l'abdomen; la largeur, qui est de 1 mm au niveau du thorax, comme au moment de l'essaimage, atteint 2, 5 mm. au niveau de l'abdomen chez la reine mure au stade considéré.... Les colonies de deux ans que je considère sont déjà populeuses. Il est vrai que, dans la circonstance, il s'agit de souches sur lesquelles toute la population s'étale en surface et s'étend fort peu en profondeur. Mais il n'en est pas moins vrai que le petits se comptent par centaines, et par centaines aussi les ouvriers et

les soldats. Bien que les soldats soient en minorité sensible, leur pourcentage par rapport aux ouvriers est ici bien plus élevé que dans les vieilles colonies du type courant, sourtout aux abords du couple royal. Toutes les colonies de ce genre présentèrent au printemps 1920 des imagos ailées, fournissants un essaim vers le 8 mai, ce qui prouve que, contrairement à ce que je supposais naguère, l'essaimage peut avoir lieu dans des colonies très jeunes. À la même époque les nymphes étaient fort rares. Il est donc probable que l'essaimage des jeunes termitières n'est pas renouvelé tous les ans.

Déjà certaines de mes colonies ont perdu leur reine et pourvu à son remplacement. La proportion était, dans un de mes champs de recherches, de 1 sur 5 environ : sur 46 souches dans lesquelles j'ai découvert les individus reproducteurs, 37 avaient de vraies reines et 9 de femelles néoténiques. Ce remplacement, dont la fréquence augmentera sans doute beaucoup au cours de la troisième année, doit être regardé comme avantageux pour l'avenir des termitières. Grâce à lui, la reproduction, si surprenante déjà sous le règne de la vraie reine, devient encore plus intense et la multiplication plus rapide : c'est par gros paquets et par milliers que je recuilli les oeufs en incubation au mois de mai dans certaines colonies de deux ans à sexués de remplacement, et j'ai trouvé dans un même souche jusqu'à 38 femelles de ce genre ». In conclusione : « La fondation de colonies nouvelles par les sexués essaimants est un fait courant chez le *Termite lucifuge* » e « deux ans après la fondation, la plupart de ces colonies possèdent encore leur couple royale, au milieu d'une population qui dépasse un millier d'individus ». Ma poi i reali veri cominciano ad essere sostituiti da neotenici. « Le remplacement des rois et reines débute avant la fin de la seconde année ; à ce moment le nombre des femelles néoténiques occupant la place d'une reine peut atteindre une quarantaine. Aussi ce remplacement représente-t-il un gros élément de prospérité pour la colonie » (*71*).

Ecco dunque brillantemente dimostrata l'ipotesi del Silvestri. Ma per la Francia. È giusto estenderla all'Italia, dove non è mai stato trovato un reale vero ?

Io insisto nella supposizione che sotto il nome di termite lucifugo si comprendano due specie, o razze biologiche distinte : nella nostra sarebbe particolarmente spinto il singolare adattamento biologico, comune a tutto il genere (*Reticulitermes* = *Leucotermes*), alla propagazione diffusiva con formazione di reali complementari. E vedo in queste colonie, che, fondate da sciamanti, presto sostituiscono i reali veri con sessuati neotenici (Francia), una tappa sulla via della completa soppressione della fondazione di nuove colonie da parte d'individui sciamanti (Italia).

I NEOTENICI

Il est curieux de voir que tant de choses, des organes, des idées, de désirs, des habitudes, toute une destinée, se trouvent ainsi en suspension pas dans une semence (ce serait le miracle ordinaire de la plante, de l'animal et de l'homme) mais dans une substance étrangère et inerte : dans une goutte de...».

M. MAETERLINCK
(*Les abeilles*).

Analisi storica.

« Les grandes questions scientifiques, et plus spécialement les questions biologiques, si complexes, ne se comprennent bien, tout de même que les êtres vivants, que si l'on connaît l'évolution à partir de leur origine première ».

GLEY

Mai o quasi mai a capo della colonia nel *Termes lucifugus* rinvienesi la vera coppia reale ; si trovano invece più o meno numerosi individui riproduttori in abito giovanile : reali di complemento.

« È al geniale Fritz Müller che spetta il merito d'avere ideata pel regno dei Termitidi la nuova, brillante e molto verosimile ipotesi delle coppie reali suppletive ; egli l'appoggia ad osservazioni che in parte spettano a varî autori ed in parte sono sue proprie.

« Il Lespès ha trovato nel *Termes lucifugus*... due sorta di ninfe : *ninfe della prima forma* e *ninfe della seconda forma*, così le denominò. Quelle della prima forma sono più vivaci, più smilze ed hanno accenni d'ali lunghi e larghi, coprenti interamente la parte anteriore dell'addome ; verso il 15–20 di maggio diventano insetti perfetti e abbandonano il nido. Le ninfe della seconda forma sono molto più rare ; hanno l'addome più grosso, pesante e presentano accenni d'ali corti, stretti, collocati quasi lateralmente al torace. In febbraio, quando il Lespès le trovò per la prima volta, erano lunghe come le altre (6–7 mm.); più tardi diventarono più lunghe (8–10 mm.) ma per accrescimento del solo addome, specialmente nelle femmine. Allora i terghi addominali non arrivavano più a coprire i lati del corpo e si presentavano nettamente separati l'uno dall'altro per molli membranelle. Si aveva insomma un rigonfiamento dell'addome, al quale corrispondeva un molto più grande sviluppo delle ghiandole genitali, tanto maschili quanto femminili, in confronto colle ninfe della prima forma. Le ninfe della seconda forma si conservarono così fino al luglio, nel qual mese diventarono brune, ma andarono facendosi di gran lunga più rare. Pur troppo le osservazioni del Lespès non vanno oltre questo mese ; egli però suppone che le ninfe della seconda forma, in agosto, si tramutino in maschi

e femmine alate e che sciamino come quelle della prima forma. Dalle ninfe della prima forma egli fa derivare *i piccoli re e regine*, da lui trovati qualche volta nei nidi: da quelle della seconda forma *i re e le regine grandi*. Ciò basa sul fatto che i piccoli re e regine hanno ghiandole sessuali poco sviluppate, come le ninfe della prima forma, e che i re e le regine grandi (o, com'egli semplicemente li denomina, i re e le regine) le hanno molto sviluppate, come le ninfe della seconda forma. Ma questo differente sviluppo dei loro genitali, osserva il Müller, potrebbe spiegarsi colla differenza d'età e di epoca dell'anno in cui furono osservati. Di più, notano l'Hagen e il Müller, le coppie reali hanno monconi d'ali che presuppongono un grado di sviluppo delle ali stesse, quale, come sembra, non potrebbe raggiungere la ninfa della seconda forma coi suoi accenni cortissimi ancora in luglio. Aggiungono i citati autori che il Bobe-Moreau ha studiato al sud d'Europa una specie che è forse lo stesso *Termes lucifugus* e non ha osservato la seconda sciamatura supposta dal Lespès. Per tutto ciò, secondo il Müller, *le ninfe della seconda forma restano senz'ali e non abbandonano mai il loro nido nel quale, a suo parere e in date circostanze, diventano sessualmente mature*. Individui sessualmente maturi, benchè in abito di ninfa, prosegue il Müller, vennero già descritti come regine in diverse specie, nello stesso *Termes lucifugus* (Joly), nei *Termes flavipes*, *arenarius* e nel *Calotermes flavicollis* (?). Il Müller non crede che la sciamatura dei Termitidi possa condurre alla fondazione di nuovi nidi. Non nega proprio (*geradezu*) questa possibilità pel *Calotermes*; la esclude però assolutamente per tutti i *Termes*, *Eutermes* e *Anoplotermes* da lui studiati. La sciamatura, pensa lo stesso autore, ha il semplice effetto di provvedere di coppie reali i troni che sono disoccupati. La colonia eviterebbe l'enorme quantità di lavoro e il grave consumo di individui che costa la sciamatura e sarebbe certa d'avere un re e una regina, trattenendo in casa una coppia d'individui da essa prodotti. Ma questi individui, essendoci di regola in ciascun nido una sola coppia reale, sono figli degli stessi genitori; perciò, se si accoppiassero, il sangue s'indebolirebbe, giusta l'espressione del volgo. Colla sciamatura accade che s'incontrino individui di differenti nidi, e si formino coppie reali non consanguinee; si evitano così i malefici effetti delle nozze consanguinee; quest'è appunto lo scopo della sciamatura.

« Ma per raggiungere questo beneficio, accade purtroppo facilmente che una popolazione orfana non arrivi a provvedere il suo trono di una nuova coppia reale. In questo caso subentrano *le coppie reali di sostituzione, ossia le ninfe della seconda forma, diventate sessualmente mature; esse salvano così la colonia*. Con ciò è in rapporto il tardivo svilupparsi delle ninfe in discorso. Il diventare rare in luglio indica forse che vengono uccise quando non ce n'è più bisogno, ovvero che la colonia ne tiene vive tante quante gliene occorrono ».

« L'ipotesi, di cui discorriamo, viene confortata dalla seguente osservazione fatta in Brasile dal Müller stesso. Nel nucleo solido d'un nido d'*Eutermes* trovò non meno di 31 regine di sostituzione (le vide ovificare) con un unico re, vero re con monconi d'ali: mancava invece una vera regina. In complesso queste regine suppletive somigliavano agli operai: erano grosse il doppio; gli accenni d'ali erano nella maggior parte molto corti (circa una metà dell'anello a cui corrispondevano) e soltanto in alcune notevolmente più lunghi. Le antenne avevano 14 articoli come negli operai (sono 13 nei soldati, 15 negli alati). Si sarebbe potuto considerare la loro testa come appartenente ad un operaio, se non ci fossero stati dei piccoli occhi composti pigmentati.

« Quest'è tutto quanto si legge nella Memoria di Fritz Müller (*Jen. Zeitschrift*, IV Bd 1873). Contro quest'autore si dichiarò l'Hagen (cit. dal Müller stesso) il quale crede che tutte le regine provenienti d'Africa e d'Asia derivino da insetti perfetti e quelle d'America direttamente da ninfe ».

« Recentemente (1887) il Jehring (in Brasile) pubblicò due note sulla generazione alternante dei Termitidi (*Entom. Nachrichten von Karsch.*, « Berlin Ann. » XIII, n. 1 e n. 12). Per lo Jehring le regine di sostituzione — trovate dal Müller *una sola volta* e non mai dal Jehring stesso — sono forme anormali (operai capaci di generare) come i soldati con abbozzi d'ali citati dall'Hagen: *esse non hanno valore nell'economia dei Termitidi.* Quanto alle ninfe della seconda forma trovate dal Lespès nel *Termes lucifugus*, esse si debbono interpretare o come esprimenti un dimorfismo di stagione, oppure appartenenti ad una specie inquilina con quella, a cui si riferiscono le ninfe della prima forma (quest'ultimo fatto, secondo lo Jehring, si verifica in molti Termitidi americani!) ».

« Nel n. 12 dell'*Ent. Nachrichten* succitato, Fritz Müller, senza portar nuovi fatti, dichiara insufficienti le obbiezioni dello Jehring ed io non credo che valga la pena di occuparsene ulteriormente ».

Come risulta dalla or fatta citazione, l'Hagen e Fritz Müller avevano cercato di correggere i gravi errori in cui era caduto il Lespès.

Specialmente Fritz Müller si è teoricamente avvicinato alla soluzione del problema riguardante le ninfe della seconda forma, ma si limitò a semplici tentativi » (¹).

Grassi parte dall'ipotesi di Fritz Müller (²), e, con osservazioni in natura e con esperimenti, sopratutto per mezzo del *Calotermes* che presenta una condizione primitiva meno complessa, e si presta alle esperienze di allevamento, « strappa alla natura la vera prova » stabilisce il preciso significato delle ninfe di seconda forma e fonda la dottrina dei reali neotenici.

« Nei *Termes*, invece d'una vera coppia reale, s'incontrano moltissimi individui sessualmente maturi: li denomino *individui reali di complemento.* Questi individui reali di complemento hanno i caratteri delle larve vicine a diventar ninfe, cioè l'abbozzo delle ali ancora relativamente più corto che non nelle ninfe. L'abbozzo d'ali però varia alquanto da individuo a individuo e qualche rara volta manca affatto ».

(¹) Da Grassi, « Costituzione ecc... » 1893, « Cenni storici » (pp. 112-5) che riportano in parte la Nota preliminare del 1887 (*91*).

(²) « Certamente pare strano », rileva il Grassi nella Nota del 1887, « che il Müller e l'Jehring, trovandosi stabiliti in Brasile, circondati da ogni parte da termiti, non pensino di provare al fuoco dell'esperimento la bontà dell'ipotesi in discorso; e infatti basterebbe togliere a un nido di termiti il re e la regina e vedere poi se le termiti vi sostituissero ninfe trasformate: questo sperimento, ripetuto su alcuni nidi, condurrebbe necessariamente a una conclusione definitiva. Riesce pur strano che da più di 30 anni si vada discutendo intorno alle ninfe della seconda forma di Lespès, senza che nessuno si sia dato la briga di verificare se acquistino o no le ali.

« La verità si è che questi studi sulle Termiti sono imprese molto più malagevoli di quanto si potrebbe credere a prima giunta. Occorre di avere pazienza, di seguire a lungo i costumi di queste popolazioni, prima di orientarsi e di poter tentare con sicurezza un esperimento o un'osservazione nuova.

« Avendo io esercitata questa pazienza per più di quattro anni ho finalmente avuto la fortuna di poter dimostrare che l'ipotesi del Fritz Müller è essenzialmente conforme al vero.

« ... Prova positiva io l'ho strappata a la natura col mezzo del *Calotermes* » (*91*).

« Nei nidi orfanati, a cui, cioè, si tolsero i sopradetti individui reali di complemento, si trovano numerosi individui reali di sostituzione. Questi possono essere uguali agli

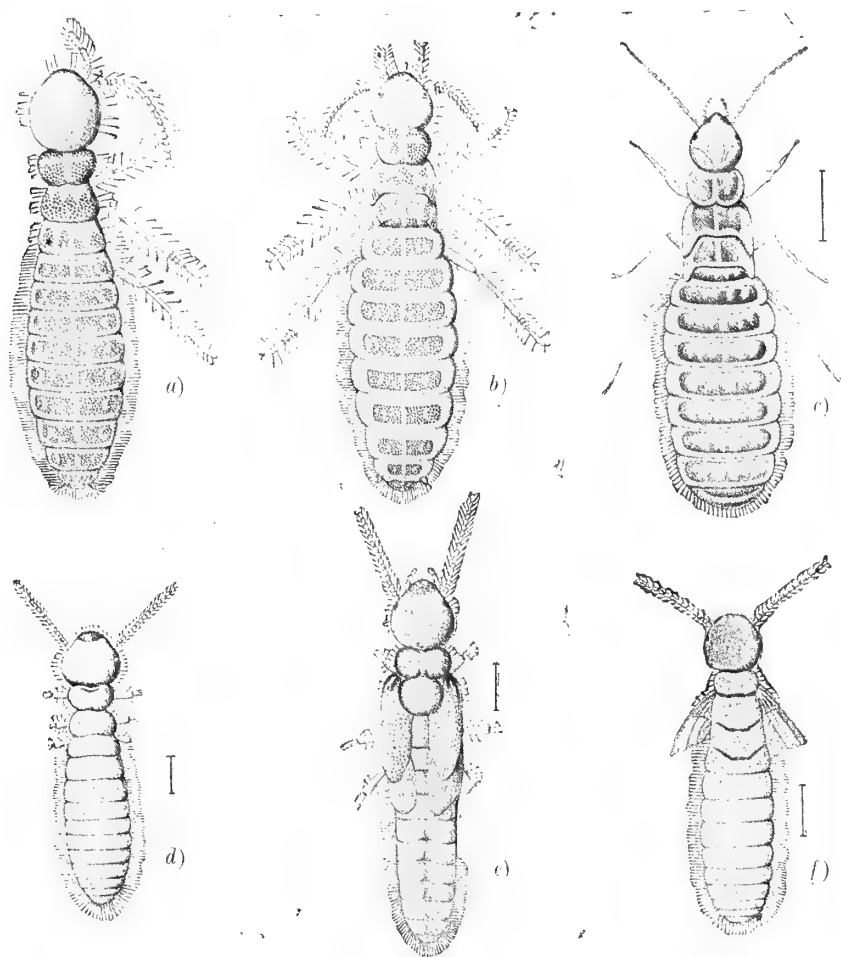



Fig. 3. — *Termes* (R.) *lucifugus.*

a) Vecchia regina di complemento senz'ali.
b) Vecchia regina di complemento coll'abbozzo di ali appena accennato.
c) Idem coll'abbozzo d'ali un po' più sviluppato.
d) Giovane regina di sostituzione senz'ali.
e) Regina di sostituzione derivata da una ninfa della prima forma.
f) Regina di sostituzione derivata da un alato appena parzialmente annerito, a cui furono lacerate le ali (La tinta nera fu tralasciata).
Tutte le figure sono copiate colla camera lucida ad uguale ingrandimento, eccetto le figg, *a*) e *b*) che sono un po' più ingrandite. Da Grassi (figg. 16, 17, 18, 15, 23, 24, tav. II, *92*).

individui reali di complemento; non di rado però essi non presentano le traccie di ali, oppure le hanno sviluppate come nelle ninfe. Talvolta hanno i caratteri di insetti perfetti, diventati bruni appena in pochi punti e colle ali smozzate ».

«Evidentemente i nidi ordinarî del *Termes* trovano riscontro nei nidi del *Calotermes* orfanati, colla differenza che in quelli gli individui reali sono molto numerosi e di solito posseggono un principio d'ali che manca nella maggior parte degli individui reali di sostituzione dei *Calotermes*. I nidi orfanati di *Termes*, avendo, come ho detto, non di rado individui reali senza traccia di ali, rassomigliano ancora di più ai nidi dei *Calotermes*. Insomma nei nidi di *Termes*, come in quelli orfanati di *Calotermes*, vengono di regola elevati al trono individui che non hanno avuto ali interamente sviluppate. Vi è ancora una grande differenza : nel nido del *Calotermes* si trova sempre il re accanto alla regina, mentre in moltissimi nidi di *Termes*, che io ho esaminato, ho trovato, accanto a numerose schiere di regine, due sole volte un unico re. Questi re furono veduti nei mesi caldi, ossia nei mesi in cui è difficilissimo avere regine di sostituzione, perchè sogliono stare molto approfondate nel terreno. Io non esito a credere che molti altri ne avrei trovati, se avessi potuto io stesso fare ricerche nei mesi di agosto e di settembre. Certamente i re di complemento o di sostituzione si trovano nei nidi appena allorquando maturano le regine di complemento o di sostituzione, e dopo la copula scompaiono. La colonia poi ne fabbrica ogni anno dei nuovi che maturano nei mesi di agosto e di settembre, fecondano le regine e muoiono. Per conferma di queste mie induzioni, oltre al fatto testè riferito, aggiungerò che, nei nidi orfanati da poco tempo, si trovano, accanto ad individui in via di diventare regine di sostituzione, individui non meno numerosi, in via di diventare re di sostituzione. Individui in via di diventare re di complemento si trovano dal mese di marzo in poi, benchè scarsissimi di numero, in tutti i nidi non orfanati, mentre quivi mancano gli individui in via di diventar regine di complemento» (pp. 55-7).

«... Gli individui in via di diventar reali si trovano abbondanti appena in alcuni di quei tronchi che, pur essendo molto popolati, non hanno individui reali, o ne hanno pochissimi. Però qualche ninfa maschile della seconda forma si trova facilmente nei mesi da marzo a luglio, specialmente in quei tronchi che hanno regine di complemento o di sostituzione.

Gli individui reali di complemento si trovano appena nel sei o otto per cento delle piante invase dai Termiti. Essi possono raggiungere la cifra di mille e più; di solito il loro numero oscilla da cinquanta a duecento.

Gl'individui di sostituzione, pure in numero vario da circa dieci a circa duecento, si trovano appena nei nidi stati parzialmente o totalmente orfanati, sia distruggendo gli individui reali di complemento, sia per es. tagliando un tronco, e portandolo un chilometro lontano dalla sede primitiva» (pag. 66).

In questi nidi orfanati, i reali di sostituzione possono derivare da varii stadî larvali, probabilmente secondo l'epoca dell'orfanamento e le disponibilità della colonia. Secondo Grassi, gli stadî conducenti ai reali di complemento o sostituzione sono :

I. Neonate indifferenziate *(larve giovanissime di cui quelle che sono d'una medesima lunghezza han tutte la testa uguale)* lunghe 1-2 mm., con antenne di 11 o 12 articoli (3º nudo).

II. Individui a testa piccola, lunghi mm. 2 e $^1/_4$ - 3 e $^3/_4$, con antenne di 12 (tutti pelosi) o 13 articoli.

III. Individui con antenne di 14 articoli, lunghi 3½ - 4 mm., alcuni senza traccia di ali e con testa relativamente piccola, altri con brevissimo accenno di ali.

IV. Individui con antenne di 15 o 16 articoli, lunghi 4 - 6½ mm., alcuni con l'accenno d'ali brevissimo o un po' sviluppato, altri senza accenno d'ali (*larve d'individui reali di complemento o di sostituzione, senza traccia d'ali e colla testa piccola*).

V. Individui con antenne di 17 o 18 articoli, ma piuttosto lontani dalla maturanza :

1°) *Larve d'individui reali di complemento o di sostituzione senza traccia d'ali* (lunghe 6-7 mm.).

2°) *Ninfe della seconda forma*, lunghe 4-8 mm., con accenno d'ali più o meno corto, organi genitali bene sviluppati (mentre le ninfe di prima forma, dalle quali si svilupperanno gli insetti perfetti, lunghe 7-8 mm., hanno accenno d'ali lungo e organi genitali poco sviluppati).

VI. *Individui reali di complemento o di sostituzione sessualmente maturi o quasi, ma coll'abito o di larva o di ninfa ovvero infine d'insetto perfetto, appena parzialmente abbrunato e colle ali rotte* (pp. 57-9).

Gl'individui reali di complemento o di sostituzione deriverebbero dunque da larve a testa piccola, indifferenziate, che sembrano differenziarsi dalle larve d'insetto perfetto nel corso ulteriore dello sviluppo.

Come avviene questa differenziazione ?

Niente ci porta a comprendere tutto il valore d'un problema e tutta la portata d'una soluzione come il seguire passo passo la via per la quale un uomo di genio è pervenuto alla soluzione del problema. Riporto perciò pressochè integralmente le pagine nelle quali il Grassi ricostruisce il mirabile processo raziocinativo che lo condusse a scoprire la differenziazione della casta neotenica.

« Gran parte della cavità addominale è occupata dagli organi genitali e dall'intestino (porzione posteriore dell'intestino anteriore, intestino medio e posteriore).

« L'intestino posteriore presenta un'ampolla cecale che certe volte è molto dilatata, certe altre lo è assai meno, od è addirittura contratta. Nel primo caso essa occupa una grande parte dell'addome e senza dubbio viene indirettamente a comprimere le ghiandole genitali. È un fatto indiscutibile che l'ampiezza di questa ampolla sta generalmente in ragione inversa del grado di sviluppo degli organi genitali, eccetto nei primi periodi di vita dell'animale. L'ampiezza maggiore o minore dell'ampolla, alla sua volta, è subordinata alla presenza o meno di certi protozoi parassiti, che (fatto singolare) mancano negli individui reali di sostituzione o di complemento, mentre sono presenti, benchè di solito in poca quantità, negli individui reali veri..... (pag. 84).

« La mancanza... dei protozoi negli individui reali di sostituzione e di complemento è stata verificata in centinaia di casi. Si constatarono però... fatti apparentemente contrari. Si trovò una certa quantità di protozoi in alcune regine di complemento del *Termes lucifugus*, evidentemente *molto vecchie* come lo dimostravano gli ovarioli rattrappiti e la spermateca vuota. Questi individui avevano certamente ovificato e ciò si desumeva : 1°) dalla presenza d'una sostanza granulosa giallastra dentro la tuba, in corrispondenza dell'inserzione dei singoli ovarioli (questa materia non si trova mai negli individui che

non hanno ovificato); 2°) dall'essere gli ovarioli superiori nelle stesse condizioni degli ovarioli inferiori (quelli sono molto più piccoli negli individui che non hanno ovificato).... Se a queste eccezioni si dà il debito valore, possiamo dire che esse, lungi dall'infirmar la regola, la confermano sempre più. Essa si può formulare così: *Quando gli organi genitali sono maturi, negli individui che non hanno acquistato ali interamente sviluppate, mancano i protozoi e quindi minima è la dilatazione cecale. L'assenza dei protozoi non implica però l'incapacità degli individui in discorso ad averne.*

« Ma qui si presenta un grave quesito. La mancanza dei Protozoi è causa dello sviluppo ulteriore degli organi genitali, o ne è semplice conseguenza? Per tentare di sciogliere siffatto quesito, occorreva osservare individui in via di diventare reali di sostituzione o di complemento (larve degli stessi, o giovani).

« In essi i protozoi spesso mancano; ma qualche volta si trovano. È difficile precisare il valore di quest'ultimo fatto.

« Tutto ben ponderato, a me sembra lecito di spiegarlo come segue: gl'individui in via di diventare reali di sostituzione o di complemento, abitualmente non hanno protozoi; di tanto in tanto però se ne infettano ma subito se ne liberano, anche indipendentemente dalla muta. Forse durante l'infezione lo sviluppo dei genitali è sospeso.

Da tutto ciò risulta dunque che *negli individui reali di sostituzione o di complemento avviene un'anticipata maturanza degli organi genitali, la quale pare che sia in intimo rapporto colla scomparsa dei protozoi parassiti dall'ampolla del cieco. Tale scomparsa negli individui in via di diventare reali di sostituzione o di complemento, quando le ghiandole genitali sono ancora molto arretrate nello sviluppo, ovvero prima che siavi una condizione da cui risulti una compressione della ampolla cecale, lascia pensare che alla maturanza dei genitali non sia estranea l'assenza dei protozoi* » (1 p. 86-7).

Per conoscere meglio l'importanza di questi parassiti, il Grassi intraprende esperimenti ed osservazioni su nidini di *Calotermes* tenuti in provette di vetro e giunge alla conclusione che:

« ... *La mancanza dei protozoi non basta a provocare la maturazione degli organi genitali. Certo è però d'altra parte che il primo indizio, accennante alla formazione di un individuo di sostituzione, vien dato dalla scomparsa dei protozoi. Senonchè i protozoi scompaiono anche negli individui che s'approssimano alla muta; e noi rileviamo dalle provette, con sicurezza, che gli individui destinati al trono subiscono una muta, qualche giorno dopo che gli occhi si sono alquanto coloriti. La muta quindi potrebbe senz'altro renderci conto della scomparsa (morte) dei protozoi la quale così esprimerebbe un fenomeno secondario.....* (pag. 91).

« Da quanto ho premesso induco che la trasformazione degli individui ordinari in individui di sostituzione dev'essere necessariamente subordinata a un cangiamento del vitto ordinario: cangiamento che potrà essere di qualità o di proporzione. Esso dovrà risultare dallo studio di quanto si verifica nelle provette; noi abbiamo infatti veduto che basta un po' di legno necrosato dentro di esse perchè i Calotermiti possano vivere non solo, ma fabbricarsi anche individui reali di sostituzione.... » (pag. 92).

Da queste osservazioni sul nutrimento dei Calotermiti risulta che, mentre gli individui della colonia in genere si cibano di legno, di feccia e vomito di compagni, ed anche di loro spoglie eliminate colla muta, e talvolta del corpo stesso di compagni malati, *agli individui piccoli che non mangiano ancora il legno e agli individui in via di diventar*

reali di sostituzione vien data o ceduta abbondantemente saliva; una certa quantità vien pure data o ceduta agli altri individui colla testa sottile ([1]).

« Ci vuol molta pazienza per arrivare a sorprendere questi fenomeni, ma ci si arriva con tutta sicurezza.

Particolarmente quando un individuo, in via di diventar reale di sostituzione, è appena uscito da una muta, si nota che varî individui gli si avvicinano e gli amministrano saliva. A questo riguardo devesi inoltre notare che, dopo l'ultima muta, la ninfa fa moltissimi atti di deglutizione, ingoiando saliva, che man mano essa stessa elimina dalle sue glandole. Anche negli individui in via di diventar reali di sostituzione, appena finita la muta, dopochè non viene più nessuno a dar loro saliva, vedesi gemere in corrispondenza al labbro inferiore la propria che man mano viene ingoiata. Il gemitìo può sospendersi per un po' di minuti e poi ricominciare.

Gli individui che secernono saliva per gli altri, possono essere grosse larve o ninfe. Gli individui cibati colla saliva presentano l'addome molto trasparente ; ciò fa appunto riconoscere quelli in via di diventar reali di sostituzione.

Gli individui che ricevono saliva, non ospitano protozoi o li ospitano morti.

È molto verosimile che la scomparsa o la morte dei protozoi negli individui reali di sostituzione sia dovuta appunto alla saliva stessa.

Se la maturazione degli organi genitali sia dovuta soltanto alla saliva, od anche all'assenza dei protozoi, è un argomento discutibile. Certo è che, per quanto ho già sopra accennato, la sola scomparsa dei protozoi non basta..... (pag. 99).

Gli esperimenti sul *Termes lucifugus* riescono molto più difficilmente e soltanto dentro grandi recipienti di vetro, nei quali è impossibile far le debite osservazioni. Nei pochi casi in cui i Termiti sopravvivono bene e molto numerosi per qualche mese, si trovano facilmente individui di sostituzione più o meno abbondanti. In proposito non ho nulla da aggiungere a quanto ho osservato in altri punti del presente lavoro. I nidini nelle provette, come ho già ripetutamente accennato, muoiono in pochi giorni. Nel frattempo però si possono fare molte osservazioni.

Le regine di complemento sono oggetto di tenere cure, non solo da parte degli operai, ma anche da parte delle larve. Vengono pulite molto meglio degli individui reali di *Calotermes* ([2]). Stanno attorno ad una regina di complemento quattro o cinque individui

([1]) La saliva « esce in corrispondenza al labbro inferiore : è un liquido incoloro, spiccatamente alcalino e non contenente alcun elemento rilevabile al microscopio. Questo liquido forma una gocciolina sul labbro stesso e può servire, oltre che come cemento per fabbricare, come cibo per altri individui. Questi possono o pigliarlo spontaneamente e ingoiarlo a poco a poco dopo di essersi un po' allontanati, oppure riceverlo dagli individui stessi che l'hanno eliminato; i quali evidentemente lo porgono loro perchè se ne cibino. Per inghiottire la gocciolina, è necessario un certo numero di atti di deglutizione che si possono contare : sono di solito 4 o 5. Qualche volta il Calotermite vedesi far molti atti di deglutizione per ingoiare la propria saliva che geme, ripeto, in corrispondenza al labbro inferiore » (pag. 98).

([2]) Anche Snyder osserva che nei generi primitivi *Termopsis* e *Calotermes* gli individui riproduttori (di terza forma) dipendono, per cure e nutrimento, dalle larve e ninfe meno strettamente di quanto nelle specie del genere *Reticulitermes* dipendano dagli operai (nel *Retic.* i reali non sopravvivono in colonie artificiali, ove non sia presente un grande numero di operai che li custodiscano).

Correlativamente, nei generi più primitivi il « post-adult growt » degli individui riproduttori è molto limitato.

ad un tempo e chi le pulisce le zampe, chi l'addome ecc. Quanto ai cibi, verificansi gli stessi fenomeni che ho esposti per i *Calotermiti*.

Conclusione :

I fatti fin qui riferiti ci autorizzano a conchiudere che la saliva dei « Termes » e dei « Calotermes » esercita una mirabile influenza sugli individui in via di diventare insetti perfetti : permette cioè che si trasformino in individui reali di sostituzione, o di complemento. Si tratta, in sostanza, di un curiosissimo fenomeno di neotenia. Mentre però negli Anfibi la neotenia, ossia la maturazione di individui aventi caratteri infantili, è subordinata all'ambiente, nel caso dei Termiti è subordinata essenzialmente alla nutrizione (pp. 100-1).

* * *

Così il Grassi (1893) genialmente risolveva il problema della differenziazione dei reali di complemento e sostituzione. Non restava che generalizzare i fatti, scoperti nelle specie europee, ai Termitidi esotici.

Ciò fa Silvestri (1903) col suo pregevolissimo studio dei Termitidi sud-americani. Dalle sue raccolte rimane accertato che, per riparare alla perdita naturale o accidentale della coppia reale vera, la colonia si provvede di riproduttori fabbricandoseli cogli individui che si trova ad avere a sua disposizione e che quindi, secondo le epoche, possono essere alati, ninfe, operai e fors'anche rarissimamente soldati. Silvestri distingue :

« 1. INDIVIDUI REALI DI SOSTITUZIONE DERIVATI DA ALATI. Si distinguono da quelli reali veri per il colore più pallido e per le dimensioni un poco più piccole, per quanto anche fra essi le femmine assumano dimensioni spesso molto più grandi di quelle dei maschi.

Le ali sono per lo più strappate dalla squama o irregolarmente poco lungi da essa. Questi alati, che chiamerò *ginecoidi*, furono da me trovati nel *Cornitermes cumulans* e nel *Mirotermes saltans*, nel primo in numero di 9 femmine ed 1 maschio, nel secondo di 11 femmine.

2. INDIVIDUI REALI DI SOSTITUZIONE DERIVATI DA NINFE. Possono essere derivati da ninfe di età molto differenti e quindi con abbozzi di ali più o meno lunghi ; generalmente però derivano da ninfe con abbozzo di ali breve. Queste ninfe *ginecoidi* (ninfe della seconda forma, come le chiamava il Lespès) si distinguono dalle ninfe coetanee, che si trasformeranno in alati, per il colore più oscuro e per le antenne ad articoli tutti pelosi. Esse hanno sempre un numero di articoli alle antenne uguale a quello degli alati, gli occhi neri e completamente sviluppati. Le loro dimensioni sono poco maggiori di quelle degli alati, eccettuate le femmine con uova mature, che spesso sono alquanto più grandi degli alati.

Di tali individui reali di sostituzione, in un nido, può esistere un numero variabile da 20 a più di un centinaio. Ogni maschio ha a sua disposizione cinque e più femmine ; soltanto in un nido di *Hamitermes hamifer* per 126 femmine trovai 113 maschi.

3. INDIVIDUI REALI DI SOSTITUZIONE DERIVATI DA OPERAI. Ne esistono 2 specie : *α*) *individui ergatoidi*, che hanno un numero di articoli alle antenne uguale a quello degli operai, occhi non sporgenti, accennati solo da un po' di pigmento, e brevi appendici d'ali ; *β*) *operai ginecoidi*, appena differenti dagli operai per un colore più scuro e per la forma del settimo sternite nella ♀ » (pag. 147, *196* ; vedi anche *195*). « Gli individui reali ergatoidi furono da me trovati in 3 nidi di *Eutermes arenatius fulviceps*, in uno 3 ed

in un altro 1 ♀, in un terzo 2 ♀ con un re vero. Questi vengono da me considerati come operai per la forma delle antenne specialmente. I piccoli occhi pigmentati e le appendici di ali si sarebbero sviluppati se condariamente con lo svilupparsi degli organi genitali. Gli operai ginecoidi furono trovati solamente una volta in un nido di *Microcerotermes* ed erano 40 femmine ed 8 maschi ».

« Fino ad oggi non si conoscono soldati diventati sessualmente maturi, però sono noti soldati ninfe, cioè soldati con appendici di ali, come io stesso ho riscontrato nel *Calotermes rugosus*; anzi il prof. Grassi trovò in un soldato-ninfa di *Termes lucifugus* tubi ovarici bene sviluppati (pag. 144).... I soldati, coesistendo sempre con altre forme, forse solo rarissimamente vengono nutriti per diventare sessualmente maturi (pag. 146). Le dimensioni sono poco maggiori di quelle degli alati, eccettuate le ♀ ♀ con uova mature, che spesso sono alquanto più grandi degli alati.

Si era domandato il Grassi se la maturanza degli organi genitali nei neotenici fosse dovuta soltanto alla saliva o anche all'assenza dei protozoi, notando però che certo la mancanza dei protozoi non basta. Brunelli (1905), studiando la struttura dell'ovario nei Termitidi, osserva nell regine infette da protozoi una correlativa distruzione di oociti; riannoda questa osservazione ai dubbi del Grassi circa l'influenza dei protozoi sullo sviluppo delle gonadi e vede, nel rapporto ben determinato tra presenza di protozoi e degenerazione degli oociti un fenomeno di castrazione parassitaria; e di questo fenomeno sospetta l'influenza nella sterilità delle caste neutre (il risveglio dei genitali che, secondo Silvestri, di tanto in tanto dovrebbe accadere nei neutri dei Termitidi, potrebbe avvenire appunto, ritiene il Brunelli, negli individui che in via eccezionale si liberano del tutto o in parte, dei protozoi) (*23*).

Ora, se pure quelli che Brunelli interpreta come indizi di degenerazione non sono prodotti di alterazioni istologiche dovute ad azione dei reagenti, come ritiene il Feytaud, certo si è che l'assenza dei protozoi non è condizione necessaria nè sufficiente per la maturanza dei genitali. Non sufficiente, perchè tale assenza non basta a cangiare l'individuo normale in neotenico; non necessaria, perchè i reali veri contengono protozoi nella loro ampolla cecale.

Sieno i protozoi simbionti necessari alla digestione o piuttosto forme semplici coprozoiche, la loro presenza nell'intestino posteriore dei termiti è correlativa al nutrimento legnoso, come la loro assenza al nutrimento salivare; e il fatto che insetti perfetti, nota bene il Feytaud, pervengono alla maturità sessuale e fondano una nuova colonia, pur avendo l'ampolla cecale piena di protozoi, basta a scartare l'idea d'una castrazione parassitaria [1].

(1) Feytaud è convinto che « l'opinione di Brunelli è mal fondata e che si tratta, nel caso che egli cita, puramente e semplicemente di una alterazione istologica » dovuta all'azione del fissatore sul vitello dei grossi ovuli che diviene duro e friabile. In tutte le regine mature, dice Feytaud, si possono trovare ovuli di aspetto analogo — contenuto frammentato in piccole masse irregolari — a quello della figura data da Brunelli (sezione trasversa di addome di regina complementare di *Calotermes*), e questo senza che esistano Protozoi nell'ampolla cecale. Nè l'esistenza di piccoli ovociti vicino a ovuli di dimensioni notevoli ha niente di strano, e si spiega facilmente colla rapidità

Feytaud (1912) accetta senza discussione i concetti del Grassi circa i reali di complemento e sostituzione. Studiando gli organi genitali nelle ninfe verifica che le ninfe di seconda forma hanno organi genitali assai meglio sviluppati che non le ninfe di prima forma del medesimo stadio.

« Les deux catégories de nymphes proviennent de larves qui, au 1er âge, étaient identiques. Il s'est donc produit une accélération de développement dans un cas, un retard dans l'autre. Cette différence d'évolution est certainement sous la dépendance d'une différence de régime. Les larves qui deviennent nymphes de 2e forme sont sans doute celles que les ouvriers nourrissent le plus abondamment. Il est probable que les nymphes de 1re forme sont nourries insuffisamment et qu'elles sont obligées de s'alimenter en partie en absorbant des parcelles de bois. Ainsi s'explique aussi l'abondance plus grande des Protozoaires dans l'intestin postérieur de ces dernières.

« Dans les espèces qui présentent des sexués de la 2e forme, ceux-ci sont sans doute l'objet des soins les plus assidus de la part des ouvriers. Ces sexués assurent la persistance de la colonie, tandis que les sexués de le 1re forme sont perdus pour elle et vont au dehors assurer la dissémination de l'espèce » (pag. 561).

Studiando la fondazione di nuove colonie da parte d'individui sciamanti, trova fin dall'ottavo mese, in una colonia composta di 7 individui, una giovane ninfa o individuo di terzo stadio, a testa piccola, a corpo intieramente bianco e con rudimenti di ali cortissimi. « L'apparition de nymphes à cette période précoce de l'existence de la colonie, au cours de la première année, est fort intéressante. Elle aura pour effet de préparer, le plus tôt possible, des individus capables de remplacer le roi et la reine, dans le cas où ceux-ci viendraient à mourir » (pag. 531).

---

di crescita degli ovuli, senza bisogno di invocare un arresto di sviluppo causato da processo di castrazione parassitaria (pp. 573-4, *69*).

Io non ho ragioni sufficienti per rifiutare senz'altro le osservazioni del Brunelli.

Potrebbe anche ammettersi che un'infezione di Protozoi, sopravvenendo in una regina matura, possa determinare in essa una distruzione di oociti, agendo meccanicamente, distendendo cioè l'ampolla cecale e così comprimendo gli ovari grossi. Però mi sembra più probabile che la distruzione degli oociti, ammesso che si verifichi, sia effetto della stessa causa da cui deve dipendere la contemporanea invasione dei Protozoi: il turbamento delle condizioni nutritive dell'individuo reale, trascurato, per una ragione o per l'altra (involuzione senile?). dal suo popolo è costretto a vivacchiare guadagnandosi il cibo col lavoro delle mandibole.

Come la scomparsa di Protozoi: non viene determinata da compressione della gonade sull'ampolla cecale — la scomparsa avviene già quando le ghiandole genitali sono ancora molto arretrate nello sviluppo — ma è effetto della stessa causa da cui dipende lo sviluppo precoce delle ghiandole genitali: il passaggio dalla nutrizione legnosa alla salivare.

In ogni modo l'influenza dei Protozoi appare sempre secondaria all'influenza del regime alimentare.

La teoria della castrazione parassitaria ha avuto un successo immeritato, nel senso non di riscuotere larghi consensi, ma di venire assai spesso riguardata [anche ultimamente (1922) da Hegh nella sua bellissima monografia dei Termitidi (pag. 201, *100*)], come la parte essenziale della dottrina del Grassi sulla differenzazione della casta neotenica; sì che parecchi AA. hanno creduto, dimostrando insussistente la teoria del Brunelli, di provar falsa la dottrina del Grassi.

Come ho già accennato parlando dei reali veri, gli studî di Snyder ed altri in America mostrano una pressochè perfetta corrispondenza tra il *lucifugus* e le altre specie del genere *Leucotermes*.

Schwarz, studiando le termiti nel Texas, osserva (1896) che vi sono ben pochi nidi permanenti, fondati da una coppia reale, nel *Leucotermes* e tale rarità è dovuta alle abitudini migratorie del genere (*193*). Come nella specie europea.

a) *b*)

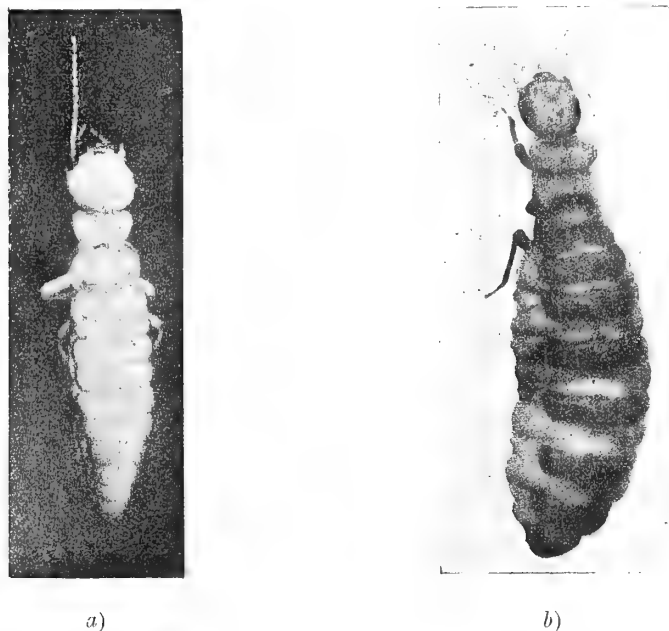



Fig. 4. — *Leucotermes* (R.) *flavipes*.

a) Re neotenico, in abito di ninfa, con addome conico e caratteristica pubescenza. Ingrand. 7 volte. In alcool.

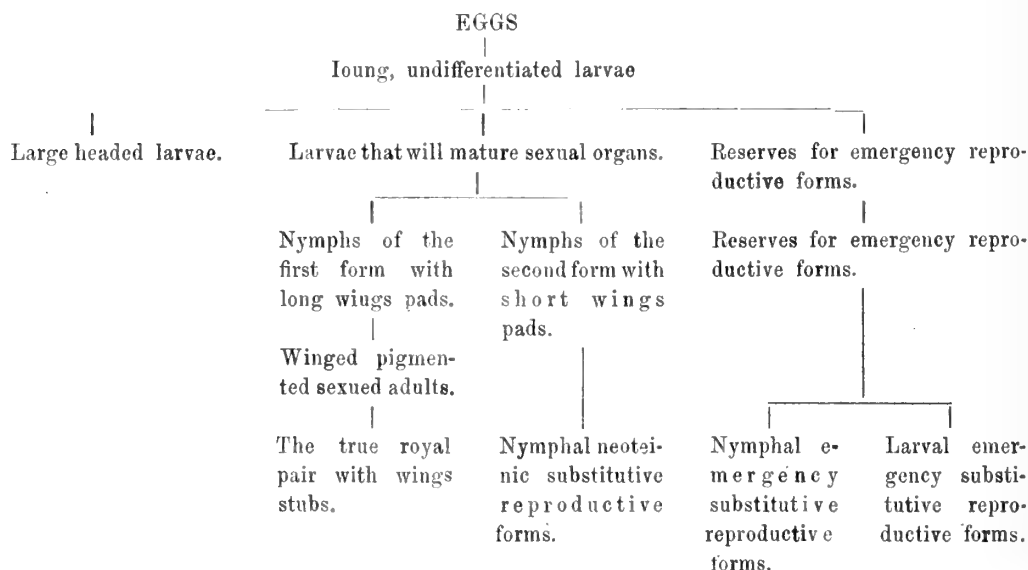
b) Regina neotenica, in abito di ninfa, con pigmentazione paglierina nelle parti chitinizzate. Ingrand. 7 volte. Da Snyder (pl. II, figg. 3, 4, *199*).

« I *Termes lucifugus* », dice Grassi, « passano facilmente da un albero all'altro, trasportandovi anche uova e neonati; gl'individui di complemento non mutano però mai di sede. In conseguenza si trovano molti alberi carichi di *Termes lucifugus* di svariate età, senza individui di complemento. Ad un certo momento, una parte della colonia stabilita in un albero senza individui di complemento perde ogni rapporto col resto della colonia e fabbrica centinaia di individui di complemento. Così sorgono nuove colonie di *Termes lucifugus*. Base di tutti questi fenomeni si è il fatto che i Termitidi avvertono prontissimamente la mancanza di individui reali » (pag. 118).

Snyder (1915) pur trovando non raramente coppia reale vera in *L. flavipes* e *virginicus* rinviene assai più comuni le forme riproduttive neoteniche. Sviluppatesi, quasi sempre da ninfe di seconda forma (fig. 4 *a*, *b*) in April-Maggio (in Virginia), maturano in Maggio-Giugno, nel *flavipes*; in Luglio-Agosto, nel *virginicus*. Di solito molte più ♀ che ♂ (es. 32 ♀ e 8 ♂), non tutti assieme, ma in gruppi.

Seguendo il Grassi, lo Snyder ritiene che:

« Neoteinic or supplementary royal individuals are obtained from an arrested early stage in the development of the nymphs of the first form, or even larvae, as young are kept in an undifferentiated state, which can be speedily turned into reproductive forms that serve as substitutes » (pag. 68, *198*).

Osserva anche direttamente, trasportando un tronco lontano dalla sua sede, che la colonia può produrre sessuati neotenici a qualunque stagione, ogni qual volta ne abbia bisogno [1] e fa un diagramma dello sviluppo delle caste nel *L. flavipes* (pag. 36) uniformandosi a quello tracciato dal Grassi pel *lucifugus*:

Ma nel 1917, studiando sul *Reticulitermes flavipes*, C. B. Thompson distingue, in base a caratteri strutturali interni, già alla nascita il tipo riproduttivo dal neutro e poco dopo nel primo casta di prima e seconda forma e più tardi nel secondo operai da soldati [2].

[1] « These forms can be produced at any time necessary. On April 9, 1912, a decaying stump infested with *flavipes* was removed from the forest and placed in the termitarium; this was at a time when the nymphs of the first form were nearly mature. On November 18 the termites had entered the ground and two neoteinic ergatoid (?) forms were found about 3 to 4 inches below the surface in chambers in the earth. No nymphs of the first form were present. They could be distinguished from the workers by the larger size, distended abdomen, straw-colored pigmentation, and sharper segmentation of the abdomen. Rudimentary wing pads were present. The antennae had 15 to 16 segments. Workers solicited drops of liquid from the female by stroking the abdomen with their palpi » (pag. 44, *198*).

[2] « The newly hatched nymphs of L. flavipes and L. virginicus are externally all alike, but internally they are marked structural differences which divide the nymphs into two sharply defined types, the reproductive and the worker-soldier types, which are respectively the prototypes of the *small headed* and *large headed* nymphs of Grassi. Therefore, the fertile and sterile types are predetermined at the time of hatching.

2. « The two types of newly hatched nymphs may be distinguished by the following characters;

Proseguendo le ricerche nel 1919 la Thompson studia lo sviluppo e stale di tredici specie di termiti appartenenti a nove generi diversi (*Termopsis*, *Calotermes*, *Cryptotermes*, *Neotermes*, *Arrhinotermes*, *Reticulitermes*, *Anoplotermes*, *Amitermes*, *Eutermes*) e a tutti estende le sue conclusioni (*214*).

E non si limita a dedurne che l'origine ontogenetica delle caste di neutri è dovuta esclusivamente ad intrinseche cause indipendentemente da estrinseci stimoli; ma, con processo di generalizzazione inverso a quello pel quale dallo studio dei reali neotenici il Grassi aveva indotto che anche la differenziazione dei neutri avviene nel corso dello sviluppo per cangiamento della nutrizione, conclude che tutte le caste sono predeterminate nell'uovo, anche quelle che sembrano manifestarsi più tardi, nel corso dello sviluppo.

« My final conclusion is that all termite castes are predetermined in the eggs; that some castes are distinguishable, either by external or internal characters, at the time of hatching, while others may appear considerably later in the course of development. In Leucotermes the more generalized castes are the first to be manifested, the more specialized are later in their appearance » (pag. 130, *213*).

« The conversion of the 'undifferentiated' nymphs, by feeding, into large and small headed forms, and these again into the future adult castes; the production of 'substitute' reproductive forms from an ever present 'reserve' of 'indifferent larvae,' or by the alteration of forms whose development has already begun; the sudden and opportune appearance of 'substitute forms' in 'orphaned nests'; all these assumptions, which, indeed, appeal to our sense of the dramatic and marvellous, must now be regarded as possessing chiefly an historic interest » (pag. 126, *213*).

---

a, the bulk of the brain; *b*, the relative size of brain and head; *c*, the structure of the compound eyes; and *d*, the size of the sex organs.

3. « The reproductive type of newly hatched nymph has a large brain, in which the mushroom bodies, optic lobes and antennary lobes are all large. The space within the hypodermis of the head is nearly filled by the brain. The compound eyes are slightly larger than in the worker-soldier type.

4. « The worker-soldier type of newly hatched nymph has a small brain, with small mushroom bodies, optic lobes and antennary lobes. The space within the hypodermis of the head is not nearly filled by the brain. The compound eyes are smaller and simpler, and the sex organs are smaller than in the reproductive type.

5. « The antennae of the newly hatched nymphs of both L. flavipes and L. virginicus are composed of nine segments, the third segment grooved and bare.

6. « In nymphs of L. flavipes with ten antennary segments, the third segment grooved, and a body lenght of 1, 3 to 1, 4 mm., the individuals of the reproductive type are further differentiated into two groups: *a*, with large brain and large sex organs; *b*, with slightly smaller brain and smaller sex organs. These are the respective prototypes of the nymphs of the first form and the nymphs of the second form, and hence of the two adult castes of the first form, with long wings, and of the second form, with short wing pads.

7. « The prototypes of the worker and soldier castes, although externally alike, are distinguishable by internal structures at the end of the second stage of development, in nymphs with a body lenght of 3,75 mm, and are probably distinguishable at an even earlier age » (pp. 131-132 *Summary of results*, *213*).

Di fronte ai risultati della Thompson, T. E. Snyder si associa a lei nel considerare anche tra gli individui riproduttori i reali veri (derivati attraverso la ninfa di prima forma da insetti perfetti alati), i neotenici in abito ninfale (derivati da ninfe di seconda forma) e i neotenici in abito larvale (derivati da larve ancora senza traccia di ali) come tre caste distinte, ereditarie, a differenziazione intraembrionale insomma.

E, ben sicuri di aver così definitivamente sistemato il problema dell'origine ontogenetica delle caste, affrontano la questione filogenetica domandandosi se le caste dei Termitidi sieno da considerarsi come mutazioni (variazioni discontinue del Bateson) o come i termini estremi sopravvissuti di tutta una serie di variazioni fluttuanti (come ammette Wheeler per le formiche (1919, *202*).

Verso la seconda ipotesi gli AA. inclinano e per la gradazione dei caratteri che riscontrano nelle caste (specie nelle tre caste riproduttive: prima, seconda, e terza forma che credono poter distinguere) e per la relativa costanza di queste caste nelle colonie e in queste caste dei caratteri strutturali, e tenendo conto anche delle poche forme intermedie finora descritte (per es. le regine di complemento con accenni alari di diversa lunghezza, descritte dal Grassi).

Premesso che « with the collapse of the fantastic theories of Grassi and others in regard to the voluntary manufacture by the workers of « substitute » and « complemental » royal forms to replace the loss of the « true » winged, or first forms, we find ourselves at a loss to furnish the answer to the question how the different reproductive castes actually reproduce their kind today » (pag. 124), ammettono che la casta riproduttiva di prima forma dia luogo a tutte e tre le caste (poichè prima dello sciamamento trovano insieme nelle colonie di *Reticulitermes* ninfe della prima e della seconda forma; di terza forma no e tendono a ritenerle operai fertili) e che le caste di seconda e terza forma dian luogo, oltre che a neutri, a individui riproduttori solo della loro casta.

Snyder, colle sue osservazioni in natura (1917), crede di poter stabilire con certezza che:

1°) nelle vecchie colonie ove s'incontrano grosse fertili regine di seconda forma, non si trovano ninfe o alati adulti di prima forma;

2°) in tutte le colonie in cui si rinvengono regine di terza forma (le più di queste colonie sono piccole e giovani) non si trovano ninfe o alati adulti di prima forma [1].

Cita di aver trovato in *Reticulitermes flavipes* e *virginicus* regine di terza forma e ninfe di seconda forma e, in primavera, ninfe di prima forma o alati adulti associati a ninfe di seconda forma. Queste però non si trovano più dopo lo sciamamento; onde ritiene pro-

(1) « Both field observations and breeding experiments seem to indicate that the second and possibly the third form produce, in addition to the sterile workers and soldiers, only their own fertile types, and never nymphs of the first form (pag. 125).

« One of the authors (T. E. S.) has made observations on the habits of termites since 1912, mainly in the southeastern United States, but in the season of 1917, during an extensive field trip through Florida, the soutwest, the Rocky Mountain and the Pacific Coast regions. It may be stated with certainty that 1) in long-established colonies, in which large fertilized queens of the second form occurred, no nymphs or winged adults of the first form have been found; 2) in all colonies in which queens of the third form were found, no nymphs or winged adults of the first form occurred; most of these colonies, however, were all small or young, that is, they had been recently established » (pag. 126).

babile che « accompanied by workers and soldiers, they leave the parent colony by means of subterranean passages and establish a new colony. Since the origin of the castes is due to intrinsic causes, a certain proportionate number of these nymphs of the second formmay be produced each year in long established colonies with parent first form adults. They would evidently be superflous if the original reproductive forms of the parent colony were present, and might therefore be forced to migrate » (pag. 127).

In certe colonie di *Reticulitermes*, invece che individui ♂ e ♀ di seconda forma, trovansi riproduttori tutti di terza forma e « sometimes a male of the first form with numerous mature females of the second form. Grassi would have described these second form females as « substitute » queens, produced by the workers to fill the place of a missing « true » queen. It is an open question how they are to be accounted for with our present know ledge and we have no exacta data to the progeny »

In un caso si son trovate insieme in una piccola colonia tre regine di terza forma e una di seconda forma, ma ambedue i sessi di due differenti caste riproduttive mature non sono state mai trovate in una stessa colonia di *Reticulitermes*.

Gli autori concludono esprimendo il proposito di completare con osservazioni in natura ed esperienze d'allevamento, « wich will require several years to complete », lo studio del'e tre caste riproduttive.

« The field of termite morphology needs much revision, but a few significant facts may be stated here:

The Castes of *Reticulitermes flavipes* KOL.

REPRODUCTIVE CASTES	1. Adults of the first form	Long wings, or stubs after deälation; brain, compound eyes, and frontal glande large; mature sex organs largest of any caste; abundant pigment in skin. Aërial habit of swarming.
	2. Adults of the second form	Short wing pads: brain, compound eyes and frontal gland smaller; mature sex organs slightly smaller; less pigment. Subterranean mode of life.
	3. Adults of the third form	Entirely wingless; brain small, compound eyes and frontal gland vestigial; mature sex organs much smaller; still less pigment. Subterranean mode of life.
STERILE CASTES	4. Workers	Wingless; brain small, compound eyes and frontal gland vestigial; sex organs embryonic; no pigment in body. Subterranean mode of life. Head broader than in the first and second reproductive forms, stouter mandibular muscles.
	5. Soldiers	Wingless; brain very small, compound eyes vestigial, frontal gland large; sex organs embryonic, even smaller than in the worker; no pigment in body. Subterranean mode of life. Elongate head, long mandibles, massive mandibular muscles.

Questo lo stato presente della questione (¹).

Ricostruita così dettagliatamente la storia dell'argomento, prima di passare alle mie ricerche mi soffermerò ad analizzare il riassunto lavoro di Thompson e Snyder.

Interessante anzitutto notare che in esso lavoro i dati sono in gran parte osservazioni già riportate dallo Snyder nella sua pubblicazione del 1915 ed ora presentate sotto una diversa luce. Sono evidentemente i risultati ottenuti dalla Thompson, più che nuovi dati di fatto, che hanno determinato nello Snyder mutazione così radicale d'opinioni.

Perfettamente consoni alle teorie del Grassi sono i reperti riferiti dallo Snyder di reali ♂ e ♀ di seconda forma, di un ♂ di prima forma con regine di seconda forma, ma non mai ambedue i sessi di due differenti caste riproduttive.

In base al preconcetto che l'origine delle caste sia dovuta a cause intrinseche, Snyder ammette che le vecchie colonie ogni anno producano ninfe di seconda forma che poi migrando costituiscono nuove colonie.

Ora l'ipotesi resta del tutto gratuita finchè non si dimostri: 1°) che le ninfe di seconda forma compaiono ogni anno indipendentemente dai bisogni della colonia (²);

(¹) In un recente (decembre 1920) lavoro sul « the 'Third Form', the Wingless Reproductive Type of *Termites: Reticulitermes* and *Prorhinotermes* » Thompson e Snyder confermano « the fact of the existence... of five well marked types or castes, three reproductive and two sterile... The... forms with wing westiges or entirely wingless, termed the 'substitute', or 'complemental', forms, were assigned the rôle of understudy, and were supposed to be waiting in a semideveloped condition, how patiently or impatiently we are not told, for some chance or disaster to remove one of the 'royal pair', whose place would then be filled from their ranks... More recent work... proves that the cause of the different types is of intrinsic or germinal origin and disproves Grassi's hypothesis of determining or changing the castes of termites by external means » (pag. 592, *203*).

(²) *Io non posso decidere, in base alle mie osservazioni in natura, se le ninfe di seconda forma si producano solo in quei nidi che non hanno reali o non ne hanno abbastanza, come ritiene il Grassi, o se in tutte le colonie ogni anno si producano, come afferma lo Snyder.* Non posso deciderlo perchè, non disponendo per la ricerca che delle mie braccia e della mia accetta, non potevo assicurarmi se i nidi nei quali nell'aprile-maggio trovavo solo ninfe di prima forma o alati e non ninfe di seconda forma, veramente non ne contenevano; nè se i nidi nei quali trovavo abbondanti ninfe di seconda forma, contenevano anche reali di complemento maturi.

(Anche Grassi restò a lungo incerto. Nella sua nota preliminare del 1887 scriveva: «È un fatto che le ninfe della seconda forma non hanno quel destino che aveva loro assegnato il Lespès. Io però ritengo che non si formino in tutti i nidi; se appena in quelli che hanno bisogno d'una coppia reale di sostituzione, o che vogliono dividersi, *io non oso asserirlo* ») (*91*).

A me pare del resto che quando fosse ben dimostrato che le ninfe di seconda forma si producono in tutte le colonie ed ogni anno, sì che la loro comparsa sembri indipendente dal bisogno della colonia, questo non significherebbe che la differenziazione delle ninfe di seconda forma sia dovuta a cause intrinseche, ereditaria, ma semplicemente che queste ninfe di seconda forma oltre all'ufficio di sostitutive, come nel *Calotermes* (dei reali complementari esistenti, quando questi vanno perduti o diventano per vecchiezza poco produttivi; o della coppia reale, nelle regioni, Francia, America, ove questa, almeno nei primi anni della colonia, si rinviene), hanno ufficio di forme diffusive, per la propagazione della specie. La propagazione normalmente avviene, come ha osservato Grassi, per espansione della colonia e, più tardi, interruzione delle comunicazioni tra la colonia madre e la propaggine, che allora, come una colonia orfanata, fabbrica i complementari. Potrebbe anche avvenire, come suppone Snyder, direttamente per migrazione delle ninfe di se-

2º) che si trovano dopo lo sciamamento giovani colonie, originatesi per migrazione, con varia popolazione e numerose ninfe di seconda forma (matura e da poco).

Snyder afferma che nelle vecchie colonie ove s'incontrano grosse fertili regine di seconda forma non si trovano ninfe o alati adulti di prima forma. Ciò è anzitutto inverosimile. Poichè nei *Leucotermes*, anche americani, di regola la colonia possiede sessuati di seconda forma; e sarebbero ben rare le colonie producenti alati, se alati non potessero essere prodotti che in colonie con a capo sessuati di prima forma (reali veri). Mentre lo Snyder stesso afferma « In incipient colonies nymphs (of the first form) are not produced during the first year that the colony is established, but are developed every year in old, well-established colonies » (pag. 44, *198*).

Nel *R. lucifugus* io ho trovato sempre reali di seconda forma in grosse colonie piene di piccoli e rigurgitanti di ninfe di prima forma o di alati. Nè potrebbe essere altrimenti, dato che a capo della colonia vi sono sempre sessuati di seconda forma (reali di complemento), e gli alati, di cui all'epoca dello sciamamento quasi tutte le colonie riboccano, derivano necessariamente da essi.

Del resto poi l'affermazione dello Snyder è in contradizione con le sue stesse osservazioni:

« In a colony nymphs of the second form that had completed the final molt were present with sexed adults, but unlike the foregoing they are darker, some being pigmented. Very joung larvae were present in the outer layers of the wood. The acquisition of pigmentation in neoteinic royalty apparently is a sign of maturity and old age » (pag. 60, *198*).

Altro esempio: trova in una colonia 29 ♀ di seconda forma, delle quali 14 con addome grosso (la maggiore lunga 8 mm.) « evidentemente feconde e deponenti uova ».

---

conda forma, poco dopo lo sciamamento, accompagnate da gruppi di operai e di soldati, o magari anche sole.

Snyder, osservando lo sciamamento di una colonia di *R. virginicus* (giugno 1919), cercando, dopo che gli alati eran quasi tutti volati via, gli « abnormally developed winged adults or deformities which usually accompany a swarm », ha trovato « with these abnormalities and a few belated remaining normal winged adults... quite a few pigmented adults of the second form actively running about the top of the stump in the nearly full sunlight. They came out of crevices and ran about and sought at one side of the stump near the base » (pag. 132). Da questa osservazione conclude che probabilmente « lo 'pseudoflight' è il modo normale col quale gli adulti di seconda forma stabiliscono nuove colonie ed essi possono, da giovani, sopravvivere senza l'aiuto di operai e soldati. Può anche essere che adulti di seconda forma lascino la colonia madre per gallerie sotterranee, accompagnati da soldati e operai » (pag. 133, *200*).

Questa ipotesi d'uno *pseudoflight* mi sembra poco probabile e penso che, come accenna lo stesso Snyder, possa trattarsi di riproduttori di seconda forma accidentalmente trascinati fuori della colonia nel tramestio dell'esodo degli alati. Mi sembra più verosimile, benchè pur essa indimostrata, una migrazione normale degli individui di seconda forma, traverso gallerie sotterranee, insieme a operai e soldati. In questo caso la propaggine coloniale avrebbe a sua disposizione ninfe di seconda forma già sessualmente mature, o quasi; mentre ordinariamente se le alleva dalle giovani larve.

In ogni modo il prodursi ogni anno nelle colonie ninfe di seconda forma sarebbe l'espressione dell'adattamento caratteristico del Reticulitermes alla propagazione per diffusione, che viene ad assumere un'importanza enormemente maggiore di quella che resta alla fondazione di nuove colonie per mezzo di alati sciamanti.

Nella stessa colonia trova una mezza dozzina di alati (6 ♂ e 2 ♀). Dice: «It is a question whether these queens with distended abdomens are young and were produced this year contemporaneously with the winged first form adults, or wheter they hare the parents of the entire colony»!

Afferma inoltre lo Snyder che in tutte le colonie in cui si trovano regine di terza forma non si trovano ninfe o alati adulti di prima forma. Ma la vera spiegazione del fatto ce la porge senza accorgersene lo Snyder stesso, notando che le più di queste colonie sono piccole e giovani. Il Grassi dimostrò che questi reali di terza forma sono sessuati di sostituzione. Quando la colonia viene orfanata dei suoi reali normali di complemento, talvolta eleva al trono larve giovani ancora senza accenno di ali.

Evidentemente può avvenire qualcosa di simile quando da una colonia madre si stacca per migrazione una coloniola; se questa, piccola e giovane com'è, non possiede ninfe di seconda forma o alati bianchi, supplisce al suo orfanamento col materiale larvale, il solo che abbia a sua disposizione.

Risulta dunque contraria alla realtà l'ipotesi che reali di seconda e terza forma riproducano sessuati solo della loro casta.

* * *

Tale ipotesi è ripetuta e confermata dai predetti autori nelle loro successive pubblicazioni, comparse quando io già avevo scritto questo lavoro e ne avevo brevemente riassunto i risultati in due Note all'Accademia dei Lincei (*124*).

Queste pubblicazioni interessano troppo da vicino il nostro argomento perchè possiamo esimerci dal farne un esame sommario.

Thompson e Snyder fanno oggetto di uno speciale accurato studio (dic. 1920, *203*) i sessuati di terza forma, i riproduttori senza traccia di ali del *Reticulitermes* e del *Prorhinotermes* (in *R. flavipes*, *virginicus* e *tibialis* Banks i sessuati di terza forma sono non rari, « not uncommon »; in *Neotermes* e *Calotermes* della Florida sono pure presenti; in *Prorhinotermes simplex* Hagen, delle Antille e in *Termopsis* delle coste del Pacifico, sono frequenti). Sostengono che questi riproduttori senza traccia di ali debbono riguardarsi non come operai fertili ma come « a distinct morphological caste. » Per le dimensioni, l'aspetto generale, l'assenza delle ali, le ninfe di terza forma mature e i giovani adulti di terza forma si rassomigliano molto ad operai, ma le due caste possono distinguersi per i seguenti caratteri esterni: colore della testa (bianco nella terza forma, giallo nell'operaio), numero dei segmenti addominali (17-18 e 16 rispettivamente), presenza o assenza di ocelli (presenti nella terza forma), grandezza degli occhi composti (leggermente minore nell'operaio), forma e colore dell'addome (snello e bianco opaco nella terza forma, massiccio e trasparente al contenuto intestinale nell'operaio). Ulteriori differenze si scoprono nelle strutture interne: gli individui di terza forma hanno cervello e ghiandole salivari più grandi, gonadi capaci di funzionare, abbondante corpo grasso e muscoli mandibolari degenerati; gli operai hanno cervello e ghiandole salivari più piccoli, organi genitali embrionali, incapaci di funzione, scarso tessuto adiposo, e muscoli mandibolari funzionanti. « The dark woody masses in the intestinal sac of the worker and their absence in the third form are evidence of the worker's

habit of masticating wood and the probable diet of predigested food in the third form » (pag. 626, *203*).

Ora, che questi cosidetti riproduttori di terza forma non siano operai fertili, ne sono convinto anch'io, benchè gli argomenti che Thompson e Snyder adducono non siano poi cosi probativi, e rivelino il singolare abito mentale a considerare i caratteri somatici da un punto di vista statico, naturalmente insufficiente a spiegare i fatti biologici che sono essenzialmente dinamici. Ma certo i caratteri morfologici di questi sessuati senza traccia di ali non dimostrano nient'affatto ch'essi costituiscano una casta morfologicamente distinta e non possano piuttosto e debbano considerarsi come larve di insetti perfetti, neoteniche (arrestate nello sviluppo, per cangiamento del regime alimentare, prima ancora che acquistassero accenni di ali) [1].

Snyder crede (pag. 116, *200*) che l'abbondanza di riproduttori di terza forma o atteri nel genere *Prorhinotermes* — assai vicino sistematicamente al genere *Reticulitermes* — dipenda da adattamento alla vita insulare (coste della Florida, isole delle Indie occidentali). Nota che riproduttori di terza forma sono spariti nei generi più elevati di Termitidi, *Metatermitidae* Holmgren (nei generi Neartici, almeno, egli non ne ha mai rinvenuti). Sono invece numerosi in *Termopsis*, nel qual genere sono invece rari gl'individui di seconda forma (appena 6 su 50 colonie).

In *Termopsis* (*angusticollis* e *nevadensis*) la Thompson osserva varie forme intermedie, oltre le quattro caste stabili: adulti di prima forma, di seconda forma « with very short wing vestiges which are much shorter than in second form individuals of other genera »), di terza forma, e soldati. « In addition to these four stable castes, three additional types or variations are occasionally found. These are: soldiers with wing pads, second form individuals with very minute wing vestiges, and individuals closely remsembling the third form, but with wing vestiges that are merely narrow lateral borders of the thoracic segments ... » (pag. 496). « ... are to be regarded as evidences of the high degree of variability of this genus, especially in the direction of the retention of primitive characters » (1922, pag. 498, *215*).

La presenza di queste forme intermedie sembra alla Thompson una riprova dell'origine ereditaria delle caste per mutazioni; ma io — che, ripetendo gli esperimenti del Grassi su nidini di *Calotermes* in provette di vetro, ho assistito alla formazione di individui riproduttori di sostituzione, varii secondo la composizione del nidino, preferibilmente senza traccia di ali, ma anche con accenni d'ali variamente sviluppati — io vedo in queste « forme intermedie » la migliore dimostrazione della differenziazione neotenica: l'arresto di sviluppo può avvenire in varî stadii dello sviluppo larvale. Certo, a questo riguardo i generi primitivi (*Termopsis* e *Calotermes*) sembrano presentare una plasticità maggiore ed una tendenza ad arrestare lo sviluppo piuttosto allo stadio di larva senza traccia di ali che non allo stadio di ninfa (pel *Calotermes* io ho trovato in natura molti individui e coppie reali

[1] Notare che in questi individui di terza forma « the head, thoracic segments and tergal and sternal nota are not as broad as those of adults of the second form. The segments of the abdomen of mature queens of the third form are less projecting than those of the second form and are less semicircular. The mouthparts and legs are also less gross in structure, Indeed, these queens more nearly approach those of the first form » (Snyder, 1920, pag. 115, *200*).

di sostituzione senza traccia di ali, pochi con piccola traccia di ali, assai rari con accenni alari bene sviluppati; ne ho ottenuti invece facilmente anche di questi in via sperimentale, facendo nidini di ninfe e neutri o di ninfe e molto piccole larve).

Lo studio morfologico è utile, ma non basta alla risoluzione di problemi biologici, specie di problemi come quello delle Termiti.

Del resto, quando Thompson e Snyder dallo studio delle forme definitive, degli adulti, passano agli stadii di sviluppo, alle larve, si trovano anch'essi di fronte a un dinamismo di forme, che non possono sempre disconoscere. Ad esempio, costatando il fatto ben noto che nelle ninfe di seconda forma gli organi genitali sono assai più sviluppati che non in ninfe di prima forma, debbono riconoscere che si tratta di una differenza non morfologica ma fisiologica, dovuta a precoce maturità delle cellule sessuali negli individui di seconda forma: giacchè questi, a pieno sviluppo, hanno organi genitali più piccoli che non gli individui di prima forma. La precoce maturità genitale degli individui di seconda forma i detti AA. la considerano evidentemente correlativa al fatto che detti individui non sciamano e forse... perdono meno tempo per trovarsi una nuova dimora, prima di cominciare a deporre le uova!! ([1]).

Questa correlazione mi sembra parecchio stiracchiata; e in ogni modo è un tentativo di giustificare teologicamente (di spiegare a che serve, che vantaggio presenta) la maturazione precoce delle gonadi, che non ci dice niente del come il fenomeno avvenga.

Così pure, studiando la ninfa di prima forma in *Termopsis*, la Thompson trova che « according to their age, these nymphs present two different appearances, which are so divers that they at first seem to belong to two different castes (pag. 500)... Other external points of difference between the mature and immature nymphs, besides the differences in eyes, wing pads, and shape of thorax..., are the relatively broader head and the smaller lateral tibial spines of the younger nymphs.... The brain in the younger first-form nymphs differs from that of the mature nymphs in the smaller optic lobes and the smooth rounded contour of the mushroom bodies. In this caste these characters are due

([1]) « The reproductive organs appear larger in the nearly mature second-form nymph than in the first. In the female nymph of the second form the bulk of the ovaries is greater and the contained ova are larger, the oviduct has a greater width, and the seminal receptacle is nearly twice the size of similar organs in the first-form nymph. The colleterial gland also is larger in the second-form nymph. In the male nymph of the second form, the testes are more than double the size of those of the first form, the vasa deferentia are wider and more twisted, and the lenght and convolutions of the seminal vesicles greater.

« This is apparently not a morphological difference, but a physiological one, due to the earlier maturity of the sex cells of second form individuals. Sections of the abdomens of females of the three reproductive forms, in specimens of nearly maximum distention, show that the space filled by the egg tubes, and probably the number of ova, is greatest in the first form, less in the second form, and least in the third form (Thompson and Snyder '19). The difference in the mating habits of the first two forms is evidently correlated with the times of maturity of their reproductive organs. The first-form adults swarm, taking longer or shorter aërial flights, and drop to the ground; then, after shedding their wings and selecting their mates, the search for a new habitation may consume some time. The second-form adults do not swarm and possibly need less time for the establishement of the new habitation before egg laying begins. It should, however, be stated that it is not known with certainty how the second-form adults establish new colonies » (pp. 601-2, ***203***).

to the age of the individuals, but the same characters occur as castal differences, as will be seen in the description of the brain of the other castes and in figure... » (pag. 505, *215*).

Questa ingenua riflessione è preziosa per noi. Perchè mai quegli stessi caratteri che nella ninfa di prima forma sono certo dovuti all'età giovane, nelle altre forme dovremmo considerarli come differenze castali? Evidentemente solo perchè la ninfa giovane di prima forma diventa, coll'età, ninfa matura di prima forma, mentre i riproduttori di seconda e terza forma restano quali sono, senza svilupparsi ulteriormente. Ma questo ci dà diritto di affermare solo che si tratta di arresti di sviluppo.

Forse la Thompson, continuando a studiare bene e in modo completo gli stadii di sviluppo larvale, avrebbe finito col convincersi che anche le differenze tra gli adulti delle varie forme (riproduttive; scindiamo per ora il problema delle forme sessuate da quello dei neutri) sono fisiologiche e non morfologiche. Purtroppo però la morte ha troncato le diligenti e interessanti ricerche della Thompson (il lavoro sul *Termopsis* è stato pubblicato postumo, a cura di Snyder). Queste ricerche, alle quali io debbo l'aver messo da parte il problema delle caste di neutri per riprendere *ex novo* il problema dei neotenici (dal quale spero di tornare, certo molto più preparato, al problema dei neutri), non hanno avuto solo il merito di riaprire ampiamente la questione stimolando nuove, più profonde ricerche. Le ricerche di miss Thompson hanno portato un valido contributo alla conoscenza dei Termitidi ed hanno messo in rilievo due fatti importanti: « Two morphological facts, which apply to all the termites here described, should be borne in mind: first, that, together with certain external characters, such as wings, there is a correlation in the size, structure and degree of development of the brain, the eyes, and the sex organs; second, that, in general, in whatever castes are represented, there is a gradation in the size of these organs, from the first form down to the worker or soldier (pag. 594)... this gradation of structure possibly representing different degrees of retrogressive ancestral mutations. On the other hand, certain types possess characters peculiar to themselves, which may represent progressive mutation, for example, the stouter legs of the second form, the thicker chitin of the head of the workers and soldiers, and the elongated head and mandibles of the latter » (pag. 625, *203*). La Thompson, in quei due fatti morfologici, vede dunque una riprova della origine ontogenetica ereditaria delle caste e della loro origine filogenetica, per mutazioni ancestrali essenzialmente retrogressive. Ma io in quei due fatti vedo invece una riprova della differenziazione delle caste nel corso dello sviluppo (ontogenetico come filogenetico), da un tipo morfologico comune, unico: differenziazione fisiologica che, direttamente, cangiando il tipo metabolico, e, indirettamente, per meccanismi di correlazione, acquista la sua espressione morfologica e dà origine alla casta. Lasciando da parte per ora i neutri, io sono convinto che nei sessuati delle varie forme le cosiddette mutazioni ancestrali retrogressive siano caratteri inerenti alla neotenia, dipendenti da arresti di sviluppo, e le eventuali mutazioni progressive rappresentino caratteri correlativi a quest'arresto neotenico di sviluppo.

Snyder poi, una volta sulla strada, va più in là.

Quelle anormalità di sviluppo degli alati, che lui stesso vide nel 1915 prodursi per effetto di insufficiente umidità (nei tubetti lasciati senza turacciolo) ora (1920) le giudica, anche quelle, variazioni fluttuanti o mutazioni! « It was formerly explained that these abnormally developed individuals were merely abnormalities due entirely

to unfavorable conditions of misture. Now, however, when considered with certain 'intermediate' forms, these abnormalities may be termed fluctuating variations or mutations from the normal winged reproductive form» (*201* e pag. 147, *200*).

In verità, io ammiro la coerenza di Snyder che, accettate le premesse, scende senza riluttanza fino alle ultime conseguenze, ma non me la sento di ammettere che proprio nei tubetti senza turacciolo s' incontrino per caso gl' individui che presentano variazioni fluttuanti o mutazioni!

Nel suo ultimo lavoro sul *Termopsis*, la Thompson, influenzata dal recente lavoro di Morgan (1919, *The physical basis of eredity*) e specialmente dall'interpretazione che Morgan e la sua scuola dànno del comportamento genetico di *Oenothera lamarckiana* modifica le sue idee nel senso di credere che le caste delle termiti debbano interpretarsi come comparabili alla discendenza dell'*Oenothera*, «as arising by segregation from a eterozygous parent form. In modern terminology, therefore, the termite castes are not mutants, in the sense of the progeny of Drosophila, arising once for all from a mutating parent, and then breeding true, but are rather segregants, in the sense of the offspring of Oenothera lamarckiana, arising generation after generation by the splitting and recombination of the genes of a heterozigous parent form. My views on this point therefore, are in general agreement with thoses of Imms» (pag. 528, *215*).

Imms (1919), tenendo conto delle osservazioni di Bugnion, secondo le quali il soldato è bell'e differenziato già fin dalla nascita; dei tentativi negativi di Heath che non è riuscito a influenzare, con nutrimento quantitativamente e qualitativamente.... (proctodeal food, stomodaeal food) differente, lo sviluppo individuale; considerato che vi è buona ragione di credere che i protozoi siano piuttosto simbionti che parassiti e che in ogni modo, ammessa e non concessa la possibilità di una castrazione parassitaria, certo i caratteri di soldato sono indipendenti dal grado di sviluppo delle gonadi (bene sviluppate e forse spesso funzionanti nei generi più bassi, *Archotermopsis* ad es.: mentre nei generi più elevati, come *Eutermes*, sono tanto ridotte che sembrano mancarne anche le tracce); conclude che «there is no satisfactory evidence conclusively proving that any particular type of nutrition, or the absence thereof, is capable of producing such fundamental changes in the external and internal morphology, which caracterise the soldier caste» (pag. 144, *118*). Riflettendo che il nodo centrale del problema del polimorfismo sociale, come lo pose il Darwin, è nel come i caratteri delle caste di neutri entrino a far parte della costituzione germinale della specie; considerato che per la maggior parte di specie delle Termiti è impossibile la occasionale fertilità di soldati e operai invocata dal Grassi; pensa che il polimorfismo degli insetti sociali possa con relativa semplicità interpretarsi in base alla teoria mendeliana dell'ereditarietà.

Le due caste di neutri, operai e soldati (non prende in considerazione i neotenici), sarebbero sorte, filogeneticamente, come mutazioni retrogressive («arising by the loss of certain correlated allelomorphs») dalla forma primitiva degli insetti perfetti. Le cellule sessuali di questi sono venute così ad avere una costituzione eterozigotica, contenendo, per ognuno dei due gruppi di caratteri, il determinante della presenza e il determinante dell'assenza (determinante della mutazione retrogressiva). Sicchè nella riproduzione si comportano come l'incrocio di due forme differenti per due coppie di caratteri, come diibridi (considerando il caso di una tipica specie di termiti con sessuati alati

e soldati monomorfici e operai monomorfici. Ma anche l'ulteriore sviluppo del polimorfismo tra le caste di neutri potrebbe spiegarsi mendelianamente).

Questa ipotesi della eredità mendeliana di due analoghe mutazioni offre così una spiegazione semplice dell'origine del polimorfismo nelle termiti. Inoltre rende conto della persistenza delle caste, spiegando, malgrado la loro quasi costante sterilità, la presenza dei loro caratteri nel germinoplasma della specie in tutte le succedentisi generazioni. Secondo questa ipotesi, inoltre, la composizione gametica delle caste neutre può variare, nel senso di conservare una più o meno grande parte dei caratteri germinoplastici di alato. E questo ci spiegherebbe l'apparire transitorio, nello sviluppo ontogenetico, di caratteri parentali, prima che si affermino i caratteri definitivi della casta. Ci renderebbe conto inoltre di certi fenomeni, quali: 1) l'assenza di forme intermediarie tra le caste; 2) la costante presenza, in ciascuna generazione, di caste divenute sterili; 3) l'esistenza di dimorfismo e trimorfismo tra operai e soldati; 4) la presenza occasionale di rudimenti di ali in membri di caste sterili, e il reperto di « ninfe-soldati » e di « ninfe operai » (pag. 151).

In conclusione: « Polymorphism in Termites is not adequately explained as being the direct or indirect effects of special nutrition, nor does the theory of « castration parasitaire » explain the observed facts of the phenomenon. The Mendelian inheritance of mutations appears to offer a reasonable solution of several of the outstanding difficulties associated with the origin of polymorphism, and the inheritance of germinal characters in sterile castes » (pag. 168, *118*).

Ora io, l'ho detto e lo ripeto, non voglio entrare per ora a discutere il problema dei neutri [1], anche perchè riguardare i fatti degli altri, senza portarne di nuovi che permettano di rivederli tutti da un nuovo punto di vista, mi sembra cosa sterile... anche più costantemente sterile di quel che forse non siano le stesse caste dei neutri! Ma non nasconderò che il tentativo di Imms di spiegazione mendeliana del polimorfismo nei Termitidi, per quanto molto ingegnoso, mi lascia piuttosto scettico e mi richiama alla memoria le parole del Bohn:

« Bien trop souvent, les biologistes considèrent les formes des êtres comme des *caractères* qui se transmettent d'individu à individu par la voie de l'hérédité, et discutent à porte de vue sur l'hérédité mendelienne, sur l'hérédité des caractères acquis... mais le problème des formes n'en reste pas moins mystérieux. Il serait plus logique, nous semble-t-il, d'étudier le *déterminisme* des caractères avant d'étudier leur transmission » (pag. 147, *19*).

[1] Noterò soltanto, così di passaggio, che, il fatto che nelle giovani colonie la prima figliolanza si sviluppa in operai e pochi soldati, e che durante il primo anno non si sviluppano larve di sessuati, mi sembra un argomento formidabile contro la teoria della differenziazione castale ereditaria. Che questi primi individui, insufficientemente nutriti, vengano più piccoli, è naturale; ma che vengano neutri, e in maggior numero operai che soldati, e non larve di sessuati, come può spiegarsi? « The workers » dice Snyder « constitute the caste most necessary for the welfare and conduct of the new colony » (pag. 136, *200*). In verità, se questa pretende essere una spiegazione, è certo una spiegazione piuttosto strana in bocca ad un fautore della differenziazione castale ereditaria. Di più, che sieno in maggior numero gli operai che i soldati è naturale; ma bisogna notare che la

Ricerche personali.

> Questi studi sulle Termiti sono imprese molto più malagevoli di quanto si potrebbe credere a prima giunta. Occorre di avere pazienza, di seguire a lungo i costumi di queste popolazioni, prima di orientarsi e di poter tentare con sicurezza un esperimento o un'osservazione nuova.
>
> GRASSI.

Avviata la confutazione delle teorie di Thompson e Snyder circa la differenziazione ereditaria delle tre presunte caste riproduttive con l'esame obbiettivo dei fatti dagli autori stessi portati a prova della loro tesi, vengo alle mie ricerche.

Per ragioni essenzialmente economiche non ho potuto, come avrei voluto, estenderle. Gl'individui reali si trovano appena nel 6,8 % delle piante invase dai Termiti e stanno di solito in una parte molto recondita del nido, frequentemente accumulati in qualche radice profonda o nell'interno di un grosso tronco. Limitato ai miei mezzi personali di ricerca, ho potuto tuttavia procurarmi gl'individui riproduttori di parecchie colonie e osservarne così i varii stadî di sviluppo. Debbo tale risultato: 1°) all'aver ricercato i reali in località povere di ciocchi perchè questi sorgono rari tra la vegetazione fruticosa e arborea (macchie della Magliana) o perchè vengono tolti di mezzo dalla vigilanza assidua del coltivatore (Orto botanico). In tali località, essendo ridotta la propagazione diffusiva delle colonie, è meno improbabile il reperto di una colonia madre provvista di reali. Mentre nei luoghi boscosi, ove il terreno è coperto di ciocchi affioranti e tronchi tagliati e alberi cadenti, e le Termiti tutto invadono diffondendosi in tutte le

---

proporzione dei soldati nelle giovani colonie è maggiore che nelle vecchie. Perchè? Teleologicamente si può spiegare il fatto pensando che la piccola colonia ha più bisogno di difesa; ma la finalità d'un fatto non è la spiegazione del fatto: trovare che un fatto è utile non ci dispensa affatto dal domandarci come questo fatto avvenga; in quale modo, per quale mezzo questo scopo sia raggiunto. Ora la proporzione dei soldati maggiore nelle giovani colonie non so davvero come potrebbe spiegarsi da chi ammette che l'origine della casta soldato dipenda da una causa intrinseca, ereditaria, come il modo di fecondazione o simili (a meno che non si voglia ammettere una autoregolazione negativa, nel senso di soppressione degli individui sovrabbondanti. Una tale autoregolazione fu osservata dal Grassi, ma in via secondaria rispetto all'autoregolazione positiva nel senso di capacità di formare individui della casta di cui la colonia abbisogna. Ad es., la colonia del *Calotermes* fabbrica parecchi individui di sostituzione; ma di questi, dopo banchetti di carne reale, non resta che una coppia o un individuo di sostituzione, secondochè la colonia era orfanata del re o della regina o di ambedue).

Io mi guarderò bene dal concludere che ammettendo l'influenza del nutrimento tutto ciò riesca ben chiaro (la differenziazione del soldato dall'operaio, riconobbe anche il Grassi, è un gran punto oscuro); ma concludo che *il mezzo principale più diretto per avvicinarsi alla soluzione del grande problema, per rischiararlo, è lo studio dei primi stadî di sviluppo della colonia fondata da alati sciamanti.*

direzioni, è addirittura problematico rintracciare, mi si perdoni l'espressione, tra tanti villaggi, città e sobborghi, la capitale, spesso sotterranea, del regno] 2°) all'avere sorpreso le regine nell'epoca che risalgono dai loro palazzi d'inverno ai più elevati quartieri della capitale per la deposizione delle uova: ho trovato difatti le mie regine nei mesi di maggio e giugno [1].

Le rinvenni per la prima volta il 17 maggio 1919 all'Orto botanico (Roma, alla Lungara) in un vecchio ceppo di castagno albergante, insieme con *Calotermes* e formiche, una grande colonia di *Termes* (*Ret. luc.*) con quantità di piccole larve e numerosissime ninfe di prima forma ed anche alati ancor bianchi. Nelle venature necrosate del vivo e duro legno rinvenni le regine di complemento: grosso addome, pigmentazione bruna, brevi accenni alari; vecchie regine dunque, derivate da ninfe di seconda forma. Riuscii a catturarne appena 15 o 16; senza dubbio la colonia ne conteneva ben di più; ma il legno era durissimo e mal cedeva all'accetta maneggiata da mano inesperta e..... perchè no?.... commossa.

Il 1° giugno alla Magliana (Macchia Mattei) in un tronchetto poco necrosato e molto umido (bagnava le sue radici in un ruscelletto) trovai popolosa colonia ricca di operai, soldati e larve, anche assai piccole, ma senza ninfe di prima forma o alati (mentre la maggior parte delle colonie rinvenute lì presso lo stesso giorno, rigurgitavano di alati). Tra la popolazione circolavano numerosissime ninfe di seconda forma ad occhi non pigmentati (sebbene già con 18 articoli alle antenne) e frammiste, specie nella parte più viva del tronco, molte giovani regine ben riconoscibili per l'addome discretamente ingrossato, giallastro, translucido, con pubescenza dorata, gli occhi pigmentati, le pleure toraciche abbrunite. Ne raccolsi una ventina. Un più attento esame mi fece scoprire tra le giovani regine — aventi tutte, come le ninfe di seconda forma, brevi accenni alari — un individuo lungo 7 e ½ mm., con addome peloso biancastro, pleure toraciche abbrunite e abbrunite squame alari: evidentemente derivato da un sessuato adulto che ha perso le ali prima di abbrunire e sciamare.

Un individuo simile, un'altra regina da alato bianco (che la mia accetta decapitò, senza, fortunatamente, ledere il resto del corpo), rinvenni l'8 giugno (Magliana) in grossa colonia di *Termes* con pochi alati neri, qualche uovo e moltissime regine di seconda forma: addome grosso pubescente, accenni alari più o meno corti, colore giallo dorato, pleure toraciche brune. Ne raccolsi 45. A giudicare dall'aspetto, tali regine erano di mezza età, di età intermedia cioè tra le vecchie regine del 17 maggio e le giovani regine del 1° giugno.

Mentre tra quelle e tra queste cercai senza rinvenirne individui maschi, per i reali dell'8 giugno non posso esser sicuro se vi fossero o no re di complemento, inquantochè, avendo lasciato, dopo un esame sommario e la fissazione di pochissimi individui, il for-

[1] Anche Snyder ha osservato che la locazione dei reali nella colonia dipende dalla stagione dell'anno e dal clima della località. Durante i mesi caldi di estate stanno ordinariamente sopra terra, nel legno, di solito nella parte più resistente degli alberi e ceppaie infestati, ma spesso, strano a dirsi, negli strati più superficiali. In inverno, invece, stanno sotto la superficie ghiacciata del terreno. Nella regione delle praterie, durante la stagione calda e secca, si approfondano molto sotto il suolo (*201* e pag. 119, *200*). Anche in Sicilia, secondo Grassi, « nei mesi caldi è difficilissimo avere regine di sostituzione, perchè sogliono stare molto approfondate nel terreno » (pag. 56).

tunato frutto di una giornata di lavoro in una capsula Petri non ermeticamente chiusa, trovai l'indomani, con dolorosa sorpresa, la capsula nereggiante di piccole formiche ingordamente pascentisi ancora tra i miserandi avanzi delle mie regine.

* * *

Già il Grassi nel suo classico lavoro aveva minutamente descritto i reali di complemento derivati da ninfe di seconda forma (vedi fig. 3 *a*), *b*), *c*) a pag. 295): notando come caratteristiche, in confronto cogli individui dalle ali perfettamente sviluppate, i peli dell'addome in complesso più lunghi e diretti trasversalmente e, negli individui più vecchi, sul corpo giallognolo come di carta vecchia, talvolta giallo tendente al dorato, delle regioni molto estese di colore bruno o seppia ad occhio nudo e che, esaminate al microscopio, mostransi gialle, picchettate di macchioline nere [1].

Queste macchioline nere, questa nota caratteristica in confronto agli individui dalle ali perfettamente sviluppate, ha sopratutto colpita la mia attenzione che era già stata fermata, nello studio dello sviluppo dei sessuati adulti, dalle frequenti anomalie per le quali la pigmentazione caratteristica degli sciamanti più o meno completamente compare durante o anche prima della muta da ninfa matura a insetto perfetto (ved fig. 6 *e*)). Già allora mi ero domandato come potesse spiegarsi il progressivo abbrunimento dell'alato e mi ero provvisoriamente contentato della teoria di Urech che paragona l'ab-

[1] « Raramente superano la lunghezza di undici millimetri; quelli, poi, che non hanno traccia d'ali, quasi mai arrivano a una lunghezza superiore a sei-sette millimetri. I soli due maschi da me trovati erano lunghi circa sette millimetri.

Negli individui che hanno principio d'ali, per la forma così la testa come il torace trovano perfetto riscontro nelle ninfe e quindi anche negli insetti perfetti.

Il corpo è in generale d'un color giallognolo come di carta vecchia, talvolta quasi giallo tendente al dorato. La testa è giallo-dorata oscura, cogli occhi composti bruni, i quali mancano però negli individui senza traccia di ali. In molti individui, che sono più vecchi, noto delle regioni molto estese di color bruno o seppia ad occhio nudo, e che, esaminate al microscopio, mostransi gialle picchiettate di macchioline nere. Esse sono le seguenti:

1°) Terghi toracici e addominali. I terghi addominali però mostrano un tratto mediano longitudinale senza macchioline nere ed un cerchietto simile, ad ognuno dei due lati. Il tratto mediano senza macchioline può essere o no evidente anche alla terza tergite toracica; manca alla seconda; invece alla prima esiste non solo, ma forma una sorta di croce con un tratto simile trasversale anteriore. I margini laterali di questo tergite sono essi pure, di solito, senza macchioline.

2°) Parti laterali delle sterniti addominali: notando però che anche alla parte di mezzo delle stesse sterniti vedesi qualche macchiolina nera.

3°) Pleure toraciche.

4°) Porzione prossimale delle zampe.

È importante d'osservare che gli individui del tutto giallognoli hanno alle volte un principio d'ali più sviluppato di quello degli individui con regioni brune, nonostante che questi ultimi siano più vecchi, come dimostra il maggior sviluppo dell'addome, o la loro storia. L'accenno delle ali è bianco sporco e presenta abbondanti trachee. disposte come nelle ali perfettamente sviluppate. Dappertutto si notano peli, eccetto agli intersegmenti. I peli dell'addome, in complesso più lunghi e diretti trasversalmente, distinguono questi individui da quelli che hanno acquistato ali interamente sviluppate. Nelle femmine mancano sempre le appendici anali.

I peli suddetti dell'addome e le macchioline nere formano una nota caratteristica in confronto cogli individui dalle ali interamente sviluppate. Notisi che questi ultimi diventano neri, colorandosi uniformemente, cioè senza presentar prima le macchioline caratteristiche degli individui di sostituzione o di complemento » (pag. 62, *92*).

brunimento progressivo della crisalide dei Lepidotteri al fenomeno fisico-chimico dell'infoschimento graduale del colore per condensazione della molecola negli amido-benzoli (*216*).

Ora, come doveva interpretarsi la pigmentazione a macchioline insorgente nei vecchi reali di complemento?

Era veramente una nota caratteristica in confronto agli individui dalle ali perfettamente sviluppate? E in ogni modo, quale significato poteva avere, quale natura ed origine?

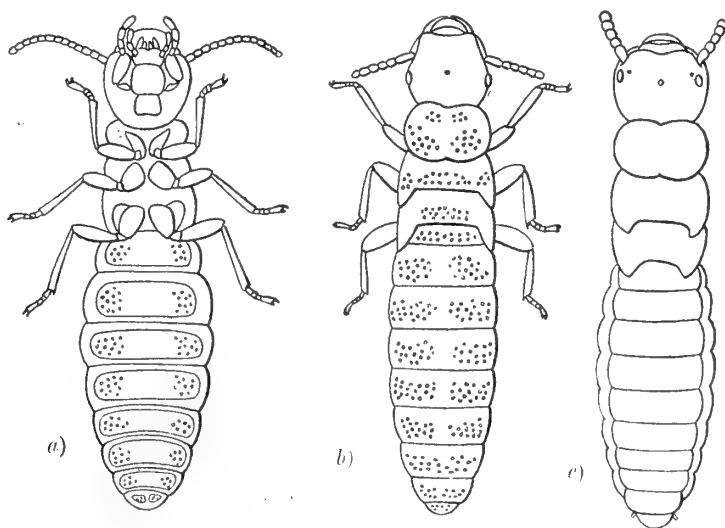



Fig. 5. — *Reticulitermes lucifugus.*

a) Vecchia regina di complemento (da ninfa di seconda forma) veduta dal ventre.

b) Idem, dal dorso. Spicca nei tegumenti la caratteristica pigmentazione a macchioline nere (schematizzata).

c) Giovane regina complementare con accenni alari cortissimi. Da esemplari montati in balsamo. Oc. 1, ob. 0.

Cominciai coll'esaminare più accuratamente al microscopio esemplari di vecchie regine rischiarati in olio di cedro o con balsamo (ved. fig. 5 *a*), *b*)).

I tergiti toracici e addominali si presentano picchiettati di macchioline nere che mancano però nelle zone marginali (anteriore e posteriore) e in un tratto mediano longitudinale (veramente, anche in questo tratto può apparire qualche macchiolina, specie nel mesonoto) e, per i terghi addominali, in un cerchietto ad ognuno dei due lati (notevole che areole perfettamente corrispondenti spiccano, debolmente chitinizzate e non pigmentate, nei terghi addominali abbruniti dell'insetto perfetto sciamante: ved. fig. 9 a pag 331) fig. 5 *a*), fig. 6 *d*,).

Si nota qualche granulazione anche sulle lamine alari. Picchiettate da macchioline nere sono anche (fig. 6 *c*)) le pleure toraciche (epimeri nel 1°, epimeri ed episterni nel 2° e 3° segmento toracico), i trocantini (mentre meso- e metasterno, come pure i pezzi giugulari nel collo, appaiono soltanto cosparsi di una fine polvere pigmentata), le parti

laterali degli sterniti addominali e le coxe (tutta la faccia anteriore nel 1º paio di zampe, specie la porzione esterna - meron - nel 2º e 3º paio).

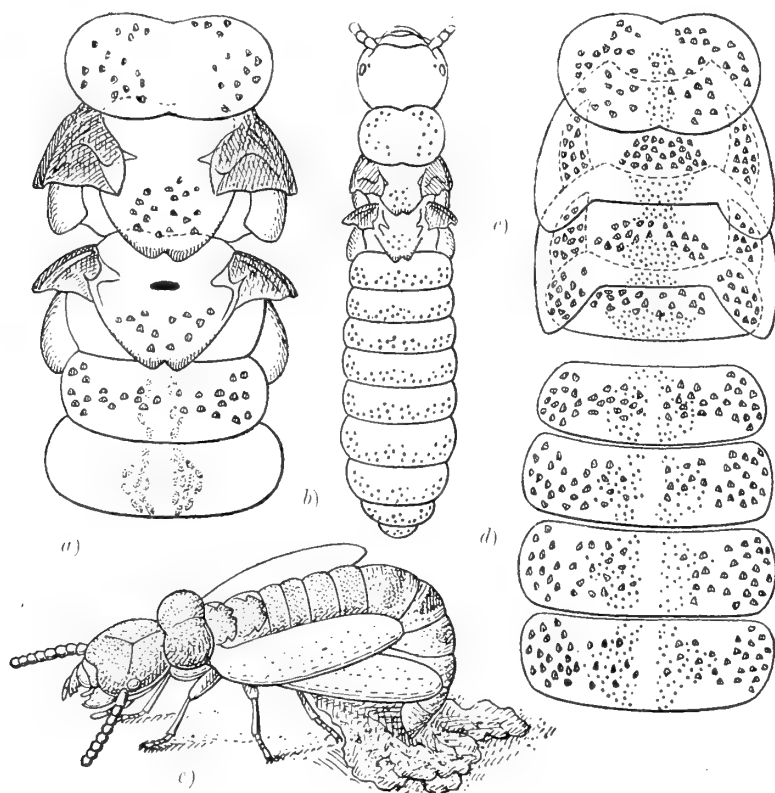



Fig. 6. — *R. lucifugus.*

a) Torace e primi segmenti addominali di giovane regina di sostituzione in abito di insetto perfetto parzialmente abbrunito (sono abbrunite le squamme, le pleure toraciche, i bordi posteriori del meso e metanoto. Sono picchiettati di macchioline nere i terghi toracici, e addominali: traspare pigmentata la cintura pericardica). Oc. 1, ob. 2.

b) Giovane regina di sostituzione in abito di insetto perfetto parzialmente abbrunato. Oc. 1, ob. 0.

c) e *d*) Di vecchia regina complementare sono disegnati a più forte ingrandimento il torace col primo urite *c*) e i quattro uriti seguenti *d*): per mostrare, un po' schematizzata, la pigmentazione caratteristica a macchioline nere dei terghi e delle pleure. Traspare pigmentata a granuli la cintura pericardiale. Oc. 1, ob. 2. *a*) *b*) *c*) *d*): da esemplari montati in balsamo.

e) Ninfa di prima forma, matura, che si è abbrunita precocemente, prima di aver deposto la vecchia spoglia e liberate le ali dagli astucci ninfali. Oc. 1, ob. 0.

Le macchioline nere — specie nel pronoto, ove sono più o meno nettamente disposte in due piccoli gruppi superiori e due grandi inferiori, simmetrici rispetto alla incisura mediana del tergite — appaiono costituite da una sorta di anello cavo che, esaminato con

diligenza a forte ingrandimento, si risolve otticamente in un accumulo fittissimo anulare di granuli giallo-marrone (fig. 7 *a*)).

Il tratto mediano longitudinale, senza macchioline nere, dei terghi addominali corrisponde al vaso dorsale, lungo il quale, focheggiando tra gli aggruppamenti granulari

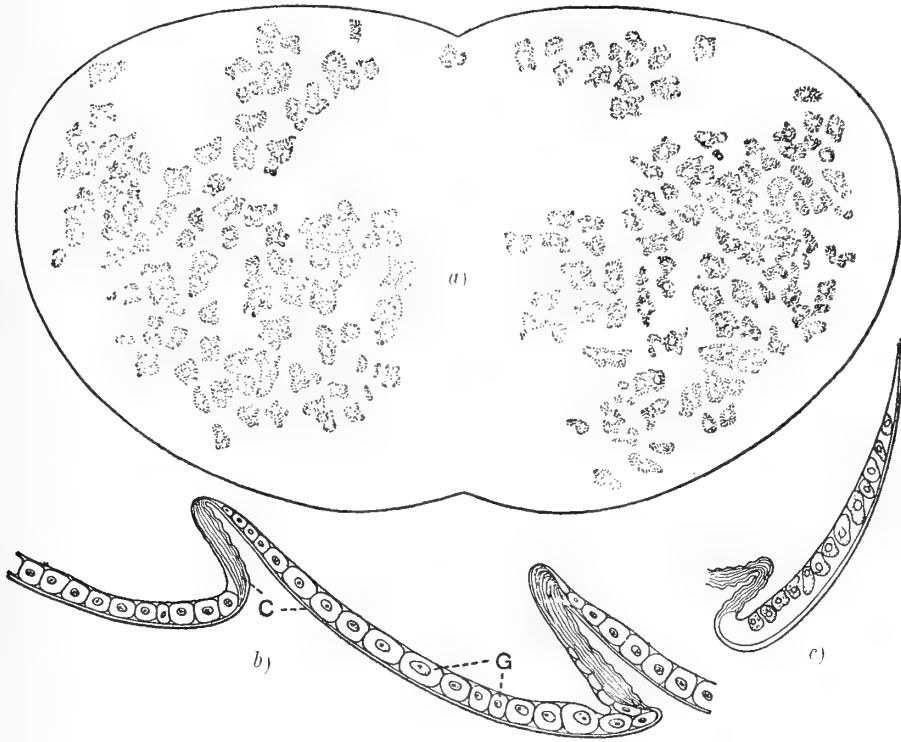



Fig. 7. — *R. Lucifugus.*

a) Pronoto di vecchia regina complementare: son disegnate esattamente, nel numero e nella forma, le macchioline nere caratteristiche.
b) Sezione ottica, in regina giovane di complemento, dei tegumenti pleurali toracici (epimero mesotoracico, epimero metatoracico, exocoxa): che mostra le grosse cellule ghiandolari (G) in fila continua sotto la cuticola (C).
c) Sezione ottica, in vecchia regina di complemento, dell'epimero mesotoracico: che mostra le macchioline nere in fila continua nella fascia ipodermale. Da esemplari montati in balsamo.

dei tergiti e quelli delle pleure, scorgonsi, d'ambo i lati, fittissimi piccoli granuli e gocciole sferiche grandette (e una fine polvere pigmentata si stende, anche nelle regioni laterali, per tutto il corpo, e di granuli più grossetti risaltano tutti punteggiati i malpighiani).

Il colore è lo stesso delle macchioline nere degli scleriti, ma più cupo, marrone scuro. La disposizione caratteristica (più nettamente trasparente in corrispondenza ai terghi addominali e meglio alle membrane intertergali) lungo il vaso dorsale ricorda singolarmente gli organi pericardici della Blatta (fig. 6 *c*), *d*,).

Sorge naturale l'idea che le macchioline nere siano mucchietti di sostanze escretizie depositate nei tegumenti ove secondariamente verrebbero trasportate, dopo essere state fabbricate nelle cellule pericardiali. In questa idea e in questa ipotesi ci conferma lo studio bibliografico dell'argomento:

« La grande majorité des pigments des Insects peuvent être actuellement considérés à des degrés plus ou moins complets comme des pigments intrinsèques, c'est-à-dire des produits de l'assimilation et de la désassimilation ». (Marchal) (pag. 279, *148*).

« In generale può essere detto che tutti i pigmenti risultano di composizioni azotate e vanno considerati per prodotti escretivi derivati da varii organi e che raggiungono il tegumento e si installano in qualcuno dei suoi strati » (Berlese) (pag. 483).

D'altra parte lo studio dei giovani reali di complemento (ved. fig. 5, *e*)) ci mostra una pigmentazione più debole, debolissima talvolta e a mala pena discernibile, ma sempre tipicamente granulare e nella caratteristica disposizione (per es. in quattro gruppi simmetrici nel pronoto).

La pigmentazione, tanto più evanescente quanto più l'individuo è giovane (dimodochè il grado di pigmentazione si presenta come il mezzo più sicuro per stabilire l'età dell'individuo), si presenta, come nei vecchi reali, nei terghi toracici e addominali, nella parte laterale degli sterniti addominali e nelle pleure (1).

Evidentemente dunque ha luogo nei reali di complemento un accumulo progressivo di sostanza pigmentata nei tegumenti; questa progressione sembra correlativa allo sviluppo dell'attività riproduttoria.

E nei reali di sostituzione da alati bianchi? mi sono domandato con crescente interesse.

Questi individui « reali di sostituzione derivati da insetti perfetti non ancora neri a cui furono strappate le ali » erano già stati descritti anch'essi minutamente dal Grassi. « Misurano circa millimetri 6, e presentano il solito carattere dei peli lunghi e diretti trasversalmente. Si distinguono facilmente gli occhi composti oscuri, e gli ocelli sono anche rilevabili. Come al solito le antenne sono smozzate, le ali raramente appaiono lacerate in corrispondenza esatta al margine posteriore della squamma. Di solito sono lacerate per guisa che, oltre alla squamma, resta un tratto maggiore o minore, in generale però piccolo: e la lacerazione è avvenuta secondo una linea molto irregolare quasi che le ali fossero state rosicchiate. Il corpo in complesso è di colore giallognolo e non presenta le macchioline nere. È però uniformemente bruno, anche veduto al microscopio, il contorno del pronoto in special modo posteriormente e il margine posteriore del mesonoto e del metanoto. Certuni presentano bruna anche la testa, tutto il mesonoto e tutto il metanoto. In molti individui sono brune anche le pleure toraciche e la faccia esterna della porzione prossimale delle zampe. In certuni tende al bruno anche l'estremità posteriore dell'addome. In parecchi le ali sono uniformemente bianco-sporche; in molti

(1) Spesso però la pigmentazione granulare delle pleure, come del 7° sternite addominale, è nascosta da una tinta marrone diffusa donde spiccano i tricopori, tinta evidentemente epidermica che anche ad occhio nudo fa spiccare le pleure abbrunite nel corpo bianco dei giovani complementari.

altri le squamme e il margine esterno sono bruni; anche il margine lacerato delle ali può essere in parte bruno » (pag. 64, *92*; vedi fig. 3 *f*) e pag. 295).

Il Grassi non trovò questi reali di sostituzione in natura, ma li ottenne più volte per via sperimentale:

« Si prenda un tronco contenente una numerosa popolazione ma nessuna regina, e si trasporti a una certa distanza. La popolazione, sentendosi orfanata, subito si accingerà a formare individui reali di sostituzione. Lo stesso verificasi quando si uccidono le regine di complemento. Poche ne vengono fabbricate se poche sono quelle uccise. In tutti questi esperimenti che furono cominciati nei mesi di novembre o di dicembre o di gennaio o di febbraio, io non ho cercato le regine di sostituzione prima di dieci mesi. In un sol caso, fatto l'esperimento alla fine di marzo, ricercai gli individui di sostituzione in giugno e trovai, invece dei soliti individui di sostituzione, quegli individui reali di sostituzione, anneriti soltanto parzialmente e colle ali lacere, che ho sopra descritti come provenienti da individui adulti tuttora bianchi e perciò ancora inetti al volo. M'imbattei in individui simili parecchie altre volte, ma le mie conoscenze sui Termitidi erano ancora così insufficienti che le osservazioni allora fatte riuscirono imperfette. (Dopo che questo lavoro era stato scritto, ebbi a verificar quattro casi, del tutto simili a quello unico qui sopra riferito) » (pag. 79).

*
* *

Per ben comprendere il significato, il valore morfologico di questi reali di sostituzione da alati che non hanno annerito, seguiamo un po' davvicino lo sviluppo della ninfa di prima forma in insetto perfetto.

Secondo la classica osservazione del Lespès, si distinguono due sorta di ninfe: ninfe di prima forma a lunghe appendici alari, e ninfe di seconda forma ad accenni alari cortissimi. Queste, come dimostrò il Grassi, rappresentano la forma ninfale caratteristica dei reali di complemento; quelle si sviluppano in insetti perfetti subendo in maggio l'ultima muta.

Secondo Grassi, « le ninfe della prima forma non s'incontrano nei mesi di giugno e di luglio. Gl'individui col principio d'ali alquanto pronunziato e colle antenne aventi ancora quattordici, quindici, sedici articoli, o mancano o sono molto scarsi in ottobre e in novembre, aumentano in dicembre e diventano numerosi già in gennaio ed in febbraio... Molte osservazioni mi portano a conchiudere che le larve giovanissime, che si trovano nell'inverno, nell'estate successiva non possono svilupparsi oltre a ninfa della prima forma, e quindi, per acquistar le ali, hanno certamente bisogno di superare due inverni, vale a dire per es. quelle nate nell'ottobre 1889 avranno potuto acquistare ali interamente sviluppate soltanto nell'aprile 1891. Così la circostanza che in ottobre e novembre mancano o sono molto scarsi gli individui colle antenne da quattordici a sedici articoli e col principio alquanto pronunziato delle ali, obbliga a credere che i neonati del maggio o sono già diventati ninfe oppure posseggono antenne con un numero d'articoli ancora inferiore a quattordici. Questa seconda ipotesi è la vera, perchè, se invece reggesse la prima, noi dovremmo in determinati nidi trovare un numero di ninfe molto più grande di quello che incontriamo in realtà » (pag. 68).

Ora io credo, invece, che proprio la prima ipotesi sia vera. Sì, sono convinto anch'io che le larve giovanissime (molte hanno addirittura caratteri di neonate: lunghe mm. 1 e ½, con antenne di dodici articoli, terzo e quarto nudo, intestino senza protozoi), che si trovano nell'inverno e che evidentemente provengono dallo sviluppo delle ultime uova (ottobre), nell'estate successiva non possano svilupparsi oltre a ninfa della prima forma, e quindi, per acquistare le ali, hanno certamente bisogno di superare due inverni.

Ma credo anche che i neonati del maggio si vengano a trovare nelle identiche condizioni di questi neonati che hanno svernato, e che tanto gli uni quanto gli altri già in agosto–settembre raggiungano lo stato di ninfe di prima forma. Invece i neonati del luglio e dell'agosto, probabilmente, in ottobre–novembre posseggono antenne con numero d'articoli ancora inferiore a quattordici, e diverranno ninfe in febbraio–marzo; mentre gli ultimi neonati, del settembre–ottobre, vengono subito arrestati nel loro sviluppo dai freddi autunnali.

Questo io deduco dal complesso delle mie osservazioni sulle variazioni della colonia, nel 1917 e 1919. Le osservazioni dello Snyder mi sembra vadano di accordo con le mie. Secondo Snyder, ninfe di prima forma di *flavipes* trovate, con accenni alari ben distinti, in stadio quiescente il 5 agosto, avevano ormai accenni alari bene sviluppati e antenne di 16 o 17 articoli alla metà di settembre: di solito, molto abbondanti nelle colonie.

Credo utile riportare le seguenti osservazioni sulle variazioni della colonia, che trovo nei miei diarii:

Dicembre 18 e 20, an. 1920: gran quantità di ninfe di prima forma (con occhi pigmentati) e anche ninfe con accenni alari corti, come ninfe di seconda forma, e antenne di 17 articoli tutti pelosi o 18 col 4° nudo; gran quantità di piccole larve, evidentemente di primo stadio (12 articoli alle antenne, 3° e 4° nudo), lunghe mm. 1 e ½, senza protozoi nell'intestino che contiene solo finissimi detriti, come di vomito.

Febbraio 29, an. 1920: ninfe di prima forma abbondanti; qualche rara ninfa di seconda forma.

Marzo 6 e 13: nidi pieni di ninfe di prima forma; rare ninfe di seconda forma. In una colonia rare ninfe di prima forma (con occhi pigmentati) ed estremamente numerose ninfe di seconda forma, giovani, senza occhi ben pigmentati, con 17 almeno e le più con 18 (4°, nudo, 3° e 4° piccoli) articoli alle antenne; gran quantità di piccoli.

Aprile 11 e 14, an. 1919: assai abbondanti nelle colonie le larve piccolissime (molte lunghe appena mm. 1 e ⅓), nivee, con aspetto di neonate.

Aprile 16, an. 1919: grandissimo numero di neonate e un po' di uova.

Maggio 7, an. 1917: nelle colonie (che rigurgitano di ninfe di prima forma con grossi occhi pigmentati e che presentano anche abbondanti alate bianche, e parecchie già annerite, e ninfe di seconda forma con occhi pigmentati) sono abbondanti i piccoli di primo e di secondo stadio.

Maggio 16, an. 1919: oltre gran quantità di ninfe di prima forma, e frammiste ninfe di seconda forma con occhi pigmentati, numerosi piccoli e molti individui in muta o testè mutati. Altre colonie sono piene di alati pronti a sciamare.

Giugno 3, an. 1917; nelle colonie (la maggior parte semispopolate con un po' d'alate nere pronte a sciamare) molti individui in varî stadii di sviluppo; assai scarsi i piccoli; gran parte degli individui in muta; notati per la prima volta soldati bianchi. Tutti questi individui evidentemente derivano dall'ulteriore rapido sviluppo dei piccoli di maggio (forse la stagione calda e secca ha affrettato l'ovificazione e lo sviluppo).

Giugno 22, an. 1917; pochissimi piccoli; quasi tutti vari individui recentemente mutati, giovani operai, molti soldati bianchi (pochi cominciano a ingiallire).

Luglio 2, an. 1917: piccoli di primo stadio pochi; quasi tutte larve nei varî stadii di sviluppo (al solito molti soldati bianchi). Moltissime uova; in gruppi di centinaia (evidentemente comincia una seconda grande deposizione di uova). Trovo anche molte ninfe con antenne di 15 e 16 articoli e di 17 (vere ninfe di seconda forma).

Luglio 12, an. 1917: abbondantissime le uova, in grandi gruppi di centinaia, nelle cavità del legno umido, e i neonati che sembrano costituire la massa predominante della popolazione. Abbondanti anche gli individui di secondo stadio; molti individui in muta o in ipnosi (ripiegata la testa contro il corpo, rattrappite le zampe, rigide le antenne, lateralmente o all'innanzi, giacciono immobili come piccole mummie). Altri individui, che hanno già superato la difficile prova, camminano caracollando e si trascinano dietro la vecchia pelle che, colla parte posteriore, impaccia ancora i pezzi boccali e, qualche volta, le antenne (ninfa di seconda forma). Altri, ancora in piena muta, s'agitano e si puntellano e cercano di togliersi di dosso la vecchia spoglia aiutandosi anche colla unghietta bifida terminale del tarso (soldato). Gl'individui in ipnosi neanche se stuzzicati agitano le zampe, ciò che invece fanno nel periodo d'inerzia che segue immediatamente la muta, anche quando non si sieno del tutto liberati dai resti della vecchia spoglia.

Riporto anche le seguenti osservazioni dello Snyder (pp. 34-44, *198*) sul *R. flavipes:*

Marzo 11, an. 1912: presenti ninfe di prima forma con antenne di 16–17 segmenti, « excluding the base ».

Marzo 29, an. 1912: ninfe con ocelli visibili, pigmentazione iniziale, rossiccia bruna, agli occhi; antenne, capo e torace gialliccio-bruni.

Aprile 18, an. 1912 (e aprile 8, an. 1912): ninfe di prima forma mature, pronte all'ultima muta, distinte da opacità degli accenni alari allungati, tegumento gialliccio–bruno che comincia a distaccarsi dal corpo, specie posteriormente, pigmentazione bruno-rossiccia degli occhi composti. Subiscono l'ultima muta (aprile 18–27, an. 1912; aprile 8–17, an. 1913; aprile 22–maggio 2, an. 1914).

Giugno–agosto: sviluppo dei soldati (15 giugno–15 luglio: larve di soldati a testa grossa, in muta; 15 luglio–15 agosto: frequenti nelle colonie le « nymphs of soldier »: larve che hanno una testa più lunga, più simile alla testa del soldato adulto; alcune in stadio quiescente, molte appena uscitene, bianche).

Agosto: sviluppo delle ninfe: « Nymphs of the first form of *flavipes* with easily discernible wing pads were found in the quiescent stage of the molt on August 5, 1913 at Weitch, Va. By the middle of September they had well–developed wing pads two and one–half times the segment from which they originated, and antennae with from 16 to 17 segments. The nymphs were from 5,5 to 6,5 millimeters in lenght and the compound eyes had acquired the primary reddish pigmentation. There is apparently an unaccountable annual variation, since in 1913 and 1914 nymphs were very abundant in colonies in the fall, while in 1912 they were comparatively scarce » (pag. 43).

Ho creduto opportuno insistere su tale questione di cronologia dello sviluppo, anche per mettere in rilievo che individui dello stesso stadio possono avere età molto diverse. Gli sciamanti del maggio 1920, ad esempio, derivano in parte da neonati del settembre–ottobre '18, in parte da neonati del maggio–giugno e probabilmente anche del luglio–agosto '19. Dal momento della nascita sino allo stadio di insetto perfetto occorre dunque un tempo variabile da dieciannove mesi a tredici e fors'anche a dieci mesi (Grassi ammise da diciotto a ventitrè).

Anche i neutri possono raggiungere lo stadio definitivo dopo un periodo più o meno breve di sviluppo larvale. Probabilmente: i neonati del maggio e giugno divengono operai o soldati in luglio e agosto rispettivamente; i neonati del luglio e agosto, in settembre e ottobre; e i neonati dell'autunno, al giugno dell'anno successivo, dopo avere

svernato allo stato di giovani larve. Sicchè dal momento della nascita fino allo stadio di operaio e di soldato occorre un tempo variabile da nove mesi a quattro e a meno di tre mesi. Finora veramente si ammetteva occorresse un tempo più lungo. Secondo Grassi, « gli operai e i soldati, molto probabilmente, hanno bisogno di un tempo assai minore [che i sessuati]; così da un uovo deposto in maggio si ottiene verosimilmente un operaio, oppure un soldato, all'autunno dello stesso anno » (pag. 68). Secondo Snyder, « Workers developed from eggs laid on 15 July 1912, were 4, 5 mm. in lenght by the following December, with 13 segments to the antennae. Both workers and soldiers complete their development within one year » (pag. 46, *198*). Ma io, fondando una coloniola in provetta con alati sciamanti, in maggio, vi ho trovato il 15 agosto un bel soldatino bianco.

In *R. lucifugus*, secondo Grassi, « le uova trovansi nei mesi di maggio, giugno, luglio e, secondo ogni verosimiglianza, anche in quelli di agosto e settembre. Le larve giovanissime mancano sempre nei mesi d'aprile e di maggio » (pag. 67). Secondo Snyder in *R. flavipes* e *virginicus* il periodo di massima produzione delle uova è dalla metà di maggio ai primi di settembre (uova e neonati o giovani larve sono stati trovati da Hubbard in Florida in aprile, maggio e giugno; da Snyder in Virginia dall'aprile all'ottobre, e da Odenbach in Ohio, in settembre). In colonie recenti le prime uova vengono deposte, in Virginia, a metà giugno e luglio per il *flavipes* e in luglio o agosto pel *virginicus* (che sciama ai primi di giugno, circa un mese più tardi del *flavipes*; il *lucifugus*, che qui in Europa sciama dalla seconda metà di aprile alla prima metà di giugno, in California, secondo Heath, sciama dall'ottobre all'aprile).

Ora si presenta naturale una domanda. È proprio indifferente, per lo sviluppo, che questo sviluppo avvenga più o meno rapidamente? Lo svernamento non ha proprio nessuna influenza sulle larve e sui neonati? Dalle uova deposte in primavera, dalle uova deposte in estate, dalle uova deposte in autunno, deriva una prole sempre con quel dato rapporto tra le caste? Escherisch si è domandato se le fluttuazioni di temperatura non possano avere una certa importanza per la differenziazione delle caste ed essere a questo scopo utilizzate, come le variazioni del regime alimentare, dagli operai. Io penso che, anche indipendentemente dalla volontà degli operai, il complesso di condizioni (temperatura, umidità), che variano secondo l'epoca di sviluppo, possa avere una certa influenza, non solo sulla velocità, ma anche sulla direzione dello sviluppo. Le condizioni igrometriche e termiche potrebbero agire sull'andamento del metabolismo sia direttamente da sole, sia associate a particolare regime alimentare (come notò il Grassi, un nidino orfanato di *Calotermes* si fabbrica, in tutte le stagioni dell'anno, individui di sostituzione; ma la comparsa di questi è assai più rapida se si tiene al caldo, per es. nel taschino del panciotto, la coloniola in provetta).

Durante l'ultima muta, dalla quale escono insetti perfetti, le ninfe di prima forma passano attraverso uno stadio quiescente di corta durata ma che si avvicina e sembra fisiologicamente corrispondere allo stadio ninfale degli insetti a metamorfosi completa. Questo stadio quiescente è stato già descritto da E. H. Strickland (1911) nel *Leucoter-*

mes flavipes, e, le mie osservazioni sul *lucifugus* perfettamente coincidendo con le sue, mi limito a riportare la sua accurata descrizione:

« Le ninfe mature divengono sempre più torpide finchè cessan ogni movimento: stese su un fianco, la testa ripiegata contro il lato ventrale, le antenne e le zampe estese all'indietro, gli accenni alari abbassati lateralmente lungo i lati del corpo. In questa posizione le ninfe han tutto l'aspetto di una pupa libera. Se vi fosse una muta, il che non pare, immediatamente prima di questo periodo quiescente, non si esiterebbe a descriverlo come un vero stadio pupale; indubbiamente ha la stessa funzione fisiologica. La durata di questo stadio quiescente è di poche ore, (da quattro a nove), e sembra che sia in relazione col grado di umidità dell'ambiente: collocando la pupa perfettamente all'asciutto, non è capace di superare questo stadio di sviluppo, mentre quanto più è grande il grado di umidità tanto più è corto il periodo. Durante questo stadio l'ultima pelle ninfale si spacca nella testa e lungo il dorso e si va portando lentamente, per gli sforzi della ninfa, in basso e all'indietro, finchè pende liberamente in gran parte dall'apice dell'addome sul lato ventrale. Le zampe sono l'ultima parte del corpo a liberarsi dell'involucro che finalmente, tutto raggrinzito, si distacca.

Appena le ali si liberano, cominciano a slontanarsi dal corpo alla loro base. Ciò pare dovuto alle trachee che si gonfiano nella porzione basale delle ali.

L'inflazione però non si estende di là dalla sutura, in corrispondenza alla quale perciò l'ala è piegata ad angolo retto e la porzione distale rimane strettamente arrotolata, tantochè a prima giunta si direbbero monconi alari anormalmente spostati; ma un più attento esame con una lente a mano dimostra che si tratta di ali assai compattamente arrotolate. Dopo la muta, per un certo tempo (da un quarto a un'ora), l'insetto rimane immobile nella stessa posizione, colla testa leggermente piegata; poi comincia a dimenare le zampe: i suoi movimenti sono dapprima imbarazzati e incerti, ma, dopo qualche minuto, eccolo muoversi sveltamente all'ingiro. Dopochè questi giovani adulti hanno camminato per circa un'ora, la parte principale delle ali comincia ad espandersi; la porzione basale comincia prima che l'apicale a svolgersi, ma l'inflazione gradualmente procede verso l'apice finchè si arriva al tipico adulto colle ali completamente sviluppate, però sprovvisto di pigmento (tutto il periodo tra il normale stadio ninfale e il tipico stadio di adulto ancor bianco occupa solo nove o dieci ore).

La pigmentazione che segue del corpo è graduale e non sembra essere influenzata dalla presenza o assenza della luce: l'intiero corpo diviene nero attraverso sfumature di giallo e di bruno, sicchè in circa ventiquattro ore l'insetto perfetto sessuato è pronto a sciamare » (p. 256-9, *206*).

Snyder (1915) conferma le osservazioni dello Strickland estendendole al *L. virginicus* e al *Termopsis angusticollis* ed aggiunge qualche interessante particolare: « Nell'alato bianco i bordi delle parti chitinizzate si pigmentano primi passando traverso a sfumature di grigio al castagno scuro dell'adulto maturo. L'addome è l'ultimo a pigmentarsi. Una considerevole umidità pare necessaria per il normale sviluppo: individui collocati in tubetti ben tappati mutarono normalmente, mentre altri in tubetti chiusi da batuffolo di bambagia andarono a male o si svilupparono anormalmente con distorsioni. Appunto per sfavorevoli condizioni d'umidità succede spesso un anormale sviluppo delle

ninfe di prima forma. Possono osservarsi individui con parziale pigmentazione nelle parti chinitizzate acquisita prima dello stadio quiescente o prima che si srotolino le ali; sicchè le ali possono essere in varî stadi di sviluppo: accenni alari opachi ninfali, ali allungate parzialmente arrotolate o ali svolte ma ancora aggrinzite. Vi è una grande variazione individuale del modo di mutare. Adulti con matura pigmentazione del corpo ma con ali distorte, incompletamente sviluppate o addirittura con opachi accenni alari, furono osservati emergenti dalla loro colonia al tempo dello sciamamento (aprile, maggio, giugno) » (pag. 40, *198*) [1].

Della morfologia dell'adulto, considerata in relazione a quella dello stadio ninfale, particolarmente interessante è la struttura del torace (fig. 8, *a*), *b*), *c*)) che appare nella condizione dei più bassi Pterigoti, la Blatta ad esempio. Dorsalmente il pronoto subcordiforme e appiattito, più largo in avanti che in dietro, presenta un solco sagittale che si prolunga per tutto il torace.

La fig. 8, *a*), *b*), *c*), rappresenta la testa e il torace dell'alato sciamante di *R. lucifugus*. La testa piccola, arrotondata, più larga in corrispondenza agli occhi, porta, sui lati della fronte, in una depressione laterale, antenne moniliformi (A) formate da articoli tutti pelosi (diciassette o diciotto) dei quali il terzo, quarto e quinto più corti. Gli occhi composti (O) sono bene sviluppati: vicino ad essi, un po' sopra e un po' in dentro, spiccano, pel colore chiaro, i due ocelli (B). Un po' all'indietro, sulla linea mediana della testa, si scorge uno spazio chiaro, come un terzo ocello; la fontanella. La fronte si prolunga anteriormente in un clipeo (C), pezzo basilare largo e corto cui sta saldato il labbro superiore (L), più lungo, a margine arrotondato. Coperti e protetti dal labbro superiore stanno gli altri pezzi boccali, tipicamente costituiti: anzitutto le robuste mandibole, seghettate dal lato interno. Sulla faccia ventrale della testa (fig. 2) si scorgono le mascelle coi due pezzi basali, il sottomascellare o cardine (N) e il mascellare o stipite (M) sul quale s'impiantano il palpo mascellare (P^1) e i lobi, esterno o galea (Q) e interno o intermascellare (R), delle mascelle. Stessa costituzione presenta il labbro inferiore, formato dalle due mascelle del secondo paio. I pezzi basali sono saldati a due a due a formare il submento (Z) e il mento, sul quale s'impiantano i palpi labiali (P^2), corti e triangolari, e i lobi, esterno (Q^1) e interno (R^2), del labbro inferiore.

Ventralmente, tra la testa e il torace s'intercalano i pezzi giugulari (I) a rafforzare la gola membranosa (D). Sono due paia di grossi pezzi, convessi dal lato esterno, ventrale, e concavi internamente per dare inserzione a muscoli della gola. Gli anteriori s'articolano, per mezzo di processi diretti in avanti, col margine posteriore del submento; e i posteriori si articolano agli anteriori e si ravvicinano l'uno all'altro sulla linea ventrale mediana. (In *Periplaneta* esistono, oltre le due paia di pezzi giugulari laterali, due pezzi giugulari ventrali, anteriore e posteriore; in *Archotermopsis*, secondo Imms, del posteriore non resta traccia, ma l'anteriore c'è: « ventral cervical sclerite... just behind the mental plate » [pag. 90, *118*]).

Nel protorace appaiono bene sviluppati gli episterni tra il pronoto e le coxe.

[1] Le mie osservazioni sul *Lucifugus* coincidono con quelle dello Snyder (ved. fig. 6 *e*)).

Non è facile riconoscere i pezzi della regione sternale. Forse le due liste chitinose, che dall'episterno scendono oblique alle coxe, corrispondono ai trocantini; e le due placchette (S), ravvicinate ma non riunite sulla linea ventrale mediana, rappresentano gli

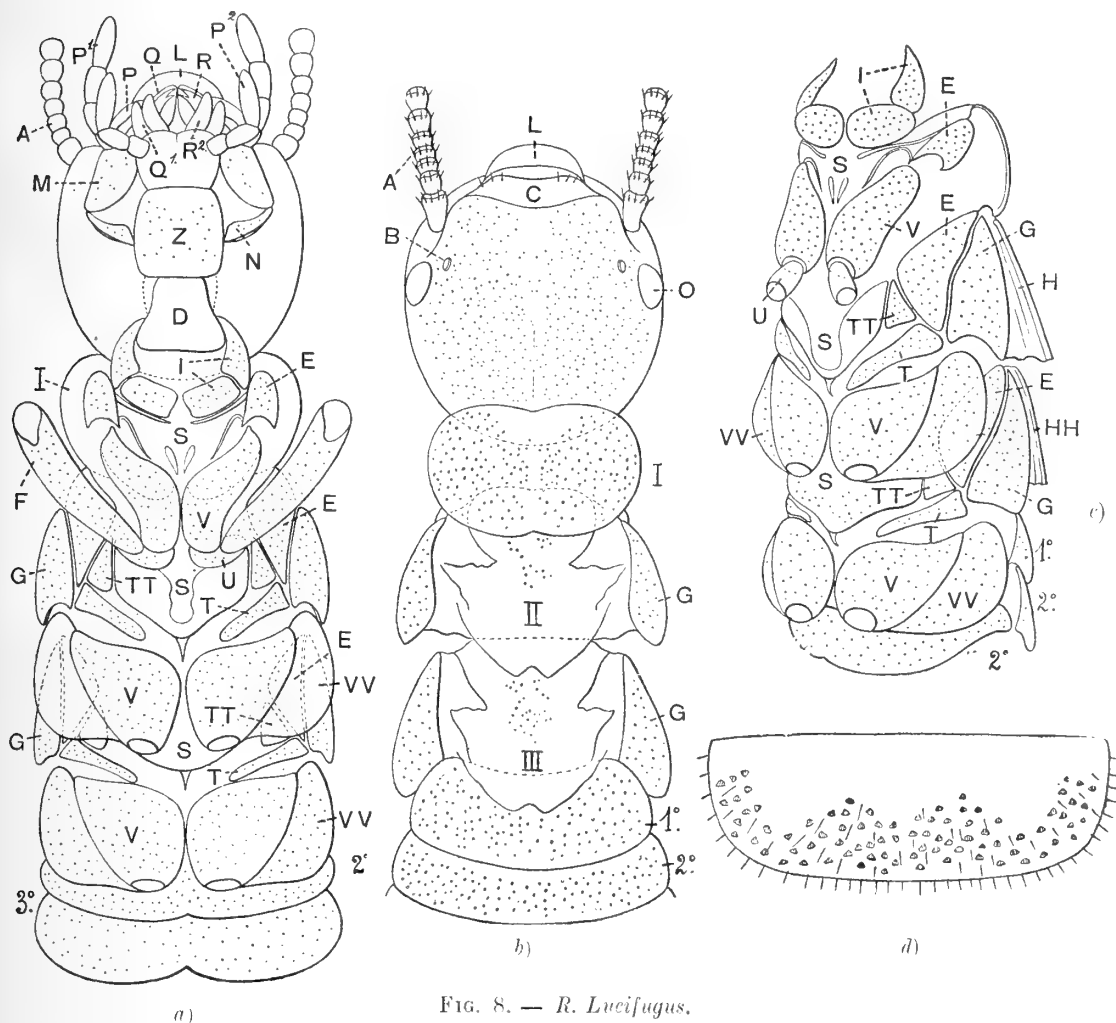



Fig. 8. — *R. Lucifugus.*

Capo, torace e primi uriti di alato sciamante.

a) dal ventre (i pezzi boccali si sono un po' divaricati nella preparazione).
b) dal dorso (asportate le squamme alari).
c) di $^3/_4$ (torace e primi uriti).
d) urotergite di regina di sostituzione in abito di insetto perfetto (per mostrare la pigmentazione caratteristica a macchioline nere).

sterni (o forse gli sternelli, mentre le due liste chitinose rappresentano i bordi chitinizzati degli sterni; Imms ritrova, nel protorace di *Archotermopsis*, sterno, episterno, epimero e trocantino).

Nel meso- e metatorace è bene sviluppato l'epimero (G), sclerite largo, subtriangolare, che si stende dalla base dell'ala alla coxa, prendendo rapporti coll'ala e colla zampa; sporge, sulla faccia dorsale, ai due lati della piastra tergale. Una forte cresta

chitinosa unisce l'epimero all'episterno. Lo sterno (S) è meno fortemente chitinizzato e non riesce facile tracciarne con precisione i limiti. È costituito da due metà subquadrangolari, fuse sulla linea mediana verso la parte posteriore, mentre nell'angolo anteriore aperto sono separate da larga incisura. All'angolo chiuso inferiore s'innesta una *furca*. (Osservando più attentamente lo sterno, si riesce a distinguere linee di più forte chitinizzazione, che, da un lato e dall'altro, tracciano la continuazione dei margini dell'incisura fino a un angolo postero-esterno, così che lo sterno appare distinto in due metà laterali, ravvicinate ma non fuse sulla linea mediana. È lo sternello che, continuando i margini laterali dei due sterni, li congiunge in un pezzo). Nella coxa è distinta una grossa parte laterale esterna, l'exocoxa o meron (VV), separata, con profondo solco, dalla vera coxa o coxa genuina (V).

Innanzi al margine superiore della coxa, dalla parte interna dell'articolazione coxo-subcoxale (Silvestri, accettando la nomenclatura dell'Heymons, chiama subcoxa tutta la parte che s'interpone tra la coxa e il tergite corrispondente, perchè tale parte deve considerarsi, dal punto di vista morfologico, come un solo articolo che è precisamente la parte basale della zampa), v'è un pezzo subrettangolare, in direzione alquanto obliqua, il trocantino (T), e innanzi alla parte anteriore basale di esso è distinto un pezzo subtriangolare (TT) coll'apice incuneato tra lo sterno e l'episterno (Silvestri per *Mastotermes* [*197*] lo chiama pretrocantino; Imms per *Archotermopsis*, seguendo la nomenclatura di Crampton, laterosternite). Il trocantino è indiviso; ma una linea più fortemente chitinizzata, trasversale obliqua, permette di distinguere in esso una porzione antero-esterna tra l'epimero, col quale s'articola, e il pretrocantino, e una postero-interna tra lo sterno e la coxa. Imms in *Archotermopsis* trova una suddivisione del trocantino in due elementi per mezzo di obliqua sutura. In *Periplaneta* la suddivisione del trocantino, come anche dell'episterno, è ben netta e anzi il trocantino anteriore e la parte episternale posteriore sono riuniti da una membrana alquanto estesa che permette, nello stato di contrazione del torace, all'episterno di coprire il trocantino anteriore. Secondo Berlese, che considera ogni sclerite tipicamente costituito di quattro parti (acro-, pro-, meso- e metasclerite), in *Periplaneta* « tanto le ali dello sterno (episterno) quanto quelle dello sternello (trocantini) sono separate dal corpo loro impari mediano e tuttavia conservano ciascuna l'iniziale divisione in due scleriti successivi. Così le ali dello sterno (episterni) mostrano una divisione per cui risultano dell'acrosternite e del prosternite; quelle dello sternello (trocantini) mostrano, per corrispondente divisione, di derivare dal mesosternite e dal metasternite» (pag. 202). Sicchè in *lucifugus* resterebbe appena traccia di distinzione tra porzione meso e metasternale; e il laterosternite forse corrisponderebbe, in tutti i termiti, alla porzione prosternale delle ali dello sterno.

Rattaccata al mesotorace, in gran parte nascosta sotto le anche, la regione dell'addome corrispondente al primo tergite resta membranosa; così che il primo tergite apparente è morfologicamente il secondo.

Quanto ai tergiti toracali, la loro forma caratteristica è assai meglio rilevabile dalla figura che non da una lunga descrizione. Il pronoto è appiattito, subcordiforme, più largo in avanti che indietro, con una incisura mediana sul bordo anteriore meno profonda che non sul bordo posteriore; tra le due incisure corre un solco sagittale che si continua,

meno marcato, nel meso- e metanoto. Osservando attentamente il pronoto (fig. 9) si distingue un'area leggermente depressa, disposta in due parti simmetriche rispetto al solco sagittale, più chiara, caratteristicamente poligonata. Un'areola simile, più piccola, compare presso l'incisura posteriore del tergite, sulla linea sagittale, e due simmetriche presso gli angoli anteriori.

Anche nella capsula cefalica, dorsalmente, spiccano, a livello del diametro interocellare, ai due lati della linea mediana, due areole più chiare, distintamente poligonate. Due bande più scure invece si partono dagli occhi a formare un V molto aperto, con vertice in corrispondenza alla regione fontenellare. I tricopori, fittamente distribuiti per tutta la

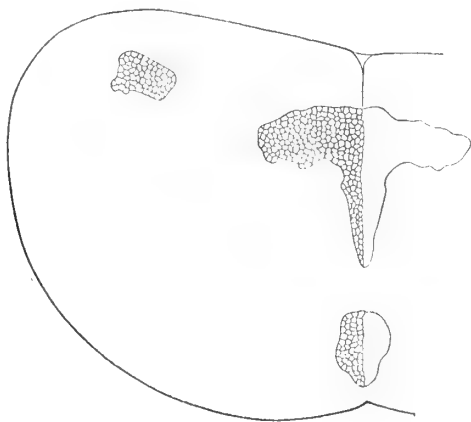



FIG. 9. — *R. lucifugus.*

Pronoto di alato sciamante; disegnate solo le areole chiare, poligonate, corrispondenti all'inserzione dei muscoli.

capsula cefalica e il pronoto, sono pochi nel meso- e metanoto e aggruppati in una regione mediana tra la parte anteriore del tergite e la parte posteriore, divise da una insenatura profonda. Nella parte posteriore del meso- e metanoto, nell'ovale dello scudo, si discernono, ai lati della linea sagittale, due areole più chiare, poligonate. Ed areole simili spiccano, nelle parti laterali dei tergiti addominali, dal colore bruno generale del corpo (in complesso il corpo è di color piceo, marrone scuro al microscopio, eccetto l'apparato boccale, i tarsi e le porzioni distali delle tibie, che sono testacei).

È facile constatare che a queste areole corrisponde, nel torace come nell'addome, inserzione di muscoli.

Lateralmente a queste areole, nei tergiti addominali, attrae l'attenzione l'apparato stigmatico. Purtroppo non mi sono potuto fermare a farne uno studio accurato e completo, pure intravedendone l'interesse morfologico comparato. Mi limiterò dunque a riportare le figure 10 *a-d* allo scopo precipuo di richiamare l'attenzione dei ricercatori su questo argomento già interessante di per sè e che inoltre potrebbe assumere importanza per lo studio della differenziazione castale.

La fig. 10 *b*) rappresenta il secondo stigma addominale di soldato di *Mastotermes* (gli stigmi addominali II-VIII sono simili tra loro, mentre altra forma e struttura — tipicamente bilabiata — appare nel I più grande). Come sempre, lo stigma s'apre nell'orlo curvo del tergite che lo incappuccia (M T). Alla coppa stigmatica (C S) è connessa una leva am-

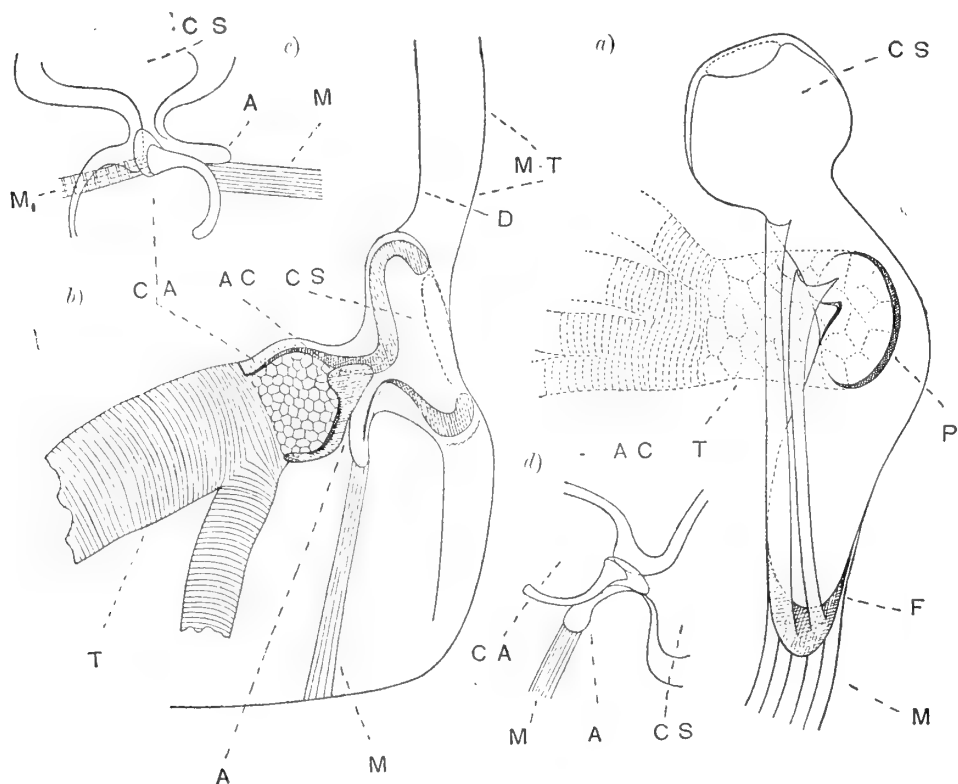



FIG. 10.

a) Apparato stigmatico di alato sciamante; di *R. lucifugus* (II stigma addominale).
b) Apparato stigmatico di soldato di *Mastotermes* (II stigma addominale).
c) Id. III stigma addominale: per dimostrare il muscolo occlusore.
d) Id. II stigma addominale: per dimostrare l'incastrarsi a battente della testa della resistenza.
A = leva ampolliforme AC = resistenza, testa e archetto chitinoso CA = atrio o camera d'aria CS = coppa stigmatica D = derma pleurale F = fondo chitinizzato dell'ampolla M = muscolo estensore M_1 = muscolo occlusore MT = orlo del tergite P = peritrema T = tronco tracheale.

polliforme (A), azionata da un muscolo (M) che si fissa al margine anteriore del tergite, presso l'angolo, dove la chitinizzazione comincia ad essere meno densa. Evidentemente la contrazione di questo muscolo (muscolo estensore) slontana la leva e l'archetto chitinoso della resistenza (A C) — collegato alla leva da chitina flessibile — dall'altra parete chitinizzata della camera d'aria o atrio (C A; a pareti dorsale e ventrale tassellate ad esagoni), e così lascia libero all'aria l'accesso, traverso l'atrio, al tronco tracheale. D'altra parte una banda muscolare, M[1] (fig. 10 *c*)), passando sotto la testa della resistenza, si fissa pure alla leva e, contraendosi, evidentemente ravvicina la leva e la testa della resistenza (che sembra inca-

strarsi a battente) alla parete posteriore dell'atrio, e così occlude lo stigma (muscolo occlusore). Questo muscolo presenta una struttura molto evidentemente striata, ciò che potrebbe mettersi in rapporto col carattere essenzialmente volontario dell'atto di chiusura dello stigma, mentre è concepibile come atto riflesso (per riflesso nervoso) la contrazione del muscolo estensore che riporta lo stigma in posizione di apertura. Quella di apertura è la posizione normale dello stigma; ma ad essa non torna, dopo la chiusura, lo stigma senz'altro per reazione elastica.

La fig. 10 *a*) rappresenta l'apparato stigmatico d'un alato sciamante di *lucifugus*. Anche qui lo stigma s'apre ai bordi del tergite, tra questo e il derma pleurale; e il muscolo estensore decorre, quasi parallelo all'asse longitudinale del corpo, dall'apparecchio stigmatico al margine anteriore del tergite, presso l'angolo. Al conetto stigmatico (C S), sul quale s'apre come un cratere il foro, segue una lunga ampolla col fondo rovesciato in alto, fortemente chitinizzato. Dal mezzo dell'ampolla si parte il tronco tracheale (T), tassellato ad esagoni nella porzione atriale, dal quale si sfioccano le trachee. Un archetto chitinoso (P), peritrema, cinge la base del tronco tracheale. Al fondo chitinizzato della ampolla (F) s'inserisce il muscolo estensore (M) e s'inserisce, dall'altra parte, il muscolo occlusore che sembra distinto in due bande, di cui l'una s'attacca al collo dell'ampolla, subito sotto al conetto stigmatico, e l'altra un po' più sotto (immediatamente sopra ad un pezzo chitinoso, concavo superiormente, che potrebbe funzionare da resistenza).

In soldati di *lucifugus* ho visto gli stigmi addominali tutti simili a quelli dell'adulto (larghezza cono stigmatico 28 μ; lunghezza ampolla 56 μ).

Sarebbe interessantissima l'anatomia comparata dell'apparato stigmatico nei termitidi, basata non solo sull'esame degli adulti, ma anche dei varî stadii di sviluppo, come ha fatto egregiamente Füller per *Termes natalensis* (1919, *75*). (Füller ha pure studiato, molto bene, con largo esame comparativo, lo sviluppo postembrionale delle antenne nei Termiti, 1920, *76*).

Secondo Füller (1919), nel *T. natalensis* gli spiracoli del torace hanno, già nelle ninfe, una semplice forma bilabiale e non subiscono notevoli metamorfosi; i tubi tracheali, di cui essi rappresentano la bocca (aperta e chiusa da speciali muscoli), sono uniti ad essi da un corto bordo tassellato e, crescendo, subiscono cangiamenti pei quali si trasformano in camere d'aria, ma senza perdere il loro carattere tracheale.

Gli spiracoli addominali, III-X, presentano una struttura bivalvolare che è la forma finale del tipo postembrionale; il III è più evoluto degli altri. Nel maschio, solo il III raggiunge la forma bivalvolare; gli altri, IV-X, sono arrestati in uno stadio molto vicino a quello di tutta la serie addominale nella ninfa femminile vicina a maturanza. I soldati e gli operai mostrano una forma un po' meno avanzata, qualcosa che sta tra lo spiracolo della giovane larva e quello della ninfa maschile quasi matura. Nella regina di *T. natalensis*, e anche di *Odontotermes*, avviene un cangiamento post-adulto negli spiracoli IV-X, come una rottura dell'organo le cui valve si allontanano; mentre nelle regine mobili, come in *Eutermes* e *Hodotermes viator* e altri, questa rottura non avviene.

Per un considerevole periodo della vita ninfale gli spiracoli dell'addome restano più o meno immutati. Nel neonato quest'organo somiglia a una piccola brocca con lungo collo

e bocca rotonda. La bocca è il poro ; il collo l'atrio e il ventre o ascidio è la leva, sacco rigido, esterno alla trachea. L'atrio sembra sboccar direttamente nell'ascidio della leva; ma un piccolo tubo membranoso, l'« epitrachelos », circonda colla sua bocca l'apertura tra atrio e leva, e traverso di esso l'aria passa nel bulbo tracheale (tassellato ad esagoni), il « trachelos ».

Nel corso dello sviluppo la leva perde gradualmente la sua forma vescicolare cangiandosi in una placca leggermente convessa dal lato esterno. La regione dell'atrio adiacente al « resister » (piccolo pezzo chitinoso che sta all'estremità dell'atrio, dal lato viscerale) si chitinizza formando una « chin-plate » ; e il bulbo tracheale, assorbendo l'« epitrachelos », si estende a raggiungere l'apertura tra atrio e leva (secondo stadio). L'apertura e la chiusura del lume vengono effettuate da un muscolo che ha tre inserzioni fisse: alla « chin-plate » (un poco anteriormente al « resister »), all'estremità della leva, all'angolo anteriore del tergite. Sicchè la contrazione del muscolo dalla leva alla « chin-plate » porta la leva verso e anche un po' attraverso il piede della resistenza, chiudendo l'accesso dell'aria nel tubo tracheale, mentre la contrazione del muscolo dalla leva al tergite riapre il lume (la lamella che congiunge resistenza e leva è flessibile ma non a molla, sicchè il lume non si riaprirebbe automaticamente).

In seguito l'atrio si va raccorciando per spostamento all'indietro del bordo stigmatico a ciascuna muta. Gli spiracoli IV-X del maschio possono rappresentare un terzo stadio nel quale il « resister » è divenuto molto compresso ; la « chin-plate », trasparente ma a margini chitinizzati, ha preso una forma auriculare ; la leva è immutata.

La condizione definitiva è rappresentata dagli spiracoli III del maschio e III-X della femmina. In essi tutto l'atrio è scomparso, eccetto la « chin-plate » e il « resister », onde la « chin-plate » si trova sulla superficie del corpo, fissata alla cuticola tegumentale, e coll'orlo anteriore della leva forma il poro valvolare o stigma. Il « resister », cui s'attacca l'orlo viscerale del bulbo tracheale, è ridotto a formare un labbro della bocca dello spiracolo e continua a disimpegnare le sue funzioni originarie di chiudersi, per contrazione del muscolo occlusore, contro la leva, molto modificata ma fortemente sviluppata (pp. 37-42, *75*).

È importante notare che la conoscenza esatta dell'evoluzione postembrionale degli stigmi potrebbe fornirci un nuovo criterio morfologico, forse prezioso, per riconoscere a che stadio ontogenetico, per individui neotenici o per neutri, può considerarsi intervenuto l'arresto dello sviluppo dei caratteri d'insetto perfetto e la deviazione castale.

La presenza delle areole laterali dei tergiti addominali, alle quali abbiamo più sopra accennato, mi ha spinto a ricercare la struttura dello strato chitinoso epidermico. Osservando, a forte ingrandimento, rischiarato in balsamo, un frammento di sclerite, appare una elegante struttura reticolare ad areole poligonali, la grandezza delle quali evidentemente corrisponde alla grandezza delle cellule ipodermali che l'han segregata. Le areole non presentano un colorito tutto uniforme ; alcune sono più chiare, altre più scure ; onde si determinano come delle aiuole più chiare separate da viali più scuri.

In ogni areola, a primo aspetto omogenea, si arriva a discernere una struttura finissimamente spugnosa o cribrosa. Ma i cribri o maglioline del fitto reticolo, giallicci-chiari mentre il reticolo è giallo-marrone, sembrano essere non veri forellini sibbene punti di più leggera chitinizzazione. Nelle areole più scure il reticolo è di color marrone più carico e più minuti i cribri. Qua e là nell'interno di un'areola (e quasi sempre delle chiare) s'apre un tricoporo più o meno grande ; ai nodi delle maglie, specie delle brune, del reticolo finemente rilevato in nero si aprono, sovente abbinati, qualche volta affilati tre o quattro su un lato della maglia, minuti forellini.

Li chiamerò col nome generico di poricanali, notando però che, secondo il Berlese, non esistono negli insetti canalicoli mettenti in comunicazione le comuni cellule ipodermali con l'esterno ; e i canalicoli esistenti sono tricopori che penetrano nelle appendici cutanee, adenopori che s'aprono alla superficie movendo da ghiandole disseminate nell'ipoderma, e pseudopori, che non sono veri canalicoli ma cilindretti chitinei di raccordo tra le lamine del derma.

Chiamerò invece pseudo-pori i suddescritti cribri che si direbbero determinati dalla persistenza nel processo di secrezione della chitina, di fitti processi filiformi della parte superiore delle cellule ipodermali.

Quanto alle zonule chiare laterali dei tergiti, esse sono date dall'aggruppamento di 30 o 40 areole che appaiono incolori ma a pareti più spesse e forse con un struttura a cono conficcato nel derma.

Ho insistito sui particolari strutturali dello strato chitineo dell'insetto perfetto per l'importanza ch'essi possono avere pel confronto della pigmentazione caratteristica del sessuato adulto con quello che si ritrova nei reali di complemento e sostituzione. La pigmentazione marrone bruna dell'epidermide dell' insetto perfetto deve dipendere, come si ammette in genere per gli insetti ([1]), da una melanina generatasi per ossidazione fermentativa di prodotti di scissione albuminoidi. Questi evidentemente si formano nei

([1]) E fu dimostrato sopratutto dalle ricerche del Dewitz sulle pupe di Musca (*54*). Gessard, in *Lucilia cesar*, già nelle vecchie larve trovò la tirosinasi, grazie alla quale pupe ed insetti, che appena sfarfallati sono scoloriti, rapidamente anneriscono all'aria. Escludendoli dal contatto dell'aria, il rivestimento chitinoso rimane bianco, mentre, esposto all'aria, annerisce anche in esemplari già uccisi col cloroformio (*79*).

Analoghe ricerche ha condotto Physalix su *Phyllodromia germanica* in cui la larva sgusciata dall'uovo è bianca ma nello spazio di tre ore prende un colore prima grigio, poi bruno, infine nero al contatto dell'aria sotto l'influenza della tirosinossidasi (*183*). Gli studi del Görtner mostrano che anche nei Coleotteri e nelle cicale la pigmentazione insorge per ossidazione di un cromogeno sotto l'azione della tirosinasi. Questa è dappertutto presente nell'emolinfa, mentre il cromogeno è localizzato in determinati punti, dalla distribuzione dei quali dipende il disegno nero delle elitre. S'intende che la segregazione del cromogeno (aminofenoli solubili in acqua) ha già luogo a tempo debito nella pupa, prima che le lamelle alari vengano a non essere più irrorate dal liquido circolante (*84*). Secondo M. von Linden, il pigmento nero delle Vanesse risulterebbe dalla decomposizione del pigmento rosso con formazione d'una sostanza aromatica, simile alla tirosina, che si trasformerebbe a sua volta, sotto azione d'una tirosinasi, in pigmento nero. Urech (*216*) ritiene che l'abbrunimento progressivo nelle crisalidi dei Lepidotteri dipenda dagli stessi fenomeni fisico-chimici per i quali negli amidobenzoli il colore diviene più scuro a mano a mano che la molecola si condensa e che si effettua una

processi intimi istologici che accompagnano l'ultima muta [1] dalla quale la ninfa di prima forma esce insetto perfetto; localizzati alla superficie del corpo vengono, dopo la muta, gradualmente ossidati al contatto dell'aria onde il graduale annerimento. Si capisce come tale processo ossidativo possa venire modificato, nella intensità, e nella rapidità dalle condizioni ambienti di aereazione, umidità, temperatura [2]. Così spiegansi le ânomalie succitate nello sviluppo degli insetti perfetti (individui che anneriscono prima del completo sviluppo [3] (ved. fig. 2, *e*).

* * *

Abbiamo ora qualche elemento per capire il significato, per apprezzare il valore morfologico dei reali di sostituzione da alato bianco.

Grassi, per ragioni essenzialmente analogiche, li considera come individui neotenici, individui cioè che, per regime dietetico particolare, sono stati arrestati nello sviluppo, sebbene all'ultimo momento, maturando gli organi genitali senza più raggiungere il carattere suddescritto dell'abbrunimento. E certo detti reali provengono da ninfe di prima forma che hanno subìto l'ultima muta: da individui completamente sviluppatisi insomma, solo restati bianchi, senza acquistare la pigmentazione bruna caratteristica degli insetti perfetti.

Ma i fatti or ora citati di anormalità nello sviluppo degli insetti perfetti ci fanno nascere un dubbio, tanto più che non vediamo chiara l'opportunità di questo arresto all'ultima ora dei caratteri d'insetto perfetto (che vantaggio presentano per una più pronta ed efficace sostituzione di reali, in confronto agli adulti neri che non si trovano mai nè adottati, nè fondatori di nuove colonie?).

Che si tratti di individui che per un fenomeno anormale, opposto ai sopracitati di precoce pigmentazione, non si siano pigmentati e, restati nella colonia, abbiano ivi raggiunta la normale maturità riproduttoria?

---

moltiplicazione del radicale (mono-ammidobenzolo giallo, diammidobenzolo arancione, triammidobenzolo bruno).

Secondo Furth (*77*), la tirosina non deve riguardarsi come unica sostanza madre della melanina nella quale possono, per analogo processo, trasformarsi anche altri ciclici prodotti di scissione degli albuminoidi (fenilalanina, triptofano, istidina, prolina, ossiprolina) (pag. 1662, *229*).

[1] Probabilmente non è una pura e semplice muta, come mostra lo stadio quiescente che l'accompagna e che, sebbene brevissimo, permette di compararla fisiologicamente allo stadio ninfale degli olometaboli.

[2] Oltrechè, s'intende, dalla ricchezza più o meno grande in materiale cromogeno, alla varia quantità del quale nei singoli elementi ipodermali sembra doversi attribuire la tinta più o meno intensamente melanotica delle singole areole poligonali epidermiche. Nuove osservazioni, integrate da esperimenti, potranno forse spiegare perchè non anneriscano gli alati bianchi scelti per reali di sostituzione.

[3] La genesi della melanina da sostanze aromatiche provenienti dalla scissione degli albuminoidi, e verosimilmente considerabili come prodotti escretivi, avvalora l'ipotesi che «la chitina non rappresenti altro se non una cellulosa azotata e... l'azoto venga acquistato al di fuori della cellula secernente..... La epidermide, lo strato superficiale è segregato sempre in ambiente carico di prodotti urici, cioè di azoto, sia entro l'uovo da parte dell'embrione, sia nelle singole mute, come nelle varie metamorfosi. I liquidi urici che circondano l'animale in questi stadi, mentre le cellule ipodermiche sono tuttavia nude e si dispongono a segregare la prima cuticola, possono influire sulla natura chimica di questa allorchè la massa è tuttavia fluida» (Berlese, pag. 465).

A questa interpretazione potrebbero spingerci anche le osservazioni in natura, per le quali due volte, insieme con moltissime regine di complemento (da ninfe di seconda forma), abbiamo trovato una regina di sostituzione, quasi direi in qualità di «aggiunta».

È vero che l'esperienza del Grassi sull'orfanamento di una colonia poco prima dello sviluppo delle alate ci spinge verso tutt'altra interpretazione; ma certo ci lascia in dubbio la descrizione stessa che il Grassi fa delle suddette regine di sostituzione. Esse presenterebbero una pigmentazione più o meno incompleta, ma in ogni modo omogenea, senza macchioline nere: un inizio insomma della pigmentazione caratteristica dell'insetto perfetto.

Ripetiamo le osservazioni:

Nella regina di prima forma, catturata l'8 giugno alla Magliana, trovasi il colore in complesso giallognolo a occhio nudo, ma, già a piccolo ingrandimento, si distinguono perfettamente nei tergiti addominali (e sempre più nettamente quanto più andiamo verso l'estremità dell'addome) le granulazioni caratteristiche, più pallide che non nei vecchi complementari da seconda forma, come insomma nelle giovani regine (molte di quelle trovate nello stesso nido presentano le granulazioni tipiche anche più pallide che non nella regina da alato e a gran pena visibili negli sterniti addominali, ma abbastanza ben discernibili nel torace specie nel pronoto ove, sebbene più sparse, hanno già l'aggruppamento simmetrico bilaterale). La disposizione delle granulazioni (fig. 6, *b*)) è identica a quella delle regine di seconda forma: si ritrova la linea chiara mediana e le areole chiare laterali. I peli sono impiantati non sulle granulazioni, ma tra di esse; anche tra i tergiti e gli sterniti addominali s'impiantano peli, ma piccoli, corti, mentre lunghi e diretti trasversalmente gli altri, specie verso l'estremità dell'addome.

Nel VI, VII e VIII tergite addominale, al di sopra della regione granulosa, al confine dell'intersegmento, si presenta una fascia marginale marroncina.

Le pleure presentano una colorazione uniforme marrone scura punteggiata di cerchiolini bianchi (i tricopori) al punto d'impianto dei peluzzi; così pure le squamme alari, di cui la prima presenta tre pezzi distinti abbruniti e la seconda striscie come di incipiente abbrunimento, anch'esse non granulate, sibbene debolmente colorate, coi cerchiolini bianchi caratteristici.

Negli sterniti addominali le parti laterali appaiono pigmentate granulose come nei reali di seconda forma, ma l'ottavo sternite è ben colorito come le pleure, coi soliti cerchiolini bianchi all'inserzione dei lunghi peli; e nel segmento precedente compare una fascetta marginale superiore, leggermente pigmentata. Nel pronoto appaiono, nella figura caratteristica, le tipiche granulazioni (inoltre i bordi, meno il superiore verso la testa, sono vivamente colorati). Il torace alifero presenta, naturalmente, struttura identica a quella dell'alato nero sciamante; meso- e metanoto si presentano nella parte anteriore abbruniti; nella posteriore, l'ovale dello scudo, debolmente granulati (fig. 6, *a*), pag. 321).

L'altra regina da alato bianco (rinvenuta il 1° giugno) mostra una identica disposizione. Essendo più pallide le granulazioni, appare essere alquanto più giovane. Nel torace alifero ventralmente noto sterni, episterni, trocantini e coxe colorati in gialliccio più o meno scuro senza traccia di granulazioni. Si tratta probabilmente di un inizio dell'abbrunimento normale dell'insetto perfetto, tanto più che nei meron del secondo e terzo paio

traspare una struttura reticolare che richiama alla mente quella osservata negli scleriti dell'insetto bruno sciamante.

Nell'addome, rischiarato in olio di cedro, dal lato dorsale, focheggiando ventralmente ai tegumenti granulari e alle fasce muscolari longitudinali, traspare il vaso dorsale colla cintura pericardica, negli allargamenti segmentali della quale si scorgono gli elementi, ovalari o affusati, pieni di finissime granulazioni giallo-marrone (ved. fig. 6, *a*) e *b*)).

Dunque, a parte l'abbrunimento incipiente (zone colorate uniformemente in giallo-marrone punteggiato di tricopori, come pleure, squamme alari ecc.), già osservato dal Grassi e che rappresenta un inizio più o meno sollecitamente arrestato della colorazione uniforme bruna caratteristica dell' insetto perfetto, i reali da alato bianco presentano la pigmentazione granulare dei tegumenti e della zona pericardica come i reali da ninfe di seconda forma ; questa pigmentazione, già osservata dal Grassi non solo nelle vecchie regine da ninfe di seconda forma ma anche nelle vecchie regine da larva senza traccia d'ali, *è dunque caratteristica dei reali di complemento e sostituzione, quale che sia lo stadio o forma larvale da cui si sviluppano.*

Ora, qualunque sia la natura dei pigmenti tegumentarî degli insetti, essi debbono considerarsi in genere come pigmenti intrinseci, prodotti cioè dell'assimilazione o della disassimilazione. Evidentemente la natura chimica di tali prodotti varia col variare del ricambio materiale, col variare della nutrizione. La differenza della pigmentazione tra insetti perfetti (reali veri) e neotenici (reali di complemento e sostituzione) — differenza che non può spiegarsi come dovuta ad arresto di questo (pigmentazione) come di altri caratteri, perchè negli insetti perfetti la pigmentazione non è preceduta mai da uno stadio iniziale di pigmentazione a granuli — deve dunque ritenersi come espressione del diverso ricambio materiale, del diverso sistema di nutrizione nelle due classi di individui. E, d'altra parte, l'identità di pigmentazione, a tipo granulare, nei complementari da ninfe di seconda forma e nei sostitutivi da alati bianchi, testifica che il ricambio materiale (e quindi la nutrizione) è identica in questi individui, in ambo parimenti diversa dalla normale. E per i sostitutivi da alati bianchi essendo innegabile la natura neotenica e inammissibile la differenza ereditaria (poichè conosciamo lo stadio al quale il loro sviluppo normale li condurrebbe e dal quale uno stimolo che non possiamo concepire se non come esterno, probabilissimamente trofico, all'ultim'ora li arresta, provocando il celere sviluppo degli organi genitali), anche per i reali da ninfe di seconda forma si può escludere ogni dubbio di predeterminazione ereditaria e affermare la deviazione dallo sviluppo normale per cangiamento nella nutrizione.

Dunque, neanche i reali da ninfe di seconda forma rappresentano una casta a sè, ma solo la forma preferita e abituale di reali di sostituzione.

Nei *Calotermes*, in linea generale esistendo i reali veri, è eccezionale la formazione d'individui reali di sostituzione e questi vengono allevati dal materiale larvale o ninfale a disposizione della colonia.

Mentre nel *Termes*, mancando costantemente i reali veri, diviene normale la formazione d'individui reali (che perciò meritano il nome di reali di complemento) da una forma ninfale speciale, la ninfa di seconda forma ; e resta eccezionale, limitata ai casi in cui manchino ninfe di seconda forma, la formazione d'individui reali di sostituzione da varia origine,

larve senza traccia di ali [1] (nei nidi piccoli), ninfe di prima forma [2], alati bianchi (probabilmente quando l'orfanamento avviene in prossimità della sciamatura) [3].

[1] Io non ho trovato in natura regine di complemento senza traccia di ali. Ma Grassi le ha descritte e figurate: « Quasi mai arrivano a una lunghezza superiore a 6, 7 mm... Mancano occhi composti bruni... Per la forma della testa e del torace trovano riscontro nelle larve colla testa piccola; il loro pronoto colla sua forma particolare... li distingue, senza ombra di dubbio, dagli operai. Volendo precisare, dirò che il principale carattere del pronoto degli operai è un restringimento all'indietro che manca negli individui in discorso. Anche gli angoli anteriori sono nell'operaio molto più smussati e il margine posteriore è quasi rettilineo, mentre presenta un evidente rientramento negli individui di cui parlo...

Si noti che ho trovato regine senza traccia di ali e colle antenne di 16 articoli evidentemente tronche alla sommità; dalle condizioni del terzo e del quarto si doveva indurre che queste antenne avrebbero posseduto diciotto articoli, se fossero state intatte... » (pp. 62-63). Le regine senza traccia di ali hanno pure lunghi peli all'addome e le vecchie presentano le macchioline nere caratteristiche.

Anche Snyder ha trovato in *L. flavipes*, in piccole colonie, delle regine di sostituzione senza traccia di ali nè pigmentazione agli occhi, coll'addome oblungo quadrato simile a quello delle vere regine (ne ha trovate ed es. tre insieme con una regina da ninfa di II forma).

Mentre nel 1915 le riteneva « probably developed from larvae of the sexed forms », con C. Thompson le sospetta operai fertili. Ma recentemente (dicembre 1920) dichiarano che « after careful study this view has been abandoned in favor of the opinion that the third form of *Reticulitermes* is a distinct morphological caste ». Trovano frequenti questi sessuati di «terza forma» in *Prorhinotermes* e *Termopsis*, presenti anche in *Neotermes* e *Calotermes* (ved. pag. 31). Ultimamente io ho ottenuto 9 regine di questa forma da uno dei miei nidini d'esperimento.

[2] Una sola osservazione in natura ho fatta al riguardo. Ho trovato un giovane sostitutivo (probabilmente molti ve ne erano) da ninfa di prima forma in un tronchetto pieno di ninfe di seconda forma immature. Già Grassi aveva figurato, (fig. 3, *f*)) senza descriverla, una regina di sostituzione derivata da una ninfa della prima forma, con i lunghi peli all'addome caratteristici dei neotenici e con una fine punteggiatura bruna sulle appendici alari (macchioline nere come nelle regine di complemento da seconda forma ?). Allevando il *L. flavipes* in colonie artificiali, Odenbach (1895) trova una regina derivata da ninfa di prima forma:

« .... with the long wing pads. She laids eggs, and I repeatedly induced her to do so by the same means by which I first caused ant workers to lay eggs (1885). If they seem numb with cold, I place my hand on the glass plate and this induces the activity. This queen was quite different in shape and color from those I will mention below, being larger and of a lighter color. She was slow in her movements and did not change her location very often. She was tended by the workers, which could hardly be said of the others, since they were too restless. The others reproductive individuals were nymphs of different kinds, with different shaped wing pads, but none with as long ones as those of the individual mentioned above... » (cit. da Snyder, pag. 56, *198*).

[3] A giudicare dalla citata esperienza del Grassi. Le mie osservazioni in natura (reperto in due colonie di 1 regina da alato bianco in mezzo a molte regine da ninfe di II forma) non mi autorizzano certo a una tale conclusione. Nel 1917 però (avevo sott'occhio per la prima volta lo sviluppo degli insetti perfetti) all'epoca dello sciamamento (maggio, giugno) ebbi ad osservare in più di una colonia, tra gli alati bianchi ed anneriti, moltissimi individui quasi bianchi ma che avevano già perdute le ali e che giudicai individui di complemento derivati da insetti perfetti non anneriti. Ma le mie conoscenze sui Termiti erano ancora così insufficienti che l'osservazione risultò imperfetta (purtroppo non conservai esemplari integri di tali individui; solo, studiavo allora per il problema della differenziazione dei neutri la ghiandola retrocerebrale o fontenellare, conservai ed osservai qualche testa nella quale — fenomeno interessante e sul quale spero poter presto ritornare — non appariva sviluppata, come lo è invece in tutti gli insetti perfetti normali, la detta ghiandola...).

Nuove osservazioni occorrono e nuovi esperimenti. Ho impiantato qualche esperimento; ma numerosi ne occorrerebbero, e mi difettano i mezzi. Spero tuttavia, essendo riuscito ultimamente a man-

Ma è troppo importante il significato che io attribuisco al pigmento granulare caratteristico dei reali neotenici perch' io possa limitarmi al suo esame per trasparenza, *in toto*. Mi si presenta necessario, a complemento e a controllo, lo studio istologico degli organi escretori e dei materiali escreti.

* * *

Sarebbe molto interessante fare uno studio comparato della casta neotenica traverso i varî generi delle Termiti, ricavandone indizî per ricostruire lo sviluppo filogenetico della casta. Purtroppo finora le nostre conoscenze, specialmente in riguardo dei generi più bassi nella scala della organizzazione sociale e dello sviluppo filogenetico, sono scarsissime e frammentarie. Mi sembra opportuno riunire, in questa Nota, del materiale utilizzabile per detta futura disamina comparata e sintesi. Della società del *Mastotermes* non si sa niente di preciso. Dall'esame di individui inviatigli come operai di *Termes errabundus* Fr. e che riconobbe come larve di *Mastotermes* avviate allo sviluppo sessuale, Silvestri dedusse che, con tutta probabilità, la società del *Mastotermes*, è costituita sullo stesso tipo del *Calotermes*: manca una vera casta operaia e la funzione di operai è disimpegnata dalle larve di sessuati; ci sono soldati e individui riproduttori che non supereranno gran che, nel loro sviluppo, gli alati.

---

tenere prospere per dei mesi piccole colonie di *Termes* in nidini Janet, di poter compiere, su piccole colonie di allevamento, le esperienze in questione.

Noterò anche che, intendendo studiare i complessi fenomeni di correlazione che debbono intervenire nella produzione dei reali neotenici, ho incominciato con un esperimento semplicissimo ma che potrà forse condurre a qualche interessante risultato; tagliare le ali a molte ninfe di prima forma, un mese o due prima dello sciamamento, e porle, insieme con altre ninfe normali e varia popolazione, in un piccolo nido a costituire una coloniola orfana. Purtroppo la più bella coloniola, mentre era in pieno rigoglio e si preparava, colla costruzione di numerose gallerie a doccia, allo sciamamento, è stata invasa da una tribù di piccole formiche gialle. Mi sono accorto della invasione qualche giorno dopo. Troppo tardi. Le formiche avevano fatto macello di gran parte della popolazione (dopo probabilmente una vana resistenza dei soldati, dei quali neppur uno ho trovato vivo) e s'erano stabilmente insediate nel legno e nelle gallerie. Tra i superstiti della città distrutta ho rinvenuto (16 maggio 1920) tre giovani regine da ninfe di seconda forma (ben riconoscibili all'addome ingrossato, giallo-rossiccio, con fitta pubescenza dorata), qualche alato nero o in via d'abbrunire e un alato non annerito, anch'esso giallo-rossiccio, con addome fittamente pubescente; le ali mozze, con un piccolo irregolare orlo membranoso oltre la squamma, parzialmente abbrunita come i bordi dei tergiti toracici. Ritengo tale individuo derivato da una delle ninfe di prima forma cui avevo mozzate le appendici alari; questa ninfa, ormai irresistibilmente avviata allo sviluppo ad insetto perfetto (avevano già gli occhi pigmentati), avrebbe proseguito regolarmente lo sviluppo, senza abbrunire però. Uno studio più attento mi dimostrerà se era in via di diventare reale di sostituzione.

In un'altra coloniola, pure fondata in nidino Janet con varia popolazione e ninfe di prima forma di cui molte con appendici alari mozzate, ritrovo (23 maggio) un solo insetto perfetto parzialmente abbrunito (nella testa, torace ed estremità dell'addome). Parrebbe dunque che, mozzando le appendici alari a ninfe di prima forma mature, avessimo determinata sperimentalmente la formazione di alati non abbruniti; e c'è ragione di credere che per via analoga gli operai possano procurarsi individui arrestati nello sviluppo, trasformabili, mediante nutrizione speciale, in reali di sostituzione.

Difatti Grassi in *Calotermes* notò che, « ove siano elette per il trono ninfe cogli accenni delle ali più appariscenti, uno o più di questi accenni vengono mozzati (per lo più quello anteriore destro) ». Una volta riusciti a tener vivo e prospero il *Termes* in nidini artificiali, sarà possibile ripetere e moltiplicare gli esperimenti, come per il *Calotermes*, per studiare la differenziazione della casta neotenica non solo ma anche delle neutre.

In *Archotermopsis* la colonia si trova normalmente costituita di larve, ninfe, soldati e coppia reale. Veri neotenici re o regine non se ne sono trovati; si conoscono però forme ginecoidi che potrebbero avere la stessa funzione. Secondo Imms queste «'worker-like forms are of irregular occurrence, the majority of the colonies were without examples which could unhesitatingly be referred to that category'. Una colonia (in Himalaya) conteneva circa 40 individui di questa forma, e un'altra una trentina. In ambo i casi si trovarono durante maggio e giugno. Il grande sviluppo delle gonadi negli esemplari disseccati e il fatto che un individuo depose uova in cattività, indica trattarsi di forme ginecoidi» (pag. 129, *118*). Notare che questi individui somigliano in tutto alle ninfe (anche nel cervello; la testa è solo assai leggermente più grande) dalle quali differiscono per l'assenza degli accenni alari. Al posto di questi, però, ai bordi posteriori del mesonoto e metanoto, presentano tracce di curiose irregolari cicatrici («come se gli accenni alari fossero stati strappati» dice Desneux), più frequentemente all'anteriore destro «Very possibly these scars are to be regarded as vestigial remains of the wing pads of the nymph. They are also occasionally present in the soldier» (pag. 102, *118*).

Dal complesso dei fatti mi sembra di poter concludere che in *Archotermopsis* la casta neotenica è ancora appena abbozzata. Quando viene a mancare la coppia reale, la colonia alleva un certo numero di larve o giovanissime ninfe (alle quali vengono rosicchiati gli accenni alari) come individui di sostituzione. Non essendoci operai, naturalmente questo allevamento è praticato dalle larve e ninfe dei sessuati (come in *Calotermes*). Non dev'essere gran che intensivo, ma certo porta alla maturazione precoce delle gonadi cogli stessi fenomeni, sebbene meno spiccati, che in *Calotermes*. Queste larve di individui di sostituzione hanno un aspetto ergatoide e sbrigano anche faccende di operai (come del resto anche sostitutivi adulti in *Calotermes*). Il fatto che Imms parla di individui «da ascriversi sicuramente», indica che le loro caratteristiche morfologiche non sono ben nette. Il fatto che non si trovano regolarmente nelle colonie mostra che non debbono considerarsi come un inizio della casta operaia.

In *Termopsis* invece ci sono sicuramente vere e proprie forme reali neoteniche: di seconda forma, con accenni alari corti, molto più corti che negli individui di seconda forma di altri generi, e di terza forma, senza accenni alari. Specialmente frequenti sono i neotenici di terza forma, che, come in *Reticulitermes*, possono essere parecchi in una stessa colonia. Si sviluppano poco dopo la perdita dei reali veri e le loro larve possono far le funzioni della casta operaia che manca. Si rinvengono anche tutti i gradi di passaggio tra seconda e terza forma, cioè individui con accenni alari assai piccoli e talvolta ridotti a semplici sporgenze dei bordi laterali dei segmenti toracici (pag. 496, *215*). La Thompson considera queste forme intermedie, insieme ai soldati con accenni alari frequenti nel *Termopsis*, «come indici di un alto grado di variabilità di questo genere, specialmente nel senso di ripresentare caratteri primitivi».

A questo proposito bisogna ricordare che Heath (1893) ha trovato qualche volta nel *Termopsis* «soldati con ali e che producono uova che si sviluppano. Nell'esame

di molte centinaia di colonie formatesi naturalmente io ho trovati alcuni di questi misti e tutto il contorno invariabilmente suggeriva che si fossero sviluppati sotto condizioni non naturali. Stavano di solito in piccoli frammenti di legno spezzati via da un tronco abitato da grande colonia, sempre fondata da reali di complemento. L'isolamento di una piccola porzione della comunità aveva dovuto produrre un turbamento nelle condizioni di vita. Si eran dovuti provvedere nuovi reali di complemento e talvolta anche nuovi soldati... Non è difficile immaginare che durante il periodo di transizione il regime nutritizio abituale di certi individui possa essere andato alterato, producendo strutture anormali. In tutti i casi questi tipi sono imperfettamente sviluppati »: le ali di solito più corte dell'addome, piuttosto piccole le mandibole, spesso incompletamente evoluti gli organi sessuali (pag. 163, *99*) (¹).

Questo interessante reperto di Heath è da mettere in rapporto colle esperienze del Grassi, il quale, privando di soldati coloniole di *Calotermes*, vide comparire ninfe-soldati (pag. 103). Del resto il *Termopsis* è uno dei generi meno evoluti, meno distanti da quella condizione sociale primitiva nella quale è da supporre che i soldati fossero, dapprima normalmente, poi, in un secondo stadio filogenetico, di quando in quando, fecondi.

Mentre in *Termopsis*, e fors'anche in *Archotermopsis*, la coppia reale perduta può venire sostituita da parecchi neotenici, nel *Calotermes* invece si ha sempre una coppia di sostituzione unica, secondo le belle esperienze del Grassi.

Le ho più volte ripetute ed esattamente controllate, soprattutto collo studio delle coloniole in provetta. Non è molto facile mantenere per parecchi mesi in buono stato queste piccole colonie. Spesso deperiscono per invasione di Acari, che si vedono tappezzare in numero straordinario la testa e il corpo dei Calotermiti (non risparmiando, anzi quasi di preferenza infestando, i reali di sostituzione). Bisogna badare soprattutto che nel nidino si mantengano condizioni opportune di umidità. Un piccolo artificio per ottenere facilmente nidini che si conserveranno a lungo prosperi, è questo, per es.: mettere nei tubetti frammenti di legno tenero e abbastanza umido. Dopo pochi minuti le pareti son velate di vapor acqueo. Aggiungendo allora tritume di legno e feccia, che rimane in gran parte appiccicata alle pareti — e così imi-

(¹) « Mentre parrebbe » osserva Heath « che questi individui anormali siano stati prodotti come risultato di turbamenti nelle condizioni, soprattutto di allevamento e nutrizione, non c'è però una prova definitiva che dimostri ciò. Per parecchi anni ho condotto esperienze di allevamento nella speranza di gettare qualche luce su questo importante problema, ma i risultati finora sono stati affatto negativi. Ho nutrito centinaia di individui giovani, che non avevano più di due mute, con materiale accuratamente rimosso dallo stomaco di operai e in alcuni casi misto a frammenti di ghiandole salivari; ma questo modo di nutrizione si dimostrò inadatto, giacchè ben presto le termiti morirono (avevano il canale alimentare pressochè vuoto). Individui più vecchi vissero per più lungo tempo, ma finalmente anch'essi, indebolitisi, morirono. Ho anche provato a nutrire individui vecchi e giovani di materiale « proctodeal », senza mai ottenere risultati positivi. Ho anche aggiunto al substrato varie quantità di differenti sali, specie di quelli usati negli esperimenti di fecondazione artificiale, e, in altri casi, acidi a varia concentrazione. In altri esperimenti ho frammisto frammenti di legno a molte sostanze, nutritizie o no, allo scopo di disturbare i processi nutritivi in qualche modo, ma, o gli insetti han continuato a prosperare o sono morti senza mostrare modificazioni speciali » (*99*).

tando le Termiti e risparmiando loro i primi lavori d'adattamento — si riesce ad ottenere un ambiente umido ma non soprasaturo di umidità. Nidini in queste condizioni presentano un migliore sviluppo, orfanati si provvedono subito di individui di sostituzione.

Se è numerosa la piccola colonia, compaiono parecchi individui a occhi pigmentati (p. es., una coppia da ninfe e una da larve) dei quali poi due soli rimangono a costituire la coppia reale di sostituzione. Se sono pochi gli individui accomunati nel tubetto, compare prima un individuo a occhi pigmentati, poi, a distanza di qualche giorno, un altro. Alla fine si raggiunge sempre lo scopo di avere una coppia complementare a capo della colonia.

Se la piccola colonia possiede già un individuo reale, ben presto compare un individuo di sostituzione a completare la coppia.

Sovente per cattive condizioni del nidino muore uno dei complementari: dopo un certo tempo un altro compare a sostituirlo. Si possono così ottenere strane coppie, formate da un individuo reale vero e un neotenico, o da due neotenici, uno da larva senza traccia di ali, l'altro derivato da ninfa ad accenni alari più o meno sviluppati.

In genere nei nidini d'esperimento compaiono sostitutivi in abito larvale, tranne dove la popolazione sia composta solo di ninfe e piccoli. Insomma la colonia preferisce fabbricarsi i reali di sostituzione da individui che non hanno ancora traccia di ali.

Difatti in natura s'incontrano quasi sempre, nelle colonie divenute orfane, reali di sostituzione derivati da larve. Trascrivo, dai miei appunti, qualche esempio.

10 marzo 1920. In un piccolo pezzo di legno con *Termes* (*lucif.*) e formiche trovo un gruppetto di *Calotermes*, 4 soldati grossi, 2 piccoli, una trentacinquina tra ninfe e larve, con una bella coppia reale di sostituzione: ♂ e ♀, ambedue in abito larvale, senza traccia di ali, con piccoli occhi rossicci. Lungo il corpo, d'un colore gialletto caratteristico, traspare il vaso dorsale pulsante.

19 marzo 1920. Trovo, frammischiato al *Termes* (*lucif.*), e a gran numero di piccole formiche nere, un nidino di *Calotermes* con una bellissima coppia di sostituzione, soldati grandi e piccoli, molte ninfe, piccole larve e molte uova. Metto il tutto entro una capsula Petri. I reali si ritirano, con molto corteggio, sotto il più grande dei frammenti di legno; sopra il quale viene a passeggiare, come a far la guardia, il più grosso dei soldati. Un operaio di *Termes* è restato casualmente sul frammento di legno. Il corazziere lo appinza, trafiggendone l'addome sì che il poverino cade moribondo a terra. Metto allora sul pezzo di legno un piccolo soldato di *Termes*. Dopo qualche schermaglia il corazziere indovina giusto e stringe potentemente tra le sue le agili mandibole del piccolo soldato che ne rimane tramortito. Il corazziere si ritrae; si potrebbe credere che clementemente si contenti di aver reso inoffensivo il nemico. Ma ecco ad un tratto, con mossa ben misurata, infigge le sue mandibole nella testa dell'avversario, passandola da parte a parte. È il colpo di grazia? Non ancora; chè un minuto dopo, con altra mossa sapiente, spalancate le mandibole ne circonda il collo del vinto, e la richiude al punto preciso di articolazione del capo col protorace. Poi gravemente si allontana. Il povero soldatino non è più capace che di dondolarsi angosciosamente sulle zampe senza potersi spostare.

Curioso che *Termes*, *Calotermes* e formiche vivano insieme molte volte, con tutta l'apparenza d'una piena armonia. Spacchiamo il nido, ed ecco che cominciano ad azzannarsi e ad uccidersi, come se s'incolpassero a vicenda dello sconquasso. Del resto un gigante che passando per «l'aiuola che ci fa tanto feroci» si chinasse a guardare noi uomini, proverebbe forse una meraviglia maggiore nel vedere popoli legati da amicizia e rapporti commerciali, a un dato momento scagliarsi l'un contro l'altro senz'altra causa apparente che qualche avvenimento superiore ed estraneo alla volontà dell'uno come dell'altro popolo.

20 dicembre 1920. In mezzo a un folto gruppo di *Calotermes*, con uova, trovo una bella coppia reale di sostituzione, ventruta, senza traccia di ali, con occhi assai piccoli, rossicci. Il re è lungo, misurato senza testa, mm. 5,4 (di cui mm. 2 il torace) e la regina mm. 5,6. Larghezza massima dell'addome, a livello del 4° tergite addominale, mm. 1,35 nel re, mm. 1,56 nella regina. Colore gialletto caratteristico, tendente al rossastro nella testa. Anche la testa è invasa da grasso; le antenne mozze, con 6 o 7 articoli appena. Traspare il largo vaso dorsale pulsante con cintura pericardica giallo-rossiccia, evidentemente pel contenuto granulare delle cellule ghiandolari. Attorno al vaso dorsale due grosse bande adipose, piuttosto segmentali (e una caratteristica nappetta adiposa si trova, ad ogni segmento, ai lati del corpo; nei primi 5 o 6 segmenti addominali il grasso è ancora abbastanza delimitato, ma nella parte posteriore dell'addome sembra riempire tutto il corpo). Esaminando in acqua a fresco e, dopo fissazione, in olio di cedro, si distingue una pigmentazione dei tergiti a macchioline giallo-rossiccie, evidenti specialmente nel protorace, di aspetto identico a quello nei giovani complementari di *Termes*.

24 luglio 1919. Trovato, in un nido di *Calotermes*, numeroso con uova, prima una coppia reale e subito dopo un individuo a occhi pigmentati, e infine una grossa regina ad addome turgido. Della coppia reale la regina è di media grandezza (7 e $^1/_2$ mm.) ed è perfettamente normale (vera regina derivata da individuo sciamato); il re, lungo 6 mm., appare a prima vista anormale pel colore nero sbiadito, specie alla testa che è addirittura giallo-bruna. Inoltre ha caratteristici accenni alari da ninfa, occhi assai piccoli e sul capo molto evidente la sutura epicraniale ad Y che ricorda quella del *Lucifugus* e che manca negli adulti normali e che è in continuazione, quando la testa non è voltata a destra o a sinistra, con la linea bianca mediana degli anelli toracici (nei reali normali è nera). Il protorace è giallo pallido, come il margine dorsale delle ali, delle quali la anteriore destra è mozza. Questo carattere concorre a dimostrare che si tratta di un individuo complementare derivato da una ninfa che ha parzialmente proseguito nello sviluppo dei caratteri normali del sessuato (mentre in genere questi si arrestano allo stato in cui si trovavano al momento della elezione al trono. Il reperto di questo re-ninfa dimostra: 1) che il monoorfanamento si verifica anche in natura; 2) che anche in natura la colonia provvede alla sostituzione con un giovane individuo che sviluppando precocemente le gonadi si arresta nello sviluppo normale ad insetto perfetto; 3) che questo individuo scelto a divenire reale di sostituzione è un individuo normale. Difatti è capace talvolta di acquistare caratteri propri dell'insetto perfetto nel suo sviluppo normale.

Quanto alla grossa regina è lunga circa 10 mm. e forse rappresenta il suo candidato-consorte-complementare la larva, bianca, lunga 7 mm., con accenni alari brevissimi, con occhi pigmentati, rossicci ma grandi (assai più che nel re-ninfa). Trovato tra la popolazione anche un altro individuo a occhi pigmentati, in cattive condizioni (forse già scartato a vantaggio della larva ?).

Il 28 luglio trovo uova nei due nidini dove ho posto il re-ninfa con la consorte, e la grossa regina con la larva complementare: evidentemente stanno deponendole.

29 luglio 1919. Trovata una ninfa reale di sostituzione, quale si rivela dalla testa giallo-dorata, con piccoli occhi pigmentati e antenna sinistra mozza e dall'addome grosso, rigonfio, giallo cogli ultimi segmenti volgenti al bruno (tranne il colore, che probabilmente del resto diverrà più scuro, è tutto simile al re-ninfa già raccolto; ma probabilmente è ♀).

Anche Snyder ha trovato, nei *Calotermes* americani qualche individuo reale di sostituzione: in *C. Schwarzi* una giovane ♀ di seconda forma, lunga 6 ½ mm., con 13 articoli alle antenne, colore giallo-bruno, monconi alari rudimentali, occhi grigi (aprile 1917); e una giovane coppia, pure di seconda forma (febbraio 1919) con larve ed uova: ♂ lungo 8 mm., ♀ lunga 10 mm., senza appendici anali e con addome leggermente disteso (pag. 133, *201*). In *Cal. Jouteli* Snyder trovò una regina di terza forma, lunga 10 mm. e «markedly pigmented a pale castaneous color»; addome gonfio di uova, antenne con 19 articoli, occhi pigmentati e ocelli distinti (*201*).

È interessante notare che, mentre il *Calotermes* mostra una spiccata preferenza per i sostitutivi da larva, nelle Termiti superiori, (*Metatermitidae*), invece, pare non si trovino neotenici se non in abito ninfale o di alato bianco.

L'ESCREZIONE NEI REALI NEOTENICI

...... Immense avantage de ne pas être à l'affût de quelque particule plus ou moin doutese; de ne pas pâlir sur un microscope souvent trompeur; d'observer enfin des faits tellement évidents, que l'imagination n'à plus de prise sur eux, chose toujours bonne pour se former une sérieuse conviction!

FABRE.

I tegumenti.

Attira anzitutto la nostra attenzione, nell'esame anatomo-microscopico [1] dei vecchi reali di complemento, la struttura singolare dei tegumenti (ved. tav. IV, fig. 53). Nelle regioni del corpo in cui la cute è molle, e ciò per permettere i movimenti degli scleriti l'uno rispetto all'altro, il dermascheletro è costituito di uno strato superficiale esilissimo, leggermente ondulato, che proemina in appendicole coniche a mo' di peluzzi, (epiderma, e di un derma assai spesso, dato dall'accollamento di molti sottili strati paralleli regolarmente ondulati; l'ipoderma appare nastriforme, assai appiattito, aggregato di elementi cellulari di varia grandezza, disposti tutti in un solo strato e a contatto tra di loro.

Ma in corrispondenza ai pezzi esoscheletrici (tergiti, pleure e sterniti) la struttura dei tegumenti si presenta assai diversa. Lo strato superficiale, l'epiderma, è fortemente ispessito, il derma ridotto ad un sottile straterello e l'ipoderma cresciuto a larga fascia limitata inferiormente da una netta basale e nella quale spiccano grossi nuclei contornati di areole granulari giallastre. Ai punti di confine tra la cute molle e lo sclerite (l'epimero ad es.) vedesi l'ipoderma monostratificato appiattito allargarsi in una fascia cellulare a struttura complessa e da quello a questa continuarsi, al disotto la basale sempre nettamente limitante, al di sopra il derma assottigliato in uno straterello che seguita a decorrere leggermente ondulato e visibilmente costituito ancora di varie pellicole sovrapposte (ved. tavola I, fig. 6).

Nella fascia ipodermale appaiono, più o meno regolarmente allineati, dei grandi nuclei, caratteristicamente vescicolari, con grosso nucleolo basofilo o leggermente acidofilo, con una bella rete debolmente cromatica, ai nodi della quale (punti d'incontro delle maglie tra loro e con la membrana nucleare) spiccano granuli intensamente basofili. Ognuno di questi nuclei appare contornato d'una areola giallastra data dall'accumulo di granuli angolosi, di aspetto cristallino. Tra areola ed areola appaiono interposte tante piccole cellule o, più esattamente, non vedendosi se non di rado netti limiti cellulari, tanti più o meno piccoli nuclei granulosi, ovali, affusati o tondeggianti (ved. tav. IV, figg. 49 e 50).

[1] La mia tecnica microscopica è stata della massima semplicità e non richiede chiarimenti di sorta. Fissazione, quasi sempre, in liquido di Leeuwen: colorazione per le sezioni, ematossilina-eosina; per i preparati *in toto*, carminio boracico. Trovo molto raccomandabile, per lo studio anatomico preliminare, l'esame *in toto* anche senza colorazione, di esemplari montati in balsamo.

Queste osservazioni anzitutto ci chiariscono il nostro esame *in toto* delle macchioline nere (ved. fig. 7 *a*) e *c*) a pag. 321). Risulta invero evidente, specie considerando l'ipoderma in sezione parallela al suo piano (ved. tav. IV, fig. 48), che l'aspetto picchiettato degli scleriti è dato dalla discontinuità degli accumuli pigmentati nell'ipoderma, la distribuzione delle macchioline nere corrisponde alla distribuzione delle cellule pigmentifere nell'ipoderma stesso, e la loro struttura anulare è data dall'accumulo anulare dei granuli pigmentati attorno ai grossi nuclei glandolari (cfr. *b*) e *c*) della fig. 7).

E la distribuzione delle cellule pigmentifere nell'ipoderma? È determinata dalle necessità morfologiche della regione. Così nel protorace il tratto mediano senza macchioline e il tratto simile trasversale che con esso forma una sorta di croce corrispondono all'inserzione dei muscoli sul tergite (cfr. fig. 7 *a*) e fig. 9); come pure il cerchietto o spazio semilunare nelle parti laterali dei tergiti addominali. In questi tratti tra basale e cuticola si stendono le cellule tendinee e non possono allogarvisi cellule ghiandulari.

Tra le areole pigmentate i piccoli nuclei interposti appaiono sovente disposti su eleganti colonnine divisorie che il derma sovrastante sembra mandare e che talvolta raggiungono la basale, come se l'invasione degli accumuli pigmentarî avesse stirato in basso le cellule della matrice, conservanti però ancora una connessione collo strato dermico da esse stesse prodotto.

Ma altri nuclei apparentemente sono liberi e fanno pensare ad amebociti infiltrati.

Lo stroma cellulare della fascia ipodermale è dunque tutto costituito di cellule ipodermiche, e le grosse cellule ghiandolari stesse che vi si innicchiano sono cellule ipodermiche ipertrofizzate e differenziate per la funzione escretrice?

O prendono parte alla costituzione della fascia ipodermale elementi migranti che han traversata la basale e scaricato nei tegumenti i materiali escretizi circolanti?

O infine, dato che la basale è un vero straterello connettivale (¹), connettivali sono in parte le cellule che si dispongono sulle colonnine intercalate nello spessore della fascia ipodermica?

Fermiamoci ad esaminare più diligentemente a forte ingrandimento (8 C. $\times \frac{1}{15}$ I. O.) la struttura d'una regione sclerale, p. es. d'una pleura (tra le regioni sclerali sono le pleure che presentano più tipicamente, in sezione, la struttura caratteristica; perchè, essendovi le ghiandole ipodermali assai fittamente disposte, nelle sezioni trasverse vi appaiono in fila ininterrotta; di esse, però, soltanto alcune si presenteranno in sezione mediana (le altre verranno tagliate più o meno medialmente).

Nella figura 11 è disegnato, da sezione trasversa di vecchia regina di complemento (da ninfa di seconda forma), un epimero mesotoracico.

Nel dermascheletro lo strato superficiale, epiderma, è fortemente spesso e rifrangente (incolorabile nelle sezioni all'ematossilina-eosina) e pare distinto in due strati, uno giallo più esterno, uno incolore e meno rifrangente più interno. Di spessore pressochè uguale a quello dello strato superficiale è il derma che si presenta denso, molto compatta-

(¹) Come dimostrano i piccoli nuclei allungati che s'incontrano di tratto in tratto nello spessore della basale.

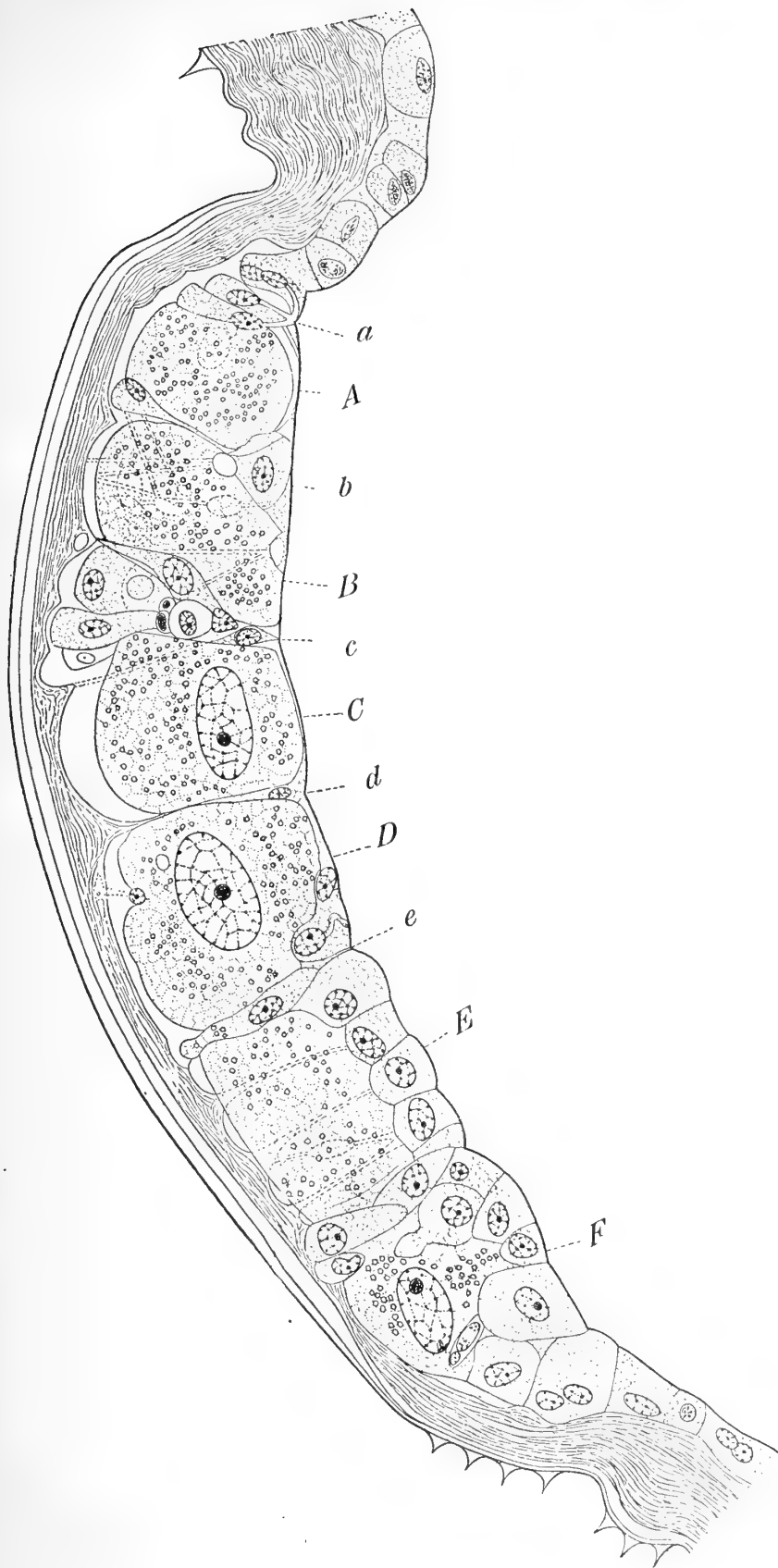



Fig. 11. — Epimero mesotoracico di vecchia regina complementare da ninfa di seconda forma.

Epiderma spesso, distinto in due strati; derma densamente fascicolato, riflesso di tratto in tratto a dare gli archetti superiori delle colonnine ipodermali: *a*, *b*, *c*, *d*, *e* che occupano gl'interstizi tra le cellule ghiandulari *A*, *B*, *C*, *D*. *E*, *F*, di cui *C*, *D* e *F* in sezione mediana, onde appare il nucleo grosso, nucleolato, e *B* e *D* ingabbiate da tutto un reticolo di briglie e fibre (rappresentate tratteggiate). La basale dal nastro ipodermale intersclerale si continua sotto la fascia ghiandolare dello sclerite.

mente fascicolato (violaceo), inflesso di tratto in tratto a dare gli archetti superiori delle colonnine interstiziali.

Passando alla regione intersclerale, lo strato superficiale si assottiglia in una pellicola che sormonta con apiculi le papille del derma. Sotto questa pellicola rifrangente e incolora sta uno straterello (rossiccio) che, iniziatosi nella regione di passaggio tra sclerite e cute molle, decorre poi ad orlare, seguendone le sporgenze papillari, il derma. Il derma è molto spesso (quattro volte almeno lo sclerale) e un po' lasso, sicchè corrono fessure interstiziali tra i sei o sette fasci di lamelle che lo costituiscono; però di tratto in tratto l'ipoderma manda un apiculo che si spinge fin verso la metà dello spessore del derma e ne r'assesta, agendo da punzone, gli strati.

L'ipoderma intersclerale è nastriforme, sottile ed ha un aspetto (limiti cellulari confusi, struttura protoplasmatica confusamente reticolare interrotta da frequenti grosse vacuole, nuclei piuttosto sformati e come avvizziti) come fosse in via di degenerazione. Quanto all' poderma sclerale, gioverà seguire elemento per elemento la figura (nella quale, come nel preparato, tutti gli elementi ipodermali appaiono staccati, e slontanati più o meno, dalla cuticola; probabilmente per effetto di lenta penetrazione, traverso la spessa chitina, del fissatore).

Al nastro ipodermale intersclerale fanno seguito due elementi cellulari (*a*) allungati, fissati col polo apicale alla membrana basale: struttura protoplasmatica reticolare, nucleo (come tutti in genere i nuclei delle cellule ipodermali intercalari) ovoide, a netto reticolo cromatico e un nucleolo più o meno centrico, debolmente acidofilo (grosso, tre o quattro volte più dei granuli basofili ai nodi del reticolo nucleare).

Segue una cellula ghiandolare (*A*) piena di granuli gialli disseminati nel protoplasma che presenta evidente struttura reticolare (meno densa, cioè a maglie poligonali più larghe, e meno cromatica, violaceo più chiara, che non nei piccoli elementi ipodermali). Questi granuli gialli sono tutti poligonali, evidentemente cristallini; è difficile afferrare la loro forma precisa che sembra però, nella maggior parte, un esagono più o meno proporzionato (probabilmente un prisma esagono colle facce verticali del prisma ridottissime, come in tav. III, fig. 44). Ho figurato punteggiati i contorni del nucleo che appare in un piano ottico più superficiale della sezione, tagliato assai medialmente (perciò è relativamente assai piccolo) e vicino alla parete cellulare (per essere detta parete a quel livello introflessa a doccia profonda ove si alloggia la colonnina ipodermale *a*).

La ghiandola *A* è separata dalla vicina *B* (a livello della figura: ad altri livelli potrà essere a diretto contatto con essa) da altra colonnina (*b*) costituita da una cellula che conserva la caratteristica forma lungamente peduncolata e tocca, colla clava nucleata, la cuticola e raggiunge, col lungo peduncolo, una cellula a forma brevemente piramidale, impiantata sulla basale. La cellula ghiandolare *B* è tagliata ancor più medialmente che la *A*. Rappresento punteggiati i contorni del nucleo (in un piano ottico più superficiale) e tratteggiati gli elementi (nuclei, aree protoplasmatiche, briglie protoplasmatiche che, partendo da essi nuclei, s'incrociano in reticolo) che stanno in un piano ottico più profondo e rappresentano il setto reticolato che separa la cellula ghiandolare *B* da una contigua (retrostante, rispetto alla sezione). Se la forma della *B* appare piuttosto irregolare è perchè nel suo corpo, a livello del piano ottico disegnato, s'indoc-

cia profondamente una grossa colonna ipodermale (c) (tratteggio elementi che stanno in un piano più profondo; punteggio la vicina briglia protoplasmatica perchè sta in un piano ottico più superficiale dove s'indoccia superficialmente sulla parete della cellula C).

La cellula ghiandolare C è tagliata quasi medianamente, sicchè il nucleo appare grosso (ovoide un po' allungato e con grosso nucleolo).

Segue, a contatto quasi diretto (molto esile è, a questo livello, la colonna d) la cellula ghiandolare D che si presenta in sezione veramente mediana. Il nucleo è grosso con tutto un reticolo cromatico (a larghe maglie poligonali; ai nodi delle quali granuli grandicelli più intensamente basofili) che fa capo al grosso nucleolo quasi centrico, debolmente basofilo (non francamente bleu, ma d'un color livido, viola rossiccio).

Esso non ha forma esattamente sferica, come si direbbe a prima giunta: è poliedrico (focheggiando si afferrano successive immagini poligonali, spesso esagonali, che si scambiano lati ed angoli) a tante faccettine (come, per dare un'idea, un granato, un brillante o forse, meglio, un grano di *pisum quadratum*), quasi, si direbbe, per trazione che i fili del reticolo nucleare esercitino. Nel protoplasma, a struttura nettamente reticolare, stanno disseminati i cristallini gialli, accumulati in maggior copia nel senso del microdiametro nucleare (il macrodiametro è orientato perpendicolarmente alla direzione antero-posteriore del corpo).

A livello del disegno la parete della cellula presenta due invaginazioni, di cui una più piccola superiore è determinata da un nucleo che, legato per una briglia ad altro nucleo addossato al derma, si va ad infossare nel corpo ghiandolare, e l'altra, più grande, inferiore, da una cellula ipodermale impiantata sulla basale e che fa da pilastro alla colonnina (e) che separa la cellula ghiandolare D dalla E. La E è tagliata tanto sagittalmente che non v'appare nucleo; mentre compaiono, nel focheggiamento, in un piano appena più profondo, quattro eleganti colonnine (briglie, protoplasmatiche o dermali?) che s'impiantano superiormente sullo strato dermale, inferiormente su una fila di tre cellule ipodermali continua sulla basale (rappresento tratteggiate le colonnine e una briglia obliqua con nucleo mediano).

Ormai la fascia ipodermale sclerale degrada verso l'ipoderma nastriforme della cute molle, ma ancora spunta, tra le cellule ipodermali comuni, una cellula ghiandolare F, in sezione quasi mediana onde v'appare il nucleo grosso e nucleolato.

Mi perdoni il lettore se l'ho costretto ad un faticoso esame; anch'io ho penato molto a orientarmi in questi... orizzonti planimetrici, ma me ne sono tenuto compensato dalla modesta soddisfazione di essermi fatto un'idea concreta della forma dei miei « adenociti ipodermali ». Mi provo a rendere questa idea.

Le cellule ghiandolari, dapprima tondeggianti, crescendo, divengono, per compressione reciproca, prismoidi (a base quadrangolare, pentagona o esagona); seguitando ad aumentare di volume, comprimono le colonnine di cellule ipodermali che restano indocciate, più o meno profondamente, nel corpo ghiandolare, scanalandolo come, per render l'idea, una colonna dorica. Cellule, poi, isolate sulla basale o sotto il derma, restano innicchiate (infossate talora, sino ad apparire immerse) sulla faccia superiore e inferiore (o anche, sporgendosi dalle colonnine, sulle facce laterali). Infine tutta una striatura è de-

terminata, su tutte le pareti cellulari, da un reticolo di briglie e fibre che, dal derma alla basale, ingabbia la cellula ghiandolare.

Passiamo ora a domandarci: Come e quando avviene la differenziazione di questi « adenociti ipodermali » ?

Bisogna, per darci una risposta, seguire l'evoluzione strutturale dei tegumenti nello sviluppo dei reali neotenici.

L'esame di giovani regine di complemento ci mostra qua e là nei tegumenti, bagnati da abbondante plasma granuloso con amebociti, cellule escretrici ([1]) che, ovoidi dapprima, vanno assumendo man mano una forma quadrangolare: assai più grandi delle ipodermali ma notevolmente più piccole delle cellule corrispondenti dei vecchi complementari (ved. tav. I, fig. 5).

Il nucleo è grande, con abbastanza netto reticolo cromatico e nucleolo grosso intensamente eosinofilo. Nel protoplasma traspare debolmente, come ancora semidisciolta, la sostanza granulare giallastra. In qualche tratto le cellule escretrici sono disposte in non interrotta fila sotto una primo strato ipodermale dato dalle comuni cellule di matrice.

Nelle regine da alato bianco, disposizione identica: in una di esse, un po' più vecchia, più numerosi appaiono i nuclei, assai debolmente acidofili, e meglio distinte le granulazioni gialle circostanti.

Risaliamo alla ninfa di seconda forma.

Nello studiarne i tegumenti, risaltano anzitutto i loro rapporti coi fasci muscolari. In corrispondenza a questi le cellule ipodermiche s'allungano a mo' di bastoncelli, dei quali la parte prossimale, aderente alla cuticola, è ingrossata e contiene il nucleo ovale (macrodiametro nella direzione della fibra muscolare), granuloso; la parte distale è fibriforme, conica o cilindrica, e, prima di giungere alla fibra muscolare (spesso due cellule ipodermiche dànno inserzione alla stessa fibra), si sfiocca in due, tre o quattro fascetti come per stabilire più intimi rapporti coi singoli elementi costitutivi della fibra muscolare stessa. Evidentemente la fibra muscolare si arresta alla membrana basale, collegandosi a questa, e le cellule ipodermiche, comprese tra la membrana stessa e la cuticola, formano, in questo punto, le fibre tendinee (ved. tav. IV, fig. 47).

Ma, a parte i tratti corrispondenti alle inserzioni muscolari, in tutto il tegumento, anche nelle regioni che saranno poi fornite di un ipoderma appiattito a cellule strettamente connesse (ad es. nello spazio intercedente tra il tergo e la regione epimerale), lo strato ipodermico si presenta assai alto, costituito di cellule affusate, fissate alla basale per un lungo peduncolo (ved. tav. I, fig. 1). Certo questa particolare struttura (che ricorda le cellule tricogene del Graber) è legata all'attiva formazione della cuticola ([2]) e delle appendici cuticolari ([3]). Esaurita tale formazione, lo strato ipodermico si riduce

([1]) Le chiamerò così, fin da ora, per brevità.

([2]) Che appare essere segregata in sferule, gocciole che poi confluiscono formando uno strato continuo.

([3]) Come notò già il Grassi i reali di complemento, e del resto tutti i neotenici, presentano un caratteristico fitto rivestimento di lunghi peli a direzione generalmente trasversale.

assai e anche in corrispondenza alle inserzioni muscolari, così da apparire che le fibre si inseriscano direttamente alla cuticola [1].

Anche nelle ali, che appaiono come espansioni laterali del tergite, sovrastanti all'epimero già differenziato, l'ipodermide appare in piena attività secretrice. Tra l'ipoderma della lamina superiore e quello dell'inferiore lo spazio libero è occupato da plasma con trachee ed amebociti. Ma di tratto in tratto le cellule ipodermali delle due lamine traversano la basale e si congiungono coi loro prolungamenti fibriformi, evidentemente per segregare le colonnette che colleghino l'una lamina alare all'altra (ved. tav. I, fig. 2).

Nel tergo poi, e specie negli epimeri, l'ipodermide più non è semplice, sebbene non nettamente pluristratificata.

Tra le cellule, alcune, più lontane dallo strato cuticolare, hanno un nucleo più grande con granulazioni basofile e un bel nucleolo eosinofilo. Taluni di questi nuclei, ovalari, col macrodiametro orientato parallelamente alla direzione della basale, e coi granuli cromatinici in parte addossati alla membrana cellulare e riuniti dal caratteristico reticolo, paiono proprio identici, salvo le dimensioni minori, ai nuclei escretori dei giovani reali (tav. I, fig. 1; tav. II, fig. 15).

Sembra dunque potersi affermare che, all'epoca della ninfosi, dal giovine strato ipodermico, che s'accinge a segregare il nuovo rivestimento chitinoso, si differenziano, ingrossando e portandosi al disotto delle comuni cellule di matrice, molti elementi cellulari che poi gradatamente, man mano che l'individuo neotenico svolge e intensifica la sua attività riproduttoria, vanno crescendo e caricandosi di materiali pigmentiferi, sempre più specializzandosi ed assumendo forma e funzione di ghiandole unicellulari ipodermali escretrici.

Ho riprodotto nella sua forma originaria dubitativa la mia conclusione, per quel certo grande senso di rispetto che ho verso lo sviluppo storico non solo delle altrui ma anche delle mie ricerche; convinto che non c'è mezzo più efficace di capirne e farne capire, rispettivamente, il valore (punti deboli compresi!).

Ma la probabilità è divenuta certezza dopo l'esame di ninfe di seconda forma mature, prossime alla muta.

Vale la pena di esaminare diligentemente l'epimero ninfale (da sezione frontale di ninfa di seconda forma) disegnato nella fig. 4 della tav. I.

La vecchia cuticola si è staccata dall'ipoderma: vi si distingue nettamente lo strato superficiale, epiderma, (rossiccio leggermente violaceo, nelle sezioni colorate all'ematossilina-eosina) e, separato da un filo limitante (bleu), lo strato profondo (derma), compatto, di aspetto quasi omogeneo (violaceo chiaro). Passando alla regione intersclerale, lo strato superficiale si riduce a sottile straterello che sormonta con apiculi le piccole papille del derma; questo è spesso (molto evidentemente, sebbene compattamente, fogliettato) tanto che lo spessore complessivo del dermascheletro diviene un po' maggiore che non nella regione sclerale.

[1] Probabilmente questo aspetto che secondariamente assumono le inserzioni muscolari ci spiega (sembrando improbabile che ambedue le maniere di attacco dei muscoli possano darsi) la ben nota discordanza degli autori circa l'origine del tendine.

Sotto la cuticola c'è, ben distinto e in qualche tratto staccato, uno straterello limitante (bleu). Aderente invece alla superficie, tutta ondulata e come frastagliata, dell'ipoderma appare (come un orlo violaceo rossiccio) la nuova cuticola, ancora molto sottile. Tra la nuova e la vecchia cuticola in qualche punto appare un finissimo ma netto reticolo a maglie poligonali con ai nodi frequenti granuli (fortemente violetti); più spesso questi granuli stanno a limitare certe smagliature tondeggianti che qua e là interrompono il reticolo o sono addossati al filo marginale della vecchia cuticola (che si direbbe abbiano, confluendo, costituito). Si direbbe proprio che, come sostiene il Pantel per *Thrixion (170)*, sia avvenuto, nell'imminenza della muta, il trasporto dell'attività chitinogena a una certa profondità così da delimitare una zona protoplasmatica intercalare che, imprigionata tra due foglietti chitinosi, si modifica e finisce per liquefarsi.

Tra la nuova cuticola e la basale (orlo spesso, violaceo rossiccio) sta l'alta fascia ipodermica. Essa è tutt'altro che semplice, sebbene non nettamente pluristratificata. Vi si distinguono una zona superiore e una zona inferiore. La zona superiore, verso la cuticola, ha nuclei in fila fitta e continua tra protoplasma fortemente tingibile (violaceo intenso). Soprattutto tingibile è la zona tra nuclei e margine festonato dell'ipoderma, dove il protoplasma, a struttura densa, confusa tra la reticolare e la granulosa, ha tutto l'aspetto di essere in grande attività secretrice. E le cellule sembrano avere confusa, nell'opera comune di secrezione, la loro individualità in un sincizio ipodermico.

Questa zona ipodermale superiore, come verso la cuticola, così verso la basale è tutta ondulata, direi quasi a panneggiamenti: come una cortina dalla quale si affaccino le grosse cellule della zona inferiore più chiara (violaceo-chiara). Esse cellule sono perfettamente individuate, a struttura nettamente reticolare (meno densa, cioè a maglie più larghe, che non nella zona superiore), di aspetto tutto ghiandolare. Alcune appaiono binucleate, in altre è evidentemente recente la divisione cellulare.

I nuclei, nella zona superiore come nell'inferiore, mostrano una singolare struttura: piriformi, con un ammasso denso di cromatina al polo apicale, che è sempre inferiore, orientato verso la basale, e la metà (più o meno: $^1/_4$-$^2/_3$) superiore chiara, come vacuolare, con solo pochi granuli cromatici addossati alla membrana nucleare (sempre?) e un nucleolo (lievemente eosinofilo) emergente più o meno dall'ammasso cromatico basale. Sono di varia grandezza: alcuni relativamente assai piccoli e strettamente addossati, come provenienti da una recente proliferazione; tal'altri grossi e in divisione amitotica.

Ma due nuclei soprattutto, presso il margine sclerale degradante all'ipoderma monostratificato, attirano la nostra attenzione. Stanno in due cellule che spiccano per la loro grandezza (e anche per la tinta non francamente violacea, ma rossiccia violacea chiara), una cuboide, l'altra ovoide allungata, tutte e due a limiti cellulari ben netti.

Il nucleo della cellula cuboide (o sferoide che sia) ha una struttura ben singolare e si stenta molto a farsene un'idea esatta. Focheggiando pazientemente, ci si accorge che si tratta di un nucleo vescicolare, leggermente ovoidale (con rete cromatica a larghe maglie e nucleolino centrale), innicchiato, direi quasi come un uovo in un portauovo, in una sorta di guscio nucleare che forma una calotta intensamente cromatica nella parte inferiore del nucleo, e si protende, con lembi chiari, lateralmente.

Se confrontiamo questa singolare struttura con quella dei vicini nuclei ipodermali comuni, ci convinceremo facilmente di esser riusciti a sorprendere la trasformazione del

nucleo ipodermale in ghiandolare: questa trasformazione avviene per fenomeni profondi di elaborazione, dei quali noi vediamo l'epilogo nel rigetto della massa cromatica del polo inferiore e nella organizzazione di quella che era la parte superiore vacuolare del nucleo, in un nucleo vescicolare ovoide, con nucleolo centrale cui fa capo la rete cromatica [1].

Sotto il nucleo suddescritto è scavata nel protoplasma, a margini nettissimi, una nicchia nella quale sta un corpicciuolo singolare « a lacrima di vetro », con uno spazio chiaro rotondo nella testa (e nel mezzo di esso un nucleolino debolmente eosinofilo, legato per qualche briglia a raggio alla parete) e tutt'intorno e nella coda basofilo per granuli cromatici fittissimamente ammassati. La testa appare, focheggiando, a livello del dorso nucleare; la coda, assai appuntita all'estremo, tocca la basale. È casuale la sua presenza o è correlativa alla evoluzione ghiandolare del nucleo? È un amebocito o il prodotto di una precedente epurazione cromatica?

Quanto al corpo protoplasmatico, esso appare debolmente reticolato, a fili debolmente più densi del materiale che, simile a coagulo, sembra riempire il tutto e che ha il colore, e anche l'aspetto granulare diffluito, del plasma emolinfatico sottostante alla basale. Da un lato la cellula ghiandolare è fiancheggiata da una elegante colonnina ipodermale, bifida alla base e costituita evidentemente dalla coda di due cellule ipodermali della zona superiore.

Queste dunque sembrano perdere, a quello che era l'estremo superiore clavato, col nucleo, la loro individualità; confondendosi, nel lavoro comune di secrezione cuticolare, come in un sincizio; ma la serbano nel peduncolo basale (come le cellule ipodermali a tendine nelle regioni d'inserzione muscolare, nella ninfa) che mostra una tinta un po' più chiara che non la zona ipodermica propriamente detta (perchè scarseggia nelle maglie

[1] Fenomeni di autotomia cellulare sono stati descritti dai varî autori che hanno studiato i fenomeni interni della metamorfosi degli insetti. Negli insetti più elevati, a metamorfosi molto accentuate (Muscidi), la differenza tra i tessuti specifici larvali e quelli imaginali è troppo considerevole perchè le cellule larvali siano capaci di riadattarsi a condizioni nuove; onde la maggior parte dei tessuti larvali è distrutta, la più gran parte dei tessuti imaginali è formata a nuovo. Negli insetti meno elevati, a metamorfosi meno accentuata (Coleotteri), invece, la maggior parte dei tessuti passa dalla larva all'insetto perfetto attraversando uno stadio di sdifferenziazione. In *Galeruca* Poyarkoff ha visto le cellule ipodermiche, le cellule dell'epitelio intestinale anteriore e posteriore, i mioblasti, le cellule fusiformi derivate dalla valvola esofagea, le cellule di matrice delle trachee, le cellule dei tubi di Malpighi, e anche cellule nervose, rigettare, durante la metamorfosi, prodotti formati di cromatina e di citoplasma: bolle autotomiche. Ma il caso più rimarchevole è quello delle cellule tendinose che rigettano la loro parte più specializzata (tonofibrille) e ridivengono così cellule ipodermali ordinarie. « I fenomeni di autotomia cellulare, nota giustamente il Poyarkoff, presentano un interesse biologico generale. Uno studio dettagliato di questi fenomeni ci farà conoscere più intimamente i processi vitali cellulari; ci farà soprattutto meglio conoscere la natura di questi fenomeni misteriosi che chiamiamo differenziazione, specializzazione ecc. » (pag. 140, *187*).

Io mi propongo di completare lo studio della differenziazione degli *adenociti ipodermali* nelle varie forme di neotenici, e di studiare anche degli altri tessuti l'evoluzione postembrionale in rapporto alle mute e soprattutto all'ultima muta, accompagnata da stadio quiescente, dalla quale la ninfa di seconda forma esce individuo neotenico e la ninfa di prima forma sessuato alato.

del suo reticolo la secrezione fortemente basofila che abbonda nella parte distale, più specialmente chitinogena, delle cellule ipodermali).

Se passiamo ad osservare la cellula ovoide (di cui segno tratteggiata la porzione coperta, a livello del piano disegnato, dal festone ipodermico), troviamo un nucleo a struttura nettamente ghiandolare (niente ammassamenti cromatici; tutto un reticolo a larghe maglie con ai nodi granuli basofili) ma come doppio, o, meglio, a vescica di pesce: evidentemente in divisione amitotica cui seguirà la scissione del corpo cellulare già così allungato.

Riassumendo i risultati di queste ed altre mie osservazioni, concludo: *Le cellule ipodermali h nno tutte dapprima la forma peduncolata caratteristica e toccano con la clava nucleata la cuticola, col sottile peduncolo la basale. Poi si moltiplicano attivamente per amitosi e molte rimangono all'opera attiva di secrezione cuticolare, confondendo prossimalmente i limiti cellulari, spesso ancora raggiungendo distalmente la basale; altre si allontanano dalla superfice cuticolare, si portano in una zona inferiore ipodermica, più presso la basale, ingrossano, si moltiplicano; nel protoplasma prima e poi n 'l nucleo, con processi di profonda elaborazione cromatica, assumono struttura ghiandolare; conservano ancora capacità di moltiplicazione fino alla muta dalla quale la larva di individuo neotenico esce individuo neotenico.*

Fino alla muta dico, perchè ho ragioni per credere che il numero delle ghiandole ipodermali non cresca più dopo la muta.

Infatti contando pazientemente, in esemplari montati in balsamo, il numero delle macchioline nere in vecchie regine di complemento, e il numero delle grosse aree poligonali, trasparenti sotto la cuticola, debolmente o nient'affatto pigmentate, tra il pavimento a mosaico dell'ipoderma, in giovani regine, ho trovato un numero pressochè costante di elementi in zone corrispondenti (le piccole variazioni di numero sono da considerarsi individuali). Per es., nel pronoto di vecchia regina complementare ho trovato 112 (a destra) + 106 (a sinistra) macchioline, e nel pronoto di giovanissima regina 105 + 120; nel me o-noto di vecchia regina 62 macchioline, nella metà sinistra del mesonoto di giovanissima regina 36; nel metanoto di vecchia regina 46 + 40 e nella metà sinistra del metanoto di giovanissima regina 49; in epimero mesotoracico di vecchia regina (sulla linea di sezione ottica) 13 e in epimero mesotoracico di gi vanissima regina 12.

Tenendo conto delle macchioline pleurali, tergali (nel pri no urotergite ne conto 110 + 110. È interessante notare che anche nelle lamine alari compaiono macchioline; ne conto 12 nell'ala anteriore destra, 10 nella posteriore destra, 10 nell'anteriore sinistra, 20 nella posteriore sinistra) e sternali, si può calcolare approssimativamente il numero delle ghiandole ipodermali, in una regina di complemento, a 4500!

* * *

La suddetta struttura dei tegumenti nei reali neotenici del *Termes* ricorda singolarmente quella della Blatta. Della quale « nelle sezioni appaiono, tra membrana basale e cuticola, almeno due strati cellulari, di cui l'uno, a ridosso della cuticola, composto di cellule molto piccole con pochissimo citoplasma; l'altro, in contatto colla basale, risultante di cellule assai maggiori, molto ricche in protoplasma, con nucleo più grande, di

varia forma e grandezza. Veramente si può dire che le piccole sono non solo sotto la cuticola immediatamente ma anche intercalate tra le cellule maggiori e occupanti tutti gli spazi, talora larghi, che intercedono tra queste » (Berlese, pag. 470). La disposizione spesso è irregolare, e qua e là, superiormente ai nuclei delle cellule maggiori, quelle delle piccole cellule mancano. Questo nella parete dorsale dei segmenti addominali. Nelle membrane molli, tra scleriti, l'epidermide è di un solo strato; mancano le cellule maggiori, e le minori non sono slegate ma collegate a pavimento. Inoltre là dove si inseriscono fasci muscolari vi è un solo strato di cellule allungate a tendine.

Mentre il Minchin (1888) ammetteva due strati di cellule ipodermali, — il superiore appartenente allo strato di matrice della chitina, l'inferiore di cellule più grandi formato da elementi nervosi, — Mingazzini (1899) ritiene esistere rapporti di origine tra le minori e le maggiori e considera queste per divenute ghiandolari «.... La costituzione del nucleo e la sua forma, come anche la natura del protoplasma cellulare, parlano in favore della natura glandolare di queste cellule... Va dunque considerata l'ipodermide della *Periplaneta* non differente da quella degli altri insetti per la natura delle cellule che la costituiscono, ma solo perchè, gradatamente che l'animale ingrandisce, molte cellule della matrice, specializzandosi per particolari funzioni, s'ingrossano, prendono una forma ramificata, e si portano al disotto delle comuni cellule di matrice » (pag. 577, *158*) (1).

(1) Miall e Denny, nel loro lavoro sulla Blatta (*156*), avevano descritto l'ipoderma come un semplice strato di cellule, ciascuna corrispondente a un'area poligonale della cuticola chitinosa; e sotto la membrana basale, qua e là, sparse grosse cellule nervose terminanti con fini processi nei peli sensori.

Minchin osserva che, per lo meno nella superficie dorsale di vecchi individui, l'ipoderma consta di due strati, sotto i quali sta la membrana basale: uno strato superiore di cellule, regolare, continuo per tutto il corpo e che si continua colle trachee; e uno strato inferiore, molto irregolare, che manca dove la cuticola si piega a formare un'articolazione. In certi posti le cellule dello strato inferiore divantano cellule giganti con grossi nuclei e molto contenuto cellulare granulare e con processi, due o tre: sparse qua e là nel tergo, stanno soprattutto abbondanti, in strato quasi continuo, nella parte anteriore del tergite (ricoperta dall'orlo posteriore del tergite antecedente). Secondo il Minchin si tratta senza dubbio di cellule ganglionari, *nerve-end cells*, che sono probabilmente connesse coi peli dove la superficie tergale è libera; ma dove i terghi stanno sovrapposti, pare si connettano con piccole papille (pag. 231, *157*).

Il Mingazzini trova che in individui adulti « lo strato cellulare ipodermale può constare o di un solo strato di cellule, generalmente piccole; oppure di due strati, il superiore formato da cellule piccole, l'inferiore di cellule assai maggiori; oppure di più strati di cellule disposte senza ordine, le grosse miste alle piccole e con varie gradazioni nelle dimensioni fra le une e le altre [come in tutta l'estensione dell'ultimo segmento addominale; ma generalmente le maggiori sono nella parte inferiore, le minori nella superficie] ». Talvolta « tra le cellule piccole, formanti un solo strato, si vede qua e là qualche cellula grossa, che si distingue dalle altre per avere un nucleo assai più grosso che generalmente mostrasi allungato in direzione parallela alla superficie della chitina » (pag. 574, *158*). In « animali ancor giovani si trova assai meno sviluppata questa duplicità di strati che si osserva negli individui adulti. È poi facile di riscontrare, negli individui di piccola mole, delle sezioni con uno strato di cellule, tra le quali osservansene spesso delle maggiori, e le adiacenti a queste sono più ristrette tra loro che non le altre, forse così disposte per la pressione esercitata dall'accrescersi delle cellule maggiori; negli individui di media grossezza vi sono le condizioni di passaggio fra i piccoli e gli adulti ».

« Le grosse cellule inferiori dell'ipodermide della *Periplaneta orientalis* sono da considerarsi non come cellule nervose, ma come cellule di natura epiteliale, derivate dallo strato superiore, e che subi-

Berlese crede che, «se non si tratta di amebociti infiltrati colà, le cellule minori sono una proliferazione dell'ipoderma e può essere anche che le maggiori assumano altro ufficio ; ma certo nè la questione è ancora bene chiarita, nè questo stato di cose è l'ordinario

---

scono un notevole ingrossamento, forse dovuto a varie cagioni, e che si dispongono inferiormente non essendo più atte alla secrezione della cuticola chitinosa. Non deve essere estraneo a questo ingrossamento lo specializzarsi di alcune a determinate funzioni, come la secrezione di particolari materie oleose da spargersi al disopra della cuticola chitinosa, come lo mostrano i particolari canalini (prolungamenti cellulari del Minchin) che talvolta, partendo dal corpo di queste cellule, passano attraverso allo strato delle cellule minori, e vanno a sboccare nei poricanali della cuticola chitinosa, oppure la funzione tricogena, come sembra accennare l'enorme sviluppo dello strato epiteliare nell'ultimo segmento addominale, provvisto sempre di peli più numerosi che non gli altri segmenti, o l'una e l'altra insieme » (pag. 576).

Una controprova di questo processo di differenziazione Mingazzini la vede nella struttura dell'organo particolare scoperto da Minchin nella parte dorsale della membrana intersegmentale del sesto anello addominale di *Periplaneta*, organo di natura ghiandolare costituito da due borse per introflessione del tegumento. Mentre nelle membrane intersegmentali l'ipoderma è sempre costituito da un semplice strato di cellule molto più piccole di quelle minori dei segmenti, invece, « ove esistono le dette ghiandole, non solamente le cellule grosse glandolari sono disposte in due o più strati, ma bensì quelle appartenenti alle cellule proprie di matrice » e sono spesso frammiste così da apparire probabilmente che le cellule grosse ghiandolari « si sieno originate da una moltiplicazione e differenziazione delle cellule matrici della chitina, alla quale supposizione fa da conferma anche il fatto che tutta la ghiandola è circondata dalla membrana basale che limita le cellule ipodermiche... Le cellule di questa glandola sarebbero perfettamente omologhe a quelle maggiori del resto dell'ipodermide e che in questo organo si sarebbero specializzate funzionalmente per dare una secrezione particolare » (pag. 578).

Dopo che il presente lavoro era stato già compiuto e scritto, consultando più diffusamente e con attenzione la grande monografia dell'Holmgren (*114*), ho trovato che il termitologo svedese aveva già scoperta la somiglianza di struttura dell'ipoderma dei Termiti colle Blatte. Nel capitolo VII della sua monografia « Integumentale Bildungen und Körperdrüsen », Holmgren dice: « Bei Periplaneta haben Minchin (1888) und Mingazzini (1889) unterhalb der Dorsalskleriten das Vorhandensein von teils kleineren teils grösseren Hypodermiszellen konstatiert. Die grösseren bilden ein Schicht unterhalb der kleineren. In Zusammenhang mit den Hautdrüsen werden unten analoge Verhältnisse beschrieben » (pag. 152). Ma io non trovo al capitolo dei tegumenti, tranne di un organo ghiandolare speciale al quinto sternite, altra descrizione se non di ghiandole della muta ; e non so se sieno queste le suaccennate cellule grosse, disposte in strato. L'Holmgren non ne dà alcuna figura.

A proposito dei peli « hohle trichombildungen » che rivestono il corpo dell'adulto, nota che « man kann wenigstens auf zwei Formen dieser Trichome unterscheiden, nämlich solche welche mit einfachen Hautdrüsen verbunden sind, und solchen ohne Hautdrüsen. Die beiden Formen hängen aber genetisch nahe zusammen, indem die letzteren als wahre Drüsentrichome entstehen. An Termitenlarven, welche bald ihre letzte Haütung durchmachen sollen, findet man nämlich diese Trichome an dem unter der alten Chitinschicht liegenden, schon ausgebildeten neuen, wohl entwickelt. Sie stehen da mit einer einzelligen drüse in Zusammenhang, die teils trichogen teils sekretorisch ist. Das Sekret dieser Drüsen sammelt sich zwischen der neuen und der alten Chitinschicht und sprengt letztere von der ersteren los. Die Drüsen sind hier somit als Haütungsdrüsen anzusehen. Sobald die Häutung stattgefunden ist, werden die Drüsenzellen rückgebildet und die Trichome gehen zu ohlen Exudattrichomen ohne Drüsenzellen über » (pag. 153).

Più oltre, comparando le formazioni tegumentali delle Termiti con quelle dei Blattidi, l'Holmgren afferma : « Die bei Periplaneta von Minchin und Mingazzini beschriebene zwei Hypodermisschichten, welche unterhalb der Dorsalplatten des Hinterleibes vorkommen, kommen auch bei den Termiten vor. Sie werden hier von der eigentlichen Hypodermis und der Drüsenschicht repräsentiert... In Allgemainen kann man sagen, dass keine prinzipielle Unterschiede im Bau des Integumentes bei

negli insetti, ma anzi affatto singolare. Del resto la Periplaneta ha molte altre cose speciali nella sua istologia » (pag. 470) (1).

Ma non si tratta semplicemente di una particolarità istologica. Come Berlese stesso nota, Willem (1899) dimostra nei Collemboli (fam. *Sminturidae*), a ridosso dello strato ipodermale, tra questo e la basale, uno strato di cellule molto maggiori, contenenti abbondanti depositi urici (urato neutro di sodio) e anche globuli di grasso, oltre il quale nella cavità viscerale trovasi un vero tessuto adiposo prossimale ai lati del tubo digerente. Philiptschenko veramente (1906) afferma che Willem ha erroneamente interpretato per membrana basilare la tunica propria del corpo adiposo deducendone, ciò che gli appare improbabile, una origine ectodermale di esso strato adiposo distale (2); ma in

---

den beiden Gruppen vorkommen, und somit bestätigt sich hier die Zusammenhörigkeit derselben, obschon nicht besonders deutlich » (pag. 154).

Altrove, parlando dei « die Exudatorgane der Neotenen » che stanno al lato dorsale dell'addome, sotto e tra le piastre tergali, nota che : « Als äussere Exudatorgane dienen eine sehr reiche menge von kleinsten, hohlen Trichome. Die Trichomen verbinden sich mittelst langen feinen Porenkänale mit grossen, einzelligen Drüsen, welche unterhalb der Cuticula gelegen sind. Diese Drüsenzellen sind aus der Hypodermisschicht verdrängt worden und bilden eine wahre Drüsenschicht. Unterhalb diesen Drüsen liegt die mächtig entfaltete Exudatgewebe » (pag. 195).

(1) Accenno qui, senza soffermarmi a discutere il suo valore, alla scoperta che ho fatto di un ipoderma ghiandolare sclerale pigmentifero, simile a quello dei miei neotenici come a quello di *Periplaneta*, nei neutri (operai e soldati) di *Mastotermes* (ved. tav. IV, fig. 51). Ho veduto anche macchioline nere, certo corrispondenti a ghiandole ipodermali pigmentifere, in vecchi soldati di *Calotermes*; ho veduto anche in Ninfe di prima forma di *R. lucifugus* differenziarsi un ipoderma ghiandolare sclerale. I miei studi in proposito sono tuttora in corso.

(2) Secondo Willem, « nelle regioni favorevoli, lo strato ipodermico si mostra, in *Sminthurus*, nettamente costituito da due specie di cellule, disposte in due strati. Le une immediatamente sotto alla superficie chitinosa, a citoplasma pigmentato, a rete cromatica molto fitta, sono le cellule chitinogene. Le altre, più interne, più voluminose, presentano un nucleo a reticolo più lasso; il loro corpo citoplasmico contiene, in numero e grandezza variabili, globuli grassosi e grandi vacuole occupate specialmente da concrezioni... In altre regioni, soprattutto alla faccia ventrale dell'addome, nei giovani individui si vedono gruppi di simili elementi, *sempre circondati dalla membrana basale dell'ipoderma*, sporgere nella cavità generale del corpo sotto forma di protuberanze più o meno voluminose, che possono d'altronde separarsi dal loro punto d'origine. Nelle « Podure lineari » questa disposizione si osserva più facilmente. In esse detti elementi costituiscono, oltre lo strato più o meno spesso che fodera l'ipoderma, dei pacchetti sferici o allungati, dei lembi frastagliati, distribuiti in tutta la cavità del corpo » (pag. 100, *227*).

Sicchè, stando alle osservazioni del Willem, non solo lo strato subipodermale ma tutto il corpo adiposo parrebbe avere origine ectodermica nei Collemboli, « ou même chez l'adulte les relations d'origine du corps adipeux avec l'hypoderme sont incontestables ».

A questa conclusione era già venuto, prima di Willem, Sommer per *Macrotoma* (*Tomocerus*): nella quale lo strato adiposo periferico, « tessuto reticolare », è strettamente unito all'ipoderma così che nessun limite netto può tracciarsi tra di essi; e la membrana basale compare non sotto l'ipoderma ma sotto il tessuto grasso così che questo viene a far parte del tegumento. Stessa disposizione rilevano Fernald (per *Anurida*) e Provazek, mentre Nassonow per *Lipura* (*Onychiurus*) afferma che la membrana basilare in questa forma nettamente separa l'ipoderma dal tessuto adiposo.

Philiptschenko riconosce che in tutti i Collemboli le cellule adipose stanno in rapporto immediato coll'ipoderma e, mentre in Acorutidi ed Entomobridi già nei giovanissimi esemplari costituiscono un sincizio, nei giovani Sminturidi presentano distinti limiti cellulari che, nello strato subipodermale alla faccia dorsale e ai lati dei segmenti addominali, permangono per tutta la vita del-

altro Collembolo (*Orchesella rufescens* della fam. *Entomobridae*) egli stesso trova speciali cellule sottoipodermali — « sulla origine tegumentaria delle quali non si può sollevare alcun dubbio » (pag. 297, *181*) — in gruppi costituenti placchette subipodermali monostratificate al lato dorsale dei segmenti addominali e toracali e anche nelle regioni laterali del meso e metatorace. Il protoplasma di queste cellule, piuttosto indifferente ai colori acidi d'anilina, prende invece i colori basici come le cellule-uovo ; il nucleo mostra evidente nello stato di riposo (perchè frequentemente si presenta in divisione) una rete cromatinica e un nucleolo. Negli individui molto giovani le cellule subipodermali sono assai poche e non disposte in strato ininterrotto ma a una certa distanza l'una dall'altra. Per processi cariocinetici questi elementi, coll'età, crescono di numero e giungono a formare placche subipodermali compatte. Per varie considerazioni Philiptschenko ritiene le cellule sottoipodermali della Orchesella elementi molto vicini agli enociti e aventi, rispetto agli enociti degli insetti superiori, caratteri di primitività, meno lontani insomma dagli elementi dai quali tanto esse cellule quanto gli enociti degli Pterigoti debbono essersi originati. Egli ancora rileva che gli enociti certamente si sviluppano in seno all'ectoderma. e solo più tardi si portano nel corpo adiposo. E che primitivamente gli enociti avessero carattere puramente integumentale lo mostra anche la circostanza che in alcuni Pterigoti, piuttosto bassi nella scala dell'organizzazione gli enociti sono, non sparsi tra il tessuto adiposo, ma ordinati in ininterrotto strato sotto l'ipoderma, tra questo e la basale, sicchè l'integumento appare bistratificato.

Una tale disposizione descrive Sussloff per *Mantis religiosa.*

Nei Fasmidi, secondo Sinety (pag. 139, *204*), « l'ipoderma è costituito, come negli altri Ortotteri, da due sorta di cellule: le une cellule ipodermali propriamente dette che formano la matrice chitinogena della cuticola; le altre enociti, cellule speciali a funzione probabilmente escretrice » (non le descrive, ma le figura [fig. 2, tav. I] come cellule grosse, a grosso nucleo ghiandolare, con nucleolo a rete cromatica bene evidente, a protoplasma ricco di inclusioni) (¹).

Nei Locustidi, sotto uno strato ipodermale chitinogeno unico composto di piccole cellule c'è la basale e, a ridosso di questa ma al di fuori, un grasso urico composto di cellule vacuolizzate, frammiste ad altre con aspetto di enociti (alcuno dei quali spesso appare tuttavia compreso nell'ipoderma). Ora, nota il Berlese, « se si considera che il Verson per le cellule ghiandolari epigastriche (²), come egli le chiama, rilevò sicuramente

---

dell'animale (altrove, in progresso di età, vanno perdendosi). « Man wird daher mit viel grösserem Recht annehmen können, dass bei den Collembolen eine Membrana basilaris vollständig fehlt, wobei das Integument nur aus Cuticula und Matrix besteht..... Viel wahrscheinlicher ist es, dass der Fettkörper bei den Collembolen, wie anch bei den übrigen Arthropoden, ein Organ mesodermalen Ursprungs darstellt » (pag. 276, *181*).

(¹) Ora gli enociti sono, come gli autori in genere ritengono, organi di depurazione plasmatica e corrispondono quindi, anche fisiologicamente, alle cellule escretrici del *Termes*: solo che abbandonano i tegumenti prima di iniziare la loro attività escretrice.

A questo proposito è da ricordare che Hollande, in base a sue ricerche istologiche e microchimiche nega che gli enociti abbiano funzione escretrice ed attribuisce loro speciale funzione di accumulatori di cera, *cerodeciti* (*108*).

(²) « Non si differenziano se non nel periodo ninfale... Si mostrano assai rade dapprincipio, ma si moltiplicano poi copiosamente per via amitotica... e formano, così, estese piastre cellulari onde l'inte-

una origine dall'ipoderma e dentro alla basale e che solo di poi esse emigrano fuori di questa, per allogarsi nella cavità viscerale, si dovrebbe ammettere, per tutti gli insetti, uno speciale tessuto adiposo di origine più o meno sollecita, e forse non sempre presente. Esso dovrebbe sorgere dall'ipoderma, essendo quindi di origine ectodermale e, dapprima contenuto al di dentro della basale, tra questa e l'ipoderma, ne fuoriesce di poi nei Pterigoti, dagli Ortotteri in su, per formare uno strato a sè » ; avrebbe in ogni modo « funzioni eminentemente uriche, specialmente negli insetti sprovvisti di tubi malpighiani (Collemboli, *Iapyx*) o in cui questi non fungono (alcune larve metaboliche) » [1] o in cui, aggiungo io, sono del tutto insufficienti a sgombrare il corpo dell'enorme quantità di prodotti catabolici che un lungo ed intenso esercizio d'attività riproduttoria vi accumula (neotenici dei Termiti).

---

gumento di certi segmenti addominali e talvolta anche toracali (ma soprattutto alle superfici ventrali del 3°, 4°, e 5° segmento addominale) rimane internamente foderato. Queste ghiandole cellulari essudano, di tratto in tratto, alla superficie loro, secrezioni palesi; ma il loro nucleo serba sempre contorno tondeggiante senza escrescenze dendritiche » (Verson, pag. 159, *223*).

Formazioni equlivaenti a queste ghiandole postlarvali, scoperte nel 1892 dal Verson nel *Bombyx mori* (*221*), sembrano essere le cellule subipodermali descritte dal Karawaiew (1898) nelle sue ricerche sullo sviluppo postembrionale del *Lasius flavus* (*128*) e gli enociti imaginali studiati (*131*) nell'ape dal Koschevnikoff (1900), come pure quelle trovate in Orchesella da Philiptschenko.

Secondo Berlese, « nei Ditteri Ciclorafi ed anche negli Ortorafi più alti, come nei Pupipari, ad un dato momento del periodo ninfale (verso la fine) compaiono elementi con uno o due nuclei, rotondeggianti od ovali, con citoplasma denso e molto tingibile, e che dànno origine, dapprima moltiplicandosi gagliardamente, di poi ingrossando e vacuolizzandosi, al tessuto adiposo imaginale » (p. 800). Berlese ritenne (1901) questo tessuto derivato dai nuclei dei muscoli disfattisi nella larva; ma poi, impressionato dalla corrispondenza di questi elementi cellulari ninfali colle « cellule glandulari di origine postlarvale » trovate da Verson in *Bombyx* e del tessuto adiposo imaginale dei Muscidi col tessuto adiposo distale degli Olometaboli e di questo cogli enociti, dubita che non sorga piuttosto dall'ipoderma, da enociti modificati.

Questa ipotesi a me sembra, tutto considerato, probabile.

Nè mi pare costituiscano una prova in contrario le osservazioni, dubbiose anch'esse, del Pérez (1910). Secondo Pérez l'origine del tessuto adiposo imaginale non sarebbe nè dal nucleo muscolare larvale (Berlese), nè dal nucleo di leucocita (Henneguy) delle 'sfere a granuli' e nemmeno proprio, come dice Supino, da cellule mesenchimatose sparse e migratrici, sibbene « da cellule del tipo embrionale, relativamente fisse e che si spostano passo passo guadagnando terreno man mano che proliferano. Queste cellule fan parte, come i mioblasti imaginali, del mesoderma dei dischi imaginali ipodermici » (pag. 234, *173*). « Inoltre tra queste cellule se ne può precocemente distinguere qualcuna, più arrotondata, a protoplasma un po' più abbondante. Io considero queste ultime come destinate a enociti imaginali, mentre le altre più piccole diverranno le cellule adipose propriamente dette. Dato che gli embriologi attribuiscono origine ectodermica agli enociti larvali degli insetti, io mi sono domandato se tra queste cellule imaginali sottoipodermiche qualcuna non sarebbe emigrata dall'ipoderma imaginale a costituire gli enociti imaginali. Ma non ho finora trovato nei miei preparati figure sufficientemente nette per permettermi di concludere in questo senso. Un'altra ipotesi difatti, pure plausibile, è che l'emigrazione, a partire dall'ipoderma, si produca assai prima, durante l'istogenesi embrionale; e che nel mesenchima sottoipodermico sieno confuse, sotto un medesimo aspetto iniziale, delle cellule ectodermiche, futuri enociti, e delle cellule mesodermiche, future cellule grasse » (pag. 236).

[1] « Tale strato », continua Berlese, « è da richiamarsi probabilmente a quello distale.... Potrebbe essere, nonostante la recisa affermazione dell'Heymons, che il grasso distale avesse origine dall'ectoderma con una forma intermediaria di elementi cellulari da assomigliarsi agli enociti. Questa quistione è sempre *sub judice* » (pag. 801).

Chiarita così, o almeno ricondotta a un problema generale di morfologia entomologica, la struttura dei tegumenti dei reali neotenici, vediamo di interpretare la cosa dal punto di vista fisiologico.

Com'è ben noto, i tegumenti rappresentano, in tutta la serie animale, una delle vie principali d'escrezione e immobilizzazione, di depurazione dal sangue insomma, dei materiali escretizi. Particolarmente cospicua tale funzione è negli insetti, tanto che molti riguardano la muta un processo di escrezione originale, per mezzo del quale l'organismo si sbarazza dei prodotti catabolici accumulati.

Secondo Berlese, « in generale può essere detto che tutti i pigmenti risultano di composizioni azotate e vanno considerati per prodotti escretivi derivati da varii organi e che raggiungono il tegumento e s'installano in qualcuno dei suoi strati ».

Anche i colori intimi della chitina, sulla scala dal giallo al giallo ocra–rossastro al rosso (terra di Siena bruciata), al marrone, al bruno, e finalmente al nero, sembrano dipendere — abbiamo già avuto occasione di accennarlo — da prodotti escretivi disciolti (come press'a poco l'ossido di cobalto nel vetro) nella massa segregata dalla cellule chitinogene.

« Quanto ai pigmenti, i quali vengono depositati sotto forma di granulazioni più o meno piccole e di varia tinta a ridosso dello strato cuticolare, di guisa che mostrano il loro colore a cagione della trasparenza della cuticola, bisogna notare che, se siffatte granulazioni si trovano talora sotto lo strato epidermoidale, tra questo e il derma, oppure sotto il derma nell'ipodermide, non si rinvengono però mai nel derma. Inoltre essi sono certamente di natura urica e se ne può trovar traccia anche nei liquidi escretivi » [1] (pag. 484).

Eisig specialmente ha insistito su questo concetto sviluppandolo e appoggiandolo ad osservazioni originali sui rapporti tra sostanze escretive e pigmenti e formazioni tegumentali scheletriche in un gruppo di anellidi, le Capitelle [2].

Io, studiando (1922, *127*) lo sviluppo larvale del baco da seta (*Bombyx mori*), ho dimostrato, per nuova via, l'importanza capitale della muta come processo di detersione e di ringiovanimento. Dalla muta dipende l'accrescimento dell'organismo, non perchè la muta fornisce al corpo una nuova superficie cuticolare più ampia e più disten-

[1] Hopkins (1894) trovò nei liquidi escreti dai Pieridi all'atto dello sfarfallamento le stesse sostanze (acido urico e lepidotico) che determinano le pigmentazioni cutanee.

[2] Eisig, partendo dal fatto che in *Capitella* un escreto renale viene deposto come pigmento nel tegumento, rilevata la coincidenza della presenza di un più poderoso dermascheletro con il difetto di organi renali nefridiali, ammette che il significato originario dell'accumulo integumentale di pigmenti escretizi sia nella loro elevata resistenza meccanica e chimica; considera le formazioni tegumentali degli Artropodi e dei Molluschi come derivate da sostanze escretive originariamente deposte nella pelle; nota la presenza di guanina nel tegumento di pesci, anfibi e rettili, e riguarda le piastre cornee, i peli, gli aculei e le penne come organi secondariamente sviluppatisi a portare le sostanze che primitivamente rimanevano incorporate diffuse nel tegumento. La muta degli Artropodi è considerata dall'Eisig un processo di eliminazione di sostanze escretive: « Sind nämlich die Hautpanzer-Elemente Produkte einer das ganze Leben hindurch andauernden excretorischen Thätigkeit, so versteht man, dass sich die Häutung auch noch beendeten Wachsthume periodisch wiederholen muss, indem ja sonst jene Panzer durch Zufuhr immer neuer Excrete immer mehr an Dicke wachsen und schliesslich für ihre Träger fatal werden müssten » (pag. 783, *60*).

sibile, ma essenzialmente perchè deterge l'organismo dai prodotti catabolici che vanno accumulandovisi nel corso dei processi vitali; e così lo ringiovanisce, rendendogli possibile un nuovo sbalzo anabolico (¹).

(¹) Ecco le conclusioni del mio studio sulla curva di sviluppo del baco da seta:

«Il baco da seta, nella sua vita larvale, presenta un accrescimento straordinariamente imponente e rapido: in un mese o poco più di vita raggiunge un peso quasi 900 volte quello della nascita.

Come e perchè?

Il segreto del baco è quello stesso di tutti gl'insetti olometaboli. Il baco, in tutta la sua vita larvale, non fa un passo avanti sulla via dell'evoluzione strutturale a farfalla: non fa che crescere mangiando senza posa, e accumulando così un ricco capitale plastico ed energetico (che spenderà poi senza risparmio nello stadio di vita ninfale, nel travaglio della metamorfosi). Ma una così intensa attività di ricambio materiale fa invecchiare rapidamente l'organismo; se non che di tanto in tanto, con processi di muta, il baco risorge a giovinezza novella.

Si direbbe, anzi, che da ogni muta il baco esce con vigore moltiplicato e sempre più forte capacità di accrescimento.

«L'osservazione empirica, affermata da tutti i sericultori, dimostra con evidenza, benchè sotto una forma vaga e indeterminata, che nelle tre prime età il baco cresce lentamente, che nella quarta l'accrescimento diviene più rapido, e infine che nella quinta, l'ultima, l'accrescimento diviene assai rapido e raggiunge un massimo elevatissimo comparativamente all'età precedente».

È quel che ci dicono le curve di accrescimento assoluto (ved. tav. I; figg. 1, 2, 3, 4).

Ma un'analisi, un po' meno superficiale, dei fenomeni ci rivela che in realtà le cose procedono del tutto alla rovescia. Col progredire delle età diviene, sì, sempre più imponente, considerato nel suo valore assoluto, l'aumento di peso; ma in realtà la capacità e la velocità d'accrescimento, massime nella prima età, traverso le età successive van degradando fino a scendere, nella quinta, ad un valore minimo che è $1/8$ o meno della capacità e velocità d'accrescimento iniziali. Se nella curva d'accrescimento assoluto l'innalzarsi dal livello dell'ascissa è lentissimo nelle due prime età, si accentua alquanto nella terza, assai più nella quarta, per raggiungere infine rapidamente nella quinta un'altezza colossale che tocca l'acme quando il baco è maturo; nella curva di accrescimento relativo invece, o dei quozienti di accrescimento, l'innalzarsi dal livello dell'ascissa, tanto forte nella prima età, sminuisce bruscamente nella seconda e sèguita nelle successive età a diminuire (ved. tav. II; figg. 1, 2, 3, 4). Lo stesso fatto, più chiaramente ancora, esprimono le rappresentazioni grafiche dell'accrescimento assoluto e relativo con aree proporzionali, rispettivamente, agli indici di accrescimento assoluto (ved. tav. III; figg. 1, 2, 3, 4) e ai quozienti di accrescimento (ved. tav. IV; figg. 1, 2, 3, 4).

Il diagramma della velocità d'accrescimento ci mostra pure nettissimamente un rallentamento progressivo traverso le età (ved. tav. V; figg. 1, 2, 3, 4).

Evidentemente la giovinezza novella, cui risorge il baco di tratto in tratto colla muta, è pur sempre un ringiovanimento relativo; e la vera giovinezza del baco è sempre la sua prima età. Certo però che è per il processo periodico delle mute se il baco raggiunge lo sviluppo che raggiunge. Che cosa fa la muta? Il meno che faccia è fornire al corpo una nuova superficie cuticolare più ampia e più distensibile.

La muta rinnova l'apparato digerente; la muta sbarazza l'organismo dei prodotti catabolici che vanno man mano accumulandovisi, scorie e ceneri dei processi di assimilazione e dissimilazione, e che, come polvere che lenta ma continua s'infiltri tra gli ingranaggi d'un orologio, vanno progressivamente rallentando la marcia anabolica dell'organismo stesso: la muta rinnova e sbarazza e rende l'organismo capace di un nuovo sbalzo anabolico.

L'importanza che il processo della muta ha nello sviluppo del baco è messa in chiara luce dal confronto dei bachi ordinarii a 4 mute coi Treotti o bachi a 3 mute.

Nei bachi a 4 mute la capacità d'accrescimento dalla prima alla seconda età s'abbassa bru-

Del resto la funzione escretiva della muta è provata dal fatto che col processo esuviale vengono eliminati prodotti urici, spesso a mezzo di speciali ghiandole, le ghiandole

---

scamente, si riduce d'un colpo a metà o meno, e nelle età successive tende ancora, più o meno sensibilmente, a diminuire.

Anche per la velocità d'accrescimento, che pure discende con più regolare progressione, la caduta tra la prima e la seconda età è maggiore che nelle successive tra loro (se la causa essenziale della progressiva discesa fosse la tendenza all'autolimitazione volumetrica e ponderale o magari l'impoverimento della foglia, questa discesa dovrebbe procedere di pari passo coll'avanzare dell'accrescimento o della stagione; presentare, ad es., abbassamento più forte tra terza e quarta età che non tra prima e seconda: discesa dunque progressivamente accelerata).

Ed è ben naturale. Nella prima età l'organismo era giovane, nella seconda è ringiovanito; nelle successive età, capacità e velocità d'accrescimento subiscono poco abbassamento ulteriore, perchè la muta è presso a poco sufficiente a reintegrare il miglioramento. L'organismo si purga colla muta; ma, se la muta basta a ripulire ogni volta l'organismo così da rendergli possibile un nuovo sbalzo anabolico, non può mai però raggiungere l'effetto di restituirlo nelle condizioni di purezza, di verginità materiale ed energetica della prima età.

Questo comportamento è comune a tutti i bachi a 4 mute, annuali o polivoltini che siano. Al voltinismo non sono inerenti modificazioni profonde del tipo metabolico postembrionale; e forse nelle razze a 4 mute la differenza di peso finale, a pieno sviluppo, può quasi sempre riportarsi a differenza di peso iniziale (alla nascita).

Nel bianco giapponese bivoltino Nipponnishiki, capacità e velocità d'accrescimento nella prima età sono minori che non nei Gialli indigeni (annuali); ma, traverso le età successive, vanno subendo diminuzioni meno forti che non nei Gialli (rispetto ai quali si eleva il quoziente d'accrescimento delle età e se ne accorcia anche la durata): tanto è vero che, in meno di 24 giorni (di vita attiva), i Nipponnishiki raggiungono un peso 8420 volte circa il peso di nascita, come i Gialli indigeni in 27 giorni.

Ma i Treotti non si comportano così.

I Treotti hanno un peso, alla nascita, superiore al peso dei Nipponnishiki e uguale durata (attiva) di sviluppo; ed hanno anche, nella prima età, capacità e velocità d'accrescimento notevolmente superiori. Eppure il peso che raggiungono, a sviluppo completo, è notevolmente inferiore a quello del Nipponnishiki; è solo 5000 volte, invece che 8420 volte, il peso di nascita (cioè appena i $^{59}/_{100}$ del peso che dovrebbero raggiungere).

Come mai? Perchè?

Proprio perchè sono Treotti; perchè fanno 3 mute invece di 4; perchè, diciamo così, fanno l'economia d'una muta: economia malintesa!

Nei Treotti la capacità d'accrescimento, invece di calare bruscamente tra prima e seconda età per poi restare approssimativamente costante, va con regolare progressione degradando. E la velocità d'accrescimento presenta, traverso le età, cadute sempre più forti (tra terza e quarta maggiore che non tra seconda e terza, maggiore a sua volta che non tra prima e seconda), così che, da notevolmente superiore che era rispetto a quella dei bachi a quattro mute, finisce col diventare alquanto inferiore. Se nei Treotti la capacità d'accrescimento continua ad abbassarsi fortemente di età in età, e la discesa della velocità d'accrescimento progressivamente si accelera, così che la muta sembra divenire sempre più insufficiente a reintegrare il ringiovanimento dell'organismo, gli è forse perchè i Treotti, per risparmiarne una, ricorrono, diciamo così, troppo tardi alle mute.

Forse nei bachi a 4 mute la muta interviene a troncare l'accrescimento, proprio quando comincerebbe a rallentarsi; nei Treotti invece l'accrescimento continua rallentato per un certo tempo e più tardiva interviene la muta. È così che i Treotti riescono a fare, in 33 giorni di vita larvale, solo 3 invece di 4 mute: ma l'economia è malintesa, ripeto, e dimezza il profitto del bilancio vitale » (pp. 110-115, *127*).

Bounoure, in un lavoro recente (1919, *20*), e del quale solo ultimamente ho preso conoscenza, su *Alimenti, Chitina e tubo digestivo nei Coleotteri*), pregevole lavoro ispirato ai concetti fecondi

della muta (scoperte primamente dal Verson [1890, *221*] in Bombyx mori e poi ritrovate, più piccole, in molti altri insetti).

---

della Morfologia dinamica e ravvivato da una sete tutta giovanile di sintesi, considera la chitina « comme un déchet accumulé par le fonctionnement même de la vie chez l'Insecte adulte ». Porta a conferma di questo punto di vista il fatto che, per es. nei Ditisci « la quantità di chitina, molto esigua al momento della schiusura imaginale, s'accresce rapidamente nei primi tempi della vita adulta e finisce per raggiungere una proporzione elevata nell'animale arrivato a età avanzata ». Sicchè « l'insetto non cessa, durante tutta la sua vita, di segregare chitina; questa produzione ininterrotta conduce a un incrostamento del corpo sempre più accentuato fino alla senescenza dell'animale » (pag. 105).

È strano che Bounoure, pure essendo anche lui, scolaro di Houssay, convinto del concetto che i fenomeni di autointossicazione sono i più attivi fattori che limitino la crescita dell'essere vivo, pur considerando la chitina come un prodotto di rifiuto, uno dei termini ultimi della disintegrazione degli albuminoidi dell'insetto, non arrivi fino a concepire la muta come un processo d'escrezione che, depurando l'organismo, permette l'ulteriore sbalzo anabolico. Si limita a rifiutare l'interpretazione che si dà comunemente della muta come destinata a permettere meccanicamente la crescita larvale. « In base a misure minuziose eseguite su larve [di Ditisci] al momento stesso delle mute, sono stato condotto a rifiutare l'interpretazione che si suol dare di questo fenomeno, e ho dimostrato che invocando, per spiegarlo, l'accrescimento larvale, ci si mantiene su una concezione finalista inammissibile e si trascura l'esame preciso dei fatti in questione. La reiezione della cuticola è il risultato d'un meccanismo isto-fisiologico e il fatto che si verifica contemporaneamente su tutte le superfici chitinogene del corpo lo dimostra legato a uno stadio fisiologico speciale dell'organismo, vera crisi, di cui la natura non si chiarirà, io credo, che collo studio chimico del mezzo interno al momento delle mute ».

Ma per me è già chiara la natura di questo stadio fisiologico speciale; ed io spero che Bounoure non vorrà trovare eccessivo finalismo nel mio punto di vista che del resto considera la muta appunto come uua necessità chimico-fisiologica. Quello che è tutto da fare è stabilire, nel modo più preciso possibile, come questa crisi fisiologica determini i fenomeni istologici della muta: studio per il quale, già da qualche anno, nell'Istituto bacologico di Portici, vado raccogliendo elementi e materiali.

Gli è che a Bounoure lo studio della curva di sviluppo non ha dato gli elementi che a me hanno permesso di stabilire, con tutto fondamento, la natura della muta come di processo che attuandosi elimina (o meglio allontana) le cause stesse che l'hanno determinato. Bounoure trova che l'accrescimento ponderale « lentissimo dapprima fino alla prima muta », diventa più rapido nella seconda e terza età; però alla fine della terza settimana dalla nascita comincia a rallentarsi (onde un punto d'inflessione nella curva che sarebbe dunque del tipo generale esprimente l'autointossicazione).

Ma il rallentamento è debolissimo, e si può dire ohe la larva non cessi d'aumentare di peso finchè ha quasi raggiunte le sue massime dimensioni (pag. 82).

Ora in realtà, se studiamo i dati raccolti da Bounoure, ci accorgiamo che, anche per la larva del Ditisco, la capacità d'accrescimento non aumenta, ma piuttosto decresce di età in età (dalla prima, alla seconda, alla terza: il Ditisco fa, sempre, solo due mute larvali). Calcolando in base ai dati di Bounoure, i quozienti d'accrescimento, che esprimono l'accrescimento relativo, trovo per la prima età: 3,3; per la seconda: 2,9; per al terza: 2,5. Certo però non è grande l'abbassamento della capacità d'accrescimento dalla prima alla seconda età, al contrario di quanto si verifica nel baco da seta e, probabilmente, in molti, almeno dei lepidotteri (nè la velocità d'accrescimento sembra subire, tra prima e seconda muta diminuzione più notevole, giacchè, secondo Bounoure, la prima muta del Ditisco ha luogo tra 7° e 10° giorno; la seconda una settimana dopo, tra 14° e 17°).

Se dunque è comune a tutti gli insetti, nelle sue linee generali, il tipo di sviluppo da me tracciato per il baco da seta, ci sono però differenze notevoli nei varî gruppi d'insetti. E queste differenze non debbono essere tanto in rapporto agli adattamenti biologici e al regime alimentare,

« In conclusione », dice Berlese, « si può ritenere che pigmenti di natura urica, disciolti nella massa chitinea o meno, determinino la colorazione dei tegumenti, comunque variata per leggere differenze chimiche dei pigmenti stessi e che tali colori dipendano da sostanze escretive dovute ad organi varii, mentre i prodotti sono accumulati nell'ipodermide dagli amebociti » (pag. 486).

Ma quanto ad esempî bene studiati di depositi urici (uso il termine urici nel senso largo di prodotti escretizi urinarî) nei tegumenti, essi non abbondano, giacchè, lasciando da parte i pigmenti melanotici intimi della chitina e i pigmenti uratici e d'altra natura delle squame di Lepidotteri [1], non abbiamo, si può dire, se non le osservazioni del Fabre su al-

---

quanto alle differenze fondamentali delle strutture organiche. E del piano evolutivo: ricordiamo che i Coleotteri sono le forme olometaboliche primitive (comparse nel Triassico dopo il lungo regno paleozoico degli emimetaboli), che presentano metamorfosi interne assai poco accentuate (la maggior parte dei tessuti passa dalla larva all'imagine dopo aver subìto fenomeni di sdifferenziazione [Poyarkoff, *187*], mentre negli Olometaboli superiori la più gran parte dei tessuti larvali è distrutta e la maggior parte dei tessuti imaginali si forma *de novo*) e che escono dall'uovo in uno stadio (larva oligopoda di Berlese) assai meno precoce di quello degli altri Olometaboli [*10* e pag. 278, vol. II, *11*] (onde parrebbe plausibile ammettere che passino entro l'uovo il periodo a capacità d'accrescimento più intensa, periodo che negli altri Olometaboli fa parte della vita larvale).

Ripetendo quanto dissi nel mio lavoro sul baco da seta « *mi permetto di raccomandare vivamente a quelli dei miei lettori che si stien occupando della biologia di qualche insetto, di voler completare le loro ricerche colla determinazione della curva di sviluppo..... Ho fede che sorgerebbe un nuovo capitolo interessante nella Fisiologia comparata degli Insetti* (pag. 110).

Noterò anche che i risultati delle mie ricerche sul baco sono stati confermati brillantemente dalle ricerche del Grandi (*87*, *88*), che, studiando, dal punto di vista morfologico, l'evoluzione postembrionale delle stesse razze di *Bombyx mory*, ha trovato che lo sviluppo dei caratteri morfologici segue, nelle linee generali, lo stesso andamento da me determinato per i caratteri fisiologici.

Sarebbe molto desiderabile che un morfologo intraprendesse lo studio dell'evoluzione postembrionale di un coleottero per vedere se anche in questo caso, come è verosimile, si abbia corrispondenza col tipo metabolico.

Insomma è tutto un nuovo orizzonte di ricerche che si apre dinanzi ai nostri occhi.

[1] Secondo le belle ricerche dell'Hopkins « le squamme delle Pieridi bianche contengono acido urico e alla presenza di tale sostanza è dovuto il colore bianco opaco latteo caratteristico delle ali di questi insetti. Le squamme delle farfalle gialle dello stesso gruppo sono pigmentate da una sostanza molto vicina all'acido urico, pigmento giallo con tutta probabilità identico al prodotto che si ottiene riscaldando con acqua, sotto pressione, l'acido urico. Questa sostanza gialla [che Hopkins chiama acido lepidotico e che, bollita con H_2SO_4 diluito, si trasforma in rosso purpureo (lepidoporfirina) che si trova in piccolissima quantità, una sola piccola macchia, in alcune squamme delle ali] si ritrova in tutti i generi di Pieridi e (insieme al pigmento rosso che gli è strettamente affine) costituisce, probabilmente, il solo pigmento colorato presente nelle squamme; gli effetti cromatici possono però essere modificati da fenomeni d'interferenza o da pigmenti presenti non nella squamma, ma tra le due lamelle chitinose dell'ala. I pigmenti suddetti pare non si ritrovino in altri gruppi di farfalle sì che, nei casi di mimetismo d'una Pieride con insetti d'altro gruppo, i pigmenti rispettivi possono facilmente distinguersi per mezzo chimico. Il fatto che il pigmento giallo delle ali si ritrova spesso (associato all'acido urico) nel materiale scaricato pel retto, mostra che nelle Pieridi colorate, come nelle bianche, è un normale prodotto escretivo che serve per ornamento » (pag. 682, *115*).

È notevole che la reazione della muresside o della lepidoporfirina non si ottiene dall'embrione

cuni Bruchi [1] ed Ortotteri. Questi ultimi sopratutto ci interessano per la loro affinità coi nostri Termiti. Negli Efippigeri la faccia inferiore dell'addome e i bordi posteriori de' tergiti addominali sono d'una tinta gialla cremosa simile a quella che l'acido urico conferisce al corpo adiposo degli stessi insetti. E difatti, isolando un lembo di tegumento ventrale, vedesi lo strato di pigmento giallo che lo riveste dissolversi con effervescenza nell'acido nitrico, lasciando a nudo la chitina trasparente. « Il y a enfin formation de murexide en quantité suffisante et au de là pour se convaincre que ce pigment est encore de l'acide urique. Un demi-centimètre carré de tégument suffit pour teindre en rouge tout l'intérieur de ma capsule. Donc l'animal s'enlumine de jaune avec ses e crétions urinaires déversées sous le derme par la trame adipeuse. Le *Decticus albifrons* adulte va nous apprendre la même chose... Les plaques dorsales de l'abdomen sont tapissées, à l'interieur, d'une couche de pigment blanc, irrégulièrement semé. Les plaques ventrales sont revêtues d'un pigments jaune, plus dense, plus abondant. L'une et l'autre de ces pigments donnent la réaction caractéristique de l'acide urique. Donc, comme l'Ephippigère

---

di ali fino a poco prima dello sfarfallamento, cioè non molto prima che simili prodotti escretivi si accumulino nel retto (pag. 681).

Quanto all'origine e al modo di deposizione dei pigmenti nella cuticola, l'Urech (1893), ammesso che i pigmenti delle squame di Lepidotteri appartengono al gruppo dell'acido urico e gruppi affini, includenti le basi nucleari (xantina, ipoxantina, adenina, guanina, cioè prodotti di decomposizione spontanea della nucleina assieme coll'albumina e all'acido fosforico) e che queste individualmente sono incolori ma per azione reciproca dànno prodotti colorati in verde, violetto od altrimenti, sospetta che possano derivare da leucociti i quali poi cedano il loro pigmento alle cellule ipodermiche » (pag. 486, *217*).

E non solo i pigmenti della serie purinica sono di natura escretiva, ma tutti probabilmente i pigmenti tegumentari. Anche per il pigmento rosso delle Vanesse (che, secondo M. von Linden, « se rapproche par son origine de la clorophylle, par ses reactions de la bilirubine et de l'urobiline, par sa fonction et sa constitution de l'hemoglobine) il paraît que les colorants des écailles du Papillon ont perdu la faculté de pourvoir à la respiration et qu'ils jouent, dépouillés de leur albumen et de leur sucre, le rôle d'un produit excretoire » (*142*).

[1] La ricca livrea del Bruco di *Sphinx euphorbiae* si compone d'un fondo di colore nero, dipendente dalla natura intima del derma, e d'un mosaico di pigmenti diversamente colorati (bianchi, gialli, rossi) seminati a larghi tratti in punti ove il derma è incoloro e trasparente. La natura di questi pigmenti è uratica e l'origine è, secondo il Fabre, dal tessuto adiposo distale che appare farcito e biancheggiante d'urati. « D'où ce résultat étrange: la plus belle de nos chénilles emprunte ces riches couleurs à l'acide urique : elle s'habille avec ses escretions urinaires » (pag. 380, *66*). (Stessi fenomeni in *Cucullia verbasci*).

All'avvicinarsi della ninfosi, la materia pigmentaria, riassorbita ed eliminata pei malpighiani, viene escreta per deiezioni.

Secondo Berlese, « in molte larve di Lepidotteri... la epidermide è inquinata di granuli di pigmento (urici) dei quali molti si vedono bene (essendo neri) più o meno sciolti nello spessore dell'epidermide. Ma il derma, segregato di poi, è fuori da questo contatto e quindi non contiene azoto nè si vede mai con granuli urici. Questi invece si tornano a trovare nelle cellule dell'ipoderma attorno ai nuclei, identici a quelli diffusi nell'epidermide » (pag. 465). (*Cnetocampa pityocampa*) Secondo Verson, « nel *Bombyx mori* gli elementi cellulari dell'ipoderma sono spesso infarciti di minutissimi granelli che, riflettendo vivamente i raggi luminosi, conferiscono alla pelle del baco il noto colore bianchiccio. Fu provato da Vlacovich che quei granellini sono costituiti da urati acidi ; e mancano affatto nel derma della crisalide e della farfalla quando diventa ufficio dei tubi malpighiani l'emetterne in copia maggiore. Merita di essere rilevato, ad ogni modo, ch'essi occorrono assai più radi nell'ipoderma di bachi appena usciti dalla muta » (*223*).

des vignes, le Dectique à front blanc doit sa livrée, au moins partiellement, à un pigmente formé d'excrétions urinaires » (pag. 375, *66*). Fabre è convinto che molti altri Ortotteri debbano presentare i medesimi fenomeni.

Ma Cuénot (1895), nei suoi studi fisiologici sugli Ortotteri, nega ai pigmenti tegumentarî di questi insetti una funzione escretrice. Secondo Cuénot, se si netta accuratamente la pelle da ogni frammento del corpo adiposo, così da non lasciare se non l'epidermide colorata e la chitina, ci si può convincere, trattandola con tutti i processi capaci di mettere l'acido urico in evidenza, che non ve ne è la menoma traccia in questi pigmenti. Fabre sarebbe stato ingannato dal fatto che la materia colorante della pelle (Mantidi, Locustidi, Acridi) è solubile nell'acido nitrico con forte effervescenza, come un urato; ma essa è completamente insolubile nell'acqua bollente e non se ne ottiene mai nè reazione della muresside nè cristalli d'acido urico (*50*).

D'altronde « les matières colorantes injectées dans le coelome ne se fixent jamais sur les pigments de l'epiderme; il n'y a donc aucune raison pour leur attribuer une signification excrétrice » ([1]).

Io per me inclino a credere che, sia pure non uratici, i pigmenti tegumentari degli Ortotteri siano proprio di natura escretiva. Ma, checchè ne sia, non v'ha il menomo dubbio che nei neotenici del *Termes* la sostanza pigmentaria dell'ipoderma non sia un vero prodotto escretizio; il che risulterà chiaramente dallo studio ulteriore degli altri e più tipici organi escretori ove ritroveremo l'identico prodotto.

Piuttosto, donde deriva all'ipoderma detto materiale?

In genere si sospetta dalle cellule migranti, e in qualche caso questa origine è stata anche dimostrata ([2]).

([1]) Eppure Cuénot per i Gasteropodi polmonati interpreta i pigmenti come prodotti d'escrezione, dei quali l'animale si sbarazza immobilizzandoli in qualche elemento cellulare; e viene indotto a questa opinione anche dal fatto che nelle iniezioni fisiologiche il bleu di metilene, che è certo un prodotto inutile all'animale (poichè in piccole quantità è escreto per le vie normali), può rimanere a pigmentarlo, sia da solo, sia fissandosi sui granuli pigmentari propri dell'epidermide. « Par suite, il y aurait, chez les animaux, deux classes de produits de désassimilation; les uns, non précipitables dans l'organisme (come la maggior parte delle sostanze colorate iniettate), sont absorbés par les organes excréteurs, qui les accumulent ou les expulsent au dehors; les autres (comme le bleu de méthylène) rencontrent en des points quelconques un milieu tel qu'ils se précipitent et forment des pigments, soit en restant identiques à eux-mêmes, soit en changeant de nature, pigments qui peuvent rester à demeure dans l'animal ou être lentement éliminés par l'intermédiaire des mues, des desquamations, etc. Les organes qui en renferment ne sont pas pour cela des organes d'excrétion, et peuvent continuer à remplir leurs fonctions normales » (pag. 704, *47*).

([2]) Souslov (1906), studiando col metodo delle iniezioni fisiologiche la fagocitosi nei Grilli, afferma che leucociti isolati, iniettati con inchiostro di China, penetrano nell'ipoderma stesso. « Il deposito d'inchiostro di china nell'ipoderma », egli scrive, « e l'incrostazione della chitina provano che i prodotti solidi del metabolismo vengono essi pure deposti dai leucociti nell'ipoderma e incrostano poi la stessa chitina per isparire gradualmente con essa al momento delle mute ». « Les obsérvations de Souslov », nota il Metalnikow, « confirment les idées d'Eisig et de Sharp ».

Secondo le ricerche del Souslov (*207*) in *Gryllus domestica*, dopo qualche giorno dall'iniezione, si trovano leucociti farciti di inchiostro di China nell'ipoderma e anche globuli d'inchiostro nella chitina.

Mentre l'accumulo d'inchiostro nell'ipoderma progressivamente aumenta, la milza se ne va scaricando (dopo due mesi ne è libera). Nei Locustidi e Mantidi non c'è una vera milza; e, se i

Ma io nulla ho veduto che mi autorizzi a una simile ipotesi. Dal plasma circolante, dunque, che abbondantemente bagna, specie nella ninfa di seconda forma e nei giovani reali, i tegumenti. Ma sotto quale forma? Certo liquida quanto allo stato fisico; ma chimicamente? Il materiale disciolto nel plasma viene elaborato dalle ghiandole ipodermiche? o semplicemente filtrato e concreto?

Non ho elementi diretti sufficienti per rispondere con sicurezza a questa domanda; ma ho ragioni per credere che i tegumenti estraggano dal plasma circolante il materiale escretizio già elaborato da altro organo escretore: le cellule pericardiali.

Cellule pericardiali.

Fu il primo Graber (1871-'73) a definire, come cellule pericardiali, speciali elementi cellulari situati sui muscoli aliformi del cuore e trattenuti da una fitta rete di fibre elastiche. Graber classificò queste cellule, insieme coi leucociti, enociti e cellule adipose, nel tessuto «emosteatico» dell'insetto e le ritenne sede dell'ematosi, dati i loro rapporti di posizione col vaso pulsante (*85*).

Wielowieski (1886) considera le cellule pericardiali come un tessuto sanguigno (*226*): Dogiel (1877) come cellule nervose apolari [1].

---

leucociti mostrano disposizione segmentale, è perchè stanno attorno alle cellule pericardiali. L'inchiostro iniettato, filtrando attraverso al tessuto pericardiale, viene fagocitato dai leucociti.

In *Locusta viridissima* i leucociti spesso formano colossali plasmodii nel mezzo dei quali stanno globuli di pigmento di color giallo-scuro. Questi plasmodii penetrano nell'ipodermide. di cui le cellule si distruggono, e vi subiscono degenerazione. Così la sostanza escreta va a mettersi direttamente sotto la chitina e viene eliminata con la muta. Inoltre vicino alla membrana basale stanno cellule di forma allungata che funzionano anche da fagociti e possono considerarsi resti del celotele.

Fenomeni molto simili a questi descritti dal Souslov per *Locusta* ho trovato io studiando il torace di grossa regina tropicale di Metatermitide.

Nel plasma circolante e addossati a lobuli adiposi, e nel loro interno talvolta, stanno cisti di materiali escretivi, di concrezioni. Queste in molti casi si presentano in evidente dissolvimento, sotto l'azione, si direbbe, delle numerose cellule migranti che attorniano le cisti e tra le quali alcuna mostra nettamente nell'interno, addossate al nucleo, vacuole con granuli escretizi. D'altra parte nei calici dell'ovidotto vedo numerose cisti ovali, piene di assai pallide sferule gialliccie. Mi propongo di studiare a fondo questi fenomeni, ma intanto provvisoriamente così me li rappresento: i materiali escretizi (provenienti dal metabolismo ovarico e forse anche da processi istolitici di organi imaginali, muscoli alari) vengono accumulati da cellule migranti speciali che, forse per fagocitosi, accumulano, nel luogo stesso di origine, materiali escretivi: se ne riempiono e, divenute tarde e pesanti, vengano per il plasma, arenandosi addosso o dentro alle isole adipose. Attorno a questi elementi, ormai degenerati e ridotti a cisti di materiali escretizi (in concrezioni gialle), si addossano giovani amebociti che, probabilmente dotati di forte potere uricolitico, provocano il dissolvimento delle concrezioni e della cisti, s'impadroniscono di gran parte dei materiali e, sotto forma di granuli solidi, ne riempiono il loro protoplasma; vagando, vanno a finire verso i tegumenti, ora arrestandosi sotto l'ipoderma, ora attraversandolo e sporgendo le concreziònule escretizie tra epidermide e derma.

[1] Opinione sulla quale insiste ancora nel 1906 e che Mollard (1908) sembra accettare: circa la natura dei movimenti ritmici del tubo cardiaco negli insetti, dice, «noi non possediamo, su questo soggetto, altri dati positivi se non quelli forniti da Dogiel» (*159*)!

Balbiani (*2*) e Cuénot (*46*) fecero di queste cellule elementi ematopoietici, formatori di globuli bianchi e dotati di potere fagocitario, che assumono ad esempio i granuli di carminio iniettati nella cavità viscerale dell' insetto.

Ma Kowalevsky (1886–'94) riconobbe che « ce sont les leucocytes qui absorbent les grains de carmin et, après les avoir dissous, les transmettent aux cellules péricardiales. Ainsi donc, les cellules pericardiales n'ont pas le pouvoir phagocytaire dont parle Cuénot ; pour ce qui est de leur propriété d'absorber les bactéries, les indications de Balbiani à ce sujet demandent... à être verifiées » (pag. 15, *134*).

Se s'inietta [1] carminio disciolto o carminato d'ammoniaca, allora sì che direttamente le cellule pericardiali l'assorbono ; e lo trattengono nel loro corpo cellulare, essendo sprovviste di condotto escretore. Ora « la rélegation à l'intérieur d'une cellule d'une substance impropre à l'organism, sous forme de globule compact, peut être considérée comme une sorte d'excrétion ou d'isolation; que la cellule rejette au dehors une substance impropre tant à sa nutrition qu'a la formation de ses tissues, ou qu'elle l'élimine de la circulation générale des sucs, en l'isolant ou plutôt en l'introduisant dans quelque portion inactive de son plasme, cela revient au même » (pag. 18).

Le cellule pericardiali costituiscono dunque un organo renale chiuso o rene d'accumulo, giacchè le sostanze estratte dal sangue rimangono dentro le cellule fin che queste muoiono o vengono distrutte per fagocitosi, nella metamorfosi (cellule dell'organo a ghirlanda dei Muscidi, cellule pericardiali posteriori più grosse).

Se s'inietta nel corpo dell'insetto un miscuglio d'indigo–carminio e di carminato d'ammoniaca, l'indigo viene escreto dai tubi malpighiani, come già vide Schindler (1878), e il carminato si deposita nelle cellule pericardiali. I tubi malpighiani dunque corrispondono ai canalicoli urinarii dei Vertebrati e dei Crostacei e all'organo di Boianus dei Molluschi, organi ad escrezione alcalina ; le cellule pericardiali corrispondono invece al glomerulo di Malpighi del rene dei Vertebrati, alla ghiandola pericardiale dei Molluschi, alla vescicola terminale del nefridio dei Crostacei, organi tutti a reazione acida (« je veux dire par là que les produits excrétés par ces cellules colorent en rouge le tournesol » [pag. 9]). « Je ne rechercherai pas s'il y a ici analogie morphologique, c'est-à-

[1] Prima di applicare il metodo delle iniezioni fisiologiche, che doveva aver poi tanta fortuna, Kowalevsky (1887) somministrava le sostanze coloranti per via intestinale, mescolandole al nutrimento. « Quando s'incominciano a nutrire larve piuttosto giovani (di Muscidi) con carne cui si mescoli polvere di Cocciniglie, si osserva, già al secondo giorno, che le tredici paia di grosse cellule che ricingono la parte posteriore del cuore prendono a colorarsi e divengono facilmente visibili anche all'esterno come due serie di piccoli punti rossi. Subito dopo si colorano nello stesso modo anche le masse cellulari nastriformi che ricingono la parte mediana del cuore. Dissezionando la larva, si trova che anche le cellule dei cordoni cellulari a ghirlanda si sono colorate in rosso » (*132*). Estese le ricerche a larve acquatiche, aggiungendo polvere di carminio nell'acqua, e vide che « in cellule pericardiali di larve di Corethra l'accumulo di sostanze coloranti, specie di vesuvina e bleu di metilene, è così forte che queste cellule, coloratesi assai intensamente, non possono più funzionare, divengono angolose, a contorni irregolari, e finalmente scompaiono » (pag. 42, *134*). Ma quando provò ad applicare la « Futterungsversuche » a bruchi di farfalle, non riuscì ad ottenere buoni risultati (evidentemente perchè la peritrofica impediva il passaggio del carminio nel sangue) e allora (1889) ricorse, trattandosi d'insetti grossi, all'iniezione delle sostanze coloranti direttamente nella cavità del corpo, con siringa di Pravat (pag. 43).

dire homologie; en effet, pour cela il est nécessaire de réunir un plus grand nombre de faits appartenant au domaine de l'embryologie, de l'anatomie et de la physiologie de ces organes » (pag. 12).

Riassumendo, secondo Kowalevsky le cellule pericardiali assorbono, accumulandole nel loro interno, diverse sostanze nocive circolanti nel sangue. Quando queste sostanze si accumulano in troppo grande quantità i fagociti distruggono e divorano le cellule pericardiali (1).

Cuénot (1895), nei suoi bei studi fisiologici sugli Ortotteri, descrive le cellule pericardiali, che tappezzano interamente i muscoli aliformi e le pareti del cuore e talvolta anche il setto pericardiale (Forficula), come grandi cellule, in genere binucleate, delle quali il protoplasma vacuolare contiene bolle giallastre o brunastre rappresentanti sicuramente il prodotto di disassimilazione ch'esse fabbricano. Queste cellule hanno una reazione nettamente acida (fanno volgere al rosso salmone il tornasole bleu) ed eliminano le sostanze coloranti della seconda categoria (carminato d'ammoniaca, tornasole bleu, fucsina acida, verde di metile, vesuvina) che si fissano generalmente sulle bolle giallastre.

« Bien que les cellules péricardiales soient absolument dépourvues de tout canal excréteur, il est impossible de les considérer comme un rein d'accumulation; en effet,

(1) In linea normale questo non avviene. Henneguy (pag. 167, *102*) in *Musca* ha visto passare immutate dalla larva all'adulto anche tutte le grosse cellule che circondano la regione posteriore dell'addome, mentre, secondo Kowalewsky, solo le sette paia anteriori, oltre le piccole cellule pericardiche della regione media del cuore, persisterebbero (e così pure in *Chironomus* e *Culex*): le altre verrebbero fagocitate e distrutte (*132*). Vaney per *Gastrophylus* ha trovato che solo raramente le cellule pericardiali vengono attaccate dai fagociti (*218*). La distruzione delle cellule pericardiali sembra dunque avvenire soltanto in condizioni anormali.

Un intervento normale dei fagociti è stato invece realmente dimostrato per le ghiandole pericardiche dei Lamellibranchi da Cuénot (*1900*). Le bolle rigettate dalle cellule piene di prodotti fabbricati cadono nella cavità del tubo ove vengono fagocitate da amebociti accorsi e che poi, ripassando nella cavità generale, si fissano per la maggior parte nel tessuto connettivo che s'ingombra sempre più man mano che l'animale invecchia (malgrado avvenga una emigrazione all'esterno, forse periodica, di fagociti, pieni d'inclusioni, per diapedesi traverso gli epitelii: processo d'eliminazione insufficiente, perchè troppo più tenue della produzione) (pp. 79-82, *48*).

Un comportamento analogo dimostrano le cellule escretrici del tessuto connettivo nei Gasteropodi. Specie nella Paludina, queste cellule si comportano fino a un certo punto come reni d'accumulo. Nei giovani individui, nota sempre il Cuénot, esse contengono un gran numero di vacuole a reazione acida, nelle quali si localizza esclusivamente il carminato o il tornasole delle iniezioni fisiologiche, mentre citoplasma e nucleo restano incolori; qualcuna di queste vacuole sembra avere un contenuto più o meno solido, generalmente colorato in giallo, bruno o verdastro, parzialmente cristallizzato in aghi o in tavole trasparenti; è probabilmente il prodotto d'eliminazione normale che si concreta e finisce per riempire la vacuola; sicchè questa diviene inattiva e più non può assorbire il carminato. A misura che l'animale avanza in età, il numero di queste vacuole solidificate aumenta gradualmente, sicchè il citoplasma, sempre più ingombro, più non contiene se non un piccolo numero di vacuole attive. La cellula escretrice cade allora in degenerazione; si frammenta, e i fagociti la fanno sparire e disseminano le sue concrezioni, più o meno digerite, per tutto il corpo dell'animale (un'iniezione abbondante di carminato può mettere l'animale ancor giovine in condizioni analoghe a quelle dei vecchi individui, provocando cioè la fagocitosi delle cellule escretrici connettivali caricatesi di concrezioni) (pag. 84, *48*).

elles ont toujours la même apparence et le même contenu, qu'on les examine chez de très jeunes individus ou chez les adultes. Les produits de désassimilation qu'elles fabriquent doivent donc être rejetés à mesure et repasser dans le sang, ainsi qu'il arrive pour les reins branchiaux des Crustacés Décapodes, qui sécrètent de l'acide carcinurique éliminé par le rein antennaire, et pour le foie des Vertébrés qui fabrique de l'urée éliminée par les tubes contournés du rein. Je pense que la porte de sortie des produits de désassimilation rejetés par les cellules péricardiales doit être les tubes de Malpighi ; mais il est bien difficile de le démontrer » (pag. 208, *50*) (¹).

Mercè dunque il metodo delle iniezioni fisiologiche, Kowalevsky e Cuénot avevano aggiunto le cellule pericardiali al novero degli organi escretori, benchè nulla di preciso sapessero di loro speciale funzione o di loro caratteristico prodotto escretizio (²).

Sul valore di questi metodi d'iniezione fisiologica per lo studio degli organi escretori Yves Delage (1902) fa osservazioni molto scettiche. Il carminato d'ammoniaca, il carminio d'indaco e le altre sostanze usate per queste esperienze non sono davvero, egli dice, prodotti dell'escrezione normale. E con qual diritto ammettiamo *a priori* che date cellule, solo perchè eliminano queste date sostanze estranee all'organismo, artificialmente introdottevi, elimineranno anche prodotti normali affatto diversi? « On est arrivés à un tel abuse que l'on considère aujourd'hui, sans autre vérification, comme organes excréteurs des parenchymes dépourvoues de canal excréteur et ne faisant pas partie d'une surface libre, qui fixent simplement les matières colorantes injectées sans les éliminer, en les comparant à un rein d'accumulation... À ce compte il faudrait dire que le système nerveux est excréteur parce qu'il fixe le bleu de méthylene! » (*53*).

Ma evidentemente il Delage esagera. Non di qualunque cellula che si colori in seguito ad iniezione, osserva il Bruntz (1904), diciamo ch'essa è escretrice. La diagnostichiamo tale « quando al microscopio constatiamo: 1) anzitutto, che ha conservato i caratteri d'una cellula ben vivente. (Quando il nucleo assume il colore, la cellula è già malata o morta e può esserlo anche quando solo il protoplasma si è colorato); 2) poi, che questa cellula presenta un aspetto ghiandolare...; 3) che il prodotto colorato, se liquido, è contenuto nelle vacuole, e, se solido, è fissato attorno a granulazioni, concrezioni, cristalli sparsi uniformemente nel citoplasma o, il più spesso, aggruppati in ammassi più o meno grossi nella cellula... Certo però che il metodo delle iniezioni fisiologiche non può dare

(¹) Kowalevsky, pur ritenendo le cellule pericardiali tipici reni d'accumulo, aveva intravisto una certa attrazione fisiologica dei T. M. verso le cellule pericardiali. Giacchè, trovando in Acrididi e Locustidi che il T. M. per l'apertura cardiocelomica entra nel cuore, vi scorre, poi esce da una apertura cardiopericardiale e fa nella camera pericardiale più pieghe fra le cellule pericardiali, cerca di spiegarsi questa sorta di attrazione dei T. M. verso le cellule pericardiali, pensando che nella maggior parte degli animali i reni a carminato e a indacocarminio sono riuniti in un solo organo, mentre negli Insetti queste due parti fisiologiche dei reni sono divise da un diaframma imperforato. Ne risulterebbe una certa attrazione fisiologica degli organi che condurrebbe alla penetrazione dei T. M. nella regione occupata dalla parte acida del rene d'eliminazione, cioè nella regione delle cellule pericardiali (*135*).

(²) Packard (1898), accettando le vedute di Cuénot, ammette che le cellule pericardiche « apparently secrete but do not waste produits wich are finally eliminated by the urinary tubes, the latter eliminating costantly waste » (*169*).

risultati degni di fede se non in mani perfettamente esperte» (*24*) [1]. Se noi teniamo, ribatte il Métalnikov (1908), per organi escretori le cellule pericardiali gli è perchè il carminato d'ammoniaca non colora le cellule viventi, non può penetrare traverso la membrana delle cellule ordinarie e solo le cellule degli organi escretori e le cellule pericardiali assorbono questo colore fissandolo nelle loro inclusioni [2].

Métalnikov conviene col Kowalevsky nel considerare le cellule pericardiali come reni d'accumulo simili alle cellule uriche del tessuto adiposo e nell'ammettere che, quando

[1] Nel suo lavoro del 1904 Bruntz, della scuola di Cuénot, studia, col metodo delle iniezioni fisiologiche, i processi d'escrezione nei varii gruppi d'Artropodi, soprattutto l'escrezione acida o dei « nefrociti a carminato ». Le sue conclusioni, per gl'insetti, sono:

« 1) Negli insetti il carminio d'ammoniaca s'elimina qualche volta per i sacculi dei reni labiali (Tisanuri). In tutti i gruppi si elimina per nefrociti. I nefrociti a carminato sono grosse cellule che presentano le dimensioni più varie (fino a 200 μ); ne possono esistere tre sorta in una stessa specie (larve di Muscidi).

2) I nefrociti sono generalmente disposti attorno al cuore nel seno sanguigno pericardico (nefrociti pericardiali). Possono essere attaccati sulle pareti del cuore qualche volta all'interno (Emitteri eterotteri), il più spesso all'esterno, come anche sui filamenti connettivi che lo sostengono, sui muscoli aliformi, sul setto pericardiale e anche su tutte queste parti contemporaneamente quando i nefrociti sono assai abbondanti (Coleotteri).

3) Esistono sempre dei nefrociti da ciascun lato del tubo dorsale, il più spesso nella regione addominale. S'estendono qualche volta nella regione toracica.

Le cellule escretrici possono essere grosse, poco numerose e isolate, oppure più piccole, abbondanti e assai fitte. Qualche volta attorno al cuore possono esistere le due sorta di cellule; in questo caso le prime sono disposte nella parte posteriore del corpo.

Generalmente i nefrociti s'estendono a ricoprire i muscoli aliformi, sia d'uno strato compatto, sia d'un fino reticolo, sia d'un reticolo grossolano formato di grossi tronchi. Questi tronchi possono estendersi attorno all'esofago per formargli un collare (certi Lepidotteri) e anche inviare numerose branche ramificate nel tessuto adiposo (*Sericaria*).

4) A lato dei nefrociti pericardiali, contrariamente alle affermazioni del Kowalevsky, le cellule a carminato possono essere sparse nel tessuto adiposo (nefrociti sparsi) o a formare un bordo al seno pericardico (Tisanuri) o in tutta la parte anteriore del corpo (*Atylotus*) o anche in tutto il corpo (larve d'Odonate).

5) Nelle larve di Muscidi le cellule del cordone ghiandolare delle ghiandole salivari sono escretrici ed eliminano il carminato » (pag. 354, *24*).

Da nuove ricerche sull'escrezione nei Tisanuri, sue e di Philiptschenko, Bruntz conclude (1908) che nei Tisanuri « i nefrociti si distribuiscono nel corpo secondo due tipi differenti:

A) Tipo Machilis: *I nefrociti presentano caratteri analoghi a quelli delle cellule adipose*; essi bordano lateralmente i lobi del tessuto connettivo nella regione del seno pericardiale.

B) Tipo Lepisma: I nefrociti presentano caratteri assai differenti da quelli delle cellule adipose; anch'essi sono principalmente localizzati nella regione del seno pericardiale dove stanno sospesi su fibre che li connettono al cuore e ai tegumenti dorsali » (*25*).

[2] « Ce fixage se fait graduellement. Au début les inclusions se colorent en rose, puis en rougeâtre et, enfin, au bout de 2-3 jours, elles prennent la couleur carmin. Ainsi, ces cellules sont, sans doute, pourvues d'inclusions jouant le rôle de condenseurs, comme l'a. décrit Gurvitch dans les cellules des canalicules urinaires des grenouilles » (pag. 574, *155*). Gurtvitch pensa che queste vacuole lipoidi (si colorano coll'acido osmico) costituiscano delle formazioni stabili, condensatrici di differenti prodotti escretori. Le sostanze svariate che si trovano nel mezzo ambiente si diffondono attraverso al protoplasma e vengono in contatto con le vacuole condensatrici. Allora si produce quel che ha luogo ordinariamente quando una sostanza viene a contatto con due diversi elementi: essa è fissata in maggior quantità dal solvente che meglio la discioglie (*96*).

in queste cellule s'è accumulata una quantità troppo grande di prodotti escretizi, esse cominciano a degenerare e divengono preda di fagociti. Di fronte a questo meccanismo complicato d'escrezione il Métalnikov si domanda se non sarebbe più semplice per i fagociti di eliminare direttamente dal sangue i prodotti escretizi, ma riflette che i fagociti non assumono se non i prodotti solidi, insolubili, mentre le cellule pericardiali sono capaci di assorbire e condensare, nelle loro inclusioni, i prodotti solubili dell'escrezione. « Elles servent, pour ainsi dire, d'intermédiaires aux phagocytes ».

Riconosce il Métalnikov che vi è un lato debole nella teoria delle cellule pericardiali, ed è che finora non si sa proprio nulla della natura chimica delle inclusioni contenute nel protoplasma delle cellule pericardiali. Ma non bisogna, egli dice, esagerare l'importanza dell'analisi chimica nello studio degli organi escretori, giacchè un gran numero di prodotti d'escrezione (tutte le tossine, ad es.) sono tuttora sconosciuti dal punto di vista chimico. Può darsi che organi, ove pure non si rinvengono i soliti prodotti d'escrezione (acido urico, urea ecc.) pure abbiano funzione di veri organi escretori eliminando dall'organismo prodotti tossici varii. Studiando la tubercolosi in Bruchi di *Galleria Mellonella*, egli osserva che i prodotti di decomposizione dei bacilli tubercolosi vengono finalmente assorbiti dalle cellule pericardiche. E ritiene perciò probabilissimo che « les cellules péricardiales des insectes jouent le rôle d'organes excréteurs spécifiques fixant et éliminant du sang différents toxines et virus » *(155)* [1].

Pure nel 1908 Cuénot, Gonet, e Bruntz, con ricerche chimiche sul cuore branchiale dei Cefalopodi, dimostrano la funzione escretrice delle cellule che eliminano il carminio ammoniacale delle iniezioni fisiologiche [2] e Bruntz, studiando l'escrezione nei Tisanuri, convalida le opinioni del Cuénot circa la funzione delle cellule pericardiali negli

[1] Ultimamente (1922) Hollande trova in *Stenobothrus* (Ortottero) infestati da miceti (formes-levures bourgeonnantes dans le sang: *Isaria*) le cellule pericardiali riempite da una o due grandi vacuole che hanno respinto alla periferia, occupata da un sottile strato di protoplasma, i nuclei. Evidentemente questi elementi « han dovuto secretare attivamente le loro sostanze diastasiche a fine di lottare sia contro le tossine, sia contro il grande apporto nel sangue di sostanze albuminoidi, messe in libertà dall'organismo malato a spese delle proprie cellule » *(112)*.

[2] « Le cellule acide dei cuori branchiali dei Cefalopodi, che eliminano elettivamente il carminio ammoniacale delle iniezioni fisiologiche, contengono normalmente pigmenti fosfatici, sali ammoniacali e corpi xantici »... « Les sels ammoniacaux et les corps xantiques sont sans aucun doute des produits d'excrétion, et les cellules des coeurs branchiaux sont donc bien des néphrocytes. Une fois de plus, l'analyse chimique s'accorde avec la méthode des iniections physiologiques, si précieuse pour révéler les organes excréteurs, quand elle est maniée avec la prudence et la critique qui conviennent »... « Ma, i cuori branchiali sono reni chiusi, senza canale escretore; nè i prodotti di rifiuto, che estraggono dal sangue, s'accumulano nelle loro cellule, giacchè queste hanno un contenuto che non varia d'aspetto coll'età del Polpo. A titolo d'ipotesi assai verosimile si può ammettere ch'esse versino i loro prodotti d'elaborazione nel sangue, donde sono estratti, per essere definitivamente eliminati, dai nefridi, reni sboccanti all'esterno e nei quali, difatti, si è trovato ipoxantina e una sostanza azotata indeterminata ». Caso dunque analogo a quello dei Crostacei Decapodi: « Chez plusieurs Invertébrés, il paraît donc y avoir une corrélation entre les reins clos et ouverts, qui rappelle celle qui existe entre le foie et le rein des Mammifères. Si sa che è nel fegato che si fa in gran parte la trasformazione in urea del carbammato d'ammonio e degli altri sali ammoniacali apportati dal sangue; quest'urea, prodotto finale del metabolismo degli albuminoidi, passa di nuovo in circolo e s'elimina per la via renale » *(51)*.

insetti. Dal fatto che le granulazioni nelle cellule dei sacculi dei reni labiali [1] sono simili a quelle dei nefrociti, conclude che le sostanze eliminate da queste due sorta di cellule sono identiche. « D'autre part, les produits d'excrétion ne semblent pas s'accumuler indéfiniment dans les néphrocytes, car ces cellules présentent le même aspect chez les individus jeunes et âgés. Les néphrocytes doivent donc être considérés comme des reins d'accumulation qui soutirent du sang des produits d'excrétion, les transforment peut être et les livrent ensuite aux saccules des reins labiaux. Ainsi se trouve démontrée par les faits l'opinion de Cuénot » (pag. 213, *25*).

In una nota preliminare (1916), alla quale, ch'io sappia, non è seguìta ancora la pubblicazione del lavoro, Hollande espone ricerche originali e vedute affatto nuove sull'attività funzionale delle cellule pericardiche. Riporto integralmente le sue interessantissime conclusioni:

«... En résumé, les cellules péricardiques jouent un rôle important dans les processus vitaux des insectes ; elles absorbent les matières albuminoïdes d'origine alimentaire et finissent de les transformer en substances assimilables. Durant la période des métamorphoses, les cellules péricardiques persistent sans modifications et, sauf rares exceptions, continuent à fonctionner normalement; elles se chargent alors des substances albuminoïdes propres à l'insecte, qui sont mises en liberté dans son sang, soit à la suite de phagocytose, soit par autolyse des cellules larvaires. La réaction acide au tornesol des cellules péricardiques paraît due à la présence, dans le suc protoplasmique, de sels acides (phosphates) et non d'acides ou d'acides-alcools. *Les cellules péricardiques ne sont pas des cellules excrétrices (reins acides des auteurs) car elles n'éliminent pas de l'organisme les produits de déchets de la vie cellulaire pour les accumuler dans leur protoplasme.* Les cellules péricardiques possèdent un pouvoir absorbant très accusé; on met facilment en évidence cette propriété par l'injection, dans le sang de l'insecte, de sels de fer, de matières colorantes naturelles ou artificielles etc., qui se retrouvent dans le protoplasme des cellules quelques heures après l'injection. Les cellules péricardiques sont des éléments glandulaires qui transforment et modifient les substances qu'elles absorbent (décomposition du carminate d'ammoniaque en carmin insoluble). Ces transformations se font en partie par l'action de réductases fonctionnant en milieu acide, comme le démontrent les modifications chimiques apportées à l'hémoglobine et au rouge neutre absorbés.

[1] Secondo le belle ricerche del Bruntz i Tisanuri (come anche i Collemboli) possiedono reni analoghi, anatomicamente e fisiologicamente, ai reni degli altri Artropodi: il sacculo, costituito di un epitelio piatto ad attività merocrina, che elimina il carminio ammoniacale delle iniezioni fisiologiche, comunica con un labirinto a cellule epiteliali sul tipo renale (protoplasma basale a bastoncelli e, verso il lume, orlo striato contingente) che eliminano l'indaco carminio: sbocca esso in un condotto escretore che si riunisce con quello dell'altro lato in un condotto unico aprentesi all'esterno sotto il labbro inferiore. Nei Collemboli e Tisanuri inferiori (*Japyx*, *Campodea*) i reni sono voluminosi e complicati (mentre sono assenti i tubi malpighiani). Nei Tisanuri superiori, al contrario, i reni sono più semplici (e particolarmente ridotti nei Lepismidi, che, secondo Grassi, rappresentano le forme più evolute) e cominciano ad acquistare importanza i tubi malpighiani che si direbbero organi acquisiti per sostituire i reni in via di regressione, o scomparsi o adattati ad altre funzioni (pag. 228, *35*).

« Durant la vie de l'insecte, les cellules péricardiques absorbent les produits oxydés résultant de l'action des phagocytes et les rejettent dans le sang sous une forme réduite. Enfin, les cellules péricardiques neutralisent au fur et à mesure de leur formation les produits alcalins (ammoniacaux en particulier) qui prennent naissance au cours des échanges vitaux et en détruisent ainsi l'effet nocif » (pag. 74, *110*).

* * *

Questa la storia della questione. Studiamo ora diligentemente l'organo pericardiale nei nostri reali del *Termes*, e forse l'esame istologico nei diversi stadi fisiologici dell'individuo neotenico ci fornirà una solida base per l'interpretazione funzionale.

Premetto qualche osservazione anatomica sui rapporti tra tegumenti, vaso dorsale e cellule pericardiali nella ninfa di seconda forma.

Ininterrotta, dal lato interno dello strato epiteliale ipodermico, tra questo e la cavità del corpo s'interpone la membrana basale, vero straterello connettivale, come dimostrano i bei nuclei, allungati nella direzione della basale e finemente granulosi, intercalati di tratto in tratto nel suo spessore (ved. tav. I, fig. 3). Nel torace poi, in corrispondenza al vaso dorsale, la basale prolifera in un tessuto connettivale costituito d'un reticolo fibrillare con ai nodi numerosi piccoli nuclei (granulosi e varî di forma, ovalari, affusati, triangolari) (ved. tav. III, fig. 30). Nell'addome questa banda connettivale non appare bene evidente, perchè il vaso dorsale, sospinto dal tessuto adiposo, rimane accollato all'ipoderma. Anche negli intersegmenti toracici la basale non manda se non poche fibre al vaso, tra le quali s'annidano spesso grossi amebociti. È in corrispondenza ai tergiti toracici che la suddetta banda connettivale tra l'ipoderma e il vaso, alquanto approfondito tra il tessuto adiposo, presenta il suo massimo sviluppo (ved. tav. II, fig. 13).

Già Graber aveva veduta la porzione addominale del vaso dorsale o ventricolo trattenuta generalmente in posto per briglie connettivali e per fascetti di briglie muscolari che si attaccano agli urotergiti. E, nota il Berlese, « è da dimostrarsi se sieno realmente di natura muscolare i fasci fibrosi che dalla faccia dorsale di tutto il vaso vanno ai tergiti, indicati da Graber per sospensori dell'apparato propulsore ». Le mie osservazioni dimostrano che, almeno pel *Termes*, tali fasci fibrosi sono affatto connettivali e dipendono certamente dalla basale.

Questo particolare è interessante, perchè ci chiarisce la struttura del vaso pulsante. « Parecchi autori, sulla scorta del Leydig (1866), ammettono parecchie tonache formanti la parete del vaso pulsante (ad es. intima, muscolare, media, avventizia); ma sembra piuttosto potersi ammettere, secondo il bello studio del Pantel (1898) per la larva del *Thrixion*, una sola tonaca e precisamente la muscolare ». Anche Verson nega l'esistenza di una vera *adventitia* e soprattutto di un'*intima* nel baco (pag. 12, *222*). « Tuttavia », continua il Berlese, « le briglie connettivali, che raccordano il vaso pulsante agli organi circostanti e specialmente ai tergiti, può ben essere che dipendano da un esile involucro connettivale abbracciante tutto il vaso, per quanto attorno a questo difficile a vedersi, ma più manifesto nello intreccio che abbraccia le cellule pericardiali ed anche alcune adipose in vicinanza del vaso stesso, o che da questo si reca ad altri visceri » (pag. 762).

Ora questa dipendenza in realtà esiste; ma è inversa, nel senso che l'esile involucro connettivale non è che una propaggine della banda connettivale in che la basale prolifera a sostenere il vaso dorsale e stabilirne la tenace connessione coi tegumenti. (Difatti questo involucro connettivale, bene evidente nella parete del vaso che guarda l'ipoderma, è difficile a vedersi nella parete rivolta verso l'intestino).

E una simile dipendenza sembra doversi ammettere per le fibrille connettivali che impigliano le cellule pericardiali. Difatti queste cellule sono aggruppate nella disposizione bipiramidale caratteristica, sotto il vaso, proprio in corrispondenza alla regione del tergo nella quale una ricca formazione fibrillare connette all'ipoderma il vaso (ved. tav. II, fig. 15). Di più, nel protorace, ove non appaiono sviluppati muscoli alari, le cellule pericardiali sono disposte non ai lati e un po' al disotto del vaso, ma tra il vaso stesso, profondamente immerso nel tessuto adiposo e raccostato all'esofago, e l'ipoderma: imbrigliate quindi evidentemente da fibrille connettivali della basale (ved. tav. II, fig. 14).

Pantel, invece, attribuisce l'esile strato membranoso, che impiglia le cellule pericardiali, al miolemma dei muscoli aliformi. Ma, secondo Berlese, «l'esame attento dimostra che si tratta di una vera e propria membrana connettivale addossata alla faccia interna dei muscoli alari e che comprende, col miolemma dei detti muscoli, le cellule pericardiali... Le cellule pericardiali sono riunite in tessuto inquantochè si mostrano impigliate nelle membrane e briglie connettivali che costituiscono il peritoneo distale che si raccorda, nel tratto limitato dai muscoli aliformi del setto pericardico, appunto col setto stesso». Ora in realtà, almeno nel nostro caso, le fibre che impigliano le cellule pericardiali dipendono, più che dal peritoneo distale, dal connettivo basale e perivasale, e in ogni modo il peritoneo stesso non è se non un fascicolo del connettivo che limita, come basale, l'ipoderma, e allo ipoderma allaccia il vaso dorsale, e intorno al vaso dorsale si stende a rivestirne le pareti muscolari d'un'esile trama [1].

[1] Hollande studia l'origine delle fibrille pericardiche e segue, nella larva di *Stenophylax latipennis* (nel cuore della quale ritrova le tre tuniche di Graber, *intima, muscularis* e *adventitia*), «avec un grande netteté, les relations qui existaient entre les fibrilles péricardiques et le sinus cardiaque». «Il seno cardiaco di questa larva ha una forma ettagonale; a ciascun angolo formato nasce dall'avventizia una fibrilla o dei pacchetti di fibrille connettive che vanno ad attaccarsi, da una parte sui tegumenti ipodermali superiori e laterali, dall'altra sulla membrana del setto pericardiale che sta sotto al cuore e che limita alla sua parte inferiore la loggia cardiaca o seno pericardico. Sicchè il cuore si trova sospeso nella loggia cardiaca, e le cellule pericardiali sono innicchiate tra queste fibrille. La figura XXIII mostra come sono disposte, nella larva di *Stenophylax latipennis* Curtis, le fibrille elastiche che emanano dal cuore. Una cellula dell'avventizia si distacca dalla tunica esterna ed emette, verso l'interno del corpo dell'animale, il lungo filamento che va a costituire una fibrilla elastica propriamente detta. Tutt'intorno al cuore si vede (fig. XXIV) una serie di fibrille abbandonare l'avventizia, raggiare in tutti i sensi, e venirsi finalmente ad inserire, dopo un percorso più o meno lungo, *sulla membrana basale dell'ipoderma* o sulle differenti membrane d'origine connettiva che inviluppano o limitano gli organi situati all'intorno del setto pericardico» (pag. 168, ***111***).

Questa disposizione, con apparente derivazione delle fibrille pericardiche dall'avventizia del cuore, è quella che si osserva quasi sempre come assetto strutturale definitivo della regione pericardica. Però «l'esame del setto pericardico di bacolini di *Vanessa urticae* appena usciti dall'uovo ha mostrato» all'Hollande «che le cellule che dànno origine alle fibrille elastiche pericardiche possono, in certi casi, essere altre che le cellule nate dall'avventizia cardiaca. La fig. XXV mostra appunto una cellula connettivale, assai lontana dal cuore e che emette da una parte, alla sua parte superiore, due

Le cellule pericardiali sono disposte in tredici gruppi corrispondenti ai tredici segmenti nei quali è divisibile il vaso pulsante, tre toracici e dieci addominali come in *Periplaneta*.

I segmenti meso e metatoracico possiedono espansioni muscolari aliformi sulle quali, come in tutti gli addominali, lateralmente e un po' al di sotto del vaso si presentano aggruppate le cellule pericardiali. Ma nel protorace mancano muscolari alari e le cellule pericardiali (come dimostrano evidentemente sezioni sagittali e trasverse) si dispongono tra l'ipoderma e il vaso. Anche nel protorace però qualche cellula appare impigliata al disotto del vaso (ved. tav. II, figg. 12, 13).

Nella ninfa di seconda forma le cellule pericardiche appaiono varie di forma e dimensioni (ved. tav. II, figg. 16, 17, 18; confronta tav. I figg. 9, 10, 11). Alcune relativamente piccole, ovoidi, mononucleate; altre binucleate più grandi; altre ancora assai più grandi, più o meno cilindroidi, con molti nuclei sparsi a diversa altezza nel protoplasma. Evidentemente un processo di accrescimento cellulare e di moltiplicazione, probabilmente amitotica, del nucleo conduce alla formazione di questi lobuli sinciziali pericardici, dai quali vanno poi individuandosi cellule mononucleate. Difatti spesso il lobo plurinucleato appare come tutto fessurato di guisa che in corrispondenza a ogni nucleo resta una striscia di protoplasma (ved. tav. II, fig. 19).

Una disposizione affatto simile è stata intravista da Metalnikov in *Galleria Mellonella*. «Ne sont plus de cellules (péricardiques) isolées, mais des amas des cellules... Dans certains cas on distingue très bien des fissures entre les cellules isolées qui constituent le groupe donné... Dans ces cas une grande quantité de rejetons protoplasmiques partent des cellules qu'il relient entre elles et à la membrane (figg. 30, 31). Dans certaines cellules les noyaux sont doubles et quadruples, ce qui indique évidemment leur susceptibilité à se diviser et à bourgeonner... » (pag. 572, *155*) (¹).

Sempre nettissima appare una struttura del protoplasma reticolare a maglie poligonali. I nuclei, assai più piccoli degli adiposi, non sono tipicamente vescicolari; anzi

---

fibrille, che vanno ad inserirsi sull'avventizia del seno cardiaco, e d'altra parte, alla sua parte inferiore, una sola fibrilla che si dicotomizza, dopo un certo percorso, per andarsi a inserire a sua volta sulla membrana basale dell'ipoderma. Nello spazio triangolare limitato dalla cellula connettivale (le due fibrille superiori che ne emanano e il seno cardiaco) si trovano localizzate tre giovani cellule pericardiali» (pag. 169).

Ora, per capire l'origine d'una formazione istologica bisogna studiare appunto le strutture giovani ed ancora in sviluppo (neonati, ninfe); il caso dei tendini muscolari insegni. (D'altronde Hollande ha visto che «le fibrille che s'inseriscono sull'ipoderma non s'attaccano direttamente, come lo fanno le tonofibrille dei muscoli [?], sulla chitina dell'insetto passando tra gli interstizi delle cellule ipodermiche; esse vanno ad accollarsi alla membrana basale – che è pure d'origine connettivale – che limita all'interno del corpo l'epitelio tegumentale» [pag. 170]. E talvolta, quando la cellula pericardiale si trova a contatto diretto d'una fibra muscolare appartenente a un muscolo aliforme, «dall'inviluppo connettivale della fibra muscolare partono numerose piccole fibrille che, irraggiando tutt'attorno alla cellula pericardiale, la fissano strettamente alla fibra» [pag. 171]).

(¹) Hollande, non avendo mai osservati, in bruchi di *Galleria* non iniettati di carminato d'ammoniaca, questi aspetti, li crede «artefacts; c'est pour tels (ou comme phénoméne de dégénérescence) que je tiens les fissures signalées à maintes reprises par Métalnikov dans les «groupements de cellules péricardiales plurinucléées» des grosses chenilles et des chrysalides» (pag. 149, *111*).

la loro forma, più o meno ovalare, si presenta irregolare, come per stiramento delle briglie citoplasmiche che al nucleo fan capo. Osservando attentamente a forte ingrandimento, si riesce a discernere, ai nodi del reticolo citoplasmatico, come dei piccoli inspessimenti, concrezionule, rosee, sebbene più leggermente delle inclusioni eosinofile del tessuto adiposo e dei grumetti granulari dell'emolinfa (ved. tav. II, fig. 20).

Questi corpicciuoli sembrano corrispondere alle granulazioni che Hollande ritrova nelle cellule pericardiali delle larve di *Vanessa io* e *urticae.* « Ces granulations ne sont pas des produits de réserves, ni des grains de sécrétion; elles sont formées par des matières albuminoïdes absorbées du sang de l'insecte et qui proviennent de la digestion ». La natura chimica di queste granulazioni è nettamente stabilita dalla colorazione bruno-rossastra ch'esse prendono a contatto del liquido di Millon e dalla tinta violetta che assumono quando si depone sulle cellule pericardiche del reattivo di Fehling bollente. Ma, dopo un certo tempo dall'assorbimento della sostanza albuminoide, il granulo non dà più le reazioni di Millon e Fehling: esso è stato modificato dalla secrezione della cellula pericardica: « la matière albuminoïde primitive a été transformée en substances non figurées et assimilables (polypeptides, peptones, etc. ») (*110*).

Il fatto non è dubbio: la cellula pericardia'e assorbe, evidentemente dal plasma, delle sostanze albuminoidi ([1]) ed è capace di trasformarle colla sua attività. Ma l'interpretazione di Hollande è giusta? Le cellule pericardiali assorbono le materie albuminoidi di origine alimentare per finirle di trasformare in sostanze assimilabili? o tali granulazioni non rappresentano piuttosto materiali da elaborare per l'escrezione, paragonabili alle inclusioni caratteristiche delle cellule dei malpighiani, « glomeruli di sostanze organiche probabilmente proteiche che poi, spinte nel lume, vi abbandonano la parte salina che vi cristallizza? »

Del resto, se Hollande nega che le cellule pericardiali siano cellule escretrici, perchè non le ha viste eliminare dall'organismo i prodotti di rifiuto della vita cellulare per accumularli nel loro protoplasma, ammette però una loro funzione di svelenamento per l'organismo: « Durante la vita dell'insetto le cellule pericardiche assorbono i prodotti ossidati risultanti dall'azione dei fagociti e li rigettano nel sangue stesso sotto una forma ridotta. Infine le cellule pericardiche neutralizzano, man mano che si formano, i prodotti alcalini (specialmente ammoniacali) che hanno origine nel corso degli scambi vitali, e ne distruggono l'effetto nocivo ».

In fondo dunque le ricerche dell'Hollande, obiettivamente interpretate, vengono a confermare le previsioni teoriche del Cuénot che fin dal 1895 aveva negato alle cellule pericardiali la natura di reni d'accumulo attribuendo loro il potere ghiandolare di fabbricare prodotti di dissimilazione che verrebbero rigettati, man mano che si formano, nel sangue, per essere finalmente eliminati dai veri reni, i tubi malpighiani. Difatti Hollande spiega che, se le cellule pericardiche che hanno assorbito il carminato d' NH_3 iniet-

([1]) Osservando le cellule pericardiali in Imenotteri tentredinei, Berlese non potè riconoscere « che esse abbiano ingerenza nell'opera della ninfosi; ma, pur crescendo di volume e di numero i loro elementi durante le diverse età della larva, io sempre le vidi rimanersi a sè e con struttura costante la quale mostra un grande deposito di guttule albuminoidi comprese nel citoplasma molto stipatamente » (*9*).

tato restano colorate assai a lungo, gli è perchè il carminato alcalino viene dalle cellule trasformato in carminio puro che vi rimane « uniquement parce que ces cellules ne peuvent le dissoudre » (pag. 73, *110*). Ma, facendo ingerire, a Bruchi di *Vanessa urticae*, del rosso congo o rosso neutro o clorocarminio, vedesi effettuarsi il passaggio del colore traverso le cellule digestive, poi l'arrivo nel sangue (per lo più sotto forma di leucobase) e l'assorbimento da parte dei leucociti fagociti e delle cellule pericardiche; finalmente l'eliminazione della sostanza colorante dall'organismo s'effettua per i tubi di Malpighi.

« On reproduit donc ainsi expérimentalement, au moyen de colorants artificiels, le trajet suivi par un colorant naturel, propre aux Vanesses, [il pigmento rosso, studiato da M. von Linden (*142*), che si forma durante la metamorfosi] à savoir, la traversée des cellules digestives, l'absorption par les cellules péricardiques et, en dernier lieu, l'élimination de l'organisme de l'insecte par les cellules rénales (tubes de Malpighi) » (pag. 72).

Ma torniamo ai nostri reali.

Nelle giovanissime regine, da ninfe di seconda forma, la disposizione delle cellule pericardiali è identica alla suddescritta nelle ninfe: tra l'ipoderma e il vaso nel protorace, lateralmente e un po' al disotto del vaso negli altri segmenti toracici e negli addominali, costituendo d'ambo i lati una piramide triangolare colla base sul vaso pulsante e coll'apice raccordato al fascetto muscolare aliforme. Verso la base le cellule sono più grosse, meglio individuate, fornite di due o tre nuclei; verso l'apice hanno aspetto di cordoncini plurinucleati senza netti limiti cellulari. La maggior parte delle cellule è disposta al disopra, qualcuna al disotto del setto pericardico (ved. tav. II, fig. 21).

Presentano ben evidente una struttura reticolata, con maglie più strette alla periferia della cellula, più larghe nel mezzo. Sono granulosissime; e dei granuli, impiantati sulle briglie protoplasmatiche costituenti i fili del reticolo, i meno piccoli, a forte ingrandimento (ob. $^1/_{15}$ I. O., ocul. 12 C.), appaiono come concrezionule gialle, d'aspetto solido e di forma cristallina. Ma la maggior parte dei granuli hanno aspetto di glomeruli o grumetti, e nei tagli colorati all'ematossilina-eosina assumono una tinta grigio-chiaro-rossiccia caratteristica, identica alla tinta che, nel vaso e nelle lacune organiche, assume l'emolinfa, non più dunque intensamente eosinofila come nelle ninfe di seconda forma.

E una identica tinta assumono le grandi cellule ipodermali delle pleure e del tergo, anche loro a contenuto finemente granuloso, come se impregnate di plasma.

Sembra dunque non dubbio che i granuli delle cellule pericardiali abbiano la stessa natura chimica del plasma emolinfatico e rappresentino glomeruli di sostanza organica, probabilmente proteica, che, filtrata dal plasma circostante, sarà dalla cellula pericardica elaborata concretandone in forma cristallina la parte salina escretanda.

Nelle regine più mature d'età, sempre in sezioni colorate all'ematossilina ed eosina, le cellule pericardiali si tingono in violaceo, come pure il plasma emolinfatico, e, a forte ingrandimento, è possibile discernere, nelle briglie protoplasmatiche, oltre le concrezionule gialle cristalline ben definite, numerosi glomeruli violacei, evidentemente corrispondenti ai grigio-chiaro-rossicci degli individui più giovani. Questo cangiamento progressivo della colorabilità (intensamente, poi debolmente eosinofilo, poi sempre più decisamente basofilo) parrebbe testimoniare una progressiva modificazione chimica nella costituzione del plasma.

Pérez, che ritiene gli pseudonuclei delle inclusioni albuminoidi in cellule adipose di Muscidi essere prodotti urici (non enzimi digerenti come il Berlese afferma), nota che, anche nelle cellule a urati di larve di Formiche, i granuli di escrezione hanno spiccatissima affinità per i coloranti della cromatina.

« Et cette analogie de réactions ne doit pas surprendre, quand on songe à l'étroite parenté chimiche entre les substances du noyau et les composés de la série xantique » (pag. 219, *173*).

Questa progressiva basofilia del plasma circolante testimonierebbe dunque la presenza, che i metodi chimici usuali non hanno mai saputo rivelarci, in esso plasma, di sostanze cataboliche che vanno accumulandosi man mano che, collo sviluppo dell'attività riproduttoria, s'intensificano gli scambi vitali e i processi di disassimilazione.

In queste meno giovani regine le cellule pericardiali, grandi, polinucleate, a reticolo plasmatico netto, appaiono tutte granulate di concrezioni gialle di forma angolosa, d'aspetto cristallino, tanto più numerose e grandi quanto più l'individuo è avanzato in età, e, nello stesso individuo, quanto più l'elemento pericardiale considerato è vecchio (ved. tav. II, fig. 22).

Non ho potuto sorprendere processi cariocinetici o amitotici delle cellule pericardiali in queste meno giovani regine ; pure produzione di nuovi elementi cellulari sembra avvenire, dato che, oltre gli elementi più grandi a molti nuclei, a reticolo plasmatico poco netto e con numerosissimi e grandetti granuli gialli, vi appaiono cellule piuttosto piccole, mononucleate ed elementi plurinucleati, a cordoncino, con reticolo plasmatico ben evidente, senza o quasi granulazioni gialle, evidentemente più giovani insomma.

Le meno piccole concrezioni delle cellule pericardiche, esaminate attentamente a forte ingrandimento, rivelano una netta forma poligonale cristallina, prevalentemente esagonale (ved. tav. III, fig. 44).

Il reperto di cristalli in seno alla cellula pericardica non è nuovo. Anche Hollande ne ha trovati: « parfois, mais rarement..., ces cristaux ne se forment, toutef is, que dans des circostances très particulières de la vie de l'insecte: un appauvrissement des tissus en eau, ou une notable augmentation de la teneur en produits alcalins dans le sang paraîssent nécessaires » (pag. 71, *110*). Ciò appunto si verifica nelle crisalidi di diverse Zigenidi (specie *Z. Trifolii*) di cui le cellule pericardiche contengono cristalli di ossalato di calcio [1].

Ma nelle nostre regine le circostanze particolarissime sembrano divenute la norma costante; perchè le cellule pericardiche, in via affatto normale e continuativa, elaborano il materiale giallo concretandolo in forma cristallina. E questo materiale va progressivamente accumulandosi nelle cellule, in evidente correlazione collo sviluppo e intensificazione dell'attività riproduttoria.

[1] Secondo Hollande, in questi insetti l'ossalato di calcio è abbondantissimo nel sangue durante la metamorfosi ; esso viene assorbito in forma solubile dalle cellule pericardiali e in esse cristallizza perchè la presenza abbondante di sostanze alcaline (ammoniacali) ha neutralizzato momentaneamente l'acidità del succo cellulare. Allo sfarfallamento le cellule pericardiche riprendono le loro funzioni normali (nelle crisalidi le cellule contenenti cristalli non avevano più granuli albuminoidi) e i cristalli d'ossalato di calcio si dissolvono e spariscono dalla cellula.

Nelle vecchie regine di complemento più non si presentano elementi cellulari ben definiti e nemmeno lobuli plurinucleati pericardici: è tutta una zona escretrice, tutta una fascia di tessuto sinciziale che, interposta tra l'ipoderma e il tessuto adiposo, conservando più o meno nettamente la tipica forma bipiramidale, comprende, immerso nel suo seno, il vaso dorsale divenuto piccolo e stretto e sembra obliterare, almeno nel torace, completamente la cavità pericardica (ved. tav. IV, fig. 53).

Questo tessuto sinciziale pericardico è tutto vacuolare, come costituito da tanti sacchetti od utricoli ripieni di grosse concrezioni giallo-marrone (ved. tav. II, fig. 29). In sezione gli otricoli si presentano come le larghe maglie d'una grossa rete protoplasmatica onde risulta, senza verun limite cellulare, tutto il tessuto (ved. tav. II, figg. 23 e 24).

Sulle grosse maglie protoplasmatiche che anastomizzandosi formano le pareti degli otricoli, e specialmente ai nodi della rete, appaiono sparsi nuclei di forma varia (tondeggiante, pentagonoide, un poco allungata con un restringimento che sembra accennare a processi amitotici), di dimensioni sempre inferiori a quelle dei nuclei adiposi (anche meno della metà), struttura apparentemente vescicolare, senza nucleolo, con fina rete, ai nodi della quale grosse granulazioni cromatiche (ved. tav. II, fig. 25). Nella rete protoplasmatica a larghe maglie appaiono qua e là dei nodi dati da un plesso di briglie più fittamente anastomotiche; osservando attentamente, a forte ingrandimento, veggonsi inoltre partire, dalle zonule protoplasmatiche perinucleari, brigliole sottili a suddividere in tre o quattro concamerazioni gli otricoli. In qualche punto del tessuto le briglie, irraggiando numerose da un nucleo, ricordano la struttura largamente vacuolare dei più vecchi elementi pericardici nelle giovani regine (ved. tav. II, fig. 26). Debbono essere elementi ancora relativamente giovani, e difatti contengono concrezioni più piccole se non meno numerose; mentre altri otricoli non mostrano se non uno straticolo parietale di protoplasma, ridotti a semplici sacculi ripieni di grosse concrezioni: essi rappresentano evidentemente l'ultimo stadio evolutivo della cellula pericardiale.

Particolarmente dimostrativa, a questo riguardo, riesce l'osservazione dei nefrociti sparsi. Sono elementi cellulari identici ai pericardiali ma dislocati in altri punti del corpo. Due o tre ne compaiono costantemente nel torace, tra le pareti dell'esofago e quelle dei dôtti salivari (ved. tav. IV, fig. 53). Nelle giovani regine questi nefrociti sono elementi cellulari ben definiti, a struttura reticolare del protoplasma, fittamente granulati, alquanto più delle cellule pericardiali dello stesso individuo, di concrezionule gialle cristalline (ved. tav. II, fig. 27). Nelle vecchie regine si ritrovano, addossati alla parete dell'esofago, due o tre sacchetti a parete sottile, senza briglie protoplasmatiche, senza traccia di nuclei, pieni di grosse sferiche concrezioni di color giallo marrone (ved. tav. II, fig. 28).

(Tutte sferiche, a primo aspetto: ma, osservando attentamente, si rinviene qualche concrezione delle meno grandi a forma poligonale e qualche volta distintamente esagonale; e, focheggiando con pazienza, si ha l'impressione che tutti o quasi questi sferoliti presentino delle angolosità, benchè minime e quasi impercettibili. Si direbbe quasi, se la costanza degli angoli diedri non fosse legge fondamentale della cristallografia, che nella crescita dei cristalli l'apposizione di nuovi strati avvenga in modo da ottundere

sempre più gli angoli dell'esagono tendendo, come limite, al cerchio in cui l'esagono stesso può circonscriversi).

Altro che avere « sempre il medesimo aspetto e il medesimo contenuto, tanto se le si esamini nei giovanissimi individui, quanto se le si esamini negli adulti » !

Se esiste un esempio tipico di rene d'accumulo, questo sembra essere l'organo pericardiale...

L'organo pericardiale... nei reali neotenici del *Termes*, bisogna aggiungere. A parte che la generalizzazione è sempre pericolosa (e tanto più nel campo degli insetti nei quali le manifestazioni vitali, morfologiche e fisiologiche, sono di una così meravigliosamente ricca varietà), i neotenici dei Termiti rappresentano un caso fisiologico tutto particolare che può trovare riscontro soltanto in altri insetti sociali: individui che, nutriti d'un alimento speciale, per parecchi anni esercitano la loro funzione riproduttoria (senza, s'intende, più subire alcuna muta dal momento in cui hanno raggiunta la maturità sessuale). Le osservazioni di Cuénot e Marchal, le ricerche di Hollande dimostrano che in genere negli insetti l'organo pericardiale non funziona da rene d'accumulo; l'acquisizione di tale carattere nei neotenici dei Termiti appare dunque un fenomeno particolare, in relazione evidente colle particolari condizioni fisiologiche di questi individui riproduttori: lunga durata della vita sessuale e regime speciale d'alimentazione, condizioni che cospirano ad accumulare nel liquido circolante dell'insetto una quantità eccezionale di prodotti di rifiuto [1].

[1] Fabre potè stabilire i fatti fondamentali della secrezione urinaria negli insetti studiando le larve carnivore d'Imenotteri nelle quali, non essendo evacuata alcuna materia solida fino all'imbozzolamento, i materiali urinarî che non si possono eliminare vanno accumulandosi, man mano che si formano, negli organi ove prendono origine, e vi diventano estremamente evidenti.

Berlese fece progredire d'assai le nostre conoscenze in questo capitolo di fisiologia, studiando gli insetti nella ninfosi: periodo nel quale, essendo attivissima la formazione di prodotti catabolici in rapporto all'intenso lavorìo di ricambio, e non essendo possibile eliminazione all'esterno, avviene parimenti accumulo che, ingrandendo le proporzioni dei fenomeni normali, ce li rende percettibili.

Per ragioni diverse ma non meno efficaci (lunga durata della vita sessuale e regime speciale d'alimentazione), i neotenici dei Termiti si presentano singolarmente favorevoli allo studio isto-fisiologico dell'escrezione. Ci dànno, come a Fabre le larve carnivore degli Imenotteri davano, « l'immense avantage de ne pas être à l'affût de quelque particule plus ou moin douteuse ; de ne pas pâlir sur un microscope souvent trompeur ; d'observer enfin des faits tellement évidents que l'imagination n'à plus de prise sur eux, chose toujours bonne pour se former une sérieuse conviction ».

Il fenomeno dell'accumulo renale è l'esagerazione dei processi normali di escrezione. Anche negli animali superiori, quando abnormemente aumenti l'attività elaboratrice del rene o s'interrompa l'eliminazione urinaria, si verificano fenomeni d'accumulo. Secondo le belle ricerche del Policard, nei Mammiferi ibernanti, durante il sonno invernale, i prodotti di rifiuto s'accumulano sotto forma di grani, veri condensatori che spariscono al risveglio quando, ristabilendosi regolarmente l'urinazione, questi materiali vengono eliminati definitivamente al di fuori. Nella rana i fenomeni sono identici, ma non abitualmente localizzati all'ibernazione, poichè al di fuori di questa epoca si può provocare l'apparizione dei grani, esagerando l'eliminazione dei rifiuti degli albuminoidi (sottomettendole a regime albuminoide). Nel caso di ablazione del fegato, i fenomeni sono ancora più netti. La mancanza di uno dei principali emuntorii dell'organismo sovracarica di lavoro il rene. Appaiono nella zona sopranucleare vacuole, prima assai piccole e vuote ; a poco a poco ingrandiscono, e in seno ad

Questi, — che, secondo l'ipotesi di Cuénot, in via normale, man mano fabbricati dalle cellule pericardiali, rientrano in circolo per essere escretati dai malpighiani, — divenuti sovrabbondanti, saturerebbero il plasma circolante e finirebbero per concrezionarsi definitivamente nelle cellule pericardiali stesse.

È un'ipotesi, però: lo studio dei malpighiani rischiarerà forse un poco l'oscuro problema.

Ma non ci siamo ancora domandati la natura chimica delle concrezioni pericardiche. « On ne sait » [scriveva Cuénot nel 1895, nè ricerche ulteriori (1) ci dicono qualcosa di nuovo] « quel est le produit de désassimilation fabriqué par les cellules péricardiales. Kowalevsky se demande si ce ne serait pas de l'acide hyppurique, corps trouvé par Létellier dans la glande péricardiale des Lamellibranches. Or il y a une telle identité entre le contenu des cellules péricardiales des Insectes et celui des reins branchiaux et saccule des Crustacés Décapodes... qu'il est infiniment probable que dans le deux cas, il y a sécrétion du même produit; ce produit est connu chez les Décapodes (Marchal et Létellier): c'est un acide organique, de la série carbopyridique, qui à reçu le nom d'acide carcinurique » (pag. 327. *50*).

---

ognuna appare un grano rifrangente e in certi casi leggermente giallastro: grani cromatoidi, identici a quelli che compaiono per regime albuminoide. Ma, mentre in questo caso i grani non passavano un certo diametro e, a un dato momento, quando cessavano le condizioni abnormi, disparivano a poco a poco, nel caso dei reni dopo ablazione del fegato i grani non spariscono mai, s'ipertrofizzano regolarmente, diminuendo di numero per fusione, sicchè a un dato momento la cellula si trova ripiena di grani assai voluminosi, anche più del nucleo (che prima presentano la reazione della cromatina, ma ben presto divengono colorabili coi colori plasmatici).

Ciò che l'organo non può eliminare per il processo ordinario, l'accumula; e a questo processo d'accumulo dei rifiuti corrispondono i grani. Non è un fenomeno patologico, perchè si ha anche quando l'ablazione del fegato è parziale e anche per regime albuminoide: è l'esagerazione di un fenomeno normale. I grani cromatoidi appaiono ogni volta che il rene ha gran quantità di certi materiali da escretare. Sembra che, per escretare i rifiuti chimicamente complessi dell'assimilazione degli albuminoidi, il rene non possa funzionare se non lentamente. Mette in riserva l'eccedenza di sostanze per poi eliminarle a mano a mano (come dimostra la sparizione dei grani dopo la digestione e l'assimilazione di materiali albuminoidi).

Policard trova, sotto un certo aspetto, paragonabili il processo di escrezione urinaria e il processo di glicogenesi epatica. In ambedue si ha una funzione continua — la formazione continua del glucosio del sangue, la formazione continua dell'urina — e una funzione che ha luogo secondariamente come regolatrice della prima, vera funzione d'accumulo d'un prodotto che arriva all'organo in modo irregolare, discontinuo, e deve esserne versato in modo regolare e continuo: per il fegato la formazione del glicogeno, per il rene la formazione dei grani cromatoidi. I prodotti sono assai differenti per costituzione chimica, ma i processi della loro comparsa sono paragonabili nelle loro grandi linee (*185*).

Questo ingegnoso paragone del Policard è applicabile anche agl'Insetti, nei quali i fenomeni d'accumulo (tanto l'accumulo di sostanze di riserva quanto l'accumulo di materiali escretizî) si verificano in proporzioni esagerate, rispetto agli animali superiori, in rapporto all'alto grado d'intensità dei processi metabolici e all'adattamento a sviluppo per metamorfosi.

(1) Prescindendo da quelle di Hollande che nega funzione d'organo escretore alle cellule pericardiali.

Vediamo un poco: l'acido carcinurico è una sostanza fortemente acida, solubilissima in acqua e in alcool (*146*); non ha proprio niente a che fare colle nostre concrezioni, ben solide nelle preparazioni a fresco come nelle sezioni di materiale fissato. L'acido ippurico è facilmente solubile in NH_3: è fuori di questione anch'esso, perchè le nostre concrezioni sono insolubili in NH_3. Come del resto in soda e in potassa e in acido acetico e cloridrico; ciò che mi fa escludere anche possa trattarsi d'acido urico od urati (avevo pensato dapprima, per i caratteri morfologici, all'urato d'ammonio). Sono solubili invece, e pare con una certa effervescenza, in acido nitrico: ma non ho potuto ottenerne la reazione della muresside.

Purtroppo lo scarsissimo materiale a mia disposizione non mi ha permesso se non questi saggi microchimici sulle sezioni; ed io non posso affermare se non i suddetti dati negativi, circa la costituzione chimica delle concrezioni pericardiche. Per intenderci, chiamerò questa sostanza, che abbiamo già incontrata (identica, a giudicare dall'aspetto) nei depositi pigmentarî ipodermici e ritroveremo in altri organi ancora, prodotto *ptialurico*, nome che non pretende dir nulla della costituzione chimica, ma vuole soltanto esprimere che si tratta d'un prodotto urinario caratteristico degli individui tenuti a regime di saliva.

APPENDICE

Questo lavoro era già stato scritto quando è comparsa la magistrale Memoria di Hollande su « la cellule péricardiale des insectes » (1922, *111*).

Le conclusioni alle quali giunge l'Hollande, col suo studio citologico ed istochimico, circa la funzione fisiologica della cellula pericardiale, sono del più grande interesse, come già del resto appariva dalla Nota preliminare del 1916; e stanno appoggiate a un complesso di osservazioni e di esperimenti, su ben 140 specie di insetti di varii ordini, veramente imponente ed ammirevole. Con questa monografia certo l'Hollande ha portato un contributo prezioso alla fisiologia degli insetti.

Io però non ho da mutare una sillaba a quanto ho detto circa le cellule pericardiali dei neotenici; e non posso se non convincermi sempre più profondamente della opportunità di andar piano, più che cauti, colle generalizzazioni, e della utilità di studiare isto-fisiologicamente i casi di adattamento biologico particolare, che rappresentano vere brillanti esperienze che la Natura ci offre a confusione, direi quasi, dei nostri rozzi tentativi sperimentali.

Io mi permetto di invitare l'Hollande a portar le sue ricerche istochimiche sulle cellule pericardiali dei Termiti. Certo egli, che a uno spirito geniale di ricercatore unisce una profonda conoscenza della tecnica chimico-fisiologica, giungerebbe a conclusioni singolarmente interessanti e per la fisiologia degli insetti e per la biologia dei Termitidi; conclusioni che io, col mio studio istologico, ho potuto solo intravedere. (Avevo iniziato anche lo studio fisiologico, sperimentando l'azione di sostanze coloranti ed altre sostanze chimiche varie, introdotte per iniezione o somministrate coll'alimento [pezzi di legno imbevuti in soluzioni della sostanza]; ma un po' le difficoltà tecniche d'una iniezione veramente fisiologica in bestiuole così piccole, e più l'affollarsi alla mia mente di altri e più urgenti argomenti di studio, mi hanno distolto, per ora almeno, da queste ricerche).

Dopo questa premessa, passo a riassumere i risultati dello studio di Hollande, fermandomi in modo speciale sui punti che presentano più diretta attinenza col nostro studio dei Termiti (per questa ragione non trascrivo *sic et simpliciter* le « conclusions » dell'autore).

Hollande anzitutto osserva la *cellula pericardiale in vivo* e ne segue le *modificazioni nel corso della vita dell'insetto* (¹); studia poi l'*istologia* della cellula pericardiale, pren-

(¹) « L'aspetto in vivo della cellula pericardiale varia con l'età e con le condizioni biologiche dell'insetto. In genere la cellula pericardiale mostra al suo centro una o più vacuole assai voluminose, a contorni regolari o irregolari, il più spesso circolari. Verso i bordi della cellula esistono fine vacuole, delimitate talvolta da strie protoplasmiche particolari che nell'insieme formano i coni periferici d'assorbimento (Lepidotteri); altre vacuole, di taglia media, sono frequentemente disposte tra le grandi vacuole centrali e le piccole vacuole periferiche » (pag. 285).

dendo come tipo gli Ortotteri e segnalando poi, con esame comparativo, le diversità di struttura istologica che si osservano in altri insetti (Coleotteri, Ditteri, Lepidotteri, Tricotteri, Neurotteri, Emitteri, Imenotteri).

Dallo studio istologico ([1]) risulta che « la cellula pericardiale è una *cellula ghiandolare chiusa, a secrezione merocrina.* I prodotti di secrezione si elaborano nelle fine vacuole periferiche che presentano spesso, al loro centro, un grano di secrezione; hanno una reazione acida al tornasole. Man mano che avviene la loro elaborazione, questi prodotti

([1]) « Dal punto di vista istologico la cellula pericardiale appare come un elemento d'origine mesodermica di cui il nucleo si moltiplica nelle giovanissime larve, sia per cariocinesi (*Yponomeuta*), sia per semplice trasformazione del nucleo primitivo in un certo numero di nuclei secondari (Vanessa dell'ortica). Durante l'accrescimento larvale, al tempo delle mute, le piccole cellule pericardiali situate vicino all'ipoderma dànno origine, per divisione nucleare, a nuove cellule pericardiali. Sicchè la moltiplicazione delle cellule pericardiali si fa in senso cardio-centrifugo e non in senso cardio-centripeto, come certi pretendevano; le prime cellule formate, le più vicine al cuore, s'accrescono, durante lo sviluppo dell'insetto, in maniera uniforme e continua; così si spiega perchè le cellule più voluminose siano situate accosto al cuore, e le più piccole più lontane... Le cellule pericardiali contengono generalmente uno o due nuclei; talvolta, nelle cellule binucleate, il protoplasma s'individualizza attorno a ciascun nucleo, conducendo alla formazione di due masse citoplasmiche perinucleari; una falsa membrana, sorta di setto, che non raggiunge la membrana propria della cellula, delimita allora nettamente, tra i due nuclei, i territorî protoplasmici appartenenti a ciascuno di essi. La membrana esterna della cellula pericardiale è, in genere, virtuale, o, per lo meno, poco marcata. Le cellule pericardiali larvali non spariscono di solito durante le metamorfosi; sicchè le cellule pericardiali dell'imagine non sono se non le cellule pericardiali larvali. Eccezionalmente però si può constatare, quando certe cellule hanno assorbito durante la vita larvale sostanze nocive in troppo grande quantità (carminato d'ammoniaca, per esempio, iniettato nel sangue dell'insetto), che esse cellule vengono distrutte da leucociti-fagociti come corpo estraneo (crisalide di *Galleria mellonella*). All'avvicinarsi della metamorfosi, in certi insetti (Lepidotteri, Coleotteri, Tricotteri) il protoplasma delle cellule pericardiali si carica talvolta di inclusioni albuminoidi che spariscono in genere verso la fine delle metamorfosi; di rado si ritrovano al momento dello sfarfallamento. In certi Lepidotteri (*Galleria, Vanessa*) e Tricotteri (*Stenophylax*) i nuclei delle cellule pericardiali sono sede di un *rinnovamento nucleare* particolarissimo; esso ha luogo a spese della cromatina primitiva del nucleo larvale che dà origine a una serie di piccoli nuclei neoformati; quando la cellula larvale presenta più nuclei, capita che il rinnovamento nucleare non si produce sincronicamente in ciascuno di essi; si osservano allora cellule contenenti nella loro massa citoplasmica piccoli nuclei circolari e, allato di essi, dei grossi nuclei larvali, a contorni spesso irregolari, non ancora modificati o che mostrano solo i primi stadii di trasformazione. Così si formano le cellule pericardiali plurinucleate di certe crisalidi o bruchi, all'appressarsi delle metamorfosi; tali cellule non sono nient'affatto formate dalla riunione di piccole cellule larvali a costituire un sincizio. In qualche insetto perfetto, al momento dello sfarfallamento, si possono ritrovare le cellule pericardiali plurinucleate che presentavano le loro crisalidi (*Galleria mellonella*); in altri si constata invece che, attorno a ciascun piccolo nucleo neoformato, si è individuato un lobo protoplasmico della cellula, dando origine a piccole cellule pericardiali imaginali (*Hyponomeuta*, secondo Hufnagel; Vanesse dell'ortica?) » (pag. 286).

Debbo però ricordare che, secondo Verson, in *Bombyx mori*, « di pari passo con i muscoli involontarî che formano le pareti contrattili del vaso pulsante, entrano in piena istolisi anche le ghiandole pericardiache ed endocardiache. Nè questi nè quelli esercitano però, dapprincipio, sensibile attrazione sui fagociti, che appena sul sesto o settimo giorno di vita ninfale incominciano ad intervenire, per sbarazzare il campo dagli ultimi residui delle demolizioni precesse. Ed è allora che tra le macerie compariscono per la prima volta nuovi elementi imaginali, i quali da una parte rimpiazzano le cellule ghiandolari a nucleo dentritico del periodo larvale, dall'altra si allungano, diventano fusate, ed assumono finalmente la caratteristica striatura dei tessuti muscolari » (pag. 28, 222).

vengono a raccogliersi al centro della cellula, formando le vacuole centrali, spesso voluminose » (pag. 286).

« Più il lavoro di secrezione della cellula pericardiale prosegue e si compie, più il protoplasma si consuma e scompare. Si arriva così ad uno stadio (che la fig. 13, pl. VI, riproduce) nel quale, mentre i due nuclei sono respinti ai bordi della cellula pericardiale (*Gryllus campestris*), il protoplasma non vi è più rappresentato se non da uno strato sottile citoplasmico periferico. Una tale disposizione costituisce il termine ultimo al quale può arrivare la cellula pericardiale nel corso dell'elaborazione dei suoi prodotti di secrezione » (pag. 128). A partire da questo momento la cellula pericardiale può tornare al suo stato primitivo, rigenerando il suo protoplasma man mano che il liquido vacuolare sparisce; altre volte l'assorbimento e la secrezione continuano ancora parallelamente per qualche tempo. In ogni modo, mai le cellule pericardiali, anche giunte all'ultimo stadio, spariscono per fagocitosi o per degenerazione.

Passando allo studio fisiologico della cellula pericardiale, Hollande, anzitutto, analizza il contenuto delle loro vacuole (liquido, pigmento, acidità), poi esamina il potere di assorbimento di queste cellule e passa in rivista le diverse sostanze ch'esse assorbono (materie coloranti, colloidi, cristalloidi).

« Il *liquido delle vacuole* è costituito da acqua che contiene una piccolissima quantità di sostanze albuminoidi, combinate probabilmente a dei lipoidi, e pigmenti e una o più sostanze acide. I *pigmenti* le cellule pericardiali li assorbono dal sangue, sicchè in genere può dirsi che i pigmenti delle cellule pericardiali sono quelli stessi del sangue ed hanno la stessa origine [1]. Però in certi casi, quando temporaneamente il sangue viene a contenere altri pigmenti che non i normali, le cellule pericardiali se ne impadroniscono, purchè essi posseggano le proprietà fisiologiche richieste perchè il loro assorbimento da parte delle cellule pericardiali possa aver luogo. Così è che, al principio delle metamorfosi di certi Lepidotteri (*Vanessa*, *Melitaea*), il pigmento bruno, incluso nel protoplasma delle cellule ipodermiche larvali sotto forma di granulazioni brune, arrossa,

[1] Quando il sangue è incoloro, come è soprattutto negli insetti carnivori che non si nutrono d'insetti fitofagi, le cellule pericardiali sono sprovviste di pigmento; quando il sangue è colorato, come negli insetti fitofagi, o carnivori che si nutrono di fitofagi a sangue ricco di pigmento, le cellule pericardiali sono sempre cariche di pigmenti (giallo o bruno o verde o rosso, in ordine di frequenza). Per esempio, in tutti gli insetti a sangue giallo per un carotinoide, la zooneritrina (che si riscontra nella maggioranza degli insetti fitofagi, soprattutto Lepidotteri e Coleotteri; forse deriva da pigmenti vegetali, carotina, antofilla, più o meno modificati), le cellule pericardiali contengono nelle loro vacuole, allo stato disciolto o sotto forma figurata lo stesso pigmento giallo (che spesso pigmenta anche il grasso delle cellule adipose e il protoplasma dei cerodeciti, come in Vanessa). Ma ci sono delle eccezioni, per esempio negli Ortotteri. Il sangue dei Grilli è, in genere, giallo o verde; ma le loro cellule pericardiali sono, per la più parte, quasi sempre cariche d'un pigmento verde (*Locusta*, *Decticus*, *Analota*, *Ephippigera*). « La tinta del pigmento delle cellule pericardiali in questi Grilli sembra soprattutto variare con quella dei tegumenti dell'insetto. Difatti negli Ortotteri ora citati esistono varietà a tegumento giallo-bruno, invece che verde-brillante come nelle specie tipi; le loro cellule pericardiali sono allora colorate, esse anche, in giallo-bruno e non in verde. Dunque esiste in certi casi relazione tra il pigmento dei tegumenti dell'insetto e quello delle sue cellule pericardiali, come del resto nel caso del pigmento rosso-carminio delle cellule pericardiali delle crisalidi di certe farfalle » (pag. 184). Purtroppo « la plupart des pigments des Insects sont encore inconnus; peu ont été isolés à un état de pureté suffisant pour en permettre l'analyse » (pag. 182).

si solubilizza, poi diffluisce nel sangue donde è prelevato dalle cellule dell'intestino medio che lo rigettano nel lume intestinale; là costituisce, colle cellule intestinali larvali desquammate, il *corpo rosso* degli autori. Dopo essere stato riassorbito dalle cellule intestinali neoformate dell'insetto perfetto, il pigmento rosso-carminio del *corpo rosso*, più o meno modificato dall'azione dei succhi acidi del tubo digestivo, arriva di nuovo nel sangue dell'insetto e penetra nelle cellule pericardiali (¹).

« Così anche avviene della melanina, pigmento bruno che si diffonde nel sangue in seguito a processi fagocitarii; questo pigmento risulta dall'azione dei succhi digerenti (ossidasi) dei leucociti–fagociti sul plasma sanguigno assorbito dai corpuscoli ingeriti o incorporato con essi, come anche, senza dubbio, dall'azione di questi succhi leucocitarî sugli amino–acidi di prodotti fenolici formati nel corso della digestione fagocitaria » (pag. 288). « Il pigmento nelle cellule pericardiali può esistere sotto una forma solubile – è allora contenuto nel liquido delle vacuole – o può trovarsi nelle cellule in forma figurata; in questo caso prende l'aspetto di grani, di conglomerati, e, qualche volta, perfino cristallizza. La precipitazione del pigmento non è se non la traduzione dei processi vitali della cellula; essa è in relazione colla disidratazione dell'organismo e col rallentamento dei processi vitali [larve di *Gryllus campestris* e adulti di *Timarcha* raccolti alla fine dell'inverno o mantenuti lungamente a digiuno (pag. 185)]; sembra essere facilitata dall'aumento dell'acidità del liquido delle vacuole. I grani pigmentati possono formare, nelle cellule pericardiali, agglomerati più o meno voluminosi: sono questi grani che gli autori hanno considerati, non avendone determinata la natura e l'origine, come prodotti d'escrezione particolari » (pag. 201).

Hollande cerca di determinare la *natura della sostanza acida* delle cellule pericardiali; ma non vi riesce (le reazioni degli acidi–alcool, dell'acido urico, ippurico, ossalico, dei fosfati acidi, di molti amino acidi, dànno tutte risultato negativo, nè è possibile stabilire se si tratti, come suppone il Cuénot, d'un acido piridino–carbonico come nei Decapodi).

Quanto all'*origine dell'acidità* delle cellule pericardiali, le esperienze dimostrano che: « 1°) Le cellule pericardiali degli insetti non possono assorbire direttamente sotto la forma acida gli acidi liberi introdotti nel sangue dell'insetto, questo sangue essendo alcalino; l'assorbimento di una sostanza acida, se avviene, non può farsi se non sotto la forma di sali, vale a dire dopo neutralizzazione della o delle funzioni acide. 2°) Un certo numero di sali, formati dagli acidi iniettati a contatto del sangue, non sembrano essere assorbibili dalle cellule pericardiali; così è nel caso degli urati, ippurati e succinati iniettati nel sangue dell'insetto. 3°) Le cellule pericardiali sono atte ad assorbire dal sangue sostanze alcaline (bicarbonato di soda, carbonato d'ammonio e ammoniaca).

« Da queste constatazioni risulta che l'acidità delle vacuole delle cellule pericardiali degli insetti non può provenire se non da una secrezione acida delle cellule o, che è poi quasi lo stesso, dall'azione delle loro diastasi cellulari su prodotti non acidi assorbiti

(¹) Infine viene eliminato dall'organismo per opera dei tubi malpighiani. Maria von Linden faceva invece derivare questo pigmento rosso del « corpo rosso intestinale », in parte dalla clorofilla rimasta nel tubo digestivo dell'insetto al momento delle metamorfosi, e che si trasforma sotto l'influenza dei succhi digestivi divenuti acidi (pag. 338), in parte dalla degenerazione dell'epitelio mesointestinale (pag. 303, *142*, an. 1904).

dal sangue. La sostanza acida elaborata non può essere se non un acido organico debole o un composto a debole reazione acida, come un sale acido...

« Sicchè sembra che le cellule pericardiali esercitino un ufficio importantissimo nella vita dell'insetto: *esse neutralizzano le sostanze alcaline in eccesso nel sangue, man mano che entrano nel liquido sanguigno*, abbiano queste sostanze un'origine digestiva o risultino esse dai processi vitali dell'insetto (che l'insetto abbia un regime erbivoro o carnivoro, le sue cellule pericardiali hanno sempre una reazione acida) » (pag. 209).

« Una delle più notevoli proprietà fisiologiche della cellula pericardiale degli insetti consiste nel grande potere d'assorbimento che questi elementi presentano; questo potere si manifesta soprattutto verso i colloidi, come le materie albuminoidi (albumine, globuline) e certi loro derivati (albumose) [1]. Raramente le sostanze cristalloidi

[1] Rilevata « l'aptitude des cellules péricardiales à prélever de l'organisme de l'Insecte des substances sous une forme physique spéciale (état colloïdal) », l'Hollande aggiunge che « chez l'Insecte normal cette propriété paraît surtout s'exercer vis-à-vis des matières protéiques et leurs dérivés (albumoses) provenant de la digestion ou résultant d'une lyse cellulaire (phagocytose, autolyse durant les métamorphoses) et dont les molécules sont encore, sans doute, trop volumineuses, insuffisamment dégradées, ou malagencées pour pouvoir être assimilées par les cellules de l'organisme animal » (pag. 235).

A me le osservazioni e gli esperimenti dell'Hollande in proposito non sembrano sufficienti ad autorizzare questa interpretazione, già, e in forma più assoluta, espressa nella nota del 1916: « les cellules péricardiques jouent un rôle important dans les processus vitaux des insectes; elles absorbent les matières albuminoïdes d'origine alimentaire et finissent de les transformer en substances assimilables ».

Fermiamoci ad esaminare le osservazioni e gli esperimenti dell'Hollande al riguardo.

« Chez les Lépidoptères phytophages, dont l'accroissement au stade larvaire est rapide, j'ai souvent noté l'apparition, dans le protoplasme de cellules pericardiales, de petites vacuoles à contenu un peu opaque; l'action précipitante de réactifs fixateurs montre qu'elles renferment une assez grande quantité de matière protéique, contrairement à ce qui existe dans les petites vacuoles à l'état habituel. Ces vacuoles sont en rapport avec la digestion: elles apparaîssent lorsque la chenille mange; elles disparaîssent lorsque l'animal est à jeun » (pag. 109).

Iniettando a bruchi di *Vanessa urticae*, tenuti a digiuno per sei giorni, sangue di bruchi di Vanesse, ben alimentati, dopo qualche ora compaiono nelle loro cellule pericardiali inclusioni proteiche, che non compaiono invece quando s'inietti sangue di bruchi, anch'essi tenuti a digiuno. « Il dévenait ainsi évident que les vacuoles à contenu albuminoïde, produites dans les cellules péricardiales des chenilles injectées, résultaient de l'absorption de substances protéiques se trouvant dans le sang des chenilles alimentées; d'après ce que j'ai indiqué précédemment, elles ne pouvaient avoir qu'une origine alimentaire » (pag. 259).

Tutto ciò prova che del materiale proteico di origine alimentare passa nelle cellule pericardiali; ma non dimostra nient'affatto che « le » sostanze proteiche provenienti dalla digestione passino nelle cellule pericardiali a subire trasformazione finale in sostanze assimilabili. Quello delle vacuole che si formano nelle cellule pericardiali, durante la digestione, potrebbe essere materiale da elaborare per l'escrezione (nella vita larvale dell'insetto i materiali escretivi debbono provenire specialmente dalla digestione delle sostanze alimentari, specie negli Olometaboli ad intenso anabolismo larvale, come i bruchi dei Lepidotteri [« dont l'accroissement au stade larvaire est rapide » !]; durante la vita crisalidale invece debbono prevalere i materiali di rifiuto provenienti dall'istolisi e dal lavoro d'istogenesi; e durante la vita imaginale, degli insetti che hanno lungo periodo di vita adulta e di attività sessuale, i prodotti escretivi derivati dal metabolismo degli organi genitali).

Del resto non bisogna dimenticare che « ainsi que toute cellule vivante, ces cellules [pericardiales]

sembrano atte a penetrare nelle cellule pericardiali [1]; e, anche nel caso che vi si ritrovi uno degli elementi della sostanza iniettata (ferro, sostanza alcalina), è possibile che questo elemento vi sia pervenuto sotto una forma colloidale o solo dopo il suo assorbimento da parte dei colloidi del sangue, o anche dopo la sua combinazione con qualcuno di questi colloidi (globuline).

«Molte materie coloranti (coloranti naturali, derivati dell'anilina) — che per la più parte sono colloidi o si comportano come tali — sono assorbite dalle cellule pericardiali e, così, altro non fanno se non mettere in evidenza il loro potere d'assorbimento. Tuttavia le cellule pericardiali sono capaci di fare una vera selezione tra le materie coloranti derivate dall'anilina. Così, tutti i coloranti detti *coloranti vitali*, non penetrano nelle cellule pericardiali; l'esame delle formule chimiche mostra che la composizione della molecola chimica del colorante influisce molto su questo assorbimento.

Spesso, senza tener conto se non del potere assorbente delle cellule pericardiali, la maggioranza degli autori, in seguito ai lavori di Kowalevsky, ha considerato le cellule pericardiali unicamente come cellule renali, cellule che assorbono i prodotti di rifiuto dei processi vitali dell'insetto, ed anzi accumulano in loro questi rifiuti; onde la denominazione di *reni d'accumulo a reazione àcida*.

Due caratteri contribuivano a farle considerare *elementi accumulatori*: 1°) l'osservazione, allo stato normale, di concrezioni all'interno delle cellule pericardiali, concrezioni di natura chimica rimasta ignota agli AA., ma che noi abbiamo visto essere costituite, il più spesso, da una agglomerazione di pigmenti sanguigni o da masse brunastre formate da melanina d'origine leucocitaria; 2°) la persistenza, veramente considerevole talvolta (più mesi), nel protoplasma di esse cellule, del carminato d'ammoniaca assorbito dal sangue in seguito ad una iniezione fisiologica di questo prodotto.

---

sont dans l'obligation, pour subvenir à leur propres besoins vitaux, d'absorber les élements nutritifs dont elles ont besoin dans le milieu ambiant où elles vivent » (pag. 240).

Le esperienze, secondo le quali, «en injectant diverses substances protéiques à certains Insectes, on parvient à reproduire dans le protoplasme de leurs cellules péricardiales des inclusions albuminoïdes semblables à celles qui se forment au début des métamorphoses » (pag. 222), ci finiscono di convincere che, nel caso delle vacuole albuminoidi durante la digestione, come nel caso d'iniezione di sostanze proteiche, come nel caso di assorbimento dei prodotti dell'istolisi o della fagocitosi, si tratta sempre di funzione di difesa, di disintossicazione (sia pure con intervento di fenomeni proteolitici); difesa che non sempre l'organismo dell'insetto arriva a compiere. « Si des matières protéiques peuvent être absorbées par les cellules péricardiales des Insectes, l'expérience m'a montré que tous les Insectes ne se prêtent pas à cette expérimentation; pour beaucoup d'entre eux les substances albuminoïdes étrangères injectées sont, en effet, souvent nocives, et déterminent fréquemment, surtout à doses un peu concentrées, rapidement leur morte. C'est ainsi que les Grillons (*Gryllus campestris*) meurent peu de temps après avoir reçu en injection une très petite quantité d'ovoalbumine de Poule, même si l'on dilue celle-ci à volume égal dans de l'eau physiologique »! (pag. 222). Invece i grossi bruchi resistono molto bene all'iniezione e, dopo un ventiquattro o quarantotto ore, presentano un gran numero di piccole vacuole ricche di materie proteiche nel loro protoplasma; evidentemente, se resistono, gli è appunto perchè le loro cellule pericardiali sono capaci di assorbire queste sostanze proteiche estranee, depurandone il sangue.

[1] Iniettati, non penetrano nelle cellule pericardiali l'acido urico e gli urati, l'acido ippurico e gli ippurati, l'acido ossalico e gli ossalati, il fosfato ammonico-magnesiaco, le basi puriche e derivati, i fenoli, e forse neanche gli aminoacidi e neanche, pare, l'urea.

« Ma noi sappiamo che la cellula pericardiale è capace di trasformare il carminato d'ammoniaca che in essa penetra, portandolo allo stato di carminio puro ; e se questo rimane nel protoplasma, a colorarlo in rosso, gli è perchè è quasi insolubile o, per lo meno, assai difficilmente attaccabile dai succhi cellulari. La cellula pericardiale dell'insetto non è dunque un *rene* propriamente detto, nel senso stretto della parola; non è paragonabile alla cellula renale del rene dei vertebrati; tanto meno poi è un *rene d'accumulo*, giacchè, fisiologicamente parlando, come già Cuénot aveva riconosciuto, essa non accumula alcun prodotto di rifiuto dell'organismo... [*ordinariamente*, aggiungiamo !].

A voler proprio paragonare le cellule pericardiali degli insetti a certe cellule dell'organismo dei Vertebrati superiori — comparazione che del resto è sempre pericoloso istituire, dal punto di vista biologico, date le differenze spesso considerevoli che esistono tra gli organismi comparati — non è colle cellule renali che una tale comparazione potrebbe istituirsi, ma piuttosto colle cellule epatiche, benchè numerose importanti caratteristiche di queste cellule (come per esempio la funzione glicogenica) possano non ritrovarsi nelle cellule pericardiali. Difatti, come le cellule epatiche, le cellule pericardiali sono in stretti rapporti coi prodotti digestivi versati nel sangue; come quelle, esse prelevano le sostanze proteiche non completamente digerite e che hanno potuto traversare sotto questa forma il tubo digestivo (formazione di vacuole che contengono sostanze albuminoidi, durante la digestione); esse pure possono neutralizzare le sostanze alcaline in eccesso nel sangue (bicarbonato di soda, ammoniaca negli Efippigeri); esse pure distruggono le sostanze ossidate (melanina formata dai leucociti durante la fagocitosi); senza dubbio esse pure distruggono le tossine microbiche ed hanno parte nei processi immunitarii; come le cellule epatiche infine, esse possono segregare prodotti speciali che si spandono nel sangue (sostanza, derivata dalla colina, del sangue delle coccinelle); può anche essere che le sostanze acide delle cellule pericardiali possano omologarsi fisiologicamente, fino a un certo punto, agli acidi biliari, pur non presentando alcuna delle loro reazioni.

Quanto ai prodotti risultanti dalle azioni diastasiche delle cellule pericardiali sulle sostanze assorbite, essi sono riversati nel sangue e abbandonano l'organismo, a meno che non possano ancora in qualche caso venire utilizzati, per i tubi di Malpighi, vero rene dell'insetto (come nel caso dell'ossalato di calce formato nelle cellule pericardiali di Zigene ed eliminato dalle cellule dei malpighiani).

Sintetizzando in poche parole i risultati delle ricerche, la cellula pericardiale dell'insetto può definirsi così: cellula ghiandolare chiusa (ghiandola sanguigna), a tipo di secrezione merocrina, capace di neutralizzare le sostanze alcaline in eccesso nel sangue, come anche di assorbire dal sangue certi prodotti colloidali (albuminoidi); per mezzo di diastasi che funzionano in mezzo acido, essa ne scinde le molecole complesse, le sgretola, le trasforma in elementi più semplici e finalmente le riversa nel sangue allo stato di composti cristalloidi che i tubi di Malpighi finalmente elimineranno dall'organismo.

Così determinata, la funzione biochimica delle cellule pericardiali appare di somma importanza per la vita dell'insetto » (pp. 288-93).

I malpighiani.

Nella ninfa di seconda forma i malpighiani, pescanti nell'emolinfa, non presentano nette differenze morfologiche, indici di diversi stadii d'attività ghiandolare.

Una tunica peritoneale, fibrillare, riveste il tubo. Tra uno straticolo esterno e uno intimo, apparentemente omogenei, il protoplasma delle cellule ghiandolari (ne compaiono di solito quattro in una sezione trasversa, ciascuna con grosso nucleo nucleolato) mostra una caratteristica netta struttura reticolare a maglie tondeggianti. Ai nodi di questo reticolo protoplasmatico è possibile talvolta distinguere estremamente minuti, rifrangenti granuli di aspetto solido (ved. tav. IV, fig. 58). Il lume, piuttosto piccolo e pressochè circolare, è vuoto (ved. tav. IV, fig. 57).

Nelle giovani regine [1], tra l'orlo a spazzola e lo straterello basale a bastoncelli, talora assai evidenti, il protoplasma presenta una struttura nettamente striata, data da tante file radiali di granuli sulle quali qua e là, e più verso il lume, compare qualche vacuola contenente un glometto intensamente basofilo (mentre le file di granuli restano debolmente colorate). In queste vacuole — che diventano sempre più numerose, dimodochè il protoplasma passa dalla struttura apparentemente filare a una struttura vacuolare o fittamente reticolare — evidentemente si elabora e si concreta il materiale di escrezione che, nei malpighiani o nelle porzioni di malpighiani a uno stadio fisiologico più avanzato, compare sotto forma di numerosissimi corpicciuoli rifrangenti, bianchi, di forma varia (generalmente più o meno tondeggiante, talvolta distintamente quadrangolare), di aspetto solido, di struttura a primo aspetto omogenea, mentre focheggiando si distingue almeno uno strato attorno a un punto centrale più rifrangente. Di simili concrezioni è talvolta tutto farcito l'epitelio del tubo; ma il lume — spesso, del resto, assai ridotto — è vuoto.

Bisogna notare che non in tutte le giovani regine i malpighiani presentano concrezioni formate o in via di formazione; sovente, anzi, non mostrano segni evidenti di attività funzionale.

Nelle vecchie regine vedesi ancora qualche elemento (tratto di malpighiano) giovine, con stretto lume e con alto epitelio apparentemente sinciziale e di cui lo strato protoplasmatico basale, al di là dei nuclei, è debolmente colorabile all'ematossilina ed apparentemente omogeneo (ved. tav. III, fig. 32).

I nuclei sono tutti disposti alla stessa altezza, in fitta catena anulare regolarissima, nello strato più interno dell'apparente sincizio; strato a struttura striata data da file di granuli intensamente colorabili coll'ematossilina [2].

[1] Non ho seguìto così minutamente i fenomeni, da verificare se esistano tutti i gradi di passaggio nella struttura ghiandolare corrispondentemente ad una evoluzione continua dell'attività funzionale o se piuttosto non avvenga (tra gli altri fenomeni intimi che debbono aver luogo e dei quali appare anche espressione nella muta donde la ninfa di seconda forma esce individuo reale) anche un rimaneggiamento, più o meno profondo, dei T. M.

[2] Una tale struttura appare molto simile, se non identica, a quella descritta dal Veneziani in alcuni Ortotteri. Noto, di passaggio, che, molto prima del Veneziani, Grandis aveva descritto nella

Salvo questi tratti, che si trovano a uno stadio funzionale così poco avanzato e nei quali non si rinviene alcun solido corpicciuolo, i T. M. delle vecchie regine presentano nell'interno dell'epitelio ghiandolare, a struttura più o meno reticolare, numerosi gruppetti di concrezioni d'aspetto evidentemente solido, forma apparentemente irregolare, struttura probabilmente cristallina. Tali concrezioni non sono tutte simili (tav. I, fig. 7).

In qualche sezione di malpighiano spiccano concrezioni bianche, rifrangentissime, di forma varia, talora distintamente quadrangolari, tal'altra irregolari come frammenti più o meno arrotondati, talvolta infine regolarmente sferoidi con distinte linee radiali, veri sferocristalli (ved. tav. III, fig. 33). Ma nella maggior parte delle sezioni appaiono, nell'epitelio dei tubi, concrezioni tutte diverse, meno rifrangenti, gialle, di aspetto irregolare, ma nelle quali talvolta è possibile riconoscere forme poligonali cristalline.

Queste concrezioni appaiono, come ho già notato, nell'interno dell'epitelio, spesso anzi più raccostate ai nuclei.

Il lume, bordato da un orlo a spazzola ora basso e poco evidente, ora alto e ben distintamente striato, appare talvolta vuoto, tal'altra occupato da un fitto accumulo di gocce o bolle di secrezione, intensamente colorate dall'ematossilina, assai più grosse verso il centro del lume e che sembrano originarsi, in forma di minute goccioline, tra le ciglia dell'orlo a spazzola (ved. tav. III, fig. 34).

In queste sezioni di tubo (parlo di sezioni perchè i diversi tratti d'uno stesso T. M. presentano diversi aspetti morfologici corrispondenti a diversi stadî d'attività funzionale) il lume è più ampio e l'epitelio più sottile che non nelle sezioni a lume vuoto (ma che pure presentano nell'epitelio gruppi di concrezioni), nelle quali evidentemente non si è ancora iniziato il processo di escrezione.

Da questa minuta descrizione due osservazioni, a prima giunta strane, risultano: 1º) compaiono nell'epitelio ghiandolare numerose, anche grandette, concrezioni solide; 2º) mentre nel lume del tubo nessuna ne appare.

Fermiamoci un poco a considerare questa apparente incongruenza.

Secondo il Veneziani, «certo è che la cristallizzazione e la trasformazione in granuli solidi non avvengono dentro la cellula come è stato finora affermato. Quei granuli che vi si trovano, anche quando sono abbondantissimi e se possono ingannare colla loro forte rifrangenza, si riconoscono come costituiti di sostanze organiche e si differenziano da quelli di natura salina per la insolubilità nell'acqua anche bollente e negli acidi minerali diluiti, non che per la proprietà di colorarsi con l'eosina più spesso e, più di rado, con la tionina... Il materiale escreto fuoriesce dunque in forma fluida, come lo dimostrano le gocciole opaline che si vedono sulla punta delle ciglia dell'orlo a spazzola; e cristallizza dopo essere stato versato nel lume del tubo, forse per il lungo soggiornare dentro di esso» (*219*) [1].

---

cellula dei T. M. una *zona periferica* «limitata dal resto del corpo cellulare per una linea molto più marcata di quella esistente fra due cellule contigue», zona di cui «il protoplasma presenta una delicatissima striatura, cosicchè sembra formato da fibrille sottilissime, giustapposte, dirette secondo la direzione dei raggi del corpo cellulare» (*89*).

[1] Il Berlese è della stessa opinione. «Il contenuto figurato delle cellule escretive.... è in granuli, molto raramente e per eccezione in forme cristalloidi; però nell'un caso e nell'altro non si tratta

« Da qualcuno », nota pure il Veneziani, « è stato descritto e disegnato un contenuto di cristalli e di granuli solidi di natura salina nell'interno delle cellule ghiandolari (da Schinder, p. es., in *Blatta orientalis*). I tagli e le osservazioni accurate a fresco dimostrano però che si tratta di elementi fuori della cellula negli spazi intercellulari ».

Per mio conto io vedo. senza ombra di dubbio, concrezioni solide, cristalline entro le cellule dei T. M. delle mie vecchie regine. In sezioni longitudinali dei T. M. le cellule ghiandolari appaiono nettamente individuate ; in qualche tratto hanno forma piuttosto ovalare o tondeggiante e lasciano degli interstizi che sembrano colmati da una trama connettiva ove spicca qua e là qualche piccolo nucleo allungato granuloso (come se la sottile trama connettivale della tunica peritoneale si spingesse negli interstizi dello strato ghiandolare a meglio connetterne le cellule); in tal'altro hanno forma poligonale, prevalentemente esagonale, e s'incastrano perfettamente come le celle d'un favo. Al grosso nucleo centrale, tipicamente vescicolare, con nucleolo leggermente acidofilo (al qu le s'addossano, come alla membrana nucleare, granuli fortemente basofili), fan capo le brigl e protoplasmatiche, costituenti una rete grossolana, lungo le quali spiccano più o meno numerose concrezioni gialle cristalline (¹) (ved. tav. III, figg. 35 e 36).

È innegabile dunque la presenza di concrezioni solide nell'interno delle cellule ghiandolari. Ma come raggiungeranno esse il lume del tubo ?

---

di sostanze saline, quali poi si trovano nel lume del vaso o nel postintestino, ma di glomeruli di sostanze organiche (insolubili nell'acqua bollente e negli acidi minerali diluiti), probabilmente di natura proteica.

« Adunque le cellule dei malpighiani si comportano come un filtro, traverso il quale il plasma circolante — in cui non è possibile mai, neppure alla chimica, riconoscere sostanze escretive uriche — si libera di sostanze varie, che vengono elaborate nella cellula e di poi espulse dai vani fra le ciglia della faccia rivolta verso il canalicolo centrale del vaso dove finalmente ne rimane il puro contenuto salino da espellersi » (pag. 787).

(¹) Questa disposizione evidentissima mi spinge a credere esatte le osservazioni dello Schindler, tanto più che si tratta di insetti affini alle nostre Termiti, come i Blattidi.

In *Periplaneta orientalis* e *Blatta germanica* Schindler trova che « Auswurfsprodukte in fester Form beobachtet man stets, sowohl innerhalb des Centralcanals, als auch in geringer Menge in den Epithelien selbst » (pag. 604, *192*).... Sono concrezioni, grosse 0,001 mm., di urato di soda, con tutta probabilità; ed anche piccoli cristallini (lunghi 0,0002)

Oltre che per *Periplaneta europea* (tav. 38; figg. 4, 5, 6), Schindler figura concrementi intracellulari per *Gryllotalpa vulgaris* (figg. 8, 9), per *Cryptocephalus sericeus* (fig. 20), per *Lophyrus pini* (tav. 39, fig. 25), per *Eristalis florens* (figg. 34, 36), per *Pontia brassicae* (fig. 41).

Del resto, contro l'opinione di Veneziani, accolta dal Berlese, stanno le precise osservazioni del Verson sui T. M. del baco da seta. « A partire dal tronco comune di scarico s'incontra un lungo ramo dapprima dove i vasi renali, ampi ed opachi, hanno le cellule infarcite di materia cristallina; ed ingombro della medesima lo stesso canale...

« Più avanti, i tubi appariscono meno dilatati e il loro canale diventa pervio; le cellule principiano a differenziarsi, sebbene abbiano il protoplasma ancora riempiuto di tavolette cristalline che vi stanno accatastate come i libri nello scaffale... ».

Verson sospetta che « le porzioni distali dell'organo sieno destinate a versare nel canale in forma liquida la propria secrezione la quale, ripresa ed elaborata ulteriormente dalle cellule della porzione prossimale allo sbocco, vi si condensa sotto forma cristallina, e ne torna a uscire per deiscenza del protoplasma » (*223*).

Le cognizioni che ci sono pervenute dagli autori circa il modo di agire nella secrezione delle cellule ghiandolari sono molto incerte. Da Schindler è stato detto che si tratta d'una deiscenza della parte libera della cellula la quale si frammenta e cade nel lume con le granulazioni che conteneva. Egli stesso non dà però delle figure in cui tale fenomeno si presenti evidente. Il Veneziani afferma che nella maggior parte dei casi il meccanismo d'escrezione delle cellule ghiandolari dei T. M. è ben diverso. Il materiale in soluzione, penetrato nelle cellule dei tubi per l'assorbimento elettivo del protoplasma striato, è sottoposto all'azione del plasma, subendo forse modificazioni fisiche e chimiche, e fuoriesce poi in forma liquida dai canalicoli dell'orlo a spazzola.

Metalnikow (1908), studiando col metodo delle iniezioni fisiologiche di sostanze coloranti l'escrezione attraverso i T. M. dei bruchi di *Galleria Melonella*, distingue un primo stadio nel quale il materiale escretando (granuli e contenuto di vacuole) passa per osmosi traverso l'orlo striato ; un secondo stadio nel quale si formano prominenze vescicolari che si distaccano dal corpo delle cellule e cadono nella cavità del vaso (l'orlo striato sparisce e il corpo della cellula è quasi intieramente distrutto con tutti i prodotti d'escrezione e i condensatori di questi prodotti contenuti nel protoplasma); un terzo stadio nel quale avviene la rigenerazione delle cellule e la ricomparsa dell'orlo striato. « Il sérait intéressant », nota il Metalnikow che non cita nemmeno il Veneziani, « de savoir jusqu'à quel dégré ce mécanisme de sécrétion est commun à tous les insectes et j'espère combler cette lacune très prochaînement » (*155*).

E veramente nello studio degli insetti bisogna andare ben cauti colle generalizzazioni! Date le osservazioni di Schindler e Metalnikow, si direbbe che il Veneziani, il quale pure ha studiato largamente i T. M. dal punto di vista morfologico e fisiologico nei principali ordini di insetti, non abbia osservato se non i primi stadî di attività funzionale.

Nelle regine del *Termes* la comparsa di bolle d'escrezione nel lume del tubo, divenuto più ampio mentre è ridotta l'altezza dello strato epiteliale, sembrerebbe il prodotto iniziale d'una attività ghiandolare merocrina corrispondente al secondo stadio funzionale del Metalnikow e quale, fin dal 1878, Schindler ammetteva per *Gryllotalpa*. Ma io non ho mai veduto concrezioni solide nel lume del vaso e debbo supporre, o di non aver avuto sott'occhio la fase di vera e propria deiscenza delle cellule ghiandolari col loro contenuto figurato, solido nel lume del T. M., o che deiscenza non v'è e questo contenuto solido, concretatosi nelle cellule per una sovraconcentrazione (raggiuntasi per la sovrabbondante quantità di materiali escretandi assorbiti dall'emolinfa), ridivenga a poco a poco solubile e, sotto forma liquida, filtri traverso l'orlo a spazzola per raccogliersi nel lume (1).

(1) Non ho avuto materiale sufficiente (vecchie regine) per decidere la quistione. Noto che Bruntz spiega il mancato reperto di granuli solidi nel lume del sacculo in *Tisanuri* (eppure debbono cadervi per l'attività merocrina dell'epitelio) con una loro subitanea deliquescenza nel lume (*26*). Del resto, anche per gli animali superiori comincia appena adesso a diradarsi un poco il fitto velo di oscurità che avvolge i fenomeni intimi della elaborazione intracellulare (esperienze recenti han dimostrato nel tessuto renale fermenti uricolitici) e della escrezione esocellulare [Levigne (1905), studiando il modo di dializzare dell'acido urico, è venuto ad ammettere la possibilità della distruzione dell'acido urico semplicemente per il fatto della sua dialisi attraverso la cellula, p. es. attraverso l'orlo striato].

Resta ora da farsi la domanda più interessante.

In quale stato i materiali da espellere giungono ai T. M. ?

Senza dubbio sciolti nell'emolinfa (anch'io, come Veneziani, «non ho mai veduto granuli solidi nè alla superficie esterna dei tubi nè entro il sangue, e ciò anche quando tali granuli sono abbondanti nel tessuto adiposo»); e l'assorbimento, «segua le leggi fisiche della capillarità oppure, come è più probabile, vi si aggiungano coefficienti fisiologici non ben determinati, certo si fa in modo elettivo sui materiali dell'emolinfa, e solo alcuni di essi passano dentro la cellula ghiandolare» (Veneziani).

Allo stato liquido, dunque; ma, in quale forma chimica?

Si può anche supporre probabile – come nota il Veneziani – dopo quanto si è osservato nella escrezione dei Vertebrati, che i materiali estratti dall'emolinfa subiscano, dentro la cellula ghiandolare, modificazioni chimiche. Ma nulla sappiamo di positivo a questo proposito. Però le ricerche sperimentali col metodo delle iniezioni fisiologiche dànno una prova, per quanto indiretta, delle capacità elaborative dei T. M. Questi assorbono elettivamente l'indacocarminio e rifiutano d'assorbire il carminato d'NH_3 e il tornasole. Dunque i tubi malpighiani assorbono elettivamente, dall'emolinfa circolante, non tutte ma solo certe determinate sostanze escretande ; elettività, specializzazione fisiologica che mi pare non avrebbe ragione d'essere se l'escrezione consistesse in una semplice filtrazione meccanica e non piuttosto in un processo d'elaborazione chimica. «Si potrebbe pensare», dice Cuénot, «che tutti i reni ad indaco da una parte, tutti quelli a carminato dall'altra, debbano avere tra loro una certa omologia fisiologica; essi potrebbero essere incaricati in tutta la serie animale, dell'assorbimento d'un medesimo prodotto di disassimilazione o di prodotti vicini: è notevole infatti che nella categoria dei reni ad indaco le cellule fabbricano assai spesso sostanze chimicamente affini (acido urico, urati, urea, leucomaine xantiche ecc.), mentre nel gran numero dei reni a carminato, conosciuti sinora, non vi è un solo esempio di fabbricazione d'acido urico o d'urati» (pag. 55, *48*).

Mi pare dunque logico considerare i tubi malpighiani come organi escretori capaci di elaborare [1] certe determinate sostanze (ossalati, carbonati e talvolta forse anche

[1] Il Fabre nega ai T. M. ogni attività elaboratrice di prodotti catabolici ; di questi (egli del resto prende in considerazione i soli urati) solo organo elaboratore sarebbe il tessuto adiposo; e i T. M., organi essenzialmente biliari, potrebbero funzionare da ricettacoli temporanei o canali escretori per l'escrezione all'esterno, come spesso si verifica anche per il ventricolo chilifico: «ces différents organes renferment de l'acide urique aux mèmes titres. Ils l'ont reçu également du tissu adipeux ; ils servent à l'emmagasiner provisoirement; ils lui serviront plus tard de canaux vecteurs pour l'amener au dehors, pour l'excréter...» (pag. 366, *66*).

Anche il Veneziani sembra consideri i tubi malpighiani come semplici canali vettori per l'escrezione all'esterno. «Dopo una rivista dei fatti generali dell'uropoiesi negli Artropodi a tubi malpighiani, ci possiamo fare un'idea esatta del còmpito di questi tubi nella funzione renale. L'acido urico e i materiali d'escrezione non si fanno dentro di essi ma nei varii tessuti, e di qui passano con tutta probabilità nel sangue. Dal sangue vengono condotti all'esterno per le vie digerenti. I T. M. non ci rappresentano altro, dunque, se non regioni particolari dell'intestino meravigliosamente e più di tutte le altre adattate alla funzione escretrice. La tunica peritoneale si è fatta esilissima, permeabile ai liquidi..., e le fibre elastiche e muscolari si sono ridotte a pochi esili filamenti. Le cellule, invece, epiteliali si sono fatte grosse, s'imbevono facilmente... e più non sono coperte da apparati cuticolari ; non potrebbero quindi meglio servire all'estrazione, dal sangue, dei materiali di rifiuto. Tutto l'organo poi si spinge nei varii meandri delle

urati) ([1]) e di eliminarle poi tutte, anche quelle che non i T. M. stessi ma altri organi escretori, le cellule pericardiali ad es., hanno elaborato ([2]).

A parte le previsioni teoriche del Cuénot, esistono fatti che dimostrano la possibilità d'una escrezione, da parte dei T. M., di prodotti già elaborati dalle cellule pericardiche.

Abbiamo già avuto occasione di citarne un esempio: l'eliminazione finale dai T. M., in *Vanessa*, del pigmento rosso che, accumulatosi durante la metamorfosi nell'epitelio intestinale, passa poi nel sangue e viene assorbito dai leucociti-fagociti e dalle cellule pericardiali.

Ma il più bell'esempio ce lo offrono forse le nostre Termiti.

Nelle giovani regine abbiamo veduto i tubi malpighiani carichi di quelle concrezioni rifrangenti bianche, che, quale che sia la loro natura (urato di Na, ossalato di Ca od a tro , rappresentano probabilmente un materiale escretizio assunto dal plasma sotto forma chimica più o meno diversa ed elaborato in seno alla cellula ghiandolare.

Ma nelle vecchie regine, oltre e più che queste concrezioni bianche, compaiono concrezioni gialle, evidentemente della stessa sostanza che farcisce le cellule pericardiche e i tegumenti (prodotto ptialurico).

Originatasi, non ci siamo domandati ancora dove, in quali tessuti, tale sostanza fin dall'inizio della fase catabolica sessuale va accumulandosi nelle cellule pericardia i che evidentemente la estraggono dal sangue e la elaborano. Il fatto stesso dell'assorbimento

---

lacune in cui l'emolinfa è contenuta e moltiplica, o allungandosi o ramificandosi, la sua superficie in esatto rapporto con la massa dell'animale. Quando però, o per grande attività dei fenomeni di ricambio e quindi anche di dissimilazione (stadi larvali), o per condizioni particolari (ad es. l'involuzione dei tubi larvali all'avvicinarsi della ninfosi), più non possono bastare al loro ufficio, allora tutto il tubo digerente si presta a coadiuvarli oppure gli urati passano nell'adipe, nella cute e nelle sue ghiandole dove si accumulano e di dove vengono escreti» (*219*).

A questo proposito noto che nel ventricolo chilifico di giovani neotenici ho ritrovato sovente grossi cristalli tabulari, morfologicamente identici a quelli ottenibili trattando con cloralio l'urato di Na, e che quindi ritengo urici; ma, data la scarsità delle osservazioni, e l'apparente esigua entità di questo processo d'escrezione, importantissimo invece in molti gruppi d'insetti, non v'insisterò ulteriormente (l'intestino dei Termiti meriterebbe uno studio completo e a sè che ci permetterebbe senza dubbio di seguire nei suoi particolari l'anabolismo caratteristico dei neotenici. Oltre il fatto ben conosciuto dell'intestino posteriore ad ampolla cecale grandemente sviluppata, piena di Protozoi, negli alati sciamanti e nei giovani reali — mentre si riduce a porzione tubulare, e i Protozoi ne scompaiono, nei reali veri a piena maturità genitale, come nei reali neotenici — noterò che in questi ultimi il ventricolo chilifico è sede di una intensa attività secretoria merocrina mentre nei veri, nei giovani almeno, questa attività non è evidente; il che rende sospettabile che nella digestione del nutrimento legnoso abbia sopratutto importanza l'intestino posteriore).

([1]) Vedremo più innanzi che gli urati in genere hanno origine nel tessuto adiposo. Ma potrebbe darsi che in qualche caso venissero fabbricati dai T. M. Perchè dovremmo meravigliarci se lo stesso prodotto escretizio, in varie specie d'insetti, potesse essere elaborato da varî organi? Nei Mammiferi che pure presentano tanto meno ricca varietà di manifestazioni fisiologiche, non vediamo forse l'acido ippurico fabbricato esclusivamente dal rene nel cane (Schmiedeberg e Bunge) mentre nei conigli nefrotomizzati (Salomon) se ne ritrova abbondante, dopo iniezione di acido benzoico, nel fegato, nei muscoli e nel sangue?

([2]) Come per i reni dei Mammiferi, insomma, che escretano urea filtrata come tale dal sangue, perchè già fabbricata dal fegato, e acido ippurico di cui compiono essi stessi (esclusivamente o come pure altri organi) la sintesi dalla glicocolla e acido benzoico del sangue.

elettivo da parte delle cellule pericardiali dice trattarsi d'una sostanza di composizione chimica inaccessibile alla attività elaboratrice dei T. M.

Quale significato ha dunque la presenza delle concrezioni ptialuriche nei T. M. dei vecchi reali? Il prodotto catabolico ha raggiunto nel plasma circolante una concentrazione tale da vincere la riluttanza elettiva delle cellule ghiandolari e penetrarvi e concretarvisi? E veramente la disposizione endocellulare delle concrezioni solide, mancanti invece nel lume dei T. M., mi aveva fatto pensare ad una accoglienza passiva del materiale escretizio nei T. M. che verrebbero a funzionare non più da reni ma da tessuti d'accumulo. Senonchè la presenza d'una simile disposizione in insetti affini (Blattidi ed altri Ortotteri) e gli indizi d'una attività merocrina delle cellule ghiandolari mi inducono ad abbandonare questa supposizione; mentre tutto quello che si sa intorno alle attività specifiche funzionali delle cellule pericardiali e dei T. M. mi induce ad ammettere che, solo dopo fabbricato dalle cellule pericardiali (che l'estraggono dal sangue sotto una forma chimica più o meno diversa) e rientrato solubile in circolo, il prodotto ptialurico venga assorbito, per esserne escretato, dai T. M.

Il tessuto adiposo.

L'esame *in toto* delle vecchie regine di complemento del *Termes* ci mostrava, oltre le macchioline nere dei tegumenti e gli accumuli pericardici e le granulazioni dei malpighiani, una finissima polvere pigmentata sparsa per tutto il corpo, dorsalmente come ventralmente, e più evidente nelle regioni laterali degli interterghi.

Dalle sezioni si riconosce trattarsi del tessuto adiposo, tutto punteggiato di granuli gialli, inquinato anch'esso del solito prodotto ptialurico. Le cellule adipose, fortemente tingibili all'ematossilina, nettamente individuate da confini cellulari, di forma piuttosto allungata, si inseriscono colla base ai fascicoli d'uno stroma connettivale e s'ingranano più o meno per gli apici alle cellule vicine, lasciando notevoli spazi intercellulari. Talvolta plurinucleate (con due o tre nuclei, spesso di diversa grandezza, lungo la cellula), le cellule adipose contengono, di solito, nella porzione basale allargata, il nucleo, più o meno grande, vescicolare, ovalare o tondeggiante, con grosso nucleolo debolmente acidofilo e fitte granulazioni cromatiche, in parte addossate alla membrana. Il citoplasma presenta una struttura finemente reticolare, a piccole maglie che erano verosimilmente riempite di grasso; in qualche vacuola, sovente più daccosto al nucleo, spiccano grumetti di granuli gialli, concrezionule per colore ed aspetto tutte simili a quelle dei T. M. Nella maggior parte delle cellule adipose (non in tutte) son contenuti questi granuli ptialurici e in tutte le parti del corpo, nel torace e nell'addome, nelle regioni dorsali e nelle ventrali, lateralmente e sulla linea mediana (ved. tav. III, fig. 45).

Nelle giovani regine di complemento il tessuto adiposo ha tutt'altro aspetto. È pure intensamente tingibile con l'ematossilina, ma non appaiono netti limiti cellulari. Ogni lobo adiposo sembra costituire un sincizio a nuclei più o meno fittamente distribuiti (secondo la data più o meno recente di formazione, giacchè nei giovani reali avviene una proliferazione abbondante del tessuto adiposo) tra una rete citoplasmatica le cui maglie, più strette verso il centro del lobulo, erano evidentemente riempite da materiale grassoso,

(Non si vede traccia di inclusioni albuminoidi, se non forse in minuti granuli basofili aggruppati talvolta al centro d'un lobulo).

Nel tessuto adiposo delle giovani regine di complemento non appare sorta alcuna di concrezioni o depositi urici; e così pure nelle giovani regine da alato bianco, nelle quali però il tessuto adiposo ha un aspetto tutto diverso, dato dalla sostituzione d'un vero tessuto adiposo reale all'imaginale dell'insetto perfetto [1] (ved. tav. I, fig. 8).

Nella ninfa di seconda forma il tessuto adiposo è abbondantemente irrorato dall'emolinfa (granulosa eosinofila nelle sezioni), ricca di cellule migranti, circolanti tra l'intestino e il tessuto adiposo e tra questo e i tegumenti ed anche, in sottili rivoli, tra i lobuli adiposi stessi (ved. tav. III, fig. 31). Le cellule sono grandi, a contorni abbastanza ben definiti, a nucleo grande, di solito eccentrico, con nucleolo acidofilo e granuli basofili su rete cromatica. Qualche nucleo più grande, binucleolato, accenna probabilmente a una divisione amitotica. Nelle maglie, assai larghe, d'un'esile rete citoplasmatica spiccano numerosissime grosse e piccole inclusioni poligonali, intensamente eosinofile. Sono disposte specialmente lungo le briglie citoplasmatiche; molte, piccole, sono generalmente ammassate attorno ai nuclei.

Al centro però del lobulo adiposo una o poche cellule mostrano un ben diverso aspetto. Nucleo piccolo (un tre volte meno grande dei comuni nuclei adiposi), di forma piuttosto irregolare: di solito unico e centrico, ma talvolta se ne vedono due senza netto limite cellulare. Rete citoplasmatica fitta, a maglie poligonali, piccole, ai nodi delle quali una attenta osservazione rileva scarse e minute inclusioncelle rosee. Si tratta di cellule uriche che vanno accumulando i prodotti della digestione degli albuminoidi (nella tav. III, fig. 38, le concrezioni uriche, disciolte si nella preparazione, non sono rappresentate).

Il tessuto adiposo dei reali neotenici merita uno studio speciale completo, da me non compiuto; ma già i tratti generali suddescritti mostrano in esso tessuto l'espressione fedele dello stato fisiologico generale.

Nella ninfa di seconda forma (stadio essenzialmente anabolico nel metabolismo dei reali neotenici) il materiale nutritizio sovrabbondante, assorbito dall'intestino e versato nel circolo, viene in parte accumulato nel corpo grasso (che diventa piuttosto un corpo albuminoide).

Nel vecchio reale di complemento (stadio essenzialmente catabolico) invece, esaurite le provviste plastiche, non resta se non del materiale dinamogeno (grasso), e le cellule adipose vanno piuttosto ingombrandosi di prodotti escretizi. Chè come tali indubbia-

[1] Come tessuto adiposo reale mi sembra anche doversi interpretare il suddescritto nei vecchi complementari. Secondo Feytaud, i neotenici « ne présentent pas, comme les sexués royaux, un tissu adipeux royal bien caractérisé ; mais il existe, chez eux, une tendance vers cette transformation. La différence que présentent, à ce point de vue, les deux catégories des sexués peut provenir, soit de la durée plus courte de l'existence des sexués néoténiques, soit d'une plus grande lenteur de leur transformation; elle peut être encore une question de nature, ces sexués conservant des caractères larvaires tant au point de vue anatomique qu'au point de vue de l'aspect extérieur ». (pag. 590, *69*).

mente debbono riguardarsi i granuli gialli del tessuto adiposo, come dei tegumenti, delle cellule pericardiali e dei tubi malpighiani.

Ora, come interpretare tale presenza di depositi ptialurici nel tessuto adiposo dei vecchi complementari? Estrae forse il tessuto adiposo, per assorbimento elettivo, dal plasma circolante i materiali escretizi, fungendo da rene di accumulo? O non piuttosto, giacchè l'inquinamento del tessuto adiposo ha luogo quando già tutto il corpo è ingombro di depositi urici, il tessuto adiposo è passivo nel fenomeno e i materiali escretizi che sovrasaturano ormai il plasma circolante penetrano, più per legge osmotica che non per una attività particolare biologica, nelle cellule adipose e vi si concrezionano? In ogni modo, secondo ogni probabilità, le cellule adipose dei vecchi complementari assumono già elaborato, sotto la forma chimica definitiva insomma, il materiale escretizio.

In altri casi invece, che avremo più innanzi occasione di studiare, c'è ragione di credere a un fenomeno opposto.

* * *

Il problema della funzione del tessuto adiposo nella secrezione urinaria degli insetti, problema fondamentale per la fisiologia del ricambio, ha già una storia lunga e interessante. Credo opportuno fermarmi ad analizzarla.

Henry Fabre genialmente nel 1856 pone e nel 1863 risolve la questione.

Studiando costumi e metamorfosi di Imenotteri predatori (Sfegidi), Fabre osserva nella larva, sbocciata da qualche giorno dall'uovo, la comparsa di fine punteggiature d'un bianco cretaceo, le quali, aumentando rapidamente di numero e volume, finiscono per invadere tutto il corpo. La dissezione mostra trattarsi di utricoli in seno al tessuto adiposo ripieni, invece che di grasso, d'un materiale pulverulento che si rivela alle reazioni per urato d'ammonio.

Anche più ricco ne diviene il tessuto adiposo nel periodo della ninfosi, e ancora pieno ne è l'addome dell'adulto; ma, in questo, il materiale urico passa nel ventricolo chilifico e nel retto e viene eliminato per deiezioni prima dell'uscita dal bozzolo.

Nelle larve di Imenotteri a regime vegetale Fabre non trova depositi urici nel grasso, ma sì vi appaiono, come del resto in tutti gli insetti, nel periodo della ninfosi. E già nel 1856 conclude che « dans les larves carnassières actives, mais qui n'ont pas encore de voie ouverte à l'écoulement des résidus du travail vital (1), les cellules adipeuses

(1) In esse larve è intercettata la comunicazione del ventricolo coll'intestino e non è possibile la deiezione di alcuna escrezione solida; così che «l'acido urico, non potendo venire eliminato man mano che si forma, non trovando via d'uscita, si accumula nel corpo adiposo che serve così di serbatoio comune ai residui del lavoro organico precedente e alle sostanze plastiche destinate alle trasformazioni future. Avviene qualche cosa di analogo a quello che ha luogo negli animali superiori dopo la ablazione dei reni: l'urea, contenuta dapprima in quantità insensibile nel sangue, vi si accumula e diventa manifesta quando le vie di scolo gli son tolte» (pag. 170, *65*). In altre larve di varii ordini, carnivore (*Hydrophilus*) ed erbivore (*Attacus*), durante il periodo di attività non si rinviene acido urico nel grasso; evidentemente si elimina man mano che si forma. « Ma, durante il lavorio della metamorfosi, ogni escrezione divenendo impossibile, l'acido urico deve ammassarsi ugualmente nel corpo adiposo delle diverse larve, ed è ciò che difatti avviene ».

recèlent en dépôt l'acide urique formé; et dans toutes, sans distinction d'organisation et d'alimentation primitives, le même fait se reproduit pendant les profonds travaux de remaniement de la métamorphose, ou du passage à la forme adulte» (pag. 172, *65*).

Ma Fabre estende ancora le sue ricerche (1863) e nelle larve di Eumenidi, imenotteri anch'essi predatori, trova il tessuto adiposo vuoto di prodotti urici che riempiono invece i T. M., e il ventricolo chilifico; e in larva di Vespa trova granulazioni uratiche nel tessuto adiposo e nei T. M., mentre mancano nel ventricolo chilifico.

Quest'ultimo è dunque un ricettacolo temporaneo, una vescica urinaria occasionale, e i T. M. stessi non sono se non semplici tubi vettori: al tessuto adiposo invece va riconosciuta la funzione di secrezione dei prodotti urici stessi.

« J'entends ici par sécrétion, non le passage direct de l'acide urique qui pourrait préexister dans le sang, à travers la trame des cellules adipeuses, mais bien l'elaboration de ce principe dans les cellules elles-mêmes, aux dépens de quelques substances que le sang y amène pour une ultime oxydation. Qui nous dira en effet si ce n'est pas dans le réseau cellulaire de ce tissu que s'effectue l'épuration du sang, et l'oxydation dernière des matériaux rejetés de l'organisme? Les innombrables ramuscules trachéens qui plongent dans cet organe, en l'absence d'autres motifs, le feraient tout d'abord soupçonner. J'insiste encore sur ce point: refusez au tissu adipeux la fonction que je lui attribue, accordez-lui simplement le rôle d'un filtre qui tamise le sang pour en extraire les produits urinaires, et immédiatement, contraints par les faits d'accorder le même rôle au ventricule et aux tubes malpighiens, vous arrivez à une multiplicité inadmissible d'organes tout différents pour un même travail. A mon avis donc, l'acide urique se forme sur place dans la trame cellulaire du tissu adipeux. Il est bien entendu qu'en admettant cette manière de voir, je ne conteste nullement à cet organe la fonction qu'on lui a depuis longtemps reconnue: celle de servir de réservoir aux matériaux plastiques amassés par la larve pour les besoin futurs de la nymphose » (pag. 365, *66*).

Secondo Fabre dunque, il tessuto adiposo è un organo urinario ove il sangue si depura per formazione in sito di prodotti urici dai materiali di rifiuto dei quali dev'essere sbarazzato: sia che i prodotti urici rimangano nella trama adiposa ove si son formati (quasi tutte le larve carnivore d'Imenotteri, a corpo adiposo abbondante), sia che vengano evacuati man mano che si formano nel ventricolo e nei T. M. (Eumenidi, a corpo adiposo esiguo) ([1]).

([1]) Quanto all'origine del materiale di rifiuto disciolto nel sangue e dal quale il tessuto adiposo elabora i prodotti urici, Fabre lo considera genericamente come « le residu des mutations vitales » e tende a metterlo in rapporto al regime alimentare animale. « La natura dell'alimentazione della larva deve infatti influire, durante il periodo attivo, sulla formazione, più o meno abbondante, dell'acido urico; può anche essere che nelle specie a regime vegetale questa formazione sia nulla. Ma queste differenze spariscono all'epoca della ninfosi; e tutte le larve, essendo ugualmente sottomesse ad una astinenza completa, devono per questo fatto stesso comportarsi come sotto l'influenza d'un regime animale e produrre acido urico ». Più tardi (1863), rilevando che larve mellivore di Imenotteri, pur non rigettando alcuna escrezione solida, come le larve di predatori, non presentano tessuto adiposo tigrato di punteggiature uriche, Fabre riflette: « Qu'y a-t-il d'étonnant en cela? Le régime ne doit-il pas entrer en ligne de compte? Pouvons-nous attendre à retrouver infailliblement, dans des larves se nourrisant d'une pâtée végétale, les nodules uriques qui se montrent en si grand nombre dans les

Ma, di fronte alla disseminazione che della funzione renale sembra avvenire negli insetti, Marchal (1890) preferisce ammettere che non solo la eliminazione ma anche la secrezione dei prodotti urici possa essere devoluta agli organi più diversi. « Chez les Insectes il semble donc que la fonction urinaire soit mal localisée et chez eux la division du travail physiologique n'est pas sur ce rapport poussée assez loin pour qu'un seul et même organe soit toujours chargé de la même fonction » (*145*). I tessuti più diversi, secondo Marchal, ma specialmente il tessuto adiposo, sono deputati alla funzione uropoietica; quanto ai T. M., essi rappresentano senza dubbio l'organo principale della depurazione urinaria e non è se non accessoriamente o in via temporanea che altri organi o tessuti (come il corpo adiposo, il tessuto ipodermico, il tegumento, il ventricolo chilifico e i ciechi ventricolari) possono servire ad analoga funzione e contribuire all'eliminazione o all'immagazzinamento dei rifiuti dell'organismo (*145* e pag. 345, *148*).

Cuénot (1895), nei suoi studi fisiologici sugli Ortotteri, pone tra gli organi escretori le cellule uriche del corpo adiposo, riconosce loro una funzione di rene d'accumulo, ma non si pronuncia esplicitamente sulla loro facoltà elaboratrice o meno dei prodotti urici: « On voit, comme l'avait avancé Fabre, que les cellules uriques du corps adipeux jouent un rôle des plus importants comme rein d'accumulation, pour tout ou partie des urates provenant da la désassimilation azotée de l'organisme; elles sont exactement comparables aux divers reins d'accumulation des Ascidies » (*50*).

Secondo Veneziani (1905), l'acido urico e i materiali d'escrezione non si formano dentro gli organi escretori ma nei varii tessuti, e già elaborati, dunque, passano nel sangue: gli organi escretori non fanno se non eliminarli, se comunicano all'esterno come i T. M., o altrimenti accumularli, come fa il tessuto adiposo.

Quanto all'origine intima dei materiali urinari — che Fabre considera « le residu des mutations vitales », Marchal chiama ancor più genericamente « les dechets de l'organisme » e Cuénot afferma « provenant de la désassimilation azotée » e Veneziani vuole « formantisi nei varii tessuti » — evidentemente, secondo questi autori, i materiali urinarî sono tipici prodotti catabolici, ceneri delle combustioni organiche.

Berlese (1899-1901), trattando i fenomeni della ninfosi degli insetti metabolici, fa uno studio profondo ed esteso del tessuto adiposo, del quale riconosce l'alto valore funzionale nell'economia dell'insetto (trofocito) e l'attività varia nei varî stadii fisiologici dello stesso individuo (*9*).

---

larves vivant de proie? N'est-ce pas le contraire qui est le plus probable? Ebbene, questa probabilità potrebbe equivalere alla certezza, giacchè le mie note e i miei ricordi non mi dicono niente sulla presenza di queste punteggiature nelle larve mellivore » (*66*).

Ma Semichon, studiando le Mellifere solitarie (*Antophora*, *Osmia*), trova che le cellule a urati appaiono precocemente, come negli Imenotteri carnivori. I prodotti di escrezione vi si depositano, allo stato solido, poco dopo la sortita dall'uovo, e aumentano di volume a misura che la larva, nutrendosi di cibo vegetale, miele e polline, cresce: durante la vita attiva larvale, dunque, mentre nel periodo di vita rallentata (ibernazione) le cellule a urati sembrano inattive. Se si priva di alimento la larva durante il periodo di accrescimento, s'accelera il deposito degli urati. Questo fatto Semichon lo mette in rapporto non coll'astinenza (onde autofagia equivalente a regime animale) ma coll'attività muscolare insolita della larva digiuna. Conclude: « « La formation et l'accroissement des dépôts d'urates ont lieu surtout durant la vie active larvaire et sans qu'il ait ingestion de matières animales » (*194*).

Riconosce il Berlese che il tessuto adiposo rappresenta non solo la sede dei depositi di materiali di riserva, grassi e albuminoidi (dinamogeni e plastici), ma ancora la sede di depositi escretizî, qualora meno prontamente essi possano essere eliminati col concorso degli organi a ciò destinati; ed attribuisce a questi depositi escretizi, che il tessuto adiposo provvisoriamente trattiene fungendo da rene d'accumulo, origine varia. Egli ritiene che, nel caso di larve viventi negli escrementi ed urine di animali superiori, i depositi urici del grasso provengano dal cibo e sospetta che anche i ricchi depositi urici nel grasso di larve insettivore possano provenire dalle vittime, almeno in parte.

In altri casi i depositi urici del tessuto adiposo, secondo Berlese, derivano «dalle reazioni che avvengono entro il corpo nei varii organi dell'insetto» (Formiche, Zanzare, ecc.); il plasma circolante se ne lascia impoverire per opera delle cellule grasse le quali così fungerebbero come altrettanti reni e conserverebbero in sè i detti prodotti escretivi sempre o fino al momento di potersene liberare.

Ma nella maggior parte dei casi (quasi tutti gli insetti metabolici) i depositi urici del tessuto adiposo derivano «dal lavoro digestivo degli albuminoidi che le cellule stesse compiono durante la ninfosi (in questo caso si tratta sempre di concrezioni sferoidali d'urati)». In esse cellule «la sostanza albuminoide insolubile e di recente assorbita si mescola ad un enzima da considerarsi quale un succo analogo a quello pancreatico ed a quello delle ghiandole del Galeati». Ne risulta un peptone solubile il quale si discioglie veramente a poco a poco e fuoriesce dalla cellula digestiva; ma da questa trasformazione si ottiene un residuo urico, solido o liquido, che o rimane nella cellula o viene espulso più tardi.

Questa vera e propria digestione endocellulare — tipica delle cellule digestive del Mesenteron negli Aracnidi (*8*) — Berlese la ritrova con sicurezza solo nei Ditteri superiori, nei quali i prodotti residuali della digestione sembrano essere fluidi, giacchè egli mai potè riconoscerli.

Nella maggior parte degli altri insetti «l'opera di digestione intracellulare da parte del grasso o viene meno o è meno facile a riconoscersi», le sostanze vengono assunte dalle cellule adipose già elaborate dal mesenteron allo stato di peptoni, e nelle cellule adipose dissolvendosi abbandonano i residui urici ([1]).

([1]) «Questo residuo urico», riflette Berlese, «deve essere parte della guttula di peptone o in essa trovarsi disciolto perchè si trova anche nelle cellule non digerenti ma che immagazzinano sostanza elaborata già venuta dall'intestino. Ciò ad es. nei Coleotteri da me veduti; quindi o esso preesisteva nella sostanza albuminoide prima della sua digestione, oppure esso è un prodotto della digestione medesima. Per quello che ne vuole la chimica, bisognerebbe forzatamente riportarsi alla prima condizione e non sarebbe difficile adattarvisi quando si tratta di forme carnivore per le quali si può agevolmente credere che il succo esaurito delle vittime possa, essendo plasma circolante, contenere prodotti escretivi. Ma per le forme vegetariane ciò non è supponibile; eppure il classico esempio della Pieris, nella quale le cellule adipose si arricchiscono cotanto di prodotti urici derivati dalla digestione della sostanza stravasata dal mesenteron, fa inclinare alla seconda ipotesi».

È evidente che Berlese stesso non riesce a liberarsi completamente dal preconcetto che i materiali urici debbano sempre rappresentare prodotti catabolici, della disassimilazione: e, malgrado tutte le sue ricerche, dubita ancora se si tratti veramente d'un prodotto della digestione medesima. Sul che a me pare non dovrebbe più aversi alcun dubbio nè credo affatto che la chimica non possa ammettere una tale origine dei prodotti urici.

Dato che, anche negli animali superiori, oltre l'acido urico endogeno, dipendente dalla disinte-

« Talora si rinvengono solo questi ultimi. Per questo può essere nata confusione da parte degli anatomici che, rinvenendo prodotti urici nel grasso di animali diversi, considerano questo tessuto come sede di speciali funzioni le quali dovrebbero avere per effetto la pulizia del sangue, funzione quindi renale o di deposito dei prodotti da espellersi ».

« Può ben essere che si tratti invece di tutt'altra funzione, nel senso indicato di sopra ».

Questi concetti del Berlese sull'origine dei depositi urici nel corpo grasso degli insetti vengono confermati dalle ricerche di Hollande (1914) sulla formazione endogena dei cristalloidi albuminoidi e degli urati nelle cellule adipose dei bruchi di *Vanessa io* e *urticae*. Iniettando nei Bruchi solfoindigotato di soda e carminato d'ammoniaca, queste sostanze coloranti, che sembrano nell'organismo animale comportarsi come prodotto di rifiuto della vita cellulare, non vengono eliminate dalle cellule adipose. Di più, iniettando urato d'ammonio o di sodio in soluzione acquosa e satura, le cellule adipose, che già cominciavano a caricarsi degli urati endogeni, non presentano alcun aumento di urati in confronto alle cellule di individui controllo della medesima età; i tubi di Malpighi invece si presentano riempiti di granulazioni uriche, il che dimostra che il loro funzionamento persiste lungo tempo ancora dopo la comparsa di urati di soda nelle cellule adipose e che queste quindi non funzionano da rene supplementare dei tubi malpighiani.

« Si les cellules adipeuses des chenilles de Vanessa ne fonctionnent pas comme des cellules excrétrices, si le dépôt des urates qu'elles peuvent renfermer n'est pas sous la dépendance du fonctionnement des tubes de Malpighi, il faut donc accorder à ces cel-

---

grazione dei nuclei cellulari, si ha un acido urico esogeno proveniente dalla alimentazione: dalla scissione delle nucleine introdotte con gli alimenti risultano basi puriniche, e prodotto d'ossidazione di queste è l'acido urico.

Secondo Berlese, per i Lepidotteri « è lecito sospettare una digestione intracellulare dei depositi albuminoidi nel seno delle cellule adipose per parte delle cellule stesse. I prodotti urici derivati da questo lavoro sono solidi e rimangono in posto entro la cellula per un tempo più o meno lungo ».

Per gli Imenotteri « sembra che possa essere detto esistere una digestione intracellulare dei depositi albuminoidi in seno alle cellule adipose. I prodotti urici derivati comunque sono raccolti entro cellule speciali a sè o regioni specializzate delle cellule grasse e quivi si concretano in granuli. Esistono adunque delle cellule uriche o escretrici che forse sono enociti adattati a questo ufficio ».

Per i Coleotteri « non sembra che esista digestione intracellulare nelle cellule adipose, o essa è certo molto ristretta e di difficile percezione. I globuli albuminoidi depositati nel grasso sembrano composti di sostanza già elaborata dal tubo digerente. I depositi urici, derivati dalla dissoluzione dei granuli raccolti nelle cellule adipose, sono solidi per un lungo tratto di tempo e rimangono abbastanza nelle cellule adipose tanto da esser percepiti » (particolarmente nelle distali; non esistono cellule uriche, nè gli enociti si caricano di prodotti urici solidi).

I Neurotteri terrestri, carnivori e predatori, « avendo chiuso il piloro sino nell'adulto e non agendo i loro malpighiani come organi escretori, fanno abbondanti depositi urici nel grasso, specialmente nelle masse distali ». Nei Neurotteri acquatici « non esistono depositi urici nè diversità fra il grasso, prossimale e il distale » (*9*).

lules le pouvoir de former les urates de soude qu'elles contiennent ; en d'autres termes les urates de la cellule adipeuse n'ont pas une origine exogène, mais bien une origine endogène. L'étude microchimique des inclusions albuminoïdes des cellules adipeuse et la connaissance des leur mode de formation va, en effet, nous montrer d'ou dérivent ces urates » (pag. 564, *109*).

(Hollande giustamente rileva che il fatto dell'accumulo di prodotti urici nel corpo adiposo non giustifica la denominazione di « rene d'accumulo » data a quest'organo, visto che l'origine di detti prodotti è generalmente endogena. Ma è questione d'intendersi. Già Fabre, genialmente intuendo che il tessuto adiposo è sede di formazione dei prodotti che vi s'accumulano, riconosceva che il termine di « rene » non è molto proprio e lo usò in mancanza di meglio. Berlese, dimostrata l'origine per lo più endogena degli urati, sèguita a considerare il tessuto adiposo come rene d'accumulo. Pérez recentemente dichiara: « que ces cellules aient puisé les urates dans le sang ou qu'elles les aient elles-mêmes fabriqués, il me semble qu'elles méritent bien, par le fait qu'elles ont emmagasiné des urates, le nom de *rein d'accumulation* » [pag. 10, *175*]).

È all'approssimarsi della ninfosi che nelle cellule adipose compaiono granulazioni d'urato di soda e cristalloidi albuminoidi. Questi ultimi, intensamente acidofili, appaiono dalle reazioni come « formés de substances albuminoïdes en voie de digestion (mélange d'albumoses secondaires et de peptones), autrement dit, comme constitués par un groupement complexe de polypeptides biurétiques contenant encore les groupes tyrosine, tryptophane et glycocolle ». Essi si formano nella cellula adiposa a spese di sostanze albuminoidi contenute in vacuole colorabili elettivamente al lichtgrün e che derivano a lor volta dalla trasformazione di inclusioni albuminoidi basofile (sostanza cromatinoide) del gruppo dei nucleoproteidi. « Dès lors, la formation des urates de soude et des cristalloïdes albuminoïdes dans le protoplasma des cellules adipeuses s'explique facilement Sous l'influence de ferments — dont Berlese avait déjà supposé l'action — sécrétés par la cellule adipeuse, les nucléoprotéides des substances chromatinoïdes, figurées sous la forme d'inclusions basophiles dans le cytoplasme de la cellule adipeuse, sont peu à peu transformées pour donner naissance à des protéines qui se colorent électivement par le lichtgrün... ; au cours de ces dégradations moléculaires les acides nucléiques formés aboutiront au terme final d'acide urique qui se déposera sous la forme d'urates de soude tout autour du noyau. Quant à la localisation périnucléaire des premières granulations uriques, de même que la production tout autour du noyau des crystalloïdes albuminoïdes primitifs, elles semblent nettement indiquer que le noyau participe activement dans l'élaboration des ferments qui entrent en jeu lors du dédoublement des matières albuminoïdes considérées » (pag. 569, *109*) (1).

(1) Come dimostrò per Muscidi Berlese (*9*).

Secondo Pérez: « Bien vraisemblablement le noyau a, dans ce processus, comme dans toute l'activité physiologique de la cellule, un rôle actif; mais bien loin de croire, avec Berlese, que son action consiste à digérer une substance prise à l'extérieur, et à l'emmagasiner dans la cellule sous forme peptonisée, je pense, tout au contraire, que nous sommes ici en présence d'un phénomène analogue à celui de toutes les mises en réserve: l'absorption d'un élément peptonisé, et sa condensation dans la cellule, suivant un processus chimique qui est juste l'inverse de la digestion » (pag. 214, *173*). (In una recente nota [1920, *175*] Pérez fa rilevare che Hollande ha in parte frainteso

Ma le belle ricerche del Berlese e dell'Hollande non sembrano convincere gran che madame Hufnagel (1918) la quale, nel suo studio sulla metamorfosi di *Hypomeneuta*, citando l'opinione del Berlese, secondo la quale una digestione intracellulare delle riserve albuminoidi ha luogo e ne provengono urati che rimangono più o meno a lungo all'interno della cellula, nota:

« On pourrait se demander si les urates sont réellement dûs à la digestion des produits albuminoïdes et s' ils ne faudrait pas plutôt regarder les cellules adipeuses comme

---

le sue osservazioni sulle inclusioni delle cellule grasse degli insetti durante la metamorfosi. A me sembra che a sua volta Pérez non abbia ben compreso le ricerche e le idee del Berlese).

Anche Bishop, che ultimamente (1922) ha studiato molto bene i cangiamenti citologici che accompagnano l'accrescimento e l'istolisi del corpo adiposo di *Apis mellifica*, attribuisce attività enzimatica a materiale di origine nucleare che si diffonde nel protoplasma in rapporto evidente col metabolismo del grasso. Al principio della ninfosi, nelle cellule del tessuto adiposo « la membrana nucleare sparisce e le vacuole grassose periferiche s'avvicinano al nucleo; infiltrandosi tra di esse, granuli di materiale basofilo fuoriescono dall'area nucleare e invadono il citoplasma come condriosomi. Assorbendo progressivamente la matrice citoplasmica circostante e le vacuole grassose, questi granuli finiscono collo svilupparsi in globuli, contenenti materiale albuminoide, che poi, per dissoluzione delle pareti cellulari, vengono scaricati nel sangue » (pag. 568, *12*). (I granuli, prima basofili come nucleoli, man mano che s'ingrandiscono, a spese del citoplasma e delle vacuole, si colorano sempre meno intensamente finchè divengono sfere acidofile vacuolate al centro e rivestite perifericamente di una corteccia di granuli basofili). « Considerata in varî ordini d'insetti, questa metamorfosi nucleare appare evidentemente correlata al tipo di metabolismo larvale, nel senso che è tanto più profonda quanto più la nutrizione è intensa e lo sviluppo larvale rapido » (pag. 550, *13*).

Secondo Bishop, le sostanze azotate del polline « vengono presumibilmente accumulate come nucleoproteidi nella cromatina nucleare e granuli cromatoidi, e come più semplici proteine nella matrice acidofila citoplasmica. Nello sviluppo dei granuli albuminoidi i granuli cromatoidi del nucleo, le proteine del citoplasma e il grasso delle vacuole sono tutti utilizzati e trasformati... Sicchè i globuli albuminoidi rappresentano l'elemento della cellula dove avvengono le trasformazioni chimiche per le quali tutti i costituenti cellulari (eccetto forse il nucleo residuale) si riorganizzano nella forma chimicamente più adatta all'impiego istogenetico » (pag. 594, *12*). « Se si considera l'accrescimento del tessuto adiposo come un processo anabolico di accumulo di sostanze nutritizie per lo sviluppo imaginale, e la dissoluzione dei globuli albuminoidi come il corrispondente processo catabolico, la trasformazione delle sostanze cellulari — il grasso delle vacuole, la matrice citoplasmica e i granuli nucleari — nella forma comune di globuli albuminoidi rappresenta uno stadio intermedio del metabolismo intracellulare, ciascuna cellula fisiologicamente costituendo in certo modo un *sistema chiuso* » (Resumen, *12*).

Dunque, secondo Bishop, le inclusioni grassose vengono utilizzate come materiale nella costituzione dei globuli albuminoidi. Questa opinione sostenne fin dal 1910 Pérez. Osservando in diversi insetti che « durante la ninfosi si constata una diminuzione relativa del grasso in confronto alle granulazioni eosinofile, ed invece, alla fine della ninfosi e durante i primi tempi della vita imaginale, è il fenomeno inverso che si realizza (le inclusioni albuminoidi spariscono a poco a poco mentre le gocce di grasso ridivengono più abbondanti) », suggerisce, per render conto di questi due processi inversi, che « il grasso può essere uno degli elementi primi utilizzati dalla cellula per la sintesi dei globuli albuminoidi, e in seguito può essere uno degli elementi derivanti dalla digestione di queste stesse inclusioni » (pag. 7, *173*). Nella Memoria sulle Vespe, Pérez afferma: « Une chose, en tout cas, est manifeste: c'est la diminution relative de la graisse pendant que les cellules se chargent ainsi progressivement d'inclusions albuminoïdes et dont la nature complexe rappelle sans doute plutôt la composition chimique des substances vitellines » (1911, pag. 37, *174*).

des organes excréteurs jouant ce rôle durant le non fonctionnement des tubes de Malpighi » (pag. 59, *117*).

La domanda così formulata è ambigua perchè, come Berlese stesso dimostrò, varia può essere l'origine dei depositi urici nel tessuto adiposo.

Noi abbiamo già veduto un esempio di origine esogena nei depositi ptialurici del tessuto adiposo di vecchi neotenici; presto altro vedremo da riportarsi invece alla tipica origine endogena per digestione degli albuminoidi.

Vedremo, però, comparire e accumularsi i prodotti urici correlativamente alla scomparsa delle inclusioni albuminoidi, e non alla comparsa di esse come ha verificato Hollande in Vanessa.

E questo perchè ha un diverso significato chimico-fisiologico la comparsa di « inclusioni albuminoidi » negli Olometaboli, al momento della ninfosi o poco prima, e negli Emimetaboli (e in quelli tra gli Olometaboli nei quali assai precocemente avviene il deposito) durante tutta la vita larvale. Nel primo caso i « globuli albuminoidi » rappresentano una prima fase, intermedia intracellulare, della degradazione molecolare delle sostanze azotate, forma comune nella quale le sostanze del trofocito, nucleari e citoplasmiche (e adipose), si fondono per poi passare, colla roltura della cellula, nel plasma per l'impiego istogenetico. Nel secondo caso le « inclusioni albuminoidi » (probabilmente più complesse, malgrado l'aspetto comune di inclusioni acidofile, dei globuli albuminoidi ninfali) rappresentano un accumulo di sostanze azotate (non solo) che dalle vie digerenti per l'emolinfa arrivano al tessuto adiposo; qui vengono, con elaborazione sommaria messe in riserva, per essere poi, al momento opportuno, digerite e ripassare, in forma solubile e diosmibile e adatta alla nutrizione dei tessuti imaginali, nel plasma.

(Questo in linea generale; perchè poi certo anche negli Olometaboli debbono verificarsi durante la vita larvale processi, più o meno imponenti, di accumulo di sostanze azotate, e anche negli Emimetaboli avranno luogo, probabilmente, nel periodo di più intensa evoluzione morfologica, fenomeni speciali di mobilitazione di riserve).

La maggior parte delle divergenze degli AA. e delle confusioni in proposito mi sembrano dipendere da questo parlare di « inclusioni albuminoidi » senza ben distinguerne il significato chimico-fisiologico.

L'ovidotto.

Ma un altro organo ancora sembra esercitare funzione escretrice negli individui neotenici: l'ovidotto.

Gli ovarioli, corti ma numerosissimi (circa 36 per lato, secondo Grassi), s'inseriscono lungo l'ovidotto come le barbe d'una piuma [1] a mezzo di una dilatazione ampolliforme o calice. Sono, come è ben noto, del tipo panoistico, serie lineari di uova a varî stadii di sviluppo e l'una a l'altra di seguito, senza intercalate, o altrimenti disposte, cellule vitellogene. A una zona germinativa, o gruppo apicale di piccole cellule germinali indifferenziate, segue una zona di maturazione con nuclei in varî stadii di divisione cariocinetica

[1] Mentre nel *Calotermes* (come nelle più parte degli insetti) gli ovarioli, lunghi ma poco numerosi (sette), sboccano tutti alla medesima altezza nell'ovidotto.

e una zona di accrescimento nella quale le uova si circondano di un epitelio follicolare e secretano il vitello (in granuli basofili). Nella porzione basale dell'ovariolo le uova libere, senza più epitelio follicolare, ripiene di vitello granuloso acidofilo, ormai mature, sono pronte a passare, attraverso il calice nell'ovidotto. L'ovidotto, nella sua parte ovarica, tappezzato di un alto epitelio cilindrico e rivestito d'uno spesso strato muscolare, appare, in sezione trasversa, come ramificato per numerosi canali che sboccano nel suo lume e che rappresentano i calici di altrettanti ovarioli. Questi calici appaiono tutti pigmentati d'una sostanza giallo-canario, fittamente diffusa in grosse gocce o grumi press'a poco sferici, occupanti le maglie d'una sorta di stroma costituito da nuclei ramificati e come anastomizzantisi (ved. tav. IV, figg. 54 e 55). Le ho chiamate gocce o grumi perchè il loro aspetto non è di corpi rifrangenti solidi sferocristallini, come le concrezioni pericardiche, sibbene di coaguli guttiformi (prodotti forse dal fissativo), senza forma regolare nè visibile consistenza, d'una sostanza semifluida.

Attentamente esaminati, detti grumi mostrano punti più densi e più scuri accennanti a una concentrazione granulare. Essi farciscono i calici, le regioni di sbocco degli ovarioli, ma se ne presentano anche diffusi nello spessore dell'ovidotto stesso, dell'alto epitelio pieghettato e con nuclei a diversa altezza, apparentemente pluristratificato.

Anche nel lume dell'ovidotto è possibile trovare in qualche sezione, sebbene raramente, dei grumi gialli senza aspetto di vere concrezioni, ma di forma alquanto più regolare dei coaguli guttiformi descritti nello spessore dell'ovidotto e dei calici.

Sembrerebbe dunque non dubbia una escrezione all'esterno del materiale giallastro.

Nelle meno vecchie regine (da ninfe di seconda forma come da alato bianco) si presentano in proporzioni ridotte gli stessi fenomeni. Nelle regine molto giovani non vedo nell'ovidotto traccia della sostanza gialla: si presenta piuttosto talvolta un coagulo guttiforme di sostanza eosinofila che riempie quasi il lume (ved. tav. IV, fig. 56).

Cerchiamo di interpretare la cosa.

Già il Grassi aveva notato, nelle regine di complemento del *Termes*, la « presenza di una sostanza granulosa giallastra dentro la tuba in corrispondenza dell' inserzione dei singoli ovarioli », avvertendo che « questa materia non si trova mai negli individui che non hanno ovificato ». Anzi dalla presenza di questa sostanza granulosa giallastra « in alcune regine di complemento del *Termes lucifugus*, evidentemente molte vecchie come lo dimostravano gli ovarioli rattrappiti e la spermateca » vuota, e infette da una certa quantità di Protozoi (mentre di regola mancano nei reali neotenici), desume l'avvenuta ovificazione (pag. 86, *92*; vedi fig. 12).

Vi è dunque netto rapporto tra la presenza di questa sostanza giallastra nell'ovidotto e l'attività ovificatrice, riproduttoria dell'individuo. Del resto, già per la sostanza giallo-marrone delle concrezioni pericardiche (sostanza che all'aspetto si direbbe non forse identica, ma certo assai vicina chimicamente) eravamo stati indotti ad ammettere trattarsi d'un prodotto di rifiuto originatosi negli attivi processi di ricambio legati alla attività riproduttoria dell'individuo neotenico.

Ma, l'ovidotto assume questa sostanza dal circolo per elaborarla, come le cellule pericardiali, o già elaborata per escretarla, come i tubi malpighiani? I caratteri morfologici della sostanza gialla (non vere concrezioni ma coaguli guttiformi) e la presenza

di qualche grumo nel lume dell'ovidotto potrebbero indurci ad ammettere l'una e l'altra funzione: l'ovidotto, organo escretore di complemento, assumerebbe dall'emolinfa il prodotto catabolico per elaborarlo e poi escretarlo all'esterno. L'assunzione avverrebbe in corrispondenza ai calici, l'escrezione lungo tutto l'ovidotto (1).

Ma tutt'altra ipotesi mi seduce.

L'ovidotto non funzionerebbe da organo escretore, non estrarrebbe dall'emolinfa che lo bagna il prodotto catabolico. Questo prodotto sarebbe endogeno, residuo, rifiuto degli attivi processi elaborativi del deutoplasma ovarico. Originatosi nei singoli ovarioli, nella maturazione delle uova, verrebbe, per ogni ovariolo, raccolto, condensato, accumulato dal rispettivo calice.

Fig. 12. — Ovario di una regina di complemento molto vecchia: Gli ovarioli sono evidentemente in atrofia (come pure la spermateca non contiene più sperma). Kor. 1. 4.

Da Grassi (Tav. III, fig. 3, par. ant. = parte anteriore).

Di qui passerebbe nell'epitelio dell'ovidotto per essere eliminato all'esterno... ma solo in piccola parte; la maggior parte della sostanza gialla, ridisciolta, passerebbe nel circolo. Se nelle giovani regine sostanza gialla non compare nell'ovidotto mentre già depositi escretivi si formano nelle cellule pericardiche e nell'ipoderma, gli è, può supporsi, perchè detta sostanza, ancora in poca quantità, man mano che si forma passa nel circolo (senza avere il tempo di accumularsi nei calici, come fa quando la sua produzione diviene eccessiva, in rapporto all'intensità crescente dell'attività ovificatrice) per essere elaborata dalle cellule pericardiche [alle quali, abbiamo visto, anche Hollande riconosce la facoltà di neutralizzare i prodotti alcalini (ammoniacali) che prendono origine nei processi del ricambio, distruggendone l'effetto nocivo] ed accumulata dall'ipoderma, escreta dai tubi malpighiani, accolta infine dallo stesso tessuto adiposo (2).

(1) Nell'ovidotto vedesi per lo più occupata da sostanza gialla la porzione distale soltanto dell'epitelio cilindrico, tra il lume ed i nuclei; sembra dunque potersi dire che la sostanza gialla, che si ritrova nelle pareti dell'ovidotto, proviene non per assorbimento dal plasma circolante, ma per passaggio dagli accumuli pigmentati dei calici.

(2) Vien naturale la domanda: ma perchè il materiale escretizio non segue tutto la via più immediata di eliminazione che è appunto l'ovidotto, e ripassa invece nel corpo che finisce per ingombrare tutto? Forse perchè ne verrebbe occluso l'ovidotto e così intralciata la funzione specifica dell'organo, ch'è pure la funzione essenziale dell'individuo, l'ovificazione?

Certo che i complicati processi d'escrezione nei reali neotenici non sembrano il mezzo più semplice ed efficace per liberare il corpo dai prodotti escretizi. Ma questa complicazione, insufficiente allo scopo, dei processi escretori è fenomeno tutt'altro che isolato nella serie animale.

Cuénot, dopo aver studiato nei lamellibranchi la collaborazione degli amebociti del sangue e delle cellule escretrici chiuse allo scopo di eliminare dal corpo, o almeno localizzarli in regioni indiffe-

Purtroppo non posso dimostrare direttamente una tale ipotesi e neppure portare numerosi esempi di bene assodati fenomeni analoghi nella serie animale.

Una dimostrazione diretta dovrebbe venire dallo studio accurato dei processi metabolici nella maturazione degli elementi sessuali in reali neotenici. Sull'ovogenesi dei Termitidi non abbiamo se non un lavoro del Brunelli il quale, propostasi la questione « del come si realizzi il rapido accrescimento dell'ovocite » nei Termitidi, insetti a ovario panoistico e intensa ovificazione, mentre s'attendeva di « riscontrare una manifesta ed attiva funzione trofica dell'epitelio follicolare », trova invece che l'accrescimento dell'ovocite, in modo indipendente da esso follicolo, « sembra essenzialmente realizzarsi con un processo caratteristico che non trova riscontro negli altri insetti dei quali finora si posseggono notizie » e che « consiste nell'apparizione di una fitta zona granulosa perinucleare safraninofila che mano a mano colle sue propaggini invade tutto l'ooplasma ».

Brunelli conclude che « l'accrescimento dell'ovocite è accompagnato dall'apparizione d'una formazione vitellogena perinucleare; che, mancando nei Termitidi le cellule nutrici, la detta formazione sopperisce in certo modo alla loro assenza; infine che, essendo la formazione vitellogena caratteristica nei Termitidi rispetto agli altri insetti, dà una ragione del potere che hanno i Termitidi di produrre un grande numero di uova, pur possedendo un ovario a tipo panoistico » (1905, *22*).

In mancanza di uno studio completo sulla ovogenesi dei Termitidi, le ricerche del Brunelli [1] ci mostrano che la vitellogenesi ha luogo negli oociti stessi e ci dànno ragione di credere che, proprio in questi processi di ricambio per l'elaborazione deutoplasmica, dai materiali proteici che il plasma circolante apporta, prendano origine i prodotti di rifiuto che si raccolgono come sostanza gialla nei calici dei rispettivi ovarioli.

Quanto a esempi di fenomeni analoghi nella serie animale, la ricerca bibliografica ci dice poco o niente.

---

renti, i prodotti di rifiuto, e dopo aver mostrato come questo fenomeno sia molto diffuso nel regno animale, esclama: « Ce mode d'excrétion bâtard, qui occupe d'abord des cellules rénales, puis un grand nombre de phagocytes, pour aboutir finalement à encombrer les tissus d'une quantité considérable de granules solides, augmentant graduellement avec l'âge, est un des exemples les plus saisissants que je connaisse d'organes à fonctionnement imparfait, d'organes mal construits et mal compris, si je puis employer cette expression quelque peu anthropomorfique. L'encombrement de tous les organes par ces dépôts solides, encombrement qui est poussée à un point si extraordinaire chez un vieil Oursin ou une vieile Holothurie par exemple, doit beaucoup contribuer à déterminer la mort des individus, par destruction de la coordination nécessaire entre les diverses cellules de l'organisme. Comme le dit si justement Delage, l'espèce s'arrange de la situation qui lui est faite par son organisme et vit tant bien que mal; il faudrait être bien optimiste pour ne pas avouer que le mode d'excrétion, dont il a été question plus haut, est un processus bien imparfait qui fonctionne plutôt mal que bien » (pag. 88, *48*).

[1] Le ricerche del Brunelli riguardano le regine di sostituzione del *Termes lucifugus*; afferma però che la struttura dell'ovario del *Calotermes* non mostra differenze essenziali. In ogni modo le ricerche riguardano i reali neotenici. Nei reali veri ho ragione di sospettare abbiano luogo fenomeni notevolmente diversi: mentre nei neotenici il materiale assorbito dall'intestino viene elaborato per la vitellogenesi dagli stessi elementi sessuali ove abbandona i residui inutilizzabili, nei giovani reali veri il materiale assorbito dall'intestino verrebbe invece accumulato dalle cellule adipose per esserne poi digerito e utilizzato infine nella elaborazione deutoplasmica dagli elementi sessuali (vedi più innanzi).

E dapprima non potei trovare altro esempio che quello dell'*Ascaris megalocephala*, della quale studiando il ciclo germinativo Fauré Fremiet ebbe a sospettare nell'ovidotto la funzione d'un tubo escretore inverso per i prodotti di rifiuto della elaborazione deutoplasmica. Ma poi una più matura riflessione mi rese evidente che gli esempi non scarseggiano, che anzi trattasi di un fenomeno fisiologico dei più generali e che assume, specie nelle forme inferiori, un' importanza biologica grandissima [1].

Il metabolismo degli organi sessuali nei varî gruppi di animali: ecco un capitolo di Fisiologia comparata dei più belli e tutto da scrivere.

[1] Fauré-Fremiet trova, in una determinata zona dell'ovidotto di *Ascaris*, le cellule tutte impregnate di corpi lipoidi che s'accumulano nella parte basale della quale la struttura citoplasmatica fittamente vacuolare (e specie a contatto della membrana anista periovarica) sembra indicare la possibilità d'una trasformazione di questi corpi lipoidi e loro espulsione sotto forma liquida. « En sorte que l'oviducte se comporterait comme un tube excréteur inversé, dans les cellules duquel les échanges se feraient de l'intérieur vers l'extérieur, ce qui expliquerait la présence des produits d'élaboration ou d'excrétion contre la membrane basale desdites cellules et non point à leur partie supérieure. Je ne puis malheuresement donner aucune preuve expérimentale à l'appui de cette manière de voir qui n'est qu'un essai d'interprétation d'aspects morphologiques... (pag. 727, *67*) Les cellules sexuelles, élaborent une quantité relativement considérable de substances de réserves: graisses, glycogène, acide ascarylique, phosphate, ascaridine. Il serait tout à fait invraisemblable qu'une élaboration aussi active ne s'accompagne pas de la formation de résidus inutilisables et n'entraine pas des phénomènes d'élimination; ces déchets sont même en partie visibles dans le case de la spermatogenèse ou l'on connait l'expulsion du cytophore par les spermatides de deuxième ordre » (la produzione di materiali di rifiuto nei processi intimi della spermiogenesi anche, come in quelli della ovogenesi, ci spiega la presenza della pigmentazione ptialurica nei re neotenici da me trovata in *Calotermes*). « Or c'est aux cellules pariétales du tube sexuel qu'il appartient d'éliminer de semblables déchets inutiles et peut-être nuisibles au développement normal des cellules sexuelles. Les cellules pariétales assurent ainsi la régularité de la spermatogenèse et de l'ovogenèse... » (pag. 724).

Di analoga interpretazione sembrami suscettibile la funzione escretrice osservata nelle pareti laterali delle gonadi d'*Amphioxus* (♂): nelle quali compare « un ispessimento epiteliale — (listerella escretrice di Zarnich (1904) — di cui tutte le cellule successivamente si disfanno, cadono nella cavità della gonade e verosimilmente vengono eliminate negli spazi peribranchiali colla eliminazione dello sperma. Colla prova della Muresside Zarnich ha dimostrato essere i granuli gialli prodotti urici, materiali dunque escretizi; ciò che dimostra la funzione renale della parete laterale delle gonadi e giustifica la denominazione dello Zarnich di listerella escretrice». (Felix e Buhler, *68*).

Anche negli Echinodermi è stata riscontrata la presenza di prodotti urici nelle gonadi, ed è plausibile che da queste si spandano per finire a ingombrare tutto il corpo.

Veramente A. Russo sostiene che i materiali escretizi che si trovano nella gonade (in cumuli di sostanza gialla nel connettivo dei ciechi genitali, soprattutto in corrispondenza della loro origine, e nel condotto) si originano nell'intestino e di lì passano alla gonade (*190*). Però le belle figure che porta non mi sembra affatto che escludano un tragitto inverso, interpretazione che io, fino a prova contraria, preferisco. Chè anzi, una « sezione trasversale dell'organo genitale e del tubo digerente legati tra loro per mezzo della lamina mesenterica » e una « sezione trasversa del condotto genitale in cui si osservano le sostanze escretizie che attraversano l'epitelio del condotto per essere espulse » mi sembrano dimostrare nelle Oloturie fenomeni proprio analoghi a quelli che si verificano nelle mie regine: produzione di materiali escretizi nei tubi genitali, loro parziale escrezione nel lume del condotto genitale, ma soprattutto accumulo, in mucchi di sostanza gialla, nella gonade stessa e in altri organi (specie nell'intestino [tubi malpighiani nell'insetto!] cui passano direttamente, per le lamine mesenteriche, o indirettamente, per la cavità peritoneale).

Del resto bisogna ricordare che Giard fin dal 1887 riferì d'aver osservato che negli Echini,

Del resto, che l'ovario dei *Termes* non rappresenti un organo escretore complementare — nel senso che, quando gli organi escretori normali più non bastano all'eliminazione dei prodotti di rifiuto, esso pure cominci ad assumerli, filtrandoli dal sangue — lo mostra il fatto che, in giovani regine di *Termes* tropicali, a corpo nient'affatto inquinato di prodotti urici (se non forse nel pigmento bruno delle cellule pericardiali), Bugnion osserva una sostanza gialla, senza dubbio omologa a quella delle nostre vecchie regine di *lucifugus*, nei calici dell'ovario:

« J'ai sous les yeux, étalés dans l'eau salée, les ovaires d'une jeune reine (*T. Redemanni*) qui mesurait 19 mm. seulement. La longueur de ces organes est de 3 cm. Les oviductes se reconnaîssent facilement au milieu des tubes » (2420 per ovario in una regina

---

dopo la deposiziene dei prodotti sessuali, permangono nei tubi genitali alcune cellule che producono assieme grani di escrezione, cristalli di fosfato di calcio e corpuscoli deutoplasmici da servire alla maturazione delle nuove generazioni di elementi ovarici o testicolari (*80*).

Dunque negli Echinodermi i materiali escretizi si originerebbero proprio nel metabolismo delle gonadi, nel lavorio chimico della elaborazione deutoplasmica, come nelle Termiti.

Del resto, per gli animali inferiori, nei quali la funzione di riproduzione assorbe tutte le risorse organiche dell'individuo, che appare spesso ridotto a un sacculo di prodotti sessuali, non è forse inverosimile ammettere che i prodotti escretizi si originino in gran parte appunto nei processi di ricambio legati all'attività sessuale, alla maturazione delle gonadi; e si sarebbe tentati a pensare che l'intima unione dei dôtti genitali e renali, negli animali inferiori, dipenda non dalla sola necessità comune ai prodotti sessuali e agli urinarii dell'eliminazione all'esterno, ma ben anche da loro comunanza di tempo e luogo d'origine (nello stesso organo, nello stesso periodo d'attività, nel corso degli stessi processi fisiologici).

Invero recentissimi studî ammettono come primitiva la condizione di intima unione dei dôtti genitali e renali e che nel corso dell'evoluzione i due organi tendano a separarsi piuttostochè a riunirsi come finora si ammise sulle scorte del Goodrich (1885) (Kerr Graham, pag. 219, *86*). La funzione escretrice dell'ovidotto nei neotenici dei Termiti non ha certo rapporto veruno con la condizione ancestrale, ma, come quella, si direbbe dipendere da comunanza di tempo e luogo d'origine dei prodotti sessuali e dei materiali escretizi.

Noterò che del resto probabilmente questo dei Termiti neotenici non è caso isolato negli Insetti. Grassi mi dice di aver visto comparire della sostanza gialla negli ovarioli di *Phyllossera* matura (forse delle forme progenetiche a maturazione precoce delle ghiandole sessuali?).

Krukenberg ha segnalato presenza di acido urico, diffuso del resto in tanti tessuti dell'adulto, nelle uova non ancora deposte di *Lampyris splendidula* che, ricordiamo, sotto molti rapporti può essere riguardata come una forma larvale permanente.

Phisalix (1905) constatò il passaggio di tossine nell'ovario e uova dell'ape (*184*); secondo Levy (1916), l'esistenza di tossine (emolitiche: l'aracnolisina) nel corpo dei ragni (Epeire) è indissolubilmente legata allo sviluppo degli organi genitali ♀: le tossine appaiono quando gli ovuli maturano, si localizzano nelle uova, sono eliminate colla loro deposizione e il ragnetto non ne contiene se non finchè conserva del vitello materno (*141*). Assai probabilmente il fenomeno è lungi dall'essere eccezionale; e se poco numerosi sono i fatti del genere sinora assodati, gli è perchè ricerche sistematiche in questo senso non sono state condotte e nemmeno di fatti a conoscenza del volgo è stato considerato tutto il valore fisiologico [ad es., il Brehm, narrando che gli indigeni dell'Africa applicano alle locuste devastatrici la pena del taglione, mangiandole in gran numero e cibando con esse gli animali, nota: « servono ad ingrassare i cavalli i quali ne sono ghiotti; i coloni credono però che a questi quadrupedi sieno dannose, perchè dotate di proprietà velenifere, le ♀ che hanno già deposto le uova » (pag. 643, v. IX, *21*)]. Lessona, a proposito dell'impiego alimentare dei granchi, nota che « provocano talvolta speciali fenomeni d'intossicazione, soprattutto nelle regioni intertropicali; la causa di questi fenomeni è tuttora ignota, ma dipende probabilmente dal fatto che, durante il

lunga cm. 6 ½) « grâce au pigment brunâtre qui imprègne la paroi au niveau de l'insertion des cal ces ». ... « Observé isolément, chaque tube offre un collet rétréci (calice), garni des cellules pigmentées. Ces cellules, chargées de granules bruns, forment cinq à six rangs superposés » (pag. 223, *32*).

Osservando in sezioni microscopiche: « le calice, partie intermédiaire entre la gaine ovarique et l'oviducte, est caractérisé par un bel épithélium cylindrique avec de gros noyaux ovales, colorés en bleu foncé par l'hémalun. Le lumen est tantôt rétréci (tubulaire), tantôt élargi en forme de chambrette. En dessous et au sein de l'épithélium se voient de nombreuses concrétions jaunâtres, de forme arrondie (corps jaune des Insectes) teintées en bleu par l'hémalun. La couleur brune qui, sur les préparations macroscopiques, fait à première vue distinguer les calices, est due à la présence de ces grains... Les concrétions jaunâtres mentionnées ci–dessus, se rencontrent aussi au voisinage des calices dans l'épithélium transparent qui tapisse ces canaux » (pag. 227) (ramificazioni dell'ovidotto, corrispondenti ciascuna a un calice) ([1]).

Notevole che una sostanza giallastra analoga rinviensi nei testicoli dei re, ove pure, verosimilmente, rappresenta un prodotto di rifiuto dei processi intimi della spermiogenesi. Bugnion in un re di *Termes obscuriceps* (lungo 12 mm., e simile, meno l'addome più gonfio, all'alato sciamante) descrive i testicoli composti ciascuno d'una cinquantina di lobuli fusiformi « insérés sur le hile au moyen d'un tube jaunâtre » e nota che i testicoli del re differiscono da quelli del maschio alato, oltrechè per le dimensioni più grandi e per la proliferazione più attiva dei suoi elementi e la massa più grande di spermii visibili all' interno, « par la teinte jaune plus accusée du segment interne (voisin du hile) » (pag. 231, *32*).

---

periodo amoroso, le ghiandole genitali o i loro prodotti si compenetrano di una leucomaina tossica, particolare (pag. 45, v. X, *21*).

Accennerò infine agli animali superiori. In diversi pesci è stata segnalata la presenza di tossine nell'ovario e nelle uova; al momento della riproduzione, la tossicità aumenta. Nei rospi ♀, secondo Phisalix, al momento della fregola, le tossine, normalmente segregate dalle ghiandole cutanee, si localizzano nell'ovario e passano nelle uova (così pure nella vipera). In questi e simili casi, secondo Bohn (1920), le cellule sessuali (fatto particolarmente interessante dal punto di vista della filosofia biologica) servono alla eliminazione dei prodotti abituali d'escrezione o a quella dei veleni accidentali (pag. 118, *19*). A me sembra più logico ammettere che, nella maggior parte dei casi, tali prodotti escretizi rappresentino proprio i residui catabolici del metabolismo sessuale (recentemente il Russo ha studiato la comparsa di prodotti catabolici nella maturazione degli elementi sessuali di Mammiferi, *191*).

([1]) La presenza di pigmento bruno nelle cellule pericardiali e di sostanza gialla nei calici dell'ovidotto mi dà ragione di credere, com'è del resto ben supponibile *a priori*, che nei Termiti tropicali si verifichino fenomeni fisiologici simili assai a quelli da me osservati nei Termiti europei (fenomeni simili se non identici nel *Termes* e nel *Calotermes*).

Si comprende facilmente quanto prezioso materiale sarebbe questo per studî d'interesse generale per la fisiologia degli insetti. Senza dubbio fenomeni interessantissimi saranno messi in luce da chi avrà la fortuna di applicare ai Termiti tropicali lo studio isto–fisiologico da me intrapreso pei nostri Termiti.

REALI VERI E NEOTENICI

Dopo lo studio isto-fisiologico dell'escrezione nei reali neotenici, posso più decisamente ripetere quanto avevo previsto già alla semplice osservazione esterna.

La pigmentazione che insorge gradualmente nei reali di complemento e sostituzione non è propriamente un carattere specifico: è l'espressione morfologica d'uno stato fisiologico particolare, legato evidentemente a una speciale dieta alimentare.

Precisamente, dal complesso delle ricerche sembra potersi affermare che questa sostanza pigmentaria (ptialurica) s'origina negli attivi processi di ricambio delle ghiandole sessuali, come residuo inutilizzabile dei materiali assunti per l'elaborazione deutoplasmica; dall'ovidotto, ove confluisce pei calici dei rispettivi ovarioli, questo prodotto finale del ricambio passa nel circolo, viene assorbito ed elaborato dalle cellule pericardiali, e, riversato nuovamente nell'emolinfa, è scaricato dalle ghiandole ipodermiche nei tegumenti e filtrato dai tubi malpighiani per l'escrezione all'esterno. Ma il plasma stesso a poco a poco si satura del materiale escretizio, e questo allora va rimanendo accumulato negli organi stessi d'origine (calici) e d'elaborazione (cellule pericardiali), come pure penetrando e concretandosi nel corpo adiposo.

Questo prodotto escretivo, questi processi d'escrezione sono comuni a tutti i reali neotenici: ai complementari da ninfa di seconda forma come ai sostitutivi senza traccia di ali o da alato bianco.

Ma sono veramente caratteristici di essi? O non piuttosto legati alla funzionalità riproduttoria, indipendentemente dagli stadî anabolici, dal regime alimentare?

Perchè sono stati i pigmenti tegumentarî il carattere-spia che ci ha messo sulla strada di riconoscere materiale escretizi e processi d'escrezione nei reali neotenici.

Avverrebbero forse, nascosti ai nostri occhi dall'impenetrabile cortina melanotica, nella attività riproduttoria dei reali veri, gli stessi fenomeni?

Il dubbio è grave ed io non posso rispondere ad esso direttamente come sarebbe esaminando se nei reali veri del *Termes* abbiano luogo o no, rivelati dagli stessi prodotti escretizi, gli stessi processi di ricambio.

Se sì, evidentemente non dovremmo concedere alcun significato particolare alla identità dei processi d'escrezione nei suddetti complementari e sostitutivi.

Ma se no, se non comparissero nei reali veri gli stessi processi, avremmo ben diritto di affermare che i processi di ricambio legati alla funzionalità riproduttoria non sono necessariamente identici, che la loro identità nei suddetti complementari o sostitutivi testimonia l'identità dei processi anabolici, e la loro differenza coi reali veri è indice dei differenti processi d'assimilazione che hanno luogo nello sviluppo dei reali veri e dei neo-

tenici, è indice della dieta alimentare caratteristica che conduce alla differenziazione degli individui neotenici dai riproduttori normali.

Purtroppo però non posso compiere l'esame dei reali veri del *Termes*, giacchè non si rinvengono in natura (qui in Italia almeno), nè probabilmente coll'allevamento di sciamanti giungerei a procurarmene sufficientemente vecchi.

Ebbene, studiamo il *Calotermes* ; in esso i fenomeni avranno magari una diversa espressione morfologica, ma fisiologicamente debbono essere equivalenti.

Sarò molto breve a questo riguardo. I reali del *Calotermes* meritano uno studio speciale (pel quale ho già fatte osservazioni in natura e compiuti esperimenti e riunito materiale istologico) che mi propongo di compiere in un prossimo lavoro. Non esporrò se non i risultati essenziali e puramente necessarî alla nostra dimostrazione.

I reali neotenici del *Calotermes* presentano processi d'escrezione simili, se non identici, a quelli dei reali neotenici di *Termes*. Ho verificato tali processi a carico dei tegumenti, cellule pericardiche, tubi malpighiani e ovidotto, in reali neotenici più o meno giovani, derivati da ninfe o da larve senza traccia di ali, raccolti in natura o allevati da colonie orfane nei nidini in provette. Ultimamente ho rinvenuto in natura, a capo d'una piccola colonia di *Calotermes*, una bella coppia reale neotenica, apparentemente assai vecchia. Il re, osservato vivente a piccolo ingrandimento, presentava nettamente macchioline nere dei tegumenti identiche a quelle dei vecchi reali del *Termes*.

I fenomeni dell'escrezione, legati essenzialmente all'esercizio dell'attività riproduttoria, sono dunque perfettamente equivalenti nei reali neotenici del *Termes* e del *Calotermes*.

Passiamo ai reali veri.

Non più depositi pigmentarî ipodermici, non più grosse concrezioni ptialuriche nel tessuto pericardiale ipertrofico [1], non più sostanza gialla granulare nei malpighiani e nei calici.

Ma tutto il tessuto adiposo è fittamente farcito di grosse concrezioni sferitiche rifrangentissime che a campo oscuro spiccano bianche opache nei preparati a fresco come nelle sezioni. Sono così fittamente accumulati questi sferoliti, che solo ai margini di qualche più giovane lobulo adiposo è dato distinguere la struttura del tessuto; apparentemente sinciziale, dacchè senza verun limite cellulare v'appaiono sparsi grossi nuclei, a nucleolo acidofilo e rete cromatica basofila, frequentemente in divisione amitotica. Benchè varie di grandezza e forma e struttura, le concrezioni sono generalmente sferoidali e costituite di varii strati concentrici, variamente rifrangenti, attorno ad uno o più *ili* (ved. tav. III, figg. 40-41). L'esame chimico le rivela per concrezioni uratiche. Dànno infatti la reazione della muresside e negli acidi acetico e cloridrico si dissolvono per rideporsi in forma di cristalli di acido urico, tabulari isolati o aghiformi in bellissime druse.

D'altronde l'esame morfologico [2] le mostra identiche alle concrezioni di urato di

[1] Compaiono però, nel tessuto pericardiale dei reali veri, abbondanti granulazioni cristalline apparentemente della stessa sostanza (prodotto ptialurico) trovata nei neotenici del *Termes*.

[2] Questi urosferiti presentano fenomeni ottici (croce di polarizzazione, non estinzione, colori d'interferenza nei più grandi elementi) simili a quelli segnalati da Henneguy per i calcosferiti del tessuto adiposo di *Phitomiza*, dittero a larva fillovora (*101*), da Pettit per calcosferiti in calcificazioni

soda che Cuénot (dopo Cholodkowsky) ritrova nei Blattidi e vede aumentare gradatamente di dimensioni « si bien que chez les adultes à maturité sexuelle le corps adipeux n'est plus qu'un énorme amas d'urates, les cellules adipeus vidées de leur contenu étant presque complètement annihilées par le développement de cellules à concretions » (*50*).

E fenomeno perfettamente analogo appare verificarsi nei nostri Termiti, giacchè, mentre nelle larve e nelle ninfe il grasso solo qua e là presenta (non contenuti, pare, in speciali cellule uriche) gruppi di piccoli urosferiti, invece gli sciamanti, e più ancora i reali, ne presentano, come abbiamo già notato, letteralmente farcito il tessuto adiposo (ved. tav. III, fig. 39).

Urosferiti anche compaiono, e ciò non lascia più alcun dubbio sulla perfetta identità dei fenomeni fisiologici nel *Termes* e nel *Calotermes*, negli alati sciamanti di *Termes*.

Basta strisciare il corpo lacerato d'uno sciamante su un vetrino per ricoprirlo d'innumerevoli urosferiti ; e tagliarlo a pezzi e gettarlo in un salierino con qualche goccia di acido nitrico per vedere svolgersi una effervescenza viva come quella ottenibile con un frammento di calcare. (Disseccando la soluzione ottenuta e umettandone il residuo con NH_3, si ha formazione di porporato d'ammonio).

Come interpretare la presenza degli urosferiti nel corpo adiposo degli alati sciamanti e dei reali veri ? Essi derivano verosimilmente dalla digestione intracellulare degli albuminoidi assorbiti dal tubo digerente e accumulati, così incompletamente elaborati, nelle cellule adipose. Nella metamorfosi da ninfa ad alato, proprio come nella ninfosi degli insetti metabolici, i depositi albuminoidi vengono digeriti [1] abbandonando i residui urici

---

patologiche (*178*) e da Philiptschenko (*181*) per le concrezioni d'urato di Na del corpo grasso dei Collemboli (ved. tav. III, figg. 42, 43).

[1] Studî ulteriori mi hanno dimostrato che la deposizione di albuminoidi e la loro digestione comincia fin dalle prime età, come del resto nei Blattidi. Non riporterò qui quanto ho già comunicato nelle mie note « Sulla presenza di depositi uratici nel tessuto adiposo dei Termitidi » e « Sul metabolismo dei reali veri nella società dei Termitidi ». Farò cenno di un risultato inedito: la presenza di cellule uriche e di prodotti urici nei neonati stessi dei Termitidi. In *Calotermes*, già nel neonato, sorpreso alla uscita dall'uovo, le cellule uriche (visibili per trasparenza, nella larvicina viva osservata in acqua a piccolo ingrandimento, come isolette disseminate nel corpo adiposo, brunastre a luce riflessa, bianche a luce rifratta) appaiono cariche di concrezioni urosferitiche, evidentemente originatesi nei processi metabolici dell'embrione (digestione del vitello, probabilmente) (tav. IV, fig. 46; e fig. 13).

Certo fin dai primi stadî larvali ha luogo, nel corpo adiposo dei Termitidi, la deposizione di riserve albuminoidi e, come residuo della loro digestione intracellulare, la concrezione di materiali uratici.

Probabilmente alla eliminazione di questi s'adoperano attivamente i tubi malpighiani, senza riuscir tuttavia ad impedire il progressivo accumulo dei prodotti catabolici che giungono finalmente, nell'insetto perfetto, a riempire tutto il corpo adiposo.

Ancora nell'alato sciamante nel corpo adiposo spiccano, di tra i mucchi di urosferiti (specie nella parte anteriore dell'addome, a livello del gisiere e del ventricolo), numerose zollette eosinofile che debbono riguardarsi come i residui (ancora relativamente abbondanti) delle ricchissime provvigioni albuminoidi accumulate nella ninfa e consumate man mano per i bisogni del metabolismo e soprattutto per la crescita dei genitali e la costruzione dell'organismo volante (fig. 39, tav. III).

Difatti nelle ninfe (di *Termes* e *Calotermes*) il tessuto adiposo è tutto farcito di gocce gras-

nelle cellule stesse, per essere utilizzati nel lavoro di costruzione organica. Ma, mentre negli insetti metabolici, raggiunto lo stato perfetto, i depositi urici ben presto scompaiono, per varie vie eliminati dal corpo, nei Termiti invece, come nei Blattidi (secondo Cuénot, *50*) e in genere negli Ortotteri (già Fabre aveva segnalata la persistenza degli urati nello stadio adulto degli Efippigeri, *66*), e come anche nei Collemboli (secondo Philiptschenko, *181*), come insomma negli insetti più bassi, non solo i depositi urici non

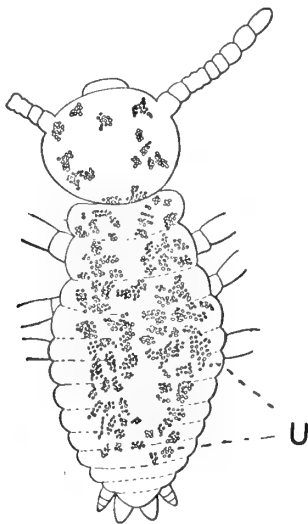



Fig. 13.

Calotermes flavicollis.

Neonato, sorpreso all'uscita dall'uovo; osservato vivente in acqua. Traspaiono fitti gruppi di concrezioni urosferitiche, disseminate nel tessuto adiposo.

scompaiono, ma vanno anzi aumentando gradualmente man mano che l'animale invecchia. Ciò, malgrado intensi processi d'eliminaz'one per i T. M. [1] e probabilmente in rap-

---

sose e di inclusioni albuminoidi e solo qua e là, contenuti, pare, in speciali cellule uriche, presenta gruppi di concrezioni uratiche (fig. 38, tav. III) (*125*).

A questo proposito noto che Philiptschenko ha fatto studî speciali sul tessuto adiposo dei Blattidi (1901). Ha trovato (secondo riferisce Buchner [pag. 149, *27*]; purtroppo non ho potuto procurarmi la nota, *182*) negli individui giovani anche glicogeno, ma nei vecchi soltanto grasso e concrezioni uriche. Queste ultime, deduce da suoi esperimenti d'iniezione il Philiptschenko, non solo si accumulano nel corpo adiposo, ma vi si formano anche *in sito, de novo*. In individui sottoposti a inanizione, prima il glicogeno e poi il grasso scompaiono e, consumate tutte le sostanze di riserva, l'insetto comincia a vivere a spese delle sostanze proteiche del suo corpo.

[1] Nei reali (ed anche negli alati) del *Calotermes* l'epitelio dei T. M. è tutto farcito di urosferiti formati o in formazione (ved. tav. III fig. 37), evidentemente da materiale fluido filtrato dal plasma e, secondo ogni probabilità, proveniente da solubilizzazione di vecchi urosferiti del tessuto adiposo.

Del resto le ricerche di van Loghem (1904), Wiener (1905), Battelli e Stern (1909), Ströbel (1912),

porto allo sviluppo della attività sessuale: i materiali alimentari, assimilati dall'intestino e immagazzinati nelle cellule adipose, vengono da queste digeriti, in esse man mano abbandonando i depositi urici, e utilizzati infine per l'elaborazione deutoplasmica dagli elementi sessuali [1].

Ma in vecchie regine di *Calotermes* trovo niente urosferiti nel tessuto adiposo e depositi ptialurici, invece, nei tegumenti, nelle cellule pericardiali e nei calici dell'ov dotto. Evidentemente, dopo il periodo stentato della fondazione di nuova colonia (periodo nel quale debbono nutrirsi da sè ed anzi provvedere anche all'alimentazione dei piccoli), i reali vengono nutriti dalla loro prole e allora il loro metabolismo diviene, come il nutrimento, quello stesso dei reali neotenici [2]. Sarebbe questa la prova più luminosa per la teoria salivare della differenziazione dei reali neotenici.

Ma i miei studi in proposito sono tuttavia in corso, ed io non voglio lanciare premature affermazioni.

Dunque, nel *Calotermes* hanno luogo processi metabolici profondamente diversi (rivelati da diversi prodotti urici e diversi processi escretori) nei giovani reali veri e nei neotenici.

La constatazione ha senza dubbio valore diretto e ci permette di affermare che, avendo detti reali una fase catabolica identica legata alla funzionalità genitale, la differenza che si riscontra deve essere riportata a diversità nella fase anabolica, di assimilazione e quindi di nutrizione.

Sarvonnat (1912) ecc., che hanno studiato la trasformazione e il riassorbimento dell'acido urico, tendono a provare che i tessuti animali secretano sostanze che dissolvono rapidamente questo acido. E Mercier, studiando le cellule uriche del *Cyclostoma* e ritrovando nelle dissezioni grosse concrezioni naturalmente trasparenti, suppone che gli umori del Mollusco contengano una uricossidasi, capace di solubilizzare l'acido urico delle concrezioni (*154*).

[1] Interpretazione ipotetica, questa, che dovrebbe venire dimostrata da uno studio accurato della ovogenesi nei reali veri in confronto a quella dei reali neotenici.

[2] Evidentemente allora, arrestatasi la produzione di concrezioni uratiche, i tubi malpighiani finalmente riescono a eliminarne l'accumulo.

Questa eliminazione avviene forse in rapporto alla formazione del tessuto adiposo reale. Le interessanti ricerche del Feytaud dimostrano (1912) che « il tessuto adiposo subisce, qualche anno dopo lo sciamamento, una trasformazione completa che conduce all'apparizione di un tessuto adiposo nuovo. Questo tessuto reale si forma soprattutto a spese delle masse adipose antiche per penetrazione e proliferazione dei nuclei leucocitari. E a poco a poco gli elementi neoformati arrivano a sostituirsi completamente agli antichi ».

Ora è probabile, le mie ricerche non mi permettono ancora di affermarlo, che, proprio durante questa sostituzione, con la progressiva scomparsa degli elementi adiposi antichi (imaginali), di pari passo scompaiono i depositi urici. D'altra parte, giacchè l'assenza di urosferiti nel corpo adiposo di vecchi reali coincide colla presenza di prodotti ptialurici negli organi escretorî, si presenta probabile l'ipotesi che la formazione del tessuto adiposo reale (la quale non è certo in relazione all'utilizzazione dei prodotti istolitici giacchè, come vide Feytaud, il tessuto adiposo apparso nel torace al posto dei muscoli istolizzati possiede ancora i caratteri del tessuto adiposo del sessuato sciamante) sia in diretto rapporto col cangiamento di regime nutritivo (passaggio dalla alimentazione legnosa a quella per saliva somministrata dalla prole operaia) (*126*).

Ma, a rigor di termini, potrebbe obbiettarsi che la diversità di assimilazione non dimostra in modo assoluto una diversità di nutrizione. Potrebbe a nutrizione identica corrispondere diversità di assimilazione e questa essere non la causa ma l'effetto di una preesistente differenza costituzionale (differenziazione castale ereditaria). Vero ; ma, a parte che osservazioni ed esperimenti nel *Calotermes* ci dimostrano senza ombra di dubbio [1] che gli individui da cui derivano i reali di sostituzione sono individui normali, e la diversità di assimilazione deve essere dunque non effetto ma condizione causale di differenziamento, chi affermerà ereditariamente differenziati l'alato bianco che viene eletto al trono come sostitutivo e l'alato annerito sciamente che rappresenta virtualmente un reale vero ? Io, tagliando le ali a ninfe mature prima della sciamatura, ho riprodotto sperimentalmente la formazione degli alati bianchi (che restano cioè bianchi, solo parzialmente annerendo).

Thompson e Snyder non si sono accorti dell'assurdo di ammettere nei riproduttori dei Termiti caste distinte ereditarie perchè di questi riproduttori essi hanno visto solo le forme più comuni ; ma chi conosca un po' più davvicino la vita delle Termiti, non tre caste dovrebbe distinguere (distinzione del tutto empirica, come la denominazione generalmente usata, perchè praticamente comoda, di larve, ninfe e insetti perfetti in emimetaboli come i Termiti), sibbene un numero indefinito di caste, dato che l'arresto nello sviluppo, se è preferito in dati stadii (reali di complemento), può però essere indotto, per particolari contingenze naturali della colonia o per determinate condizioni sperimentali alle quali la sottoponiamo nell'orfanamento, in uno stadio qualsiasi dello sviluppo (reali di sostituzione).

Che anzi possiamo parlare di *casta* neotenica solo in un senso tutto particolare, riferendoci alla fisiologia dello sviluppo: giacchè sono puramente caratteri fisiologici, o espressioni morfologiche di essi stati funzionali caratteristici (legati alla dieta alimentare, per mezzo della quale la neotenia stessa è ottenuta) i caratteri che accomunano le diverse forme di reali di complemento e sostituzione e che li distinguono dagli stadii corrispondenti dello sviluppo normale.

[1] Ho ripetuti ed estesi gli esperimenti del Grassi al riguardo, confermandoli pienamente.

CONCLUSIONI [1]

Ho ripreso il problema della differenziazione delle caste nei Termitidi.

Il mio lavoro è in corso di sviluppo: questa mia memoria non ne rappresenta se non una parte, completa però dal punto di vista della differenziazione della casta neotenica.

Precisando, a confutazione di Thompson e Snyder proclamanti « lo sfacelo delle fantastiche teorie del Grassi e d'altri circa il volontario allevamento, da parte degli operai, di forme reali sostitutive », ho, con nuove osservazioni ed esperimenti, confermato le scoperte del Grassi circa la differenziazione nel corso dello sviluppo dei reali neotenici.

Ma, nel trattare con metodo essenzialmente biologico il problema, sono stato quasi trascinato dal corso delle mie ricerche a studiare con metodo istologico un capitolo di fisiologia: l'escrezione nei reali neotenici.

Dallo studio dei prodotti escretizi, materiali di rifiuto formantisi negli attivi processi del ricambio legati all'attività riproduttoria dei nostri insetti longevi, prodotti essenzialmente diversi, nella natura chimica e per il processo d'escrezione, nei reali veri e nei neotenici, ho dimostrato l'esistenza, scoperta dal Grassi con osservazione diretta biologica, di una dieta alimentare particolare, mercè la quale la deviazione dal corso dello sviluppo, la neotenia stessa è ottenuta.

Ho gettato così qualche luce sui processi intimi del metabolismo nei reali veri e nei neotenici: sopratutto mi sono aperta la via a questo genere fecondo di studî.

Ho mostrato nel *Termes* e nel *Calotermes* perfetta a questo riguardo l'identità dei fenomeni fisiologici.

Nello studiare l'escrezione dei neotenici, ho portato un contributo alla conoscenza dell'escrezione negli insetti per i tegumenti, le cellule pericardiali, i tubi malpighiani, l'ovidotto e il tessuto adiposo.

Riassumendo, i fatti principali da me rilevati e i risultati essenziali ai quali mi hanno condotto sono:

I. Ho confermato, con le mie osservazioni in natura, che nel *Reticulitermes lucifugus* manca sempre, qui in Italia, a capo della colonia la coppia reale vera; si trovano invece schiere di individui sessualmente maturi in abito di ninfa: regine di complemento. (Riconosco però la piena possibilità sperimentale di fondare nuove colonie di *R. lucifugus*

[1] I principali risultati di questo lavoro, presentato dapprima come tesi di laurea alla Facoltà di Scienze dell'Università di Roma, furono da me brevemente riassunti in due Note « sulla differenziazione delle caste nella società dei Termitidi: I neotenici » (Rend. Acc. Lincei, luglio 1920). Proseguendo le mie ricerche comunicai gli ulteriori risultati in due successive Note: « Sulla presenza di depositi uratici nel tessuto adiposo dei Termitidi » e « Sul metabolismo dei reali veri nella società dei Termitidi » (Rend. Lincei, febbraio 1921). La Memoria, presentata nel 1921 ai Lincei, fu in seguito da me ancora riveduta e accresciuta.

con coppie di alati sciamanti: chè anzi io, per primo, ho ottenuto un soldato da una coloniola in provetta, fondata appena tre mesi prima con una coppia di alati). Basterebbe questo fatto a confutare la strana affermazione dello Snyder che nelle colonie con vecchi reali da ninfe di seconda forma mancano gli alati; e l'ipotesi conseguente, che i reali da ninfe di seconda forma e i reali da larve senza traccia di ali sono capaci di riprodurre, oltre i neutri, solo sessuati della loro casta.

II. Ho dimostrato, ripetendo gli esperimenti del Grassi, che non è una « teoria fantastica », ma un fatto assolutamente sicuro la sostituzione delle forme reali. Per il *Calotermes* ho confermato, con esperimenti su nidini in provette e osservazioni in natura, che, orfanando del re o della regina o di ambedue un nido, vi compare un re o una regina o una coppia reale di sostituzione in abito di larva (preferibilmente) o di ninfa.

Le ali non si sviluppano ulteriormente negli individui reali di sostituzione. La loro prole è uguale a quella degli individui reali veri. L'orfanamento si verifica facilmente anche in natura.

Per il *Reticulitermes* ho confermato che, trasportando lontano un tronco contenente numerosa popolazione ma nessuna regina, compaiono individui sessualmente maturi in abito ninfale: reali di sostituzione (anche in minuscole colonie allevate in nidini Janet ho ottenuto la formazione di individui reali da ninfe di seconda forma). Questo esperimento ci rappresenta come sorgono in natura nuove colonie di *Reticulitermes* (che trova nelle sue abitudini migratorie un mezzo di diffusione assai più potente che non lo sciamamento).

III. Ho trovato, per la prima volta, in natura, regine di sostituzione di *R. lucifugus* in abito di insetto perfetto, parzialmente abbrunito e colle ali lacere. In base ai miei esperimenti le considero derivate non da alati bianchi cui sono state strappate le ali, ma bensì da ninfe di prima forma cui sono stati mozzati gli accenni alari. Basterebbe l'esistenza di queste regine di sostituzione a dimostrare senz'altro che i reali di complemento e di sostituzione sono veramente individui arrestati nello sviluppo normale ad insetti perfetti (e non rappresentanti caste distinte, a differenziazione ereditaria): individui neotenici.

IV. Ho scoperto la presenza costante e caratteristica in tutti i reali di complemento e sostituzione, quali che siano i loro caratteri morfologici e lo stadio di sviluppo dal quale provengono, di speciali ghiandole ipodermiche a funzione escretrice.

Nella larva di individuo neotenico (p. es. ninfa di seconda forma) matura, prossima alla muta, nelle regioni sclerali cellule ipodermiche si staccano dalla superficie del corpo, sede di attiva elaborazione chitinea; si approfondano verso la basale, ingrandiscono, subiscono fenomeni profondi di rimaneggiamento nucleare (epurazione cromatica, moltiplicazione) e si differenziano così in cellule ghiandolari che rimangono a duplicare di uno strato inferiore, a grossi elementi, il tegumento. Le cellule ipodermiche dello strato superiore, esaurita la loro grande attività chitinogena, rimangono innicchiate tra gli interstizi delle cellule ghiandolari, e tra queste e la cuticola (come in *Periplaneta*!). Il numero delle ghiandole ipodermali non varia più, dopo l'ultima muta, in tutta la vita dell'individuo neotenico; vanno però gradatamente crescendo e assumendo forma e funzione di ghiandole unicellulari ipodermali escretrici (chiuse).

V. Questi *adenociti ipodermali* vanno caricandosi — man mano che l'individuo neotenico cresce in età, svolgendo e intensificando la sua attività riproduttoria — di pigmenti granulari gialli. Sono questi che, trasparendo traverso la cuticola, dànno quel colorito giallo-bruno caratteristico dei vecchi reali neotenici. La disposizione di dette ghiandole nell'ipoderma (come il loro numero) è molto costante e determina una figurazione macchiettata ben determinata dei tegumenti: l'aspetto picchiettato degli scleriti è dato dalla discontinuità degli accumuli di pigmento; la distribuzione delle macchioline nere corrisponde alla distribuzione delle cellule pigmentifere nell'ipoderma, e la loro struttura anulare è data dalla disposizione anulare dei granuli pigmentarî attorno ai grossi nuclei ghiandolari.

VI. Contemporaneamente al picchiettarsi dei tegumenti ha luogo un deposito progressivo della stessa sostanza pigmentaria nelle cellule pericardiali, sotto forma di cristallini che vanno accumulandosi tra le maglie del reticolo citoplasmatico, tanto più numerosi e grandi quanto più l'individuo è avanzato in età: finchè nelle vecchie regine, invece di cellule e lobi plurinucleati, resta una grossa fascia di tessuto pericardiale ipertrofico, apparentemente sinciziale (con nuclei sparsi ai nodi del reticolo citoplasmatico), tutto vacuolare, come costituito di tanti otricoli, farciti di grosse concrezioni.

Seguendo la sorte di nefrociti sparsi, si assiste ancora meglio allo svolgersi del ciclo biologico della cellula che finisce col ridursi a un sacchetto a pareti sottili, senza traccia di nuclei, pieno di grosse sferiche concrezioni di color giallo-marrone.

VII. Nei vecchi reali neotenici lo stesso materiale pigmentario compare anche: 1) nei tubi malpighiani dove è concreto in forma granulare, solida, cristallina, in seno alle cellule ghiandolari donde passa, forse per processo d'escrezione merocrina o forse per deliquescenza, nel lume (questo fatto basterebbe a togliere il dubbio, se ce ne fosse ancora, che si tratta di materiale escretizio);

VIII 2) nel tessuto adiposo (reale), cui pure proviene certamente dall'emolinfa;

IX 3) nell'ovidotto (con caratteri morfologici e forse costituzione chimica alquanto diversi) le cui pareti sembrano escretarlo; ma specialmente accumulato si vede nei calici degli ovarioli.

X. La comparsa e l'accumulo progressivo, nei suddetti organi, del materiale pigmentario escretizio è in relazione evidente collo sviluppo dell'attività riproduttiva dell'individuo neotenico.

Dal complesso delle mie ricerche credo poter ricostruire nel seguente modo l'andamento dei fenomeni. Questa sostanza escretizia si origina negli attivi processi di ricambio delle ghiandole sessuali come residuo inutilizzabile dei materiali assunti per l'elaborazione deutoplasmica. Dall'ovidotto, ove confluisce pei calici dei rispettivi ovarioli, questo prodotto finale del ricambio passa nel circolo, viene assorbito ed elaborato dalle cellule pericardiali e, riversato nuovamente nell'emolinfa, è scaricato dalle ghiandole ipodermali nei tegumenti e filtrato dai tubi malpighiani per l'escrezione all'esterno. Ma il plasma stesso a poco a poco si satura del materiale escretizio e questo allora va rimanendo accumulato negli organi stessi di origine (calici) e d'elaborazione (cellule pericardiali) come pure penetrando e concretandosi nel corpo adiposo.

XI. Questo prodotto escretivo (ptialurico), questo processo d'escrezione, sono comuni a tutti i reali neotenici, ai complementari da ninfa di seconda forma come

ai sostitutivi senza traccia di ali o in abito di insetto perfetto, parzialmente abbrunato, e sono caratteristici di essi, come ho dimostrato con lo studio dei reali veri di *Calotermes*, e confermato coll'esame dei reali veri di *Reticulitermes* (ottenuti sperimentalmente, fondando coloniole in provetta).

Difatti, nei reali veri, non più depositi pigmentarî ipodermici, non più grosse concrezioni ptialuriche nel tessuto pericardiale ipertrofico, non più sostanza gialla granulare nei malpighiani e nei calici. Ma il tessuto adiposo è fittamente farcito di urati (in concrezioni sferocristalline: urosferiti) derivati dalla digestione intracellulare degli albuminoidi assimilati dall'intestino e immagazzinati dalle cellule adipose.

Il metabolismo è dunque profondamente diverso da quello dei reali neotenici, evidentemente in rapporto alla differenza dei prodotti anabolici, alla dieta alimentare caratteristica che conduce alla differenziazione degli individui neotenici dai riproduttori normali.

XII. Ma in vecchi reali veri, più non si rinvengono urosferiti nel tessuto adiposo (non continuandone la produzione, i tubi malpighiani finalmente riescono a eliminarne l'accumulo), sibbene depositi ptialurici nei tegumenti, nelle cellule pericardiali e nell'ovidotto. Nei primi tempi la giovane coppia provvede da sè al proprio sostentamento e a quello della giovane prole. Ma i primi operai che si sviluppano sollecitamente assumono il governo della coloniola, la nutrizione dei genitori e dei piccoli. E il metabolismo dei reali veri diviene, come il nutrimento, quello stesso dei reali neotenici.

XIII. Nelle ninfe il tessuto adiposo, farcito di goccie grassose e d'inclusioni albuminoidi, presenta qua e là, contenuti in speciali cellule uriche, gruppi numerosi di urosferiti. Ma simili depositi uratici compaiono fin dagli stadî larvali (anzi già nel neonato, sorpreso all'uscita dall'uovo, appaiono le cellule uriche cariche di concrezioni urosferitiche, evidentemente originatesi nei processi metabolici dell'embrione) e si trovano altresì negli individui adulti delle caste di neutri: negli operai di *Reticulitermes* e nei soldati di *R.* e *Calotermes*.

I prodotti urosferitici sono dunque comuni a tutti gli individui che si nutrono di legno e che, in rapporto a questo loro regime alimentare, presentano nell'intestino posteriore l'ampolla cecale piena di protozoi. I prodotti urosferitici mancano negli individui che non assumono alimento legnoso e presentano perciò l'ampolla cecale ridotta a porzione stretta, tubulare, vuota di protozoi; in questi individui, reali neotenici e vecchi reali veri, stanno invece, negli organi escretori, prodotti ptialurici.

È dunque netta la correlazione tra presenza di urosferiti e regime alimentare legnoso con intervento di protozoi; e resta definitivamente assodato il valore del prodotto catabolico ptialurico quale indice dei processi metabolici caratteristici e del regime alimentare speciale pel quale avviene la differenziazione della casta neotenica.

PROGRAMMA TERZO

È infermo il pensiero
quando comincia ad esser pago di sè.

A. Anile.

LA FISIOLOGIA DELLA BIOLOGIA

cioè lo studio della base isto-fisiologica dell'adattamento biologico.

Ad ogni adattamento biologico corrisponde una disposizione funzionale condizionata da una particolare struttura istologica. Ora, che cosa preesiste? l'adattamento biologico o la base isto-fisiologica? È l'adattamento biologico che induce una nuova disposizione funzionale che acquista poi la sua espressione morfologica, determinando una nuova struttura? Ovvero è una particolare struttura istologica che, permettendo certe modalità funzionali, favorisce lo stabilirsi di un dato adattamento biologico?

È l'eterna questione della funzione e la forma. Che cosa preesiste: la funzione o la forma? Problema altrettanto filosofico quanto quello del dovere e potere: « Devi, dunque puoi; puoi, dunque devi.

Preesiste la funzione ed è essa che sollecita la forma? È il bisogno che crea l'organo: è l'essere vivo e perciò senziente che s'adatta all'ambiente.

Preesiste la forma, ed è essa che suscita la funzione? È la variazione naturale che privilegia l'individuo nella lotta per l'esistenza e gli assicura il posto nella selezione.

Lamark e Darwin nel campo biologico ripeterono una controversia già dibattuta da Fichte ed Hegel nel campo morale.

Come si riveli alla mente prima l'idea del dovere o quella della libertà, esse ambedue innate coesistono nell'anima umana; così, si manifesti nell'evoluzione prima la funzione o la forma, esse ambedue insite coesistono nella sostanza vivente.

Per conto mio, propenderei più verso le idee di Lamark che non verso quelle di Darwin. Non ch'io creda che gli stimoli ambientali possano avere il valore creativo che nego alle variazioni fluttuanti: non cause li considero, ma mezzi. Come mezzi, come agenti liberatori, gli stimoli esterni agiscono, e sviluppano dall'essere vivo, col bisogno delle nuove funzioni, le nuove forme: il bisogno crea l'organo (Lamark), e questo, funzionando, si perfeziona (Roux).

Sotto questo punto di vista la funzione preesiste alla forma. Ma se gli stimoli ambientali sono mezzi non cause, agenti liberatori non creatori, non è men vero che la forma preesiste alla funzione: lo stesso carattere ortogenetico (Eimer) dell'evoluzione biologica mostra che le cause interne (Naegeli) sono le vere cause.

Forma e funzione si rincorrono sulla strada dell'evoluzione organica; e noi, che le guardiamo da lontano, non riesciamo a distinguere quale delle due vada avanti e neanche siamo sicuri se veramente una delle due vada avanti o non corrano proprio affiancate.

Forse, a poterle seguir da vicino, ci accorgeremmo che una delle due spesso rallenta e si ferma, restando indietro all'altra che prosegue con passo uniforme; ma poi, spiccando la corsa, rimette in pari e raggiunge la compagna.

Ho riunito sotto questo titolo una serie di argomenti alla ricerca dei quali mi sono affacciato più tardi e che rappresentano punti salienti di tutto un terzo programma che mi si è venuto disegnando: lo studio delle basi isto-fisiologiche degli adattamenti biologici nei Termiti.

I capitoli di questo « programma terzo », aggiunto come appendice alla Memoria, dopo la sua presentazione ai Lincei, rappresentano più che la trattazione degli argomenti, ma « messa a fuoco » dei problemi, svolta in qualche punto quasi a mo' d'esempio e a stimolo di nuove, più complete ricerche.

Il cervello e le ghiandole cefaliche.

Dimostrato il metabolismo particolare dei reali neotenici, e il loro differenziarsi nel corso dello sviluppo per cangiamento della nutrizione, lo studio dei neotenici non è davvero chiuso ; è, anzi, più ampiamente aperto.

Anzitutto, io ho studiato prevalentemente i fenomeni catabolici, gli organi di escrezione ; ma certo lo studio minuto dei fenomeni anabolici, degli organi di assimilazione, deve pure condurre, forse anche più direttamente, alla soluzione del problema.

E poi, una volta assodata la differenziazione nel corso dello sviluppo per cangiamento del regime alimentare, questo è un caso biologico così interessante e singolare che non bisogna lasciarsi sfuggire l'occasione di valutare il grado di differenziazione morfologica al quale, identica certamente restando la costituzione ereditaria, semplici modificazioni fisiologiche possono condurre.

« Il regime alimentare », dice Bohn, « essendo uno dei fattori essenziali del chimismo della specie, deve necessariamente influire sulla forma ; ci sarebbe un campo immenso per la sperimentazione se gli animali si prestassero facilmente a tentativi di cambiamento di regime. Il più spesso invece ci si urta contro una difficoltà difficile a vincere : essi rifiutano tutto ciò che non è il loro nutrimento abituale. Si arriva a imporre loro un regime anormale : l'intolleranza è più discreta, ma persiste sempre (meccanismi che l'organismo può mettere in opera per difendere la sua specificità chimica). Con ciò non si vuol dire che non si conoscono esempî di modificazione di forma. Se ne conoscono anzi molti, ma non son sempre probativi. Il più spesso si tratta solamente di variazioni di pigmentazione » (pag. 169, *19*).

Ebbene: l'esperimento che a noi riesce tanto difficile, eccolo realizzato brillantemente dalla Natura colla società dei Termiti (ed altri insetti sociali).

La Thompson ha dimostrato che nelle varie forme riproduttive e sterili si presenta un vario sviluppo della testa e degli organi cefalici.

Da questa giusta premessa ha tratto la conclusione errata, certamente errata almeno per quanto riguarda le varie forme riproduttive, di una differenziazione intraembrionale, ereditaria. Persuaso che, per ottenere risultati obiettivi e non semplicemente la conferma dei propri individuali convincimenti, bisogna all'esame dei primi stadii larvali far precedere lo studio accurato degli adulti (insetti perfetti, neotenici, soldati, operai) e degli stadii larvali che sicuramente a una determinata di queste caste conducono ; definitivamente stabilito che i neotenici si differenziano nel corso dello sviluppo postembrionale da individui destinati ad insetto perfetto ; io mi propongo di seguire, nella differenziazione dei neotenici, l'evoluzione della testa : cervello ed organi ghiandolari cefalici.

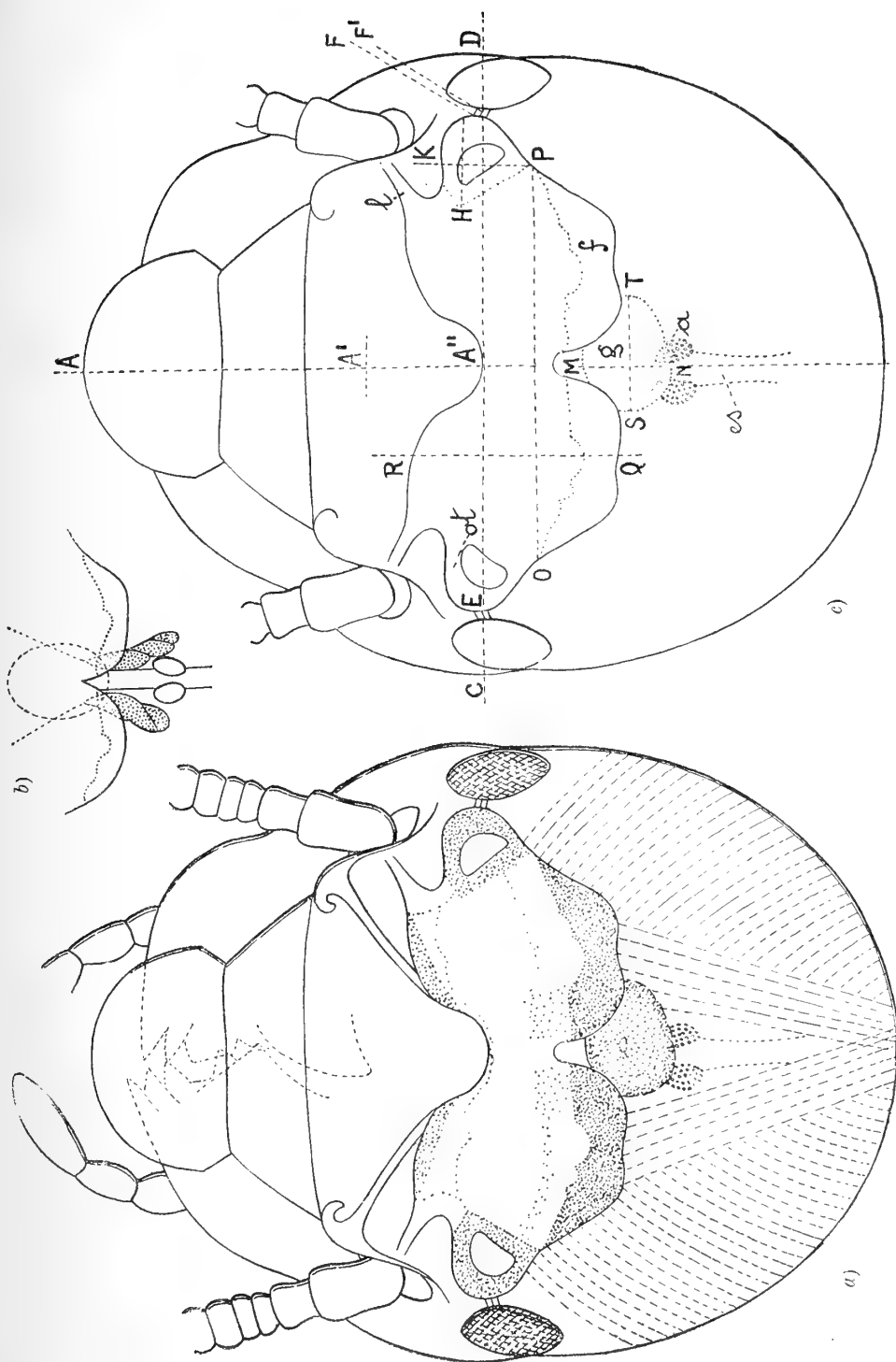



Fig. 14. — *R. lucifugus.*

a) Testa di ninfa di prima forma, matura. Si veggono, per trasparenza, cervello e ghiandole (gh. fontenellare e *corpora allata*). Da esemplare colorito in carminio e montato in balsamo.

b) Come sopra. Tra il cervello e il ganglio sottoesofageo, a livello del tentorio, ai lati dell'esofago, spiccano le ghiandole tentoriali. Oc. 2 M., ob. 3 (piano tavol.).

c) Come sopra. Sono tracciate le linee corrispondenti ai principali dati cefalometrici.

Ma un tale studio non può portare a positivi risultati, se non condotto con rigore di metodo. Ho avuto larga occasione di convincermi che le valutazioni di più o meno grande, più o meno sviluppato, sono quant'altre mai indeterminate ed ambigue, prestandosi, tra l'altro, a farci apparire seriabili in gruppi distinti quelle che invece probabilmente sono variazioni fluttuanti, da individuo a individuo, con tutti i gradi intermedii.

Credo perciò indispensabile istituire un certo numero di dati cefalometrici, mediante i quali — determinandone su di un numero sufficientemente grande di individui, per ogni casta e per ogni stadio di sviluppo, il valore medio — seguire l'evoluzione morfologica della testa durante lo sviluppo postembrionale.

La figura 14 *c*) dimostra, in una ninfa di prima forma del *lucifugus*, i dati cefalometrici da me presi in considerazione:

A B lunghezza della testa (diametro longitudinale cefalico) ([1]);
C D larghezza della testa (diametro interoculare);
E F larghezza massima del cervello, (macrodiametro cerebrale);
A,, M lunghezza minima del cervello, (microdiametro cerebrale):
O P larghezza interfungiforme;
F F, lunghezza del nervo ottico;
Q R lunghezza (massima) del cervello;
K P lunghezza del lobo ottico;
H F larghezza del lobo ottico;
M N lunghezza della ghiandola fontenellare;
S T larghezza della ghiandola fontenellare;
lunghezza dei *corpora allata*;
larghezza dei *corpora allata* (oppure larghezza inter-allata);
larghezza delle ghiandole tentoriali;
lunghezza delle ghiandole tentoriali;
larghezza intertentoriale superiore;
larghezza intertentoriale inferiore ([2]).

Riporto, ad esempio di applicazione di questo metodo cefalometrico, una serie di misurazioni eseguite su ninfe di prima forma (vicine a maturanza: 21 aprile), su regine complementari da alato (bianco, con ali mozze), su regina di seconda forma (ottenuta in nidino Janet)

([1]) È anche interessante considerare A' B (lunghezza della testa, escluso il labbro superiore e il clipeo, fino al margine anteriore d'inserzione delle antenne) e A'' B, esclusa tutta la parte anteriore al diametro interoculare. Perchè molte volte la differenza di lunghezza è dovuta sopratutto a diverso sviluppo della parte anteriore della testa e specie del labbro superiore.

([2]) Per queste ultime misure, non indicate sulla figura 14 *c*, tener presente la fig. 14 *b*).

	REGINA COMPLEMENTARE DA ALATO							NINFA DI PRIMA FORMA					REGINA DI SECONDA FORMA
	I	II	III	IV	V	VI	MEDIA	I	II	III	IV	MEDIA	
Diametro longitudinale cefalico ..	127,5	134,3	134,3	129,2	130,9	141,1	132,9	141,1	137,7	137,7	137,7	138,5	132,2
Diametro interoculare...........	110,5	112,2	113,9	112,2	113,9	110,5	112,2	113,9	110,5	113,9	110,5	112,2	115,6
Macrodiametro cerebrale.........	74,9	72,8	77	77,7	77	73,5	75,5	89,6	92,4	93,8	95,2	92,7	79,1
Microdiametro cerebrale.........	14	19,6	13,3	11,9	19,6	13,3	15,3		16,1	15,4	15,4	15,6	14
Larghezza interfungiforme.......	56	53,2	58,1				55,8	67,2	69,3	70	70	69,1	64,4
Lunghezza del nervo ottico	7,7	10,5	9,1	7,7	8,4	9,1	8,7	2,8	2,1	2,8	2,8	2,6	10,5
Lunghezza del cervello	27,3	26,6	28				27,3	35	37,8	36,4	35	36,1	31,5
Lunghezza del lobo ottico........	12,6	12,6	12,6				12,6	18,2	18,2	18,2	16,8	17,8	12,6
Larghezza del lobo ottico	12,6	11,9	13,3				12,6	14,7	16,1	16,8	16,8	16,1	11,9
Lunghezza della gh. fontenellare ..								14,7	16,8	16,8	18,9	16,8	7
Larghezza della gh. fontenellare ..								18,9	18,9	14,7	15,4	16,9	14
Lunghezza dei corpora allata	10,5	10.5	14	10,5	10,5	11,2	11,2	10,5	8,4	9,1	9,1	9,3	9,8
Larghezza dei corpora allata	4,9	6,3					5,6	5,6	4,9	5,6	5,6	5,4	8,4
Larghezza interallata	11,2	14	11,9	14	15,4	14	13,4						
Larghezza delle gh. tentoriali								5,6	7,7	6,3	7,7	6,8	
Lunghezza delle gh. tentoriali									24,5	23,1	25,2	24,3	
Larghezza intertentoriale superiore								11,2	13,3	11,9	11,9	12,1	
Larghezza intertentoriale inferiore								30,1	25,2	28	28,7	28	

Le figure 14 *a*), 15 *a*) e 15 *b*), copiate da preparati colorati in carminio, dopo fissazione in Leeuwen, e montati in balsamo, rappresentano, rispettivamente, la testa di una ninfa di prima forma, di una regina complementare da alato, e d'una reginella da ninfa di seconda forma.

Le dimensioni della testa sono pressochè uguali in tutte e tre. (C'è una certa differenza nel diametro longitudinale, dovuta, quasi esclusivamente, al diverso sviluppo del labbro, più lungo nelle ninfe di prima forma, un po' meno nella regina di seconda forma, notevolmente meno in regine da alato bianco; chè anzi, se si calcola la lunghezza A_1 B, la si trova un po' superiore in regine da alato; la lunghezza $A_{\prime\prime}$ B è uguale in tutte. Quanto al diametro interoculare, esso è perfettamente uguale in ninfe di prima forma e in regine da alato; leggermente superiore in regine da ninfa di seconda forma).

Il cervello, considerato nella sua massa complessiva, è più grosso nella ninfa da prima forma, meno nella regina da seconda forma, e un po' meno ancora nella regina da alato. Così è del macrodiametro cerebrale, così della larghezza interfungiforme e della lunghezza cerebrale. Per il macrodiametro cerebrale la ninfa di prima forma si stacca più dalle due regine: il nervo ottico è brevissimo nella ninfa di prima forma mentre è lungo nella regina da alato e ancor più lungo nella regina da seconda forma (nella quale, essendo un po' maggiore il diametro interoculare della testa e meno sviluppati gli occhi, è più lungo il tragitto che il nervo ottico deve fare dalla punta del lobo ottico all'occhio, tanto più che lo fa un po' obliquamente). Mentre per il macrodiametro cerebrale la regina da seconda forma s'avvicina più alla regina da alato che non alla ninfa da prima forma (cioè diminuiscono ambedue di molto, rispetto alla ninfa), per la larghezza interfungiforme e per la lunghezza cerebrale la regina da seconda forma s'avvicina più alla ninfa da prima forma che non alla regina da alato; diminuisce cioè di poco, rispetto alla ninfa: onde la forma piuttosto tozza del cervello della regina da seconda forma, mentre la regina da prima forma ha cervello più snello e più angoloso. In quest'ultima il lobo ottico, che nella ninfa da prima forma è molto grosso e caratteristicamente arrotondato, e nella regina da seconda forma presenta la stessa figura ridotta, diminuisce di volume e assume una forma conica.

Questo, come esempio di applicazione del metodo di misurazioni da me proposto. Certo sarebbe interessantissimo lo studio esatto, biometrico, del cervello nelle varie caste e nei varii stadî di sviluppo. Purtroppo mi è mancato sinora il tempo di studiare le parecchie centinaia di preparati che posseggo.

Dopo il cervello, attirano la nostra attenzione, nella testa delle Termiti, le ghiandole. La ghiandola fontenellare, situata dorsalmente all'esofago, dietro ai corpi fungiformi, è grandemente sviluppata nella ninfa di prima forma (comincia a formarsi in essa la cavità ghiandolare che in ninfe del marzo non appariva ancora), mentre è molto ridotta nel reale da ninfa di seconda forma, e nella regina da alato è rappresentata appena da una corona di cellule ipodermiche stirate verso l'interno.

Sotto e un po' dietro alla ghiandola fontenellare, in posizione dorso-laterale all'esofago, stanno i *corpora allata*: relativamente piccoli nella ninfa, sono assai più grossi nella regina da alato e sopratutto nella regina da seconda forma. Le figg. 14 *b*), 15 *c*) e 15 *d*), mettono meglio in evidenza la diversità di grandezza dei *corpora allata* e dei corpi fungiformi

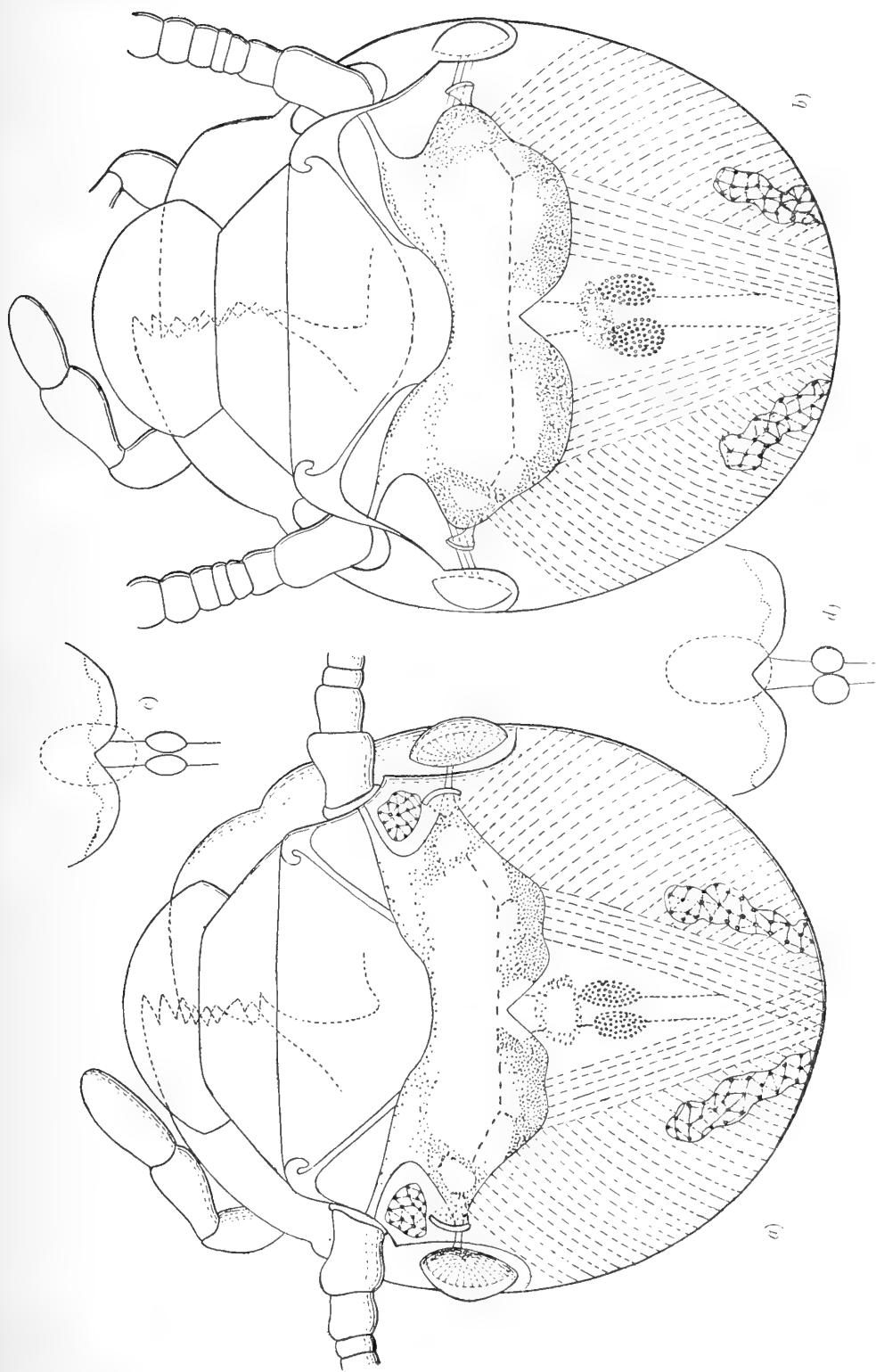



Fig. 15. — *R. lucifugus*.

a) Testa di regina di sostituzione da alato bianco. Si veggono per trasparenza cervello e ghiandole (gh. fontenellare e *corpora allata*), oltre muscoli mandibolari e lobuli adiposi. Da esemplare colorito in carminio e montato in balsamo.

b) Testa di regina di complemento da ninfa di seconda forma (giovane, ottenuta in nidino Janet). Come sopra (vedesi parzialmente il tentorio). Fig. *a*) e *b*) copiate allo stesso ingrandimento (come anche 14, *a*).

c) come in figura *a*) } copiate piano tav., oc. 2 M., ob. 3.
d) come in figura *b*) }

(punteggiati; e del ganglio sottoesofageo, tratteggiato). Nella fig. 14 *b*), che si riferisce alla ninfa di prima forma, appaiono inoltre, a livello del tentorio (cioè in un piano orizzontale, di mezzo tra il piano del cervello e il piano dell'esofago) e lateralmente all'esofago, degli organi di aspetto ghiandolare che denominerò provvisoriamente *ghiandole tentoriali*. Questi organi, assai cospicui nelle ninfe, meno negli stadii larvali e nei neutri, ridotti negli alati, sono ridottissimi, apparentemente assenti, nei reali neotenici da ninfe di seconda forma e da alato bianco.

Così nuovi aspetti di correlazioni organiche s'intravedono a smussare le angolosità dello schema, secondo il quale possiamo figurarci l'influenza delle variazioni di stato fisiologico sulle modificazioni di struttura ereditaria. Io spero fare di queste ghiandole tentoriali un buon carattere-spia per lo studio della differenziazione castale.

Sarebbe interessantissimo lo studio esatto, biometrico e istologico, delle ghiandole cefaliche attraverso le varie caste e i varî stadii di sviluppo.

Io sono convinto che rappresentano ghiandole a secrezione interna tanto le ghiandole tentoriali e i *corpora allata*, sforniti di qualunque dôtto escretore, quanto la ghiandola fontenellare che pure negli stadii adulti di certe caste acquista sbocco all'esterno e produce un secreto più o meno cospicuo.

Dei *corpora allata* è probabile per tutti gli insetti una secrezione interna ([1]).

([1]) Heymons, nelle sue ricerche sullo sviluppo embrionale dei Dermatteri e Ortotteri (1895), seguì lo sviluppo di questi organi, a spese di una porzione ectodermica, situata sulla regione ventrale, ai limiti dei somiti mandibolare e mascellare (*105*). Li considerò, dapprima, come gangli posteriori del sistema simpatico pari, pur facendo notare che hanno una struttura istologica differente da quella degli altri gangli simpatici; ma non tardò a riconoscere che non sono di natura nervosa, e sostituì, alla denominazione di *ganglia*, quella di *corpora allata*. In *Bacillus rossii* Heymons vide (1899) che, alla fine dello sviluppo embrionale, ognuno dei *corpora allata* costituisce una vescicola di cui la parete consiste in un solo strato di cellule cubiche e, come la superficie dell'embrione si copre d'una prima cuticola chitinosa, così qui all'interno della vescicola si forma una piccola massa compatta che sembra pur essa di natura chitinea. Una serie di cuticole della stessa natura, corrispondenti verosimilmente a mute successive dell'insetto, si forma in seguito e resta alloggiata nell'interno della vescicola.

Heymons fa notare che la presenza dei *corpora allata* è assai costante negli insetti. Aggiunge che, se questi organi hanno, nei diversi tipi d'insetti, un'origine identica, essi mostrano più tardi, nella loro grossezza relativa, nella loro forma e soprattutto nella loro struttura istologica, differenze notevoli. Mentre nel *Bacillus* esiste una cavità con produzioni chitinose interne, in altri insetti non si trova, sotto l'involucro membranoso, se non un ammasso di cellule serrate le une contro le altre (*106*).

Janet, considerati gli stretti rapporti che, nel loro sviluppo, i *corpora allata* presentano col tentorio, riguarda i *corpora allata* come i rappresentanti ridotti, e senza più alcuna connessione coll'ipoderma, della *furca* mandibolare (il tentorio è formato dall'insieme delle *furcae* dei tre somiti cerebrali e dalla *furca* mascellare). « Il modo di formazione di questi corpi, per invaginazione ed emigrazione di un pacchetto di cellule ipodermiche, e la situazione della regione dove prendono origine (regione poco lontana dalla banda nervosa mediana e situata tra la mandibola e la mascella) mi sembrano venire in appoggio di questa interpretazione. E così anche il fatto molto interessante messo in evidenza da Heymons, che in *Bacillus* le cellule che costituiscono questi organi conservano il loro potere chitinogeno e, per conseguenza, restano caratterizzate dalla più importante delle proprietà del tessuto che costituisce la *furca* ». (Sia detto tra parentesi, io sospetto per le mie ghiandole tentoriali un'origine analoga a quella che Janet ammette per i *corpora allata*). « S'il en est bien ainsi, c'est l'invagination, non apparente, qui fournit les *corpora allata*, qui répresente l'invagination tentoriale

Holmgren (1909) ha descritto, per primo, i *corpora allata* nei Termiti, nei sessuati di *Eutermes chaquimayensis*. Nei giovani individui riproduttori sono corpi orbicolari ne' quali i nuclei cellulari stanno perifericamente e i corpi cellulari appaiono striati a raggiera da filamenti simili a fibre nervose. In vecchie regine, invece, nelle quali i *corpora allata* assumono uno sviluppo colossale, i nuclei stanno sparsi nel corpo e i filamenti sono addensati e con interstizi. Sicchè anche questi organi, come i gangli simpatici, vanno incontro, nei vecchi reali, a degenerazione ipertrofica. In giovane individuo riproduttore misurano 67 μ ; in più vecchio 148 μ ; in vecchio re 135-163 μ ; in vecchia regina 175-190 μ (*114*).

Imms, che descrive in soldato di *Archotermopsis* i *corpora allata* come costituiti da un certo numero di nuclei piuttosto grossi, situati nella matrice protoplasmica granulare, con vacuole sparse qua e là, senza evidenti limiti cellulari, conclude anche lui che « it appears probable that the *corpora allata* are to be regarded as modified ectodermal glands, which have lost communication with the exterior, and become ductless organs secreting certain hormones into the blood. The fact that these hare found in all order of insects suggests that their presence is essential to the vital economy of those organisms » (pag. 117, *118*).

Organo ghiandolare caratteristico dei Termitidi è invece la ghiandola fontenellare. Non è però sviluppato in tutte le forme del gruppo ; manca nelle più basse che si collegano, anche per questo carattere, ai Blattoidi.

Secondo Holmgren, nelle forme più elevate la ghiandola fontenellare è una piastra ghiandolare (Fontanellplatte) cui corrisponde, alla superficie della testa, una fontanella. Delle forme meno elevate, alcune (1) hanno ghiandola otricolare con foro fontenellare (*Leucotermes*, *Copto*-, *Arrhino*-, *Rhinotermes*, e probabilmente anche *Procopto*-, *Proleuco*-, *Psammo*-, *Heterotermes*); altre (2) non hanno fontanella e la «Fontanellplatte» è non ghiandolare o assente (*Hodotermes*, *Calo*-, *Glyptotermes*, e, verisimilmente, *Mastotermes*, *Termopsis*, *Archotermopsis*, *Stolo*- e *Porotermes*). Gli operai nelle specie del gruppo 2) non hanno fontanella, ma hanno « Fontanellplatte » non ghiandolare; nelle altre termiti hanno fontanella e « Fontanellplatte » ghiandolare. I soldati nelle specie del gruppo 1) (ed altre forme superiori) hanno fontanella e ghiandola fontenellare otricolare; nelle specie del gruppo 2) non hanno fontanella; in altre specie, pure senza fontanella, hanno una « Fontanellplatte ».

---

mandibulaire que Heider a cherché, en vain, entre la mandibule et la maxille. Mais, si ces organes sont réellement répresentatifs de la *furca* mandibulaire, et s'ils n'ont plus aucune fonction à remplir, on ne peut guère s'expliquer la constance de leur présence sous forme de petites masses aussi nettement individualisées, chez tous les Insectes. Il est probable que, en realité, ils ont un rôle bien detérminé à remplir. Ce rôle ne consisterait – il pas à fournir des cellules formatrices des trachées propres du metamère mandibulaire ? (pag. 322, *119*).

Berlese non accetta questa interpretazione e riguarda i *corpora allata* come ghiandole a secrezione interna (pag. 599). Anche Nabert (1913), che ha studiato la topografia e la struttura interna dei *corpora allata* in insetti di tutti i gruppi, giunge a questa conclusione : « Die *corpora allata* müssen als Drüsen mit inneren Secretion aufgefast werden, wofür ihre Entstehunggeschichte, ihre Ausbildung bei den Phasmatiden, die dunkle Färbung ihrer Grundsubstanz, dasV orhandensein von Drüsenvacuolen und der Chromatinreichtum ihrer grosen Kerne spricht » (*167*).

« Versuchen wir nun eine Phylogenie der Termiten auf den Verhalten den Fontanelle zu gründen, so möchte erstens bemerkt werden, dass diejnigen Formen, welche Fontanelldrüsen (Fontanellplatte und sackförmige Drüse) besitzen, aus Formen ohne drüsige Fontanellplatte stammen müssen. Da es wenig wahrscheinlich ist, dass einige drüsige Fontanellgewebe unabhängig bei verschiedenen Termitengruppen entstanden ist, so müssen wir diejnigen mit Fontanellplatte und diejnigen mit schlauchförmiger Fontanelldrüse von einer gemeinsamen Ausgangspunkt ableiten » (pag. 27, *114*).

Feytaud descrive molto bene la ghiandola fontenellare dell'alato sciamante di *R. lucifugus*. « È situata immediatamente all'indietro della massa nervosa cerebroide, con la quale è in contatto. È in rapporto, all'indietro, con le masse muscolari che occupano la regione posteriore della testa; in alto, coi tegumenti della fronte; in basso, con l'esofago. La sua forma è quella di un corto fuso. La sua cavità è sensibilmente sferica. Le cellule ghiandolari sono ripartite su tutta la periferia; ma sono sopratutto sviluppate nella parte inferiore, contigua all'esofago. Le cellule di questa regione formano un fascio, assai allungate, fissate per la loro base a contatto dello strato muscolare dell'esofago. I loro nuclei, un poco più piccoli di quelli delle cellule nervose vicine, sono leggermente allungati e disposti presso a poco allo stesso livello, a metà lunghezza delle cellule. La cavità della ghiandola s'apre sulla fronte, a livello della fontanella. La chitina si deprime per formare un corto imbuto che dà accesso alla cavità, e al fondo dell'imbuto s'assottiglia bruscamente per formare un rivestimento alle cellule ghiandolari. Inoltre ai bordi dell'imbuto è appeso generalmente un sacco chitinoso galleggiante nella cavità della ghiandola. Questo sacco, affatto indipendente dalla superficie delle cellule, e che rappresenta senza dubbio una muta destinata ad essere evacuata, divide la cavità in due parti, l'una fra la superficie delle cellule e il sacco chitinoso, l altra nell'interno stesso del sacco e in rapporto coll'esterno » (pag. 557).

Nel soldato « l'aspetto della ghiandola frontale è presso a poco lo stesso che nell'insetto perfetto. Costituisce un'ampolla sacciforme che s'apre sulla fronte per un orificio a livello d'una leggerissima prominenza. Le dimensioni della ghiandola sono relativamente più grandi che non nell'insetto perfetto » (pag. 558, *69*). Le cellule epiteliali, secondo le osservazioni della Thompson in *R. flavipes*, « sono tutte ghiandolari, unite in un sincizio che contiene un reticolo di canali intracellulari ed è coperto di una cuticola porosa » (pag. 581, *212*).

« Nelle due ninfe, con accenni alari lunghi e corti, la ghiandola frontale non appare ancora funzionante. La ghiandola non ha uno sbocco esterno ; le cellule apparentemente capaci di produrre secrezione sono poche e sparse, mentre la maggior parte delle cellule sono strette e sottili e non sembrano contenere alcuna secrezione, ma piuttosto rassomigliano, nella loro forma e contenuto, a cellule sensoriali. L'ultima muta ninfale rimuove la cuticola esterna e, mancando una cuticola interna, si produce un'apertura esterna, nell'adulto. Frattanto le cellule epiteliali, non ancora ghiandolari nelle fasi ninfali, formano, alla loro superficie interna, una cuticola, acquistano potere di secrezione e diventano tutte ghiandolari, nell'adulto. Sicchè la ghiandola frontale delle ninfe a monconi alari lunghi e corti rappresenta una fase primitiva di sviluppo, rispetto all'insetto e al soldato. Invece evidentemente la ghiandola fontenellare dell'operaio è non funzio-

nante, giacchè non v'è traccia di secrezione nelle cellule ; ed è anche degenerata in struttura, poichè le cellule, benchè della stessa forma che nelle ninfe, sono più piccole, meno numerose, e in parte rimpiazzate da un reticolo mesenchimale » (pag. 584, *212*).

La Thompson, basandosi « sulla posizione e sulle somiglianze strutturali della ghiandola frontale e degli ocelli laterali, sulla presenza di un nervo fontenellare nella stessa sezione frontale nella quale i nervi ocellari laterali entrano nel cervello, sulla somiglianza delle cellule della ghiandola frontale, durante lo sviluppo ninfale, a cellule visive, e sui fatti raccolti da Holmgren circa una filogenesi della Termiti basata sulla morfologia della ghiandola frontale », sostiene « l'ipotesi che la ghiandola frontale possa essersi originata filogeneticamente dall'ocello mediano ancestrale, che manca nelle termiti attuali, e che il nervo fontenellare possa rappresentare la traccia del primitivo nervo ocellare mediano » (pag. 591).

« It is always questionable whether comparisons should be drawn between invertebrates and vertebrates, but it does not seem wholly improbable that the frontal gland of the termites may have had a phylogenetic history similar to that of the vertebrate pineal gland » (pag. 589).

Ora qual'è la funzione della ghiandola fontenellare? Il fatto che « essa è bene sviluppata solo nei soldati e nell'insetto perfetto (i primi che hanno ufficio di difendere la colonia, i secondi che, durante lo sciamento, sono esposti a un gran numero di nemici) mentre è rudimentale negli operai e nei sessuati di seconda forma che non intervengono nella difesa e non abbandonano mai il nido natale » (pag. 559, *69*) fa naturalmente pensare che la ghiandola fontenellare abbia una funzione difensiva. Secondo osservazione di Sandias (1893) in *lucifugus*, « questa ghiandola [retrocerebrale] d'ignota funzione..., sviluppata nelle ninfe della prima forma, negli individui adulti e nei soldati (soltanto ?)..., elimina un umore trasparente, che può venir spruzzato ad una certa distanza » (tav. I, *92*).

Del resto è ben noto che nei soldati Nasuti d'*Eutermes* la ghiandola fontenellare costituisce un organo d'attacco e di difesa, segregando un umore vischioso che, per contrazione dell'ampolla ghiandolare, schizza fuori, traverso il canale escretore, dalla punta del corno frontale. « Le contact de ce liquide étant particulièrement redouté des Fourmis, il y a là pour l'*Eutermes* un moyen de défense très effectif. L' Oecophylle qui s'approche d'un soldat et reçoit en plein visage une goutte de liquide visquex expulsé par le corne, se débat un istant, puis se laisse tomber le plus souvent de l'arbre. Est-ce la viscosité, est-ce une odeur imperceptible à nos sens, mais particulièrement désagréable à la Fourmi? Le fait est qu'une fois tombée sur le sol, on la voit longtemps encore occupée à se frotter les pièces buccales contre des pierres, contre des débris de bois, comme pour se débarrasser d'une sensation insupportable. L'Oecophylle, malgré son agilité, sa taille au moins trois fois supérieure, est mise hors de combat en un clin d'oeil » (Bugnion, *28*).

Anche nei soldati del *Coptotermes* sembra un mezzo di difesa la secrezione dell'ampolla ghiandolare che, non limitata alla testa, ma estesa, traverso il torace, a tutto l'addome, riempie da sola la più gran parte del corpo. Il secreto fuoriesce da un poro frontale, situato dietro l'epistoma; basta molestare il soldato perchè una goccia bianca appaia bruscamente sopra al labbro. « Semblable à du latex de caoutchouc, demeure assez longtemps sans s'écouler...... Ce latex est vraisemblablement un moyen de défense:

très visqueux, il englue les mandibules des fourmis ou autres aggresseurs et les rend inoffensives. Mais, chose curieuse, le termite paraît bien souvent englué lui-meme, empêtré dans son latex. La nature aurait-elle donné à ces insectes un moyen de défense qui les paralyse eux-mêmes? Il est vrai que, dans le peuple immense de la termitière, un soldat mis hors de combat est bientôt remplacé » (pag. 13, *29*).

Descrivendo la ghiandola fontenellare, poco cospicua, di *Termes Horni*, Bugnion dice che « la nature de ce petit appareil est encore énigmatique. Il semble cependant, à en juger d'après la grosseur du nerf et d'après la continuité de celui-ci avec la partie profonde de l'épithèlium, que la fontanelle est un organe à la fois glandulaire et sensoriel » (pag. 327, *33*).

Tutto considerato, a me sembra probabile che, oltre a una funzione di secrezione esterna, solo in pochi casi evidente e cospicua, la ghiandola fontenellare delle Termiti abbia, in linea generale, una funzione di secrezione interna. Per la sua secrezione esterna ha in certi casi notevole importanza fisiologica; per la sua secrezione interna avrebbe sempre grande valore morfogenetico.

Ma argomenti a sostegno di questa ipotesi li può fornire solo lo studio dettagliato della ghiandola fontenellare traverso tutti gli stadii di tutte le caste, come nel mio programma del 1917. Soprattutto potrebbe gettar luce sul valore morfologico e morfogenetico della ghiandola fontenellare l'esame di vecchi reali veri, di reali neotenici da alati e da ninfe e larve senza traccia di ali (in parecchie regine di sostituzione da alato bianco e in un reale neotenico da ninfa di prima forma ho trovato la ghiandola fontenellare ridottissima).

Se ci sono degli insetti adatti allo studio delle ghiandole a secrezione interna, essi sono i Termiti (e in genere gli insetti sociali che presentano un accentuato polimorfismo e permettono così l'osservazione comparata che supplisca alla impossibilità di sperimentazione diretta).

Certo la neotenia dei Termiti dipende essenzialmente dalla nutrizione; ma io credo che lo stimolo trofico non agisca direttamente e specificamente sullo sviluppo degli organi genitali: sibbene, colla mediazione di ghiandole a secrezione interna, sul metabolismo generale.

Così per la neotenia degli Anfibi, che appare in dipendenza di condizioni ambientali (Camerano), le ricerche degli ultimi anni dimostrano l'importanza del sistema endocrino [1].

[1] Secondo le esperienze di Gudernatsch (1912), girini di rana, nutriti con tiroide di varii mammiferi, entrano precocemente in metamorfosi, anche se molto giovani, producendo individui nani. Nutriti invece di timo, i girini crescono rapidamente, ma conservano a lungo i caratteri larvali e talvolta neanche entrano in metamorfosi. Sicchè le due ghiandole a secrezione interna hanno effetti inversi: una favorisce la differenziazione, l'altra l'accrescimento.

In questo secondo senso pare agisca anche l'ipofisi. Hahn (1913) ha trovato, in girini giganti che crescono, crescono senza entrare mai in metamorfosi, un aumento in volume dell'ipofisi, come nel gigantismo dell'uomo. Gli Smith (1922), iniettando sostanza fresca di ipofisi bovina in *Axolotl*, hanno ottenuto ritardo della metamorfosi.

Sostituendo l'estratto tiroideo con una preparazione iodata, come fece il Morse (1914), si

Chi sa che ghiandola fontenellare, ghiandole tentoriali e *corpora allata* non abbiano pei Termiti un'importanza paragonabile, sia pure lontanamente, a quella che, per animali superiori, hanno l'ipofisi, il timo, la tiroide!

È un campo ancora vergine nel quale nuovi orizzonti si aprono alla ricerca.

Le cellule nutrici degli spermi.

Il ne faut pas se contenter aujordu'hui de disséquer, couper, colorer ou dessiner. Il faut faire tout cela, non plus pour combler une minime lacune dans nos connaissances anatomiques ou histologiques, mais pour résoudre un problème biologique, si petit soit-il.

DELAGE.

In una nota preliminare « Sul metabolismo dei reali veri nella società dei Termitidi » (apr. 1921, *126*) scrivevo : « Nelle vescicole spermatiche degli alati sciamanti di *Calotermes* si trovano, libere nel lume, oltre a notevole quantità di spermi maturi (aventi la caratteristica figura *a seme di zinnia* descritta dal Grassi), un gran numero di cellule pressochè sferoidali, a protoplasma debolmente basofilo e grosso nucleo irregolarmente sferoide, a struttura omogenea. Che cosa rappresentano queste cellule ?

Il fatto che nello spermateca delle regine si contengono solo tipici spermi *a seme di zinnia* esclude che possa esservi un dimorfismo negli elementi spermatici maturi. Il fatto che, nei testicoli di re, dei lobuli son pieni di spermi esclude che la maturazione degli spermatociti in spermi possa avvenire nei deferenti. Sembra quindi doversi considerare queste cellule come cellule destinate alla nutrizione degli spermi. E difatti nelle

---

assiste pure a notevole acceleramento della metamorfosi. Girini cui sia stata asportata la tiroide divengono incapaci di metamorfosarsi, a meno che non si somministri loro iodio.

Secondo Mayerowna (1922), il volume della tiroide nei girini aumenta molto durante la metamorfosi, al momento culminante della quale (riduzione dell'intestino e della coda) raggiunge il massimo del suo accrescimento; poi si rimpicciolisce ed anche nella struttura interna riprende, nella rana adulta, l'apparenza di un organo inattivo. L'azione dei raggi Röntgen sulla sola tiroide è debolmente eccitante; su tutto l'organismo porta una forte ipofunzione della ghiandola: il che conferma la scarsa autonomia della tiroide e la sua dipendenza dagli altri organi a secrezione interna.

Secondo recenti esperimenti di Swingle (1922) sulla metamorfosi di anfibî neotenici, « il fatto che l'*Axolotl* non si metamorfosa sembra dovuto a inibizione o insufficiente sviluppo di certi sconosciuti fattori che normalmente servono a liberare l'ormone, bene sviluppato, dalla tiroide nella corrente sanguigna. Può darsi che insufficiente stimolazione nervosa, o inibizione fors'anche, sia la causa immediata di ritenzione della secrezione nelle vescicole tiroidee; ma, in ultima analisi, in qualche difetto di interrelazione tra i varii componenti del sistema endocrino è probabilmente l'agente causale della inibizione nervosa o difetto di stimolazione normale.

Esperimenti su grossi girini neotenici di anuri indicano che il loro non metamorfosarsi a tempo giusto dipende dalle stesse cause che inducono neotenia nell'*Axolotl*; cioè la tiroide pare non segreghi, a causa di certe sconosciute influenze inibitorie, l'ormone, ben formato, nella corrente sanguigna. Però l'inibizione della tiroide sembra meno marcata in anuri che non in Axolotl, giacchè col tempo girini neotenici possono finire col metamorfosarsi ».

vescicole spermatiche dei re un denso liquido riempie interamente il lume e vi nuotano in mezzo spermi e pochi elementi nucleari sferoidali, piuttosto acidofili, di cui solo alcuni distintamente contornati da un alone protoplasmatico. Avviene dunque una colliquazione delle cellule suddescritte in succo nutritivo? Si direbbe: osservando più attentamente, ho veduto, nelle vescicole spermatiche di sciamante, qualche elemento cellulare più grosso, a struttura citoplasmatica reticolare e nucleo piccolo e periferico come in una tipica cellula adiposa. Spero poter presto tornare sull'argomento per precisare la natura di questi elementi e studiarne la differenziazione dagli elementi germinali nel testicolo, ove ritrovo, all'interno dei lobuli, raggruppate fittamente tra loro, o vicine a fasci di spermi, le cellule a nucleo acidofilo. Anche nei testicoli e nei deferenti del *lucifugus* ritrovo questi elementi cellulari caratteristici. Questo di cellule trofiche libere nelle vescicole spermatiche sarebbe un tratto caratteristico dei termitidi anche rispetto agli altri insetti sociali, in rapporto evidente col fatto della persistenza del maschio e della periodica copula (tratto biologico caratteristico della società dei Termitidi)».

Purtroppo non ho avuto tempo di compiere, come mi proponevo, lo studio completo della evoluzione degli organi e degli elementi sessuali maschili. Ho fatto, però, nuove e più precise osservazioni che mi permettono di parlare, senza più dubbio alcuno, di « cellule nutrici degli spermi ».

Nella fig. 16 *a*) è rappresentato l'apparato genitale maschile d'un alato (ancor bianco) di *R. lucifugus* (da preparato colorato *in toto* in carminio).

I testicoli (T) consistono di un certo numero (otto o nove) di corti lobi che comunicano con la porzione terminale del vaso deferente (V d). Questo scorre quasi verticalmente dall'avanti all'indietro; poi, all'altezza del nono tergite, piega ad angolo retto e, decorrendo orizzontalmente, va a sboccare, insieme col deferente dell'altro lato, nella porzione basale comune delle vescicole seminali che si prolunga in un corto, muscolare dôtto eiaculatore (D e). Le vescicole seminali (V s) nel *R. lucifugus* hanno forma di due appendici cilindriche, lunghe e grosse; e così pure nel *C. flavicollis* [1].

[1] Invece nei Termiti superiori pare che le vescicole seminali siano piccole e magari fuse in un organo impari. In *Eutermes*, secondo Homgren, i deferenti «münden medial in eine ziemlich kleine, kugelrunde, gemeinsame Samenblase ein» (pag. 186, *114*). In *Termes obscuriceps*, secondo Bugnion, « le canal déferent, très étroit...., se termine par une partie un peu renflée (vésicule séminale), adossée à celle du canal opposé » (pag. 229, *32*) e molto piccola, a giudicare dalla fig. che ne dà l'A. (fig. 7, pl. VII).

Nei generi inferiori di Termiti poi, le vescicole seminali si presentano in una condizione simile a quella dei Blattidi. In *Archotermopsis wroughtoni*, secondo Imms, « the *vesiculae seminales* (V s) are paired organs, each consisting of a number of short tubes which are the homologues of the utriculi of the 'mushroom-shaped gland' of *Periplaneta* » (pag. 119, *118*) (vedi fig. 16 *b*). In *Termopsis angusticollis*, secondo Thompson, « the vasa deferentia are slender and open into the basal part of the paired seminal vesicles, which are greatly branched and convoluted, the convolution increasing with age » (pag. 507, *215*) (vedi fig. 18 *d*). « The paired character of the seminal vesicles is especially well seen in the soldier » (pag. 523) (vedi fig. 18 *e* a pag. 443).

Purtroppo le nostre conoscenze in proposito sono ancora troppo scarse, ma certo non mi sembrano giustificate le affermazioni dell'Holmgren:

« Für die Systematik der Termiten geben die Geschlechtsorgane hingegen keine Gesichtspunkte. Dies ist aber nicht merkwurdig, denn die mesodermalen Teile der Geschlechtsorgane sind wohl als

Ora, in alati sciamanti di *Calotermes*, il contenuto delle larghe vescicole seminali (fig. 17 *a*) è costituito da una notevole quantità di spermî (S), apparentemente maturi, della caratteristica forma descritta dal Grassi (e che si presenta molto varia secondochè sono tagliati di piatto o di profilo o trasversalmente), frammisti a cellule (C) piuttosto

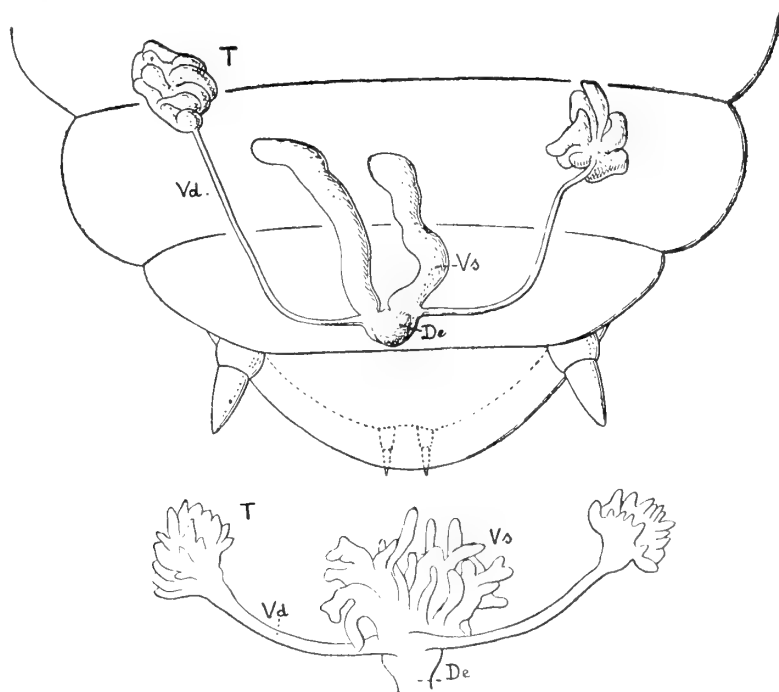



Fig. 16.

a) Apparato genitale maschile in alato ancor bianco di *R. lucifugus*: vescicole seminali (Vs) che, insieme ai deferenti (Vd) scesi dai testicoli (T), sboccano nel canale eiaculatore (De). Da esemplare colorato *in toto* con carminio e montato in balsamo (copiato piano tav., oc. 4, ob. 3, ridotto a $^1/_2$).

b) Apparato genitale maschile in soldato di *Archotermopsis wroughtoni*. Notevole la forma ramificata delle vescicole seminali. Da Imms (pl. 9, fig. 54, *118*) $\times$ 48; rid. a $^1/_2$.

tondeggianti, con grosso nucleo acidofilo che spicca dal protoplasma tenuemente basofilo (fortemente basofili gli spermî). Gli spermî sono più numerosi delle cellule tondeggianti: in una sezione di vescicola seminale conto un centinaio di spermii e una trentina di nuclei rossi. Detti nuclei (fig. 18 *a*) hanno forma, in complesso, tondeggiante ma che, esaminata più attentamente, si rivela quasi sempre abbastanza irregolare, qualche volta

diejenigen Organe zu betrachten, welche von den äusseren Lebensbedingungen am wenigstens beeinflusst werden » (pag. 187, *114*).

« *Im Bau sowohl der männlichen wie der weiblichen Geschlechtsorgane verhalten sich die Termiten ursprünglicher als die Blattiden, und können somit nicht in dieser Hinsicht von den Blattiden abgeleitet werden* » (pag. 188).

molto irregolare. Colpisce sopratutto l'apparente assenza di struttura, per la quale questi nuclei acidofili si presentano (per la maggior parte; qualcuno mostra piuttosto nettamente dei granuli più scuri rispetto al rosso-chiaro del fondo) come gocce coagulate di materiale amorfo, variamente grosse, e le loro dimensioni non sembrano stare in rapporto con quelle dell'area citoplasmatica. In questa, che è tinta assai debolmente, ap-

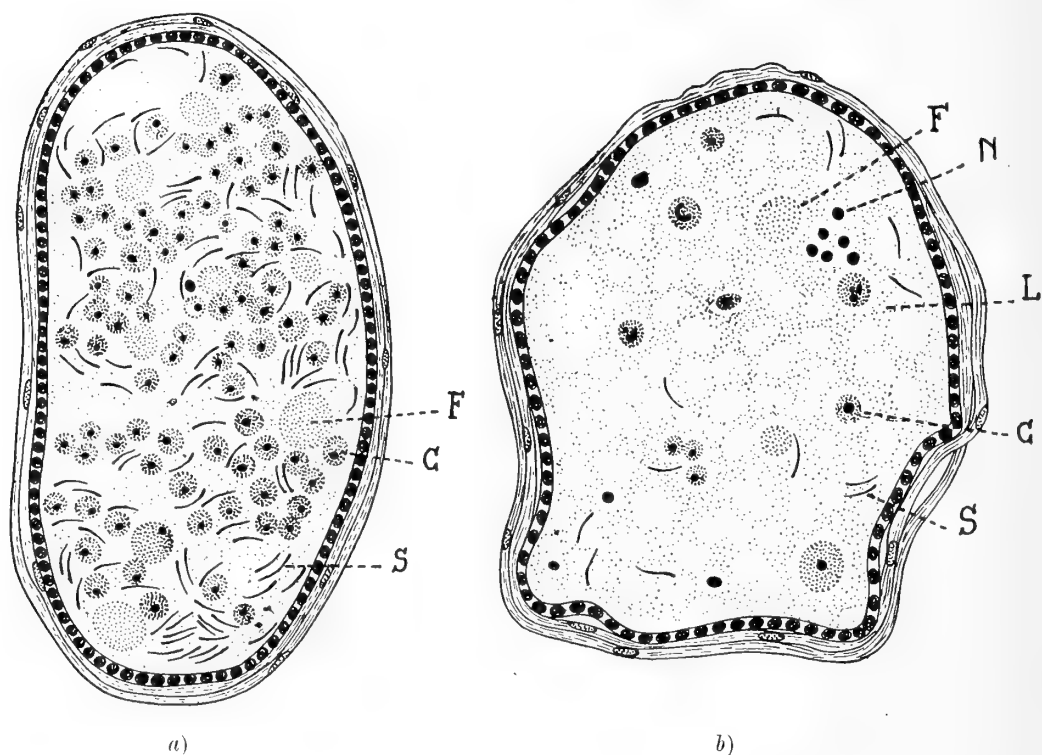



Fig. 17. — *Calotermes flavicollis.*

a) Sezione di vescicola seminale di alato sciamante. Parete con muscolatura ed epitelio; lume occupato da quantità di cellule a nucleo acidofilo (C), e frammisti, spermi (S). C'è anche qualche sferula (F) grossa, senza nucleo, stadio di passaggio alla colliquazione.
b) Sezione di vescicola seminale di re. Il lume è occupato da secreto derivato dalla colliquazione delle cellule nutrici. Resta qualche sferula (F), qualche cellula a nucleo acidofilo (C), parecchi nuclei acidofili liberi (N). Pochi spermi. *a*) e *b*): oc. 4 C., ob. $^1/_{15}$ J. O.; cop. piano tavol., rid. a $^2/_3$.

pena appena, dall'emallume, si riesce a distinguere un fitto reticolo: il contenuto delle piccole maglie è pressochè incoloro. In parecchie di queste cellule si presenta, oltre il nucleo acidofilo spostato, come quasi sempre, verso un polo della cellula, un granulo cromatico basofilo, spostato talvolta verso l'altro polo, tal'altra accostato al nucleo acidofilo: dà l'idea d'un centriolo [1]. Nei casi nei quali la forma del nucleo s'allontana

[1] Ed io lo chiamerò, da ora innanzi, centriolo, per comodità, senza preoccuparmi se veramente sia un centrosoma o idiosoma o non piuttosto un mitosoma (nebenkerne) o puranco un monosoma (eterocromosoma?) Quel che ci interessa per ora è che questo corpicciolo nucleoliforme, basofilo, compare evidente negli spermatociti in cinesi maturativa e può servire quindi a caratterizzare le cellule di un dato distretto testicolare.

dal tipo tondeggiante, di solito, focheggiando, il nucleo appare costituito dall'agglomerato di due o più (qualche volta in numerosi frammenti) gocce coagulate amorfe.

Tra le cellule a nucleo acidofilo (grosse μ 5,5 $\times$ μ 4,5) s'incontrano, più rare, delle sfere (F), due o tre volte più grosse, che, sprovviste quasi sempre di nucleo, hanno lo aspetto di grosse gocce, più o meno tondeggianti od ovalari, di secreto (fig. 17 *a*). Attorno ad esse spesso si vedono degli spermii che, tagliati di profilo (e qualche volta trasversalmente), sottolineano la circonferenza di dette sferule, sulle quali evidentemente stanno adagiati di piatto. Spesso sono parecchi attorno a una stessa sferula (fig. 18 *a*), S). In qualche sferula c'è un nucleo basofilo, piccolo rispetto alla mole della cellula (per tre di queste sferule trovo le dimensioni: μ 12,7 $\times$ μ 9,1; μ 16,4 $\times$ μ 12,7; μ 20 $\times$ μ 14,5) forse anche più piccolo dei più piccoli nuclei acidofili, e spostato alla periferia, accollato anzi alla parete cellulare, così da ricordare l'aspetto caratteristico delle cellule adipose. Anche su questa cellula stanno adagiati spermii (S). Meglio che nelle altre sferule appare evidente, come nelle cellule a nucleo acidofilo, il finissimo reticolo citoplasmatico, a maglie più larghe verso il centro della cellula. Si vedono spermii aderenti anche a qualche cellula (C), con grosso nucleo acidofilo e centriolo basofilo.

Càpita anche di vedere grossi nuclei acidofili (N), e anche nuclei, relativamente grossi, basofili, apparentemente liberi, come fuorusciti dalle loro cellule.

Raramente s'incontra qualche cellula con nucleo a grossi frammenti basofili o con nucleo basofilo, apparentemente normale, non picnotico (CB). Uno stadio di passaggio sembra rappresentato da una cellula con centriolo basofilo a un polo e, piuttosto centrale alla cellula, un nucleo di colore non francamente acidofilo e nel quale è possibile discernere una membrana nucleare nettamente basofila, con dei granuli basofili residui, e una massa piuttosto acidofila che non riempie esattamente la vescicola nucleare.

Se passiamo ad esaminare la vescicola seminale d'un re (pure di *Calotermes*) (fig. 17 *b*), ci si offre un aspetto tutto diverso. Le vescicole seminali del re sono assai ampie e tutte piene d'una sostanza leggermente basofila, un po' vacuolata, evidentemente un liquido denso, quasi poltiglioso (L). In questa sostanza sono immersi — « rari nantes in gurgite vasto » — pochi bastoncelli spermatici (S), qualche corpicciuolo tondeggiante (N), leggermente acidofilo (rossiccio nei preparati all'emallume-eosina), che talvolta appare essere il nucleo d'una piccola cellula sferoidale (C).

In una sezione di vescicola seminale trovo dodici di questi nuclei rossicci, di cui cinque circondati da alone protoplasmatico, e appena otto spermî; nell'altra vescicola spermatica, nella stessa sezione, conto tredici nuclei rossicci e dodici spermî. Ma, esaminando sezioni di vescicola seminale dove questa presenta maggior diametro (mm. 0,16), trovo più abbondanza di spermii e di nuclei rossi: trentasette spermi e trentacinque nuclei rossi, in una sezione. Qualche sferula ha il nucleo in disfacimento (per esempio, un anello acidofilo incompleto); tal'altra, cui aderisce uno spermio, ha nel centro, al posto del nucleo, un tondetto più rifrangente, semiincoloro.

Qualche cellula a nucleo debolmente acidofilo presenta anche, come molte cellule nelle vescicole seminali di alato sciamante, un granulo basofilo, come centriolo (diametro della cellula μ 5, 4; del nucleo μ 1,8).

Evidentemente il liquido che riempie le vescicole seminali del re è derivato, almeno in gran parte, dalla colliquazione delle cellule a nucleo acidofilo che riempivano la vescicola seminale dell'alato sciamante.

E queste cellule donde derivano? Viene subito l'idea di andare a guardare il testicolo. E là si ritrovano, infatti, numerose cellule a nucleo acidofilo.

Nei testicoli dell'alato sciamante, qualche cisti contiene cellule germinative normali e cellule a nucleo acidofilo; tal'altra è piena di spermii e tra essi spicca qualche cellula a nucleo acidofilo.

Nei testicoli del re, intere cisti talvolta sono piene di cellule a nucleo acidofilo; altre ne contengono qualcuna tramezzo a spermî; si ritrova qualche cellula a nucleo acidofilo e centriolo basofilo.

Evidentemente le cellule che riempiono la vescicola seminale dell'alato sciamante derivano dal testicolo; nel quale intere cisti (di spermatogonii e di spermatociti) o cellule isolate degenerano: il nucleo diviene picnotico, e la sostanza cromatica acidofila.

In questa condizione le cellule scendono dal testicolo traverso il deferente (nello stretto lume del quale è possibile ritrovare, oltre spermî, qualche cellulina a nucleo acidofilo) e s'accumulano, insieme cogli spermî, nelle vescicole seminali. Là prosegue il processo di degenerazione che porta allo spappolamento di queste cellule in un liquido nutritizio, il liquido che riempie le vescicole seminali del re (è probabile che una parte delle cellule germinali abortite subisca la colliquazione nel testicolo stesso per la prima nutrizione degli elementi spermatici). È difficile stabilire una seriazione probabile delle immagini istologiche osservate, giacchè il fenomeno della degenerazione e della colliquazione può certo avvenire con le modalità più diverse.

La maggior parte delle cellule scende dal testicolo nelle vescicole seminali, col nucleo già picnotico e acidofilo; questo nucleo si frammenta (la frammentazione può anche avvenire allo stadio di nucleo picnotico, ma ancora basofilo) e finisce collo scomparire (la scomparsa può non esser preceduta dalla frammentazione). Intanto il corpo protoplasmatico si rigonfia, si vacuolizza (il nucleo, se ancora esiste, viene spinto alla periferia, come in una cellula adiposa) e la sua struttura reticolare si dilata e si smaglia; lentamente la sfera protoplasmatica si dissolve in seno al liquido poltiglioso della vescicola (altre volte è primo il protoplasma a scomparire — o fors'anche talvolta la massa cromatica fuoriesce dalla cellula — così che il nucleo acidofilo, e talvolta ancora basofilo, rimane libero nel lume) [1].

[1] Fenomeni molto simili ha visti Monterosso nei testicoli del topo (*Mus decumanus*). Monterosso afferma che le piccole cellule derivanti dalle irregolari divisioni degli spermatogonii non si sviluppano ulteriormente (come propende a credere Regaud) ma vanno incontro a trasformazione grassa: e questa sarebbe l'origine del grasso nei tubi seminiferi del Topo.

« In un primo momento, la cromatina che si trova in essi, al pari di quella dello spermatogonio da cui proviene, è fortemente attaccata dai colori basici (ematossilina ferrica, saffranina ecc.); ma ben tosto in essa han principio delle modificazioni chimiche, che sfuggono ai nostri mezzi d'indagine, in seguito alle quali vien tinta dai reagenti acidi (eosina, fucsina acida ecc.). Infine non tarda a raggiungere l'ultimo stadio, durante il quale riduce l'acido osmico, tingendosi in nero, ed è suscettibile di colorarsi, col Su lan III, assumendone la tinta caratteristica. Questi cambiamenti microchimici sono accompagnati da aspetti fisici diversi, perchè, mentre in un primo stadio il nucleo presenta uno

Anche nei testicoli dell'alato sciamante di *R. lucifugus* spiccano gruppi di cellule a nucleo acidofilo, come se intere cisti di cellule germinative degenerassero.

Anche esaminando testicoli di soldato di *Mastotermes*, ho trovato numerose cellule a nucleo picnotico, acidofilo. Spesso i limiti cellulari sono poco netti o addirittura segnati solo da un alone più chiaro attorno al nucleo. Il nucleo, di solito, ha una forma sferoide irregolare: talvolta appare cromatolitico, con massulette residuali acidofile disposte alla periferia in modo da rendere più netti i contorni del nucleo; tal'altra è spezzato in più frammenti. Càpita di vedere qualche nucleo acidofilo, più chiaro al centro, isolato o con allato un residuo di cromatina basofila; qualche nucleo basofilo picnotico, vacuolato; qualche elemento cellulare piuttosto grande, con piccolo nucleo intensamente basofilo, spostato alla periferia del corpo cellulare. Insomma un esame anche superficiale ci persuade che nel testicolo di soldato di *Mastotermes* hanno luogo fenomeni di aborto e degenerazione di molti elementi germinativi, con formazione di cellule a nucleo acidofilo corrispondenti alle cellule nutrici degli spermii di *Calotermes* e *Reticulitermes* [1].

---

o più granuli, ulteriormente subisce un processo di cromatolisi, per cui essi si gonfiano, si avvicinano e fondono, formando una figura picnotica.....

Contemporaneamente il protoplasma, da omogeneo che era, diventa finamente granuloso, poi si vacuolizza leggermente, finchè si dissolve.... Mentre per lo più esso scompare durante la picnosi, altre volte resta fino a quando il granulo cromatico si sia trasformato in corpo lipoide. Frequentemente anche i granuli cromatici vengono espulsi ad uno ad uno prima della cariolisi, per cui resta una sfera protoplasmatica, spesso molto piccola, sparsa di minutissimi vacuoli, che si dissolve lentamente in seno al *syncytium nourricier* del Regaud. Qualcuna di tali sfere, o perchè spinta dai movimenti, di cui, secondo il citato autore, è fornito l'epitelio dei tubi seminiferi, o perchè trascinata dai fasci di spermatozoi maturi che si staccano dalla parte periferica del canalicolo, cade nel lume di questo, dove, impigliandosi tra le code degli spermatozoi, vien trasportata per qualche tratto, finchè si dissolve sotto l'azione del liquido (*liquor canaliculi* del Tellyesniczky) esistente nella cavità dei tubi seminiferi. Ben di rado infatti si trovano di queste sferule nel *riceptaculum seminis* » (pag. 4, ***160***).

Come si vede, questi processi degenerativi di cellule germinali si svolgono in modo tutto simile nei gradini più lontani della scala zoologica.

« Tettenhamer, studiando in particolar modo la degenerazione nucleare « wie sie im Verlaufe der Spermatogenese von Salamandra so reichlich vorkommt », mise in chiaro che « bei der Degeneration der Spermatocytenkerne sich auf Kosten des Chromatins eine acidophile Substanz bildet » la quale « durch Phagocytose in den Zelleib von Leukocyten übertritt » (*209*). Friedmann studiò in varie specie di Vertebrati [ed anche in *Astacus*], ma specialmente in Anfibi (Rana, Salamandra, ecc.), l'origine e l'ufficio dei cosiddetti « Zwischenkörperchen » nel testicolo, cioè di certe masserelle di cromatina, di forma irregolare e variabilissima, prive di struttura nucleare, e contenute nei tubuli testicolari: egli ammette che rappresentino nuclei disorganizzati « von verkümmerten, in ihrer Weiterentwicklung gestörten Keimzellen (meist wohl Samenmutterzellen) ». Cotesti « Zwischenkörper » verrebbero catturati dagli spermatogonii per un processo di fagocitosi e possono passare anche nel loro nucleo (*73*). Va infine ricordato quanto Königstein mise in chiaro per l'uomo, « ueber das Schicksal der nicht-ejakulirten Spermatozoen ». Egli dimostrò la « Resorption der Spermien » nelle vescicole seminali, previa degenerazione dei capi in sferule eosinofile che, scomposte in granuli, vengono prese dalle cellule epiteliali delle vescicole seminali. L'autore ne deduce che « wahrscheinlich haben die nicht ejaculirten Spermien in Form ihrer resorbirten Abbauproducte im Stoffwechsel noch eine Aufgabe zu erfüllen » (***130***) (vedi Cognetti, De Martiis, pp. 304, 308 e 309 (*42*)).

[1] In soldati di *Termopsis* la Thompson ha visto che: « in some adults the central space » (dei testicoli; è quello che io ho chiamato « camera terminale ») « is filled by masses of developing or possibly degenerating spermatids interspersed with a few spermatozoa. In other, older, individuals the

Però qui i processi potrebbero complicarsi per l'eventuale intervento di fenomeni d'arresto e di regressione degli organi genitali, quali avvengono certamente nei soldati della maggior parte dei Termitidi, ma che sembra però non abbiano luogo nei generi più bassi come *Archotermopsis* e *Termopsis* (1). Certo, un esame comparativo a questo riguardo sarebbe del massimo interesse.

La figura 18 *b* rappresenta, in sezione trasversale-obliqua, la vescicola seminale di un alato sciamante di *R. lucifugus*. È piena di secreto (leggermente basofilo) (L) e contiene, da un lato, un grosso corpo tondo, come cisti farcita di corpicciuoli tondeggianti, intensamente basofili (S), cui sono frammisti pochi corpicciuoli più grossi, distintamente acidofili (C). Questi hanno attorno una piccola area citoplasmatica (piuttosto intensamente basofila); solo uno, un po' più grosso e deforme, è, apparentemente, libero (N; fig. 18 *c*). In una sola sezione ottica della sfera (fig. 18 *c*), che è evidentemente una spermatofora, ci sono almeno un duecento spermî e sette o otto celluline a nucleo acidofilo (credo di non esagerare calcolando che la spermatofora debba contenere più di duemila spermî). Qualche corpicciuolo tondeggiante, acidofilo, ma senza area protoplasmatica, tutt'al più con attorno un'areola più chiara, appare qua e là nel secreto della vescicola (N; fig. 18 *b*). Esso rappresenta evidentemente il nucleo di cellule, identiche alle cellule degli spermii descritte in *Calotermes*, il protoplasma delle quali si è spappolato nel liquido che riempie la vescicola. Uno stadio, un po' meno avanzato, di questo processo, è rappresentato dalle celluline (C) a nucleo acidofilo, incluse nella spermatofora.

Verisimilmente queste celluline provvedono alla nutrizione degli spermî durante la permanenza della spermatofora nella vescicola seminale, mentre poi, quando la spermatofora viene introdotta nel canale genitale femminile, la membrana ialina si dissolve e gli spermî, liberi, si nutrono del liquido iniettato, insieme colla spermatofora, dalla vescicola seminale durante la copula, e forse anche di particolare secrezione della spermateca (2).

---

spermatozoa predominate over the spermatids. A very few swollen spermatids and some spermatozoa were noted in the vas deferens of one adult soldier » (pag. 523, *215*).

Evidentemente gli « spermatids » sono le mie « cellule nutrici », e se nei vecchi individui diminuiscono di numero gli è perchè si spappolano in liquido nutritizio!

(1) In soldati di *Archotermopsis* Imms trova che « gli organi maschili, come i femminili, sono bene sviluppati e non mostrano indizi di degenerazione o di arresto di sviluppo » sicchè conclude « that the testes of soldier are functional organs » (pag. 120, *118*). Anche Thompson trova che « there are no visible signs of degeneration or arrested development in the testes of these young soldier nymphs... In the adult soldier the testes are larger than in the first-form adults and nymphs, altough much smaller than those of the second and third forms » (pag. 522, *215*).

(2) Nei Brachiuri, secondo Gilson, « gli spermatozoi abbandonano il testicolo e penetrano nei deferenti; in questi canali incontrano il plasma vischioso e granuloso che vi versano le cellule epiteliali. Ciascun ammasso di spermi si circonda d'una porzione di questo plasma e poi s'inviluppa di una membrana ialina (spermatofora). Le spermatofore nuotano in un liquido filante, lattescente, che contiene granuli e gran quantità di globuli albuminoidi ialini. Questo liquido è versato nella parte inferiore dell'ovidotto, ove s'accumula: il coagulo spermatico rimane lungo tempo negli organi femminili, si discioglie lentamente e serve probabilmente a nutrire gli spermi fino all'istante della fecondazione. Quest'ultimo atto deve prodursi poco tempo prima della deposizione, se non al momento medesimo della uscita delle uova » (pag. 173, *81*).

Quanto al modo in cui viene secreto il plasma granuloso dei deferenti, secondo Gilson nei Paguridi « le cellule che tappezzano la porzione media e inferiore dei deferenti si riempiono di prodotti

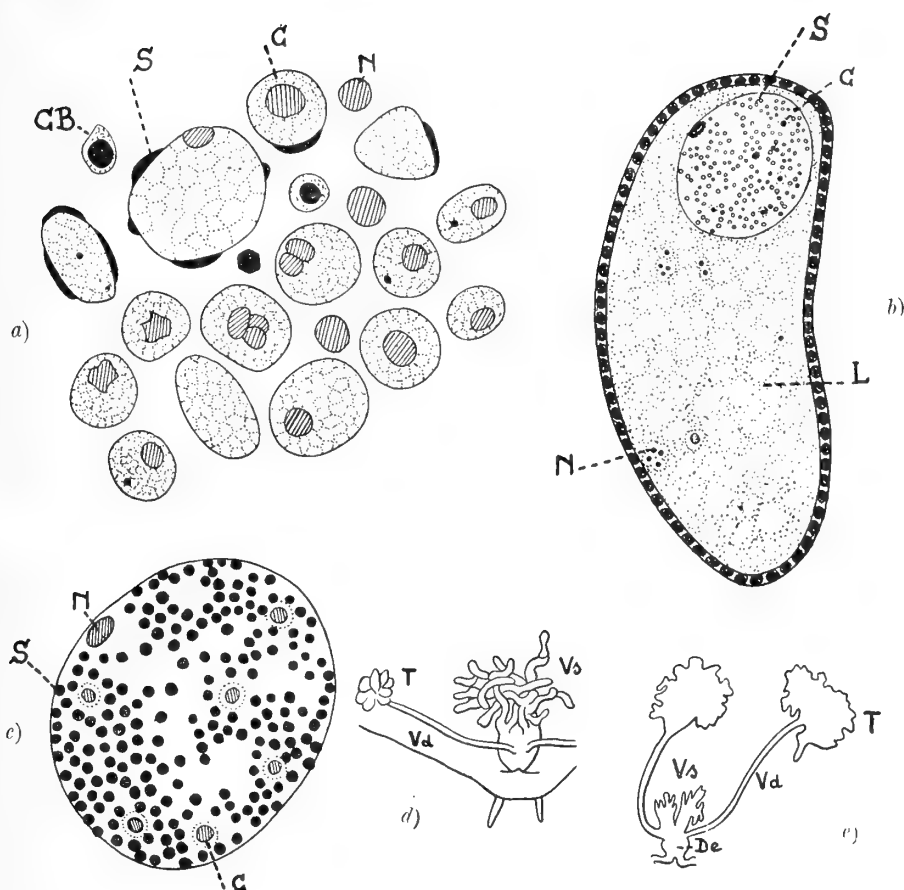



Fig. 18.

a) Cellule contenute nel lume della vescicola seminale in alato sciamante di *C. flavicollis*. È punteggiato il reticolo citoplasmatico, rappresentati in nero i nuclei basofili (colorati dall'emallume), tratteggiati i nuclei acidofili (colorati dall'eosina). La maggior parte, cellule a nucleo acidofilo (C), alcune con centriolo; qualche nucleo libero (N); qualche rara cellula a nucleo ancora basofilo (CB), o massula di cromatina basofila libera; sferule sulle quali si adagiano spermi (S) e delle quali il nucleo manca o è spostato alla periferia.

b) Sezione di vescicola seminale di alato sciamante di *R. lucifugus*. Pareti con epitelio unistratificato; nel lume (L), occupato da secreto con qualche nucleo acidofilo (N; circondato da vacuola), sta una spermatofora (S), piena di spermi rotondi tra i quali qualche cellulina a nucleo acidofilo (C). Oc. 4 C., ob. $^1/_{15}$ J. O.; cop. piano tavol., rid. a $^2/_3$.

c) Spermatofora, più ingrandita. Oc. 8 C., ob. $^1/_{15}$ J. O. (c. s.). Sono colorati in nero gli spermi (basofili), tratteggiati i nuclei acidofili dei quali uno libero (N), gli altri contenuti in celluline a contorni appena visibili (rappresentati punteggiati).

d) Organi riproduttori maschili di soldato adulto di *Termopsis angusticollis*.

e) Organi riproduttori maschili di un adulto di 1ª forma di *Term. ang*. *d*) ed *e*) da Thompson (fig. 22 e fig. 15, tav. 2. *215*).

La formazione della spermatofora nella vescicola seminale del maschio [1] è interessante ed è forse particolarmente opportuna in rapporto alla poca intimità del contatto sessuale e all'immobilità degli spermii. Sarebbe molto importante vedere se anche in seguito, durante la vita reale, avviene formazione di spermatofore nella vescicola seminale del maschio ; il che, tra l'altro, dimostrerebbe con sicurezza che veramente ha luogo un accoppiamento e non viene versato lo sperma sulle uova man mano che la regina le depone, come è stato supposto.

Silvestri si domanda : « Nei Termitidi avviene una vera e propria copula ? Secondo osservazioni del Grassi, ciò accadrebbe nei Calotermitini. Per i Termitini non esiste alcuna osservazione in proposito ; però, data la forma di una regina vera e quella di un re, si può escludere *a priori* che essa avvenga. Credo che il re si avvicini con l'apertura genitale a quella della femmina e versi il suo sperma sopra le uova, di mano in mano che vengono emesse dalla regina. Ciò spiegherebbe anche la continua vicinanza dei due coniugi, non dovuta certo a molta tenerezza del maschio per la femmina, poichè quello scappa ben frettoloso, in caso di pericolo, lasciando pure la compagna di alcuni anni cader vittima del dovere dentro un appartamento che non ha porta capace di essa » [2] (pag. 150, *196*).

Ora, nei primi anni di vita reale, certamente anche nei Termitini avviene la copula ; ed a me pare ammissibile, anzi probabile, che continui ad avvenire anche

---

che s'accumulano in vacuole dove si mostrano sotto forma d'inclusioni semiliquide. Nel medesimo tempo il loro protoplasma sembra disorganizzarsi profondamente : è la conseguenza della molteplicità delle vacuole e delle inclusioni che vi si sviluppano. Anche la loro membrana si distrugge e ne risulta che il protoplasma si fonde da cellula a cellula. Infine i nuclei stessi partecipano a questa modificazione. Essi prendono, sotto l'azione del verde di metile, una colorazione omogenea (fatto costante nei nuclei alterati), e presentano una forma irregolare. All'estremità interna di queste cellule si produce presto una lacerazione che permette ai prodotti accumulati e all'enchilema di spandersi nel lume del canale deferente, trascinando lembi di reticolo. Nei preparati si vede l'estremità lacerata delle cellule perdersi in una massa che conserva ancora aspetto di protoplasma reticolato. Questo, a sua volta, passa insensibilmente a un magma granuloso che più non ha aspetto reticolato, ma che è riempito di zone più o meno scure. Insomma : il plasma generatore delle spermatofore è del protoplasma ingombro di prodotti albuminoidi espulsi dalle cellule epiteliali e che, nel lume del canale deferente, si modifica ancora al punto da perdere l'aspetto di protoplasma reticolato » (*81*).

[1] Vera spermatofora, dunque. Cholodkovsky propone, molto opportunamente, di serbare il nome di spermatofore alle sole formazioni che si originano nelle vie genitali maschili e servono pel trasporto degli elementi seminali nelle vie genitali femminili, quasi « übertragbaren Penis » (come nei Gryllus e nei Cefalopodi) ; e di tenerle distinte dalle spermatodose, che si formano negli organi sessuali femminili dal secreto dell'epitelio rivestente la « Samentasche », e che servono, molto probabilmente, a dosare gli elementi seminali durante la fecondazione dell'uovo (come nei Locustidi) ; dagli spermatofragmi, formazioni che servono a otturare la vagina femminile o in genere a proteggere gli elementi seminali (masse mucose dei Locustidi, secrete dalle grandi ghiandole maschili) ; dagli spermatodesmi, forme di riunione degli elementi seminali (*41*).

[2] Fuller sembra meno scettico del Silvestri in riguardo alla sincerità dell'amor coniugale nel re : « The queen is invariably accompanied by one male ; more than one has never been noticed. This creature, under observation, displays an extraordinary devotion to his mate. He seldom wanders more than an inch avay from her ; costantly approaching her head and paying apparent court ; then inspecting her flanks and eggs with preoccupied attention ; beaving, in short, as most male termites seem in the habit of doing, but never revealing the purpose of his existence » (pag. 376, *74*).

quando la regina ha raggiunto grosse dimensioni, dato che si tratta d'una copula poco intima, che consiste in un semplice ravvicinamento delle estremità posteriori dell'addome [1] (manca un pene nei Termitidi) [2].

In ogni modo, come ho detto, anche in assenza di dirette osservazioni biologiche, l'esame delle vie genitali maschili, se queste contengano o no spermatofore nei vecchi re, potrebbe risolvere il problema (che si presenta tutt'altro che trascurabile, anche in relazione all'ipotesi d'un «mode special de fecondation» [Bugnion] che determinerebbe il sesso e la casta) [3].

Nei reali di sostituzione del *Calotermes* c'è evidentemente, anche per le cellule nutrici degli spermî, una condizione di cose tutta simile a quella dei reali veri.

[1] L'atto della copula è stato ben poco osservato finora; e la migliore descrizione è pur sempre quella che ne fa Grassi. « Finalmente il 17 aprile 1891 in una provetta, dove stava un nidino di Calotermiti, alle ore undici antimeridiane sorpresi il re e la regina in copula. Questi individui reali, a giudicare dalla loro grossezza, avevano forse tre anni di età. Si toccavano colle estremità posteriori dell'addome; perciò stavano disposti in una linea retta l'uno dietro all'altro e tenevansi nella posizione ordinaria, cioè col dorso verso l'alto: soltanto le estremità posteriori dell'addome erano rivolte alquanto all'insù. Forse fu l'esposizione alla luce che li decise a separarsi dopo circa mezzo minuto. Là dove le estremità posteriori dell'addome si toccavano, notavasi una materia bianca, la quale, dopo che si distaccarono, rimase appiccicata sotto l'estremità dell'addome della regina » (pag. 43).

In modo simile avviene la copula in *Termopsis*, secondo Heath: « with their bodies closely appressed end to end in a straight line they remain from one to ten minutes in contact, after which they separate without any external indications that the process had taken place » (pag. 52, *98*).

[2] « L'absence d'un organe copulateur, bien que surprenante au premier abord, s'explique par la brièveté du vagin chez la femelle. La spermathèque débouchant tous près, il suffit que l'orifice génital du mâle s'applique sur celui de la femelle pour que les spermies puissent pénétrer à l'intérieur » (Bugnion, pag. 229, *32*).

[3] Secondo Grassi, « qualunque possibilità di partenogenesi viene esclusa dalla circostanza che la spermateca delle regine di sostituzione contiene spermatozoi molto abbondanti » (pag. 57). Secondo Bugnion, « il y a même lieu de s'étonner que les deux testicules relativement petits du roi-Termite puissent suffire à féconder la masse d'oeufs si prodigeuse qui est journellement fournie par la reine. Il est vrai que les spermies sont très petites. Il se peut encore qu'une partie des oeufs se développe par voie parthénogénétique comme ceux qui font des mâles chez les Abeilles et les Fourmis » (pag. 231, *32*).

Grassi dimostra, « con ogni sicurezza, che gli organi genitali degli individui di sostituzione o di complemento sono perfettamente uguali a quelli degli individui in condizione d'insetto perfetto..... Nei re di sostituzione abbiamo note uguali a quelle dei reali veri. Negli uni e negli altri ho trovato spermatozoi maturi, però sempre in piccol numero, dentro i condotti deferenti. In quelle parti, che, per analogia cogli altri insetti, ho denominato vescicole spermatiche, ho notato un liquido speciale, in cui raramente trovavansi spermatozoi. Questi mancavano sempre, tanto nel condotto deferente, quanto nelle vescicole spermatiche degli individui ancora forniti di ali interamente sviluppate, e nei giovani individui di sostituzione. Gli spermatozoi dei Termiti sono fin oggi sfuggiti ai varî autori per i loro caratteri molto strani e per la loro piccolezza. Accennerò solamente quanto si rileva senza alcun artificio di preparazione, non avendo io fatto studi minuti in proposito. Per essere sicuro di aver sott'occhio spermatozoi intieramente sviluppati, ho esaminato quelli tolti dalla spermateca della regina. Sono relativamente corti, e la loro lunghezza varia da dodici a venti μ. Non si muovono, sono appiattiti e hanno perciò figura differente a seconda che veggonsi di piatto o di coltello. Di piatto hanno figura subquadrangolare allungata, oppure di seme di segale, o, meglio, di zinnia; di coltello hanno figura più o meno regolarmente lineare. Un'estremità presenta di solito un ispessimento carat-

L'epitelio della vescicola seminale (fig. 19) è unistratificato, molto alto, costituito di cellule cilindriche, o, meglio, leggermente coniche, col nucleo piccolo, situato nella parte superiore della cellula (distalmente al lume). Sotto al nucleo il protoplasma

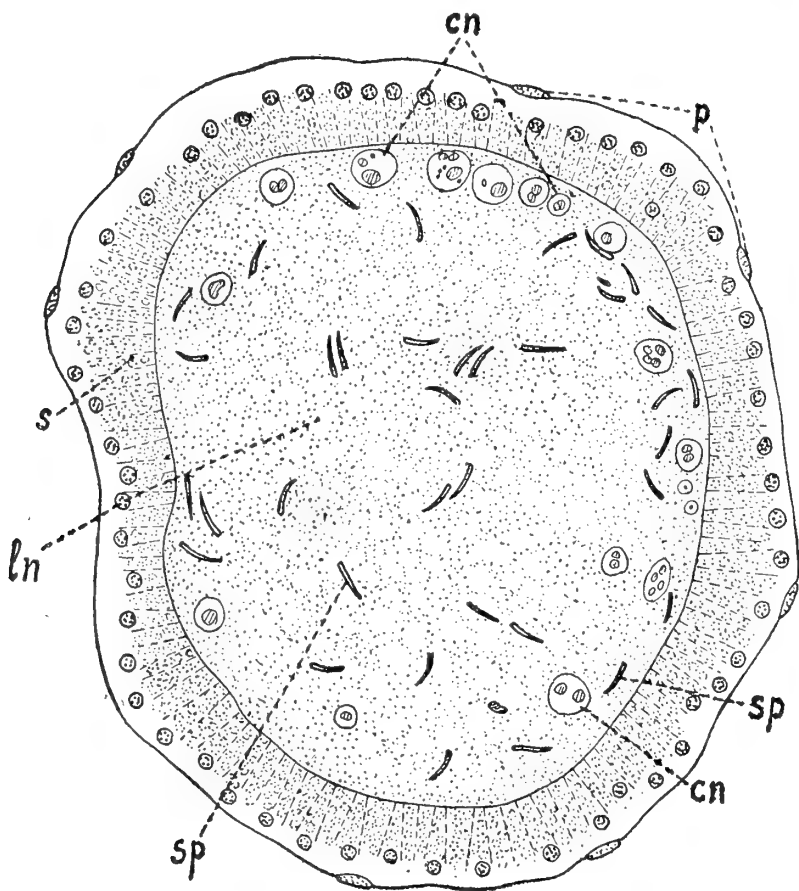



FIG. 19. — *C. flavicollis.*

Sezione di vescicola seminale di re di sostituzione. Pareti rivestite da peritoneo (*p*) con alto epitelio ghiandolare, in attiva secrezione, che contribuirà col suo secreto (*s*) a costituire il liquido che riempie il lume e nel quale nuotano spermi (*sp*) e, più spesso alle pareti, cellule a nucleo acidofilo e polimorfo (*cn*) dallo spappolamento delle quali il *liquor vesiculae* principalmente deriva. Oc. 4 C, ob. 1/15 J. O. Cop. piano tavol.

appare fortemente colorabile (in violaceo-rossiccio nei preparati all'emallume-eosina) e presenta una struttura reticolo-vacuolare. I nuclei sono di forma tra la tondeggiante

---

teristico. Degne di nota sono certe appendici a guisa di ciglia immobili, che si rilevano bene quando lo spermatozoo è veduto di coltello. Non vi ha differenza alcuna tra gli spermatozoi del re vero e quelli del re di sostituzione......... Gli spermatozoi del *Termes lucifugus* si trovano nella spermateca (in poca abbondanza: da 150 a 1000 all'incirca), ne' condotti deferenti, etc., precisamente come nel *Calotermes*. Vennero da me osservati a preferenza gli spermatozoi raccolti dalla spermateca. Sono tondeggianti, del diametro di circa 2-4 μ. Nel testicolo gli spermatozoi immaturi presentano una coda, che scompare in quelli maturi. Anche gli spermatozoi del *Termes* sono immobili » (pag. 80-82).

(diametro μ 4,5) e l'ovalare, più o meno regolare, con uno o due grossi nucleoli, piuttosto acidofili, e qualche grossetto granulo cromatinico basofilo. Uno strato peritoneale riveste le pareti della vescicola (alte μ 20). L'altezza delle cellule e la struttura e la colorabilità del protoplasma dànno l'impressione di una attività ghiandolare.

Il lume della vescicola seminale è pieno di una sostanza assai debolmente basofila, con liquido denso, nella quale stanno immersi spermî, cellule tondeggianti, e sferule. Nella parte superiore della vescicola gli spermî sono pochi (appena dieci, in una sezione) e pochi i corpicciuoli, a mala pena distinguibili, nel loro contorno, dalla

a) *b)*

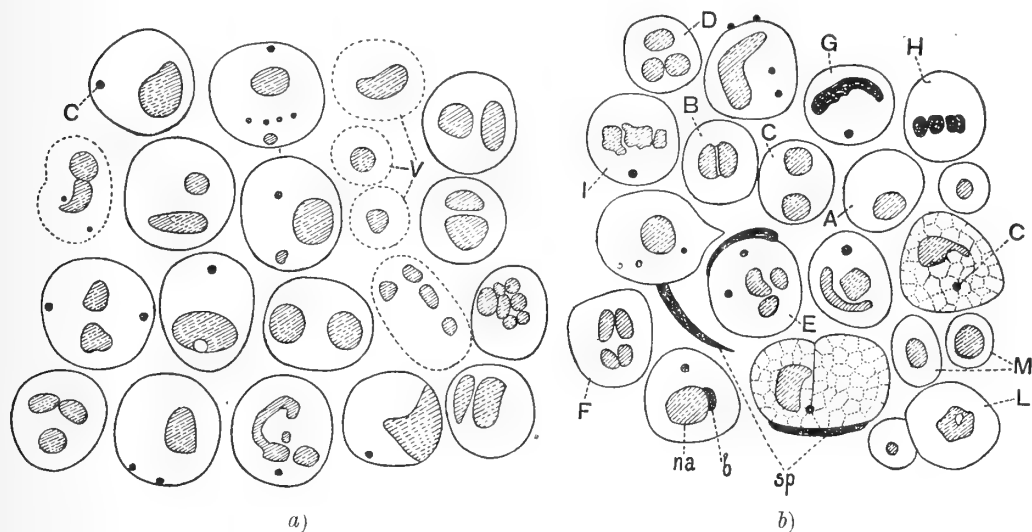



Fig. 20. — *C. flavicollis.*

a) Cellule nutrici degli spermi nel lume della vescicola seminale di re di sostituzione. Nucleo acidofilo, unico o multiplo o polimorfo. In molte cellule un centriolo (C); in alcune, limiti cellulari evanescenti (V).

b) Cellule nutrici nel lume della camera terminale del testicolo. c. s. La maggior parte delle cellule a nucleo acidofilo, *na* (tratteggiato), magari con un resto di cromatina basofila, *b* (in nero, come gli spermi aderenti a qualche cellula e come le sbarette cromatiche di certe cellule che evidentemente l'arresto e la degenerazione ha sorpreso in uno stadio maturativo, spermatociti di primo ordine in metafase cinetica).

sostanza diffusa: sferule piene di grani rifrangenti (diametro μ 9), corpi tondeggianti con un tondino più chiaro nel mezzo (diametro μ 18,2; del tondino μ 2,7). Inferiormente le vescicole seminali s'allargano (diametro mm. 0,13) e vi appaiono più numerosi gli elementi cellulari e gli spermî (*sp*) (una cinquantina di spermî). Le cellule (*cn*) sono disposte specialmente torno torno alle pareti della vescicola (come i leucociti nei capillari a circolazione rallentata, probabilmente per il loro peso specifico minore): parecchie presentano contorni distinti, altre evanescenti, e certi nuclei sembrano addirittura liberi nel liquido della vescicola seminale.

La figura 20 *a* mi dispensa da una lunga descrizione; d'altronde l'aspetto di queste cellule è così vario che riesce difficile trovarne due proprio uguali. Il nucleo è piuttosto acidofilo (prende un colore livido all'emallume-eosina); più spesso che unico è duplice, o multiplo, spesso evidentemente frammentato. Specialmente interessanti sono le cellule provviste di uno o due (più spesso slontanati, ai due poli) corpicciuoli basofili, come centrioli (C).

Ora, se passiamo a studiare i testicoli, ci convinciamo facilmente che è di là che queste cellule scendono, insieme cogli spermii, nelle vescicole seminali.

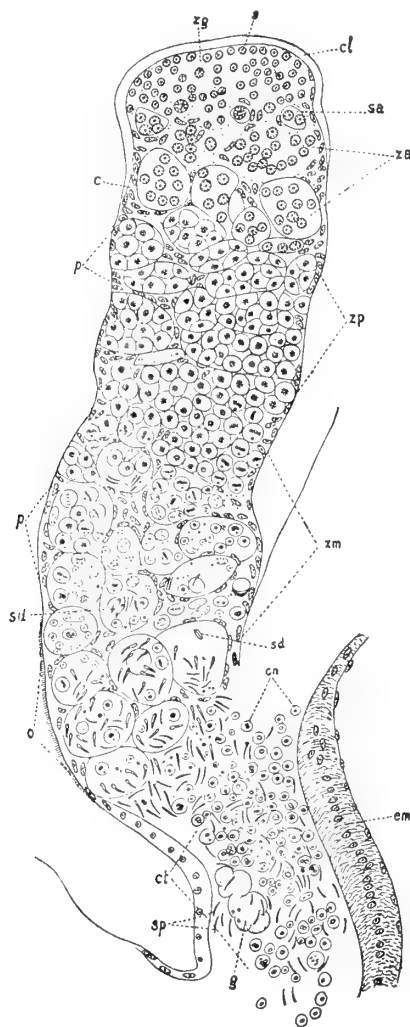



Fig. 21. — *C. flavicollis.*

Testicoletto di re di sostituzione. Si distinguono le zone di evoluzione germinale: la zona apicale (*zg*) di cellule germinative (*s*), rivestita di caliptra (*cl*): la zona di accrescimento (*za*) con nuclei più grossi (*sa*) che cominciano a disporsi in cisti (*c*); la zona di preparazione (*zp*) con nuclei sinaptici, a fitto gomitolo di anse cromatiche; la zona di maturazione (*zm*) con fasi di divisione e riduzione corrispondenti all'evoluzione degli spermatociti in spermatidi (*sd*). Spesseggiano lungo le pareti e tra le cisti piccoli nuclei (*p*). Il contenuto delle cisti, svuotandosi nella camera terminale (a pareti spesse, costituite da un epitelio muscolare, *em*) la riempie di spermi (*sp*) e di cellule nutrici, a nucleo acidofilo (*cn*; presente un coagulo guttiforme, *g*). Oc. 4 C., ob. $^1/_{15}$ J. O. Cop. piano tavol.

La figura 21 rappresenta una sezione mediale d'un testicoletto. Vi si distinguono nettamente le varie zone di evoluzione germinale. Anzitutto una zona apicale (*zg*) di celule germinative (*s*): nuclei leggermente ovali, nettamente nucleolati (a nucleolo acidofilo, pare), immersi in una massa omogenea, come sincizio, che nei preparati colorati prende

una tinta diffusa violaceo-rossastra ; si colora poco o niente invece uno strato omogeneo, spesso, di apparenza cuticolare, che riveste l'estremità distale del testicoletto e, sùbito dopo la zona germinativa, si assottiglia e più non è evidente (caliptra, *c l*). Segue una zona, poco più alta della germinativa, zona di accrescimento (*z a*), nella quale evidentemente gli spermatogonii cessano di dividersi e traversano un periodo di riposo: i nuclei (*s a*) mantengono presso a poco la stessa struttura, nucleolati, a rete cromatinica basofila, ma sono più grossi (diametro μ 6, 4) e più tondeggianti; sono spesso evidenti i limiti cellulari, si cominciano a delineare le cisti (*c*), orlate di nuclei piccoli, allungati, di forma più o meno regolare; nei preparati colorati, una tinta diffusa chiara, debolmente violacea.

Nella zona seguente (*z p*), alta più delle due zone precedenti prese insieme, le cellule, disposte evidentemente in cisti, hanno limiti cellulari, tra tondeggianti e poligonali, ben distinti (fessure chiare appaiono qua e là, per retrazione degli elementi). Nei preparati colorati, tinta plasmatica lieve, violaceo–chiara; i nuclei tondeggianti, ma non più vescicolari, spiccano intensamente basofili ed hanno l'aspetto di un fitto gomitolo di anse cromatiche (diametro μ 3,6–4,5). Qua e là, tra le spermatocisti, si vedono intercalati nuclei piccoli (*p*), di forma piuttosto allungata, i quali spesseggiano sopratutto lungo la parete del tubo testicolare.

Questa fase nucleare, a fitto gomitolo di anse cromatiche, prelude evidentemente alla mitosi maturativa e sembra corrispondere a quella che gli AA. chiamano la « sinapsi ». Certo però questo periodo premitotico è qui più lungo di quel che solitamente non sia; ond' io chiamerò la zona corrispondente « zona di preparazione ».

Ad un certo punto cominciano ad apparire figure cinetiche; s'inizia la zona di divisione e riduzione, o di maturazione propriamente detta (*z m*). Gli spermatociti di primo ordine entrano in divisione. Predominano i nuclei nella fase di piastra equatoriale, con un grosso centriolo ad un polo della cellula.

Scendendo ancora verso la base del testicoletto, il contenuto assume un aspetto più spiccatamente vacuolare o cistico, con numerosi nuclei sulle pareti delle cisti, e, dentro, tutti gli stadii di evoluzione degli spermatociti di secondo ordine in spermatidi (*s d*) e di questi in spermii; finchè, nella parte prossimale, le cisti son tutte piene o quasi di spermî, più o meno maturi, commisti a sferule cromatiniche e a qualche cellula grossa, come non evoluta.

Finalmente il testicoletto sbocca in un allargamento o camera terminale (*c t*) (nella quale tutti i testicoletti confluiscono) che si continua direttamente col deferente [1].

[1] La parete della camera terminale presenta una struttura tutta particolare. È rivestita d'un peritoneo (con nuclei nucleolati) e si mostra, in tutto il suo spessore, *em*, a struttura fibrillare: non solo nello strato sopra alla cerchia dei nuclei (strato che potrebbe interpretarsi, come nel deferente, quale manicotto di fibrille connettivali e muscolari), ma anche nello strato sotto i nuclei, che sembra risultare di fibrille fittamente intrecciate, come se elementi connettivali o muscolari si fossero disposti ad epitelio. Sarebbe interessante fermarsi a studiare in dettaglio questa struttura particolare che potrebbe anche avere un significato fisiologico speciale. Notevole che Bugnion accenna anche lui ad una struttura « curiosa » della « parte giallastra » o « segmento interno » dei lobuli testicolari nel re, vero, di *T. obscuriceps* (nel *Calotermes*, sia gli ovarioli sia i testicoletti sboccano direttamente in una cavità comune che per l'ovario suol denominarsi calice e per il testicolo io ho chiamato « camera terminale » ;

Il lume è spazioso, ricco di spermii maturi (*s p*) e di nuclei grossi e piccoli (di color livido, violaceo–rossiccio; qualcuno francamente acidofilo), taluni nettamente appartenenti a cellule (*c n*), tal'altri apparentemente liberi; pochi a struttura granulare, i più con aspetto picnòtico. Da un lato del lume, grossi coaguli, guttiformi (*g*) debolmente acidofili, e intorno molti spermii.

La figura 20 *b* rappresenta un certo numero di queste cellule che occupano il lume della camera terminale: cellule con un sol nucleo (*A*), di forma più o meno irregolare, e certe volte vacuolato, o con due o più nuclei. (In *B* sembra in atto una scissione amitotica, già avvenuta in *C*; in *F* pare che ognuno dei due nuclei si sia ulteriormente bipartito; in *D* e in *E* i nuclei sono tre, forse per ulteriore scissione di uno solo dei due nuclei).

In qualche cellula si vede, accanto al nucleo acidofilo (*na*), un resto di cromatina basofila (*b*). Qualche nucleo appare vacuolato, prodromo di frammentazione, come in *L*, cellula che sembra inoltre presentare un esempio di gemmazione.

Nelle cellule meno degenerate è evidente una struttura protoplasmatica reticolare. Su qualche cellula appaiono degli spermii (*sp*), di piatto, o aderenti per un estremo (in una cisti testicolare di questo stesso re di sostituzione ho visto, oltre varie cellule a

---

ma nei Termiti superiori, come il *T. obscuriceps*, gli ovarioli hanno ciascuno un calice di sbocco nel condotto, e i testicoletti presentano ciascuno un « segmento interno » o condotto escretore: tutti poi confluiscono all'ilo donde parte il canale deferente). « La partie jaunâtre, longue de 0,6–0,9 mm., renferme le canal collecteur. La lumière (plus ou moins remplie de spermies) est bordée d'une zone claire traversée par des fibrilles avec quelques noyaux très petits et clairsemés. Par dessus vient la couche musculaire dont les fibres (vues en coupe) ont l'aspect de franges. Cette couche, chose curieuse, ne renferme pas de noyaux. Colorée en lilas dans les preparations a l'hémalun, elle prend, sur les coupes traitées au van Gieson, une teinte brunâtre uniforme. Quelques noyaux colorés en violet fonce par l'hémalun, placés en dessous des muscles, semblent appartenir plutôt à la zone claire » (pag. 230, *32*).

Ora bisogna ricordare che il ricettacolo seminale della Vespa, secondo le ricerche di Marchal, presenta, nelle sue pareti, una struttura particolare. L'epitelio è costituito di cellule allungate, composte di elementi fibrillari longitudinali, striati trasversalmente per sovrapposizione di dischi alternativamente chiari e scuri; anche tutto il canale seminale è formato di queste speciali cellule, ma più allungate e piuttosto sotto forma di fibre radiali uninucleate. « Ainsi donc les éléments qui constituent la couche à cylindres de Siebold sont des cellules musculaires, dont les noyaux ne sont pas multipliés et rappellent, à certains points de vue, les cellules musculaires embryonnaires; mais ces cellules ce sont en même temps différenciées dans leur forme et leur agencement, de façon à constituer un'hépithélium. On peut donner à l'hépithélium ainsi formé, et dont, je crois, on ne connaît pas encore d'exemple dans le règne animal, le nom d'épithélium musculaire » (pag. 47, *147*).

Ebbene, ecco un altro esempio di epitelio muscolare nella camera terminale del testicolo in re neotenico di *Calotermes* (e forse anche nel deferente. La parete del deferente si vede nettamente costituita d'un epitelio assai alto — cellule cilindriche, leggermente coniche, a struttura citoplasmatica come striata, con nucleo nucleolato nella parte superiore, distale dal lume, del corpo cellulare — fasciato esternamente d'un grande intreccio di fibrille, forse in parte muscolari, in parte connettivali. Il lume è molto stretto: appena μ 10,9 × μ 5,5, mentre il deferente è μ 80 × μ 43).

Quanto al significato fisiologico di questa struttura, Marchal conviene col Siebold nell'ammettere che, al momento dell'accoppiamento, il ricettacolo seminale, per contrazione dei cilindri dello strato intermedio, aspiri lo sperma. Nel canale seminale questa struttura permetterebbe la regolazione del flusso degli spermi.

Una funzione analoga può ammettersi per le Termiti.

nucleo acidofilo, una grossa sferula protoplasmatica, come citoforo, che presentava, su una metà della sua superficie, tanti spermii quasi tutti perpendicolari ad essa sferula, come tanti spilli su di un cuscinetto appunta-spilli).

Quanto alle dimensioni di queste cellule, il diametro medio è di μ 5,5, e del nucleo μ 2,7 ; di cellule più grosse il diametro è μ 7,3 e del loro nucleo μ 3,2 ; vi sono cellule piccole, a diametro di soli μ 3,6.

Meritano speciale attenzione certi elementi cellulari che presentano il nucleo allo stato d'una sbarretta costituita di più pezzi cromatici allineati sulla linea equatoriale, talvolta del solito color livido (I), tal'altra nettamente basofili (*H*) (fusi assieme, alle volte). Di solito un centriolo basofilo è spostato a un polo di queste cellule (G) che presentano così un aspetto molto simile agli spermatociti di primo ordine in metafase cinetica, e dalla degenerazione dei quali, secondo ogni verosimiglianza, possono considerarsi derivati. Come pure, dalla degenerazione di spermatociti allo stato di sinapsi o di profase cinetica possono considerarsi derivate le cellule con nucleo tondeggiante, più o meno irregolare, e con centriolo, uno o più, basofilo (C); e dalla degenerazione di spermatociti di primo ordine in telofase e di secondo ordine, gli elementi cellulari a due, tre o quattro nuclei (quando sembrino derivati da scissione e non da frammentazione di nucleo preesistente) e le piccole cellule uninucleate (*M*).

[Miss Stevens, in un suo breve studio sulla spermatogenesi del *Termopsis angusticollis*, trova che nelle due divisioni maturative solo il nucleo si divide e non il corpo cellulare, sicchè i quattro spermatidi, che si originano da uno spermatocito di primo ordine, si sviluppano come quattro nuclei entro un corpo cellulare comune.

« The points of greatest interest in the spermatogenesis of *Termopsis angusticollis*, are: 1°) the fact that no accessory chromosome is present; 2°) that the method of tetrad formation and reduction are clear, despite the fact that the cells and the chromatin elements are quite small; and 3°) the failure of the cell-bodies to divide and the consequent development of four spermatozoa in one cell » (*205*).

Eccezionalmente, però, anche il corpo cellulare può dividersi].

Certo in ogni modo è che il contenuto della camera terminale del testicolo deriva dallo svuotamento delle cisti prossimali dei testicoletti e scende man mano pei deferenti e si raccoglie nelle vescicole seminali; è costituito di spermî, e di detriti cellulari, residuo della spermiogenesi, e di elementi cellulari degenerati in varie fasi dell'evoluzione germinale.

Da questi elementi certamente deriva, in massima parte, il liquido poltiglioso che riempie le vescicole seminali e serve a mantenere, nutrendoli, la vitalità degli spermî.

« Questo di cellule trofiche libere nelle vescicole spermatiche si presenta come un tratto caratteristico dei termitidi, anche rispetto agli altri insetti sociali, in rapporto evidente col fatto della persistenza del maschio e della periodica copula (tratto biologico caratteristico della società dei Termitidi) » (*126*).

Giacchè anche negli altri insetti sociali i maschi hanno una esistenza effimera e muoiono subito o quasi subito dopo fecondate le femmine. Il maschio dell'ape, per esempio, feconda una volta per tutta la vita la regina. È dunque negli organi genitali ac-

cessorii della femmina, e non in quelli del maschio, che debbono trovarsi le condizioni atte ad assicurare una lunga permanenza vitale degli spermii [1].

[1] Difatti Courrier (1921) trova nell'epitelio della spermateca di ape regina, fatto di uno strato sinciziale assai spesso, speciali processi di secrezione molto attivi: « Si vedono nettamente formarsi, a spese della sostanza nucleare (probabilmente della cromatina), granulazioni eosinofile che aumentano rapidissimamente di volume. Questi grani di secrezione possono originarsi a uno dei poli del nucleo; e fanno allora ernia nel protoplasma come delle gemme nucleari. Se ne vedono anche differenziarsi in seno all'area nucleare che invadono sempre più, mentre la cromatina si rarefà. Poi, le granulazioni passano nel citoplasma, lasciando un nucleo ridotto alla membrana cui resta aderente qualche particella cromatica che certo servirà alla ricostituzione. I grani di secrezione intranucleare si modificano nel protoplasma, e, prima contenuti in vacuole, si liquefanno poi completamente. I prodotti, eliminati fuori della cellula, traversano la membrana che tappezza l'epitelio e arrivano così a contatto degli spermi contenuti nel ricettacolo. Cette sécrétion intranucléaire... montre que certaines substances, contenues dans le noyau, paraîssent nécessaires à la nutrition des spermies » (pag. 943, *45*).

Del resto, non bisogna schematizzare. Anche nelle api possono esistere secrezioni nutritive nelle vie genitali maschili; ed anche nelle termiti, nelle vie genitali femminili. Nelle grosse sacciformi vescicole seminali del fuco, come riferisce Snodgrass (pag. 132, *197 b*), gli spermi nuotano in un liquido insieme con gran quantità di minuti granuli.

Pare che questo liquido denso, finemente granuloso venga iniettato assieme con la massa spermatica nelle vie genitali della regina e verosimilmente contribuisce, insieme col secreto della spermateca, al mantenimento degli spermi.

Recentemente (1920) Bishop con belle ricerche ha illustrato dettagliatamente i fenomeni della fecondazione delle api.

Il pecchione non è sessualmente maturo al momento della sua schiusura imaginale, ma passa per un periodo di ulteriore accrescimento di almeno 9 a 12 giorni (è questa una delle ragioni dei frequenti insuccessi dei tentativi di fecondazione artificiale della regina delle api). Come il pecchione s'avvicina alla maturità sessuale, comincia un processo di secrezione e di erosione nell'epitelio ghiandolare. S'inizia, contemporaneamente all'inizio della spermiogenesi nel testicolo, dal primo tratto epididimiforme del vaso deferente; s'estende poi alla vescicola seminale man mano che in essa discendono gli spermi passando per il liquido di cui si è riempito il lume dilatato del deferente. Gli elementi cellulari si distruggono non uniformemente in tutta la superficie dell'epitelio, ma secondo righe spirali ben definite, con funzione probabilmente di accrescere la superficie di attacco degli spermi. Questi, ancora aggruppati a pacchetti come quando lasciano le cisti dei tubi testicolari, si attaccano colla testa alla superficie rigata della vescicola, con le code disposte radialmente che riempiono quasi il lume.

Nella vescicola seminale il fluido spermatico rimane fino al tempo della copulazione, giacchè solo allora, per violenta contrazione muscolare, si spezza il setto chitinoso che chiude il dotto eiaculatore. Allora prima il fluido spermatico delle vescicole seminali, poi il contenuto muccoso delle ghiandole accessorie, trattenuto in un primo tempo da una speciale disposizione della muscotura alla base della ghiandola, passan per l'eiaculatore nel pene e nelle vie femminili. (Nelle ghiandole accessorie la secrezione si forma per un processo, più accentuato che nelle vescicole seminali, di strozzamento con dissoluzione della sostanza cellulare, progressiva dall'apice alla base delle cellule: compare un'area densa granulare, i granuli crescono di grandezza e rifrangenza e colorabilità, si formano vacuole e globuli di secrezione che cadono nel lume dell'organo per poi dissolversi, più rapidamente nelle vescicole seminali, in un plasma chiaro) (*14*).

Bishop segue anche la disposizione negli organi genitali della ♀ fecondata e trova che le due secrezioni, sperma e muco (che hanno un comportamento fisiologico caratteristicamente differente e che per la disposizione anatomica delle parti rimangono separati prima della copulazione), non si mescolano intimamente neanche durante la copulazione e neanche negli organi femminili.

Le secrezioni sessuali sono accolte temporaneamente nella vagina e negli ovidotti. La vagina

In ogni modo è negli insetti sociali che esiste particolare necessità di nutrizione degli elementi spermatici. Negli altri insetti, nei quali è breve, di solito, il periodo di vita adulta e di attività sessuale, non esistono speciali provvedimenti (in genere, almeno; sarebbe interessante studiare bene, a questo riguardo, i Blattidi e i Tisanuri e i Collemboli) (1) e si verificano soltanto i soliti fatti diretti ad assicurare la

---

appare piena di solo muco, l'ultimo iniettato che, spinto avanti tutto il fluido spermatico, coagulandosi poi all'aria tappa alla base l'organo copulatore (che, divelto dal ♂, resta in vagina). Gli ovidotti presentano ciascuno una colonnetta centrale bianca, di muco, circondato da fluido spermatico. Gli spermi poi si vanno raccogliendo lungo le pareti dell'ovidotto e nelle pieghe chitinose circostanti all'apertura della « pompa spermatica »; per questa passano, senza muco, nella spermateca (che nella regina vergine è ripiena di liquido). Quanto al muco, sparisce gradualmente dall'ovidotto ed è probabilmente riassorbito (potrebbe avere, pensa Bishop, una azione fisiologica come stimolo per gli ovari) (*15*).

Dunque delle due secrezioni il muco sembra avere una funzione essenzialmente meccanica; la secrezione, invece, che accompagna gli spermi nelle vescicole seminali ha con tutta probabilità una funzione trofica. Ma in ogni modo la sua produzione avviene secondo un tipo tutto diverso da quello dei Termiti: nel ♂ delle api, che non sopravviverà all'unico suo accoppiamento, avviene come una liquidazione degli organi genitali stessi: il testicolo si atrofizza (da 5 e 1/2 a 1 e 1/2 mm.; e assume un color verde sempre più spiccato: prodotti escretivi?), le pareti ghiandolari del deferente e della vescicola seminale secretando si erodono e quasi completamente si disfanno.

Se nelle api esistono secrezioni nutritive nelle vie genitali maschili, d'altra parte, anche « nel lume della spermateca del *Termes* sboccano numerose ghiandole unicellulari, ognuna fornita d'un proprio condotto cuticulare; queste ghiandole stanno collocate sotto l'epitelio cilindrico della spermateca » (pag. 82, *92*). Probabilmente il secreto serve a mantener vitali gli spermi che per un periodo più o meno lungo vi si trattengono.

A questo proposito è da notare che in *Hamitermes*, secondo Hill, « sembra che di regola le regine vengano fecondate e raggiungano o quasi il loro massimo sviluppo prima di migrare ad altre parti del nido per ovificare e che non vengono rifecondate di tanto in tanto come, pare, le regine vere di altre specie. Il fatto che vecchie regine neoteniche, con addome raggrinzato, non se ne sono trovate in questa specie, e che di rado si trovano maschi con regine isolate, suggerisce l'idea che normalmente una regina non si accoppi più dopo che ha cominciato a ovificare, e che venga soppressa e rimpiazzata da una più feconda appena incomincia il tramonto della sua gioventù » (pag. 387, *107*).

(1) Circa i Blattidi, non sono riuscito a trovare nella letteratura se non indicazioni vaghe; esse tuttavia confermano il mio sospetto che in questo gruppo d'insetti si verifichi, in riguardo alla evoluzione degli organi e degli elementi sessuali, una condizione di cose, per così dire, preparatoria, che prelude alla condizione delle Termiti e che può aiutar noi a rappresentarci come, nella serie filogenetica, si sia trovato facilitato, diciamo così, l'adattamento alla vita sessuale stabile, che è poi il nocciuolo della vita sociale dei Termiti.

Packard riferisce che « in the common cockroach (*P. orientalis*) the testes are functional only in the young male; they afterwards shrivel and are functionally replaced by the *vesiculae seminales* and their appendages, when the later transformations of the sperm - cells are effected » (pag. 487, *169*).

Stevens in *Blattella* trova una eccezionale quantità di spermi degenerati e molto frequenti cellule che abortiscono, dopo imperfette mitosi:

« Of the forms studied, *Blattella* alone has many degenerate spermatozoa. Some follicles have none, others a number varying perhaps from one-fourth to three-fourths of the whole number... Most of the degenerate forms occur among the nearly ripe spermatozoa or in the sperm-ducts...

The chromatin is strangely broken up into irregular clumps, and probably no two of these degenerate sperm-heads can be found which are alike ».

La degenerazione di questi spermi sembra dovuta non ad assenza di cromosomo accessorio (la variabilità del loro numero e della loro distribuzione lo esclude) ma ad imperfette mitosi.

« Cases where more or less chromatin is left behind in the cytoplasm, especially in the first spermatocyte mitosis, are very common.... The giant cells, so far as I have been able to trace them, do not develop into spermatozoa » (pag. 10, *205*).

Quanto ai Tisanuri, Charlton, studiando la spermatogenesi di *Lepisma domestica*, trova nelle vescicole seminali, frammisti a spermi vivacemente mobili, un grande numero di piccoli corpi ellittici, animati da movimenti browniani e che assumono solo i colori plasmatici. Siccome il lume del vaso deferente è, alle volte, parzialmente occupato da granuli, di diversa grandezza, simili ai granuli che appaiono nel citoplasma delle cellule che tappezzano il deferente, Charlton considera come prodotto di secrezione delle cellule il materiale granulare del lume, e anche i corpicciuoli della vescicola seminale « although the bodies present in the seminal vesicle are a little longer than broad and show a little difference in their size relations... An added fact of interest is that the bodies are transmitted during copulation and are found in the seminal receptaculum of the female, which suggests that they have some function yet unknown to us » (pag. 398, *40*). A me sembra che non ci sia da esitare nell'attribuire a questi corpicciuoli una funzione nutritiva; piuttosto dubito che veramente tutto il materiale corpuscolare, che, cogli spermi, riempie la vescicola seminale, derivi dal secreto del deferente, e non anche e magari sopratutto dallo spappolamento di speciali cellule nutrici, quali Charlton descrive nei testicoli di *Lepisma*. « One does find cells in quite large numbers at the blind end of the testis, which differ from the ordinary spermatogonia in having large homogeneous nuclei with the chromatin condensed into a single dense mass and irregular in shape. I believe these to be immature Sertoli or nurse cells, for later on one finds such cells, only now they are larger, more elongated, and contain two to four chromatic bodies. Those at the region of the mature spermatozoa are much paler in color and may be wrinkled and twisted upon themselves, indicating perhaps degeneration » (p. 385).

Quanto ai Collemboli, secondo Willem nei Poduridi « le cellule epiteliali, assai grosse, formano uno strato parietale nel quale i limiti degli elementi sono indistinti e ciascuna massa protoplasmatica che attornia un nucleo emette, verso la cavità del testicolo, una serie di fini prolungamenti stellati. Mentre le cellule sessuali compiono la loro evoluzione all'interno della ghiandola in seno a una massa liquida contenente globuli grassosi, queste cellule parietali subiscono una degenerazione più o meno pronunciata: i loro nuclei divengono multilobati, poi la rete cromatica si risolve in granuli fini; il citoplasma diviene omogeneo, dapprima, poi si sparge di vacuole, si liquefà in 'boules poisseuses qui tombent dans le testicule et s'y trouvent de plus en plus nombreuses au fur et à mesure qu'on se rapproche des canaux déférents'. A questo stadio si trovano degli spermi raccolti nella vescicola eiaculatrice. La cavità di questa (III, 8) presenta una regione dorsale di cui la cuticola porta fine setole, regione dove proprio gli spermi vengono a radunarsi, e una porzione ventrale dove s'accumulano in una 'masse gluante, qui ne se mélange pas au sperme proprement dit, les sphères provenant de la destruction des cellules épitheliales.... La masse de substance poisseuse, se trouvant à l'origine de ce canal, [l'ejaculatore], est expulsée en premier lieu lors de l'éjaculation' » (pag. 106, *227*).

Strutture simili si riscontrano in Entomobridi e Sminturidi; in *Sminturus fuscus* il deferente « aboutit à une grande poche irrégulière limitée par des cellules hemisphériques proéminant dans la cavité; celle-ci contient, chez le mâle adulte, des spermatozoïdes et des productions incolores sphériques de taille variable, d'aspect très caractéristique grâce au nombreuses vacuoles effilées, disposées radiairement, qu'elles renferment. Cette poche, que j'appellerai réceptacle séminal, n'existe pas chez les Collemboles allongés; son rôle est rempli, chez ces derniers, par la cavité centrale même du testicule » (pag. 62, *227*).

Dunque: nella vescicola seminale (o, in mancanza, nella cavità centrale del testicolo) dei Collemboli si raccolgono masse di sferule, prodotto di degenerazione e distruzione delle cellule parietali.

nutrizione degli elementi sessuali nel loro sviluppo intratesticolare sino a maturità [1].

Willem non sembra neanche sospettare una loro funzione trofica; nota anzi, per i Poduridi, che non si mescolano allo sperma. A me pare probabile che loro funzione sia la nutrizione degli spermi o nelle vescicole seminali prima dell'eiaculazione, o nella spermateca delle femmine fecondate, secondo la biologia sessuale delle varie forme.

Anche nei Tisanuri probabilmente i prodotti nutritivi della vescicola seminale derivano (oltre che dalla secrezione deferenziale) dalla degenerazione e distruzione di cellule nutrici nel testicolo.

Accennerò infine che nelle Embie, le quali conducono una sorta di vita sociale, Grassi ha visto che ciascuno dei condotti deferenti, dilatati per un tratto in una vescicola spermatica, « riceve lo sbocco di due sacchi ghiandolari che alle volte contengono secrezione trasparente, altre volte anche sperma (pag. 148, *92*).

Del resto, anche negli altri insetti, se non esistono provvedimenti speciali per il mantenimento degli spermi, potranno però sempre aver luogo secrezioni nutritive da parte di qualche tratto delle vie genitali; giacchè, per quanto non lungamente, sempre un certo tempo dovranno soffermarsi gli elementi sessuali maturi nelle vie deferenti; e difatti è generale la presenza di vescicole seminali più o meno cospicue. In ogni modo la secrezione di liquido da parte delle vie genitali è necessaria, anche indipendentemente dal mantenimento trofico degli spermi, per la loro motilità e il loro convogliamento nell'eiaculazione.

Il secreto, spesso assai cospicuo, delle ghiandole accessorie potrà nei diversi casi servire a diverso ufficio. Quando queste ghiandole sboccano nelle vie deferenti, lontano dall'apertura genitale, il loro secreto potrà contribuire, in qualche caso, al mantenimento degli spermi. Quando, che è più spesso, sboccano nell'eiaculatore, prossimalmente all'apertura genitale, il loro secreto servirà, durante la copula, per il convogliamento degli spermi, per la formazione di spermatofragmi, e, probabilmente in molti casi, per assicurare la nutrizione degli spermi nelle vie genitali femminili, qualora vi debbano stazionare piuttosto a lungo e non trovino nelle vie stesse sufficiente materiale trofico.

In qualche speciale caso forse il secreto delle ghiandole accessorie vien riassorbito nel canale genitale femminile e, come gran parte della massa spermatica ricevuta durante la copula (ipergamesi), va a profitto degli ovari che si sviluppano. Zavattari, che recentemente (1922) sospetta per un dittero nematocero (*Telmatoscopus meridionalis*) fenomeni di ipergamesi analoghi a quelli scoperti da Berlese in *Cimex lectularius* e scutelleridi (*Graphosoma*, *Pentatoma*, *Pyrrochoris*) (1898, *7*) fa notare che in *Telmatoscopus* come in *Graphosoma* « vi è la presenza di tre paia di voluminose ghiandole accessorie e quindi di un abbondantissimo conseguente secreto » (p. 11, *230*).

[1] Ordinariamente « nell'estremità cieca del tubo testicolare si differenziano due sorta di elementi, cioè cellule cistogene e cellule germinative; vennero anche trovati adiacenti e si è pensato che si differenzino per divisione l'uno dall'altro. Ambedue gli elementi si moltiplicano, e così attorno alle rosette di spermatogonie si forma una cisti. Il numero delle cellule della cisti può essere limitato ad uno o a due (*Hydrophilus*, *Chrysomela* ecc.) o anche tre o più (*Nepa*). Nella zona degli spermatidi, questi rivolgono la testa verso le cellule cistiche che diventano molto grandi e sono perciò state interpretate come cellule di nutrizione. Negli insetti inferiori (Collemboli) Lécaillon ha visto che l'inviluppo cistico è formato da un sincizio che manda i suoi prolungamenti tra le cellule sessuali, delimitando così cisti irregolari. Nelle spermatocisti contenenti un fascio di spermatozoi la parete cistica si mostra assottigliata, tranne nella regione in rapporto colla testa degli spermatozoi; quivi si mostra un accumulo di protoplasma e si riscontra un grosso nucleo, il quale ingrandisce considerevolmente (Gilson, Tichomiroff), cosicchè, in certo modo, si può supporre che questo supplisca nella funzione nutritiva (ponendosi in rapporto colla testa degli spermatozoi) al diminuito potere di nutrizione del nucleo di essi, in seguito al condensamento della cromatina (von Ebner 1888, Peter 1889) » (Berlese, pag. 925).

Ho detto che, nei Termiti, dagli elementi degenerati in varie fasi dell'evoluzione germinale certamente deriva, in massima parte, il liquido poltiglioso che riempie le vescicole seminali e serve a mantenere, nutrendoli, la vitalità degli spermî.

In massima parte, ripeto, ma non interamente. C'è tutta ragione di credere che l'epitelio che tappezza la vescicola seminale, e che molte volte (reali sostitutivi di *Calotermes*, ad esempio) assume un aspetto tutto ghiandolare, concorra col suo secreto a costituire l'ambiente nutritivo più adatto agli spermî ([1]).

Nel Bombice del gelso e in molti altri Lepidotteri, Neurotteri ed Emitteri e Ortotteri, all'estremità cieca del tubo testicolare, come dell'ovarico, si trova la cellula di Verson, «grossa cellula ricca di protoplasma, alla cui superficie, come a un citoforo, si addossano diverse cellule germinative».

Le cellule nutritizie utilizzano anche, a profitto degli elementi seminali, i prodotti della degenerazione cui va incontro un numero notevole di cellule germinative, e i residui della spermiogenesi (come nei Vertebrati le cellule del Sertoli. Secondo Regaud, «au cours de la spermatogenèse normale, chez le Rat, le syncytium nourricier résorbe et transforme: 1°) les corps résiduels des spermies; 2°) quelques spermatozoïdes; 3°) la plupart des éléments malformés — tératocytes — ou dégénérés» (*189*).

Grünberg in varie specie di Lepidotteri riconobbe nelle cellule apicali (o di Verson) la presenza di più o meno copiosi e multiformi «Nahrungskörner, die als Zerfallprodukte aufgelöster Spermatogonien aufzufassen sind, aus deren Chromatin sie hervorgehen. Sie dienen offenbar als Nährmaterial für die übrigen Keimzellen» (pag. 341, *95*).

Negli insetti in genere «la degenerazione e la distruzione delle cellule germinative è un fenomeno abbastanza frequente, così nell'oogenesi come nella spermatogenesi. Spesso nelle spermatogonie si riscontra una diminuzione del volume del nucleo accompagnata da un condensamento della cromatina; siffatte cellule finiscono coll'essere riassorbite e servono alla nutrizione degli elementi che si svolgono normalmente. Più frequente della degenerazione di singoli elementi è quella di intiere cisti di spermatogonie, di spermatociti e anche di spermatidi. Talvolta degenerano le cisti periferiche (Koinov, 1903), talvolta le centrali (così nel *Dytiscus*, secondo Schaefer). In quest'ultimo caso la degenerazione può spiegarsi riferendosi alle condizioni della nutrizione relativa al posto che occupano, e ancora tenendo conto della pressione che esercitano i circostanti elementi sviluppandosi (Wassilieff, 1903)» (Berlese, pag. 923).

([1]) Interessanti a questo riguardo sono le osservazioni della Thompson in *Termopsis angusticollis*. Nella ninfa matura di prima forma «i tubi delle vescicole seminali sono tappezzati da un epitelio di cellule lunghe e sottili con, alla base, nuclei ben nucleolati. Queste cellule sono evidentemente ghiandolari giacchè grani di secrezione scuri stanno nel protoplasma, e un secreto liquido, che si colora in giallo con ematossilina ferrica e orange G, si ritrova nel lume» (pag. 508).

In maschi adulti le vescicole seminali sono molto ramificate e convolute, e ciascun tubo è più grosso e più espanso che non nelle ninfe mature. «No spermatozoa were found within the seminal vesicles of males of any age or caste, and the lumen is filled by a fluid secretion. This shows that the seminal vesicles of *Termopsis* are glandular in function, and doubtless homologous with the colleterial glands of the female» (pag. 512, *215*).

La Thompson attribuisce molta importanza a questo secreto, benchè non accenni esplicitamente a un suo valore trofico (d'altronde lei non ha mai trovato spermî nelle vescicole seminali), giacchè ammette che il soldato maschio di *Termopsis* sia sterile, benchè produca spermî d'aspetto normale, per mancanza di secrezione nelle vescicole seminali. «I sottili tubuli delle vescicole seminali del soldato adulto, visti in sezione, appaiono formati da uno strato di sottili cellule epiteliali, alte men che metà delle cellule corrispondenti di caste riproduttive, e senza i granuli di secrezione intensamente colorabili, così abbondanti in quelle. Solo una ben piccola quantità di secreto (colorabile in giallo, all'ematossilina ferrica e orange G) si ritrova nel lume delle vescicole seminali del soldato, in contrasto col secreto copioso delle forme riproduttive». «From the facts just stated, it seems evi-

Non è improbabile che anche altri tratti delle vie genitali concorrano a fornire materiali nutritivi per gli spermî. Io, per esempio, ho visto, in reale sostitutivo di *Calotermes*, nelle pareti del deferente, qualche nucleo degenerato, picnotico, acidofilo (diametro μ 0,9), innicchiato nelle pareti stesse e che può supporsi se ne stacchi per cadere nel lume. Del resto, per animali superiori è ben dimostrato che i varii tratti delle vie genitali possono concorrere a segregare materiali per il mantenimento degli spermî ([1]).

---

dent that, altough the testes of the adult soldier produce spermatozoa that are apparently normal, the lack of the secretion of the seminal vesicles may render these spermatozoa non-functional and thus cause the sterility of the male soldier. A detailed cytological study of the soldier spermatozoa may prove that they lack some morphological feature or that they are entirely normal, but the attenuated vasa deferentia and the degenerate seminal vesicles indicate that these parts at least of the male reproductive system are vestigial » (pag. 523, *215*).

Nel soldato maschio di *Archotermopsis wroughtoni*, secondo Imms, « le vescicole seminali rassomigliano molto alle ghiandole collaterali della femmina, e nella forma generale e nella loro minuta struttura. Differiscono dal vaso deferente per avere la parete epiteliale più spessa e più ghiandolare. I nuclei sono disposti alla periferia delle cellule ed esternamente ciascun tubulo è provvisto di uno spesso strato di fibre muscolari. Non si rinvengono spermi maturi nelle vescicole seminali e nemmeno nei deferenti ». Anche nell'alato maschio « le vescicole seminali non contengono alcuno spermio ; esse costituiscono ghiandole compatte tubulari che misurano circa 0,7 × 0,6 mm. » (pag. 120, *118*).

([1]) « Negli animali ad attività spermatogenetica continua, le cellule cilindriche dei coni efferenti e della testa dell'epididimo presentano sempre attività secretoria (Henry). Negli animali ad attività spermatogenetica periodica, la lepre ad esempio, una secrezione epididimaria si prepara durante la spermatogenesi, e una escrezione in massa si produce al momento del passaggio degli spermi nelle vie escretrici (Hammar, van dez Stricht, Henry) ».

Il significato della secrezione epididimaria è particolarmente evidente nel pipistrello ; nel quale, secondo le ricerche di Rauther e di Courrier (1920), « durante l'ibernazione e dopo l'arresto della spermatogenesi, una massa considerevole di spermi è accumulata nella coda dell'epididimo e una secrezione ghiandolare intensa si produce nelle cellule cilindriche della parte iniziale del canale. La regione distale dell'epididimo si è dunque trasformata in un serbatoio per lo sperma, e la sua regione prossimale si è differenziata in un organo ghiandolare, i prodotti di elaborazione del quale vanno a mescolarsi agli spermi viventi contenuti nella zona sottostante del condotto ». « On remarque en effet très facilement sur les préparations de gros grains sécrétoires dans la lumière du canal épididymaire. Les spermatozoïdes s'ordonnent souvent en sens radiaire autour de ces grains, comme s'ils étaient attirés vers eux par un trophotactisme électif, qui rappelle la fasciculation des spermies dans les digitations du cytoplasme sertolien. On voit aussi, en certains endroits, les spermatozoïdes se ranger régulièrement par faisceaux qui s'orientent en sense perpendiculaire à l'épithélium glandulaire, et dirigent leur tête vers les cellules gorgées de matériel sécrétoire » (p. 68, *43*).

Un trofotattismo tutto simile esercita sugli spermi, nei pipistrelli femmine, durante l'inverno, la secrezione uterina, prodotto di attività ghiandolare dell'epitelio, che evidentemente rappresenta il materiale nutritizio indispensabile a mantenere la vitalità degli spermi, per più mesi, fino al risveglio dell'attività ovarica (nel pipistrello l'accoppiamento si fa prima dell'inverno, e l'ovulazione e la fecondazione avvengono in primavera ; sicchè durante l'inverno l'utero è gonfio di una massa enorme di spermi (pag. 243, *44*).

Anche nei deferenti si possono riscontrare fenomeni secretorii che hanno con tutta probabilità lo stesso significato di quelli dell'epididimo.

Bénoit, praticando lo studio citologico del canale deferente nei Rosicanti e specie nel sorcio, vi ha riscontrato (1920) fenomeni secretorî estremamente intensi, molto più che non nell'epididimo. Si formano, in seno alle cellule, grosse masse di secrezione, di aspetto colloide, che, facendo ernia, trasci

Fenomeni, che più davvicino ricordano quelli da me scoperti nelle Termiti, si verificano nei ragni. Nei ragni, al tempo degli amori, il lume del testicolo e i dôtti sono pieni di spermî maturi e di cellule degenerate (¹).

Questi fenomeni istologici sono certo legati a necessità di nutrizione degli elementi spermatici maturi e mi sembra debbano venir messi in rapporto con la biologia sessuale dei ragni, che è tutta singolare e caratteristica. Il maschio fila un po' di tessuto, vi depone su una gocciola di sperma, poi la trasporta nei suoi organi palpali, particolarmente

---

nano con sè, nel lume, lobi di protoplasma. « Lors de cette periode d'excrétion, on voit souvent des spermatozoïdes orientés perpendiculairement à la paroi déférentielle, la tête engagée entre les lobes protoplasmiques qui se détachent des cellules. Il semble qu'ils soient attirés vers eux par un tactisme particulier » (pag. 1641, *4*). Anzi Bénoit, in seguito ad esperienze di castrazione unilaterale (gli spermî ristagnano nelle vie genitali, dal lato operato, e presto deperiscono e degenerano nel canale dell'epididimo, mentre conservano tutta la loro vitalità nel deferente), ammette (1921) che nel sorcio « la sécrétion déférentielle seule est efficace pour maintenir intacte la vitalité des spermatozoïdes; celle de l'épididyme ne semble pas être pour le spermatozoïde un aliment suffisant » (pag. 952, *5*).

In altri animali, i grandi Mammiferi ad esempio, potrebbe accadere l'inverso. Difatti Bénoit trova (1921) intensi processi secretorî nell'epididimo di Cavallo, Cane, Uomo (nell'Uomo, anche nel canale deferente). Questa secrezione è caratterizzata dalla sua origine prevalentemente intranucleare. « Il nucleo della cellula epididimaria fabbrica prodotti di secrezione per processi differenti; a spese dei nucleoli misti s'originano grani che, aumentando di numero e di grossezza, distendono la membrana nucleare, la fanno scoppiare e cascano nel citoplasma; là continuano quasi sempre a ingrossare e vengono infine rigettati nel lume. Talvolta i grani non escono in massa dal nucleo: gli uni dopo gli altri passano nel protoplasma senza distruggere brutalmente la membrana nucleare. In altri casi il nucleo fa gemme e libera, nel lume del canale epididimario, vescicole contenenti granuli acidofili e succo nucleare. A questi prodotti di secrezione, costituiti da sostanze nucleari, vengono ad aggiungersi dei prodotti di secrezione di origine citoplasmica e sostanze lipoidi. Gli spermî, sprovvisti di sostanza citoplasmica elaboratrice, e assai lontani da la sorgente nutritiva apportata dalla circolazione sanguigna, trovano così, fabbricati da le cellule epididimarie e deferenziali, tutti i materiali nutritivi necessarii al loro mantenimento durante il lungo tragitto nelle vie escretrici del testicolo ».

Bénoit insiste « sur l'abondance spéciale des produits d'origine nucléaire, qui semblent bien être adaptés à l'entretien des spermies, qui sont essentiellement de constitution nucléaire » (pag. 947, *6*).

(¹) Secondo Wallace (1909), nel *Pholcus phalangioides* queste cellule degenerate sono di due sorta: parte senza nucleo, e sono i resti citoplasmatici abbandonati dagli spermi e che passano con essi nel lume; parte con nucleo distinto, e s'originano da spermatidi degenerati « many cases occurring where nearly all or quite all of the spermatids in a cyst are in advanced stages of degeneration » (pag. 141). Il corpo di queste cellule si dilata e si vacuolizza e la cromatina forma masse a struttura omogenea, a contorni irregolari o frammentate; poi decrescono, la massa cromatica diviene sferica e il corpo cellulare trasparente. Benchè variino molto di grandezza, sono sempre riconoscibili, nel lume del testicolo, dagli spermi maturi e dai corpi citoplasmici granulari cui sono frammisti. Anche in *Agalena*, nella stagione degli amori, i dôtti spermatici sono farciti di cellule o di frammenti di cellule e, tra essi, gli spermi. Ma delle cellule non ve ne sono che contengano cromatina e, d'altra parte, nei testicoli non si ritrovano cisti piene di spermatidi degenerati. « Degenerating cells or cell fragments which envelop the ripe spermatozoa in the sperm-ducts come from at least four different sources. These are as follows: (*a*) broken down walls of empty cysts; (*b*) cell bodies from which the ripe spermatozoa have escaped; (*c*) *connecting bodies* of sister spermatids, and their contained mit-bodies [Zwischenkörper]; (*d*) large, oval cells which resemble the rolled up spermatozoa, in size and outline » (pag. 151, *225*).

conformati a ciò nel loro apice e talora complicatissimi. Caricato il suo organo copulatore, aspetta l'occasione di servirsene. Avvistata una femmina, le fa la corte, danzandole attorno lungamente con movimenti vorticosi, finchè, sicuro d'essere entrato in grazia alla temibile, più che ritrosa, compagna, le si accosta ed applica all'apertura genitale di essa l'apice del palpo. Così avviene la fecondazione (l'umor fecondante contenuto in speciali spermatofori, occlusi, dentro un ricettacolo del seme, nel palpo, penetra nelle vie genitali femminili). « This is a very wonderful process », — osserva Montgomery (1903) che ha studiato molto accuratamente le abitudini amorose di molti ragni — « the male discharges semen upon a web, takes up this semen into his palpal organs, and with the latter applies the semen to the genital aperture of the female. There are, in a sense, two separate acts of seminal discharge.... No, one, to my know ledge, has endeavoured to account for such a double process » (pag. 135, *161*) (1).

La presenza di abbondante materiale nutritivo, e, pare anche, di vere cellule nutrici nelle vie deferenti maschili dei ragni, è dunque certamente in rapporto a particolare adattamento biologico sessuale, come nelle Termiti. È probabile che casi analoghi si presentino frequentemente nella serie animale.

Certo la conservazione della specie è problema al quale pare che ogni specie animale, soprattutto negli animali inferiori, dia una soluzione diversa; quello dei fenomeni sessuali sembra il campo più vasto al dispiegarsi dell'inesauribile ricchezza di varietà delle attività vitali.

E se ogni adattamento biologico ha la sua base in un substrato isto-fisiologico (che ne è causa ed effetto insieme, motivo ed espressione), certo il campo dei fenomeni che provvedono alla conservazione della specie si presenta come uno dei più fertili, il più fecondo forse, per chi voglia coltivare quella che a me piace chiamare « la fisiologia de la biologia ».

(1) Questo in linea generale; differenze poi si riscontrano nelle differenti specie. Molte volte (nelle Agalene, per esempio) il maschio fila una speciale piccola tela, sulla quale depone lo sperma; talvolta, senza fare uno speciale tessuto, depone lo sperma sulla sponda della sua tenda d'abitazione; nelle specie nelle quali non si fa un nido, ma vive sul terreno, come nelle Licose, il maschio fila sempre un piccolo tessuto per deporvi la gocciola di sperma, ed è questa la sola filatura che fa in tutta la sua vita di adulto.

Il maschio ogni volta eiacula solo una piccola goccia di sperma e non tutto il contenuto dei testicoli, sicchè può copularsi successivamente più volte, con la stessa femmina o con diverse, senza esaurirsi. Anzi quando la durata della copula è molto breve (uno o pochi secondi; mentre altre volte è lunga, fino a trentasei ore), viene ripetuta, probabilmente, moltissime volte; ogni tanto il maschio ricarica il suo organo copulatore: « In some species the male may copulate several times, and frequently charges his palpi with semen before repeating an act of copulation.... One act of fertilisation is in some cases sufficient to fertilize a number of cocoons, yet not infrequently several distinct copulations may precede one cocooning. This is in contrast to the case in insects, where the male generally performs a single act of copulation, and dies of exhaustion after it » (pag. 138, *161*).

I batteriociti del Mastotermes.

I fenomeni da me rilevati sul metabolismo dei Termitidi sono di tal natura da potersi prevedere generalizzabili, nelle linee fondamentali, a tutto il gruppo. Uno studio comparato dei Termitidi, sotto questo punto di vista, riuscirebbe singolarmente interessante, giacchè, rivelandoci caratteristiche fisiologiche in correlazione agli adattamenti biologici peculiari delle singole forme, ci fornirebbe elementi preziosi per l'interpretazione generale dei fenomeni (in genere, alla fisiologia degli insetti sono precluse, purtroppo, per difficoltà tecniche sconosciute al fisiologo delle forme superiori, larghe possibilità di esperimentazione; fortunatamente però la Natura stessa, tanto più sapiente e meno brutale di noi nei suoi procedimenti, sembra, in ogni specie d'insetto, offrire, alla nostra osservazione analitica, un'esperienza brillantemente realizzata).

Un tale studio comparativo fisiologico ci darebbe fors'anche elementi validi per la soluzione di problemi filogenetici. Non è detto che questi elementi possano venirci solo da considerazioni morfologiche. Forma e funzione vanno così intimamente solidali nella evoluzione degli esseri che appare logico far ricorso alle caratteristiche fisiologiche non meno che alle morfologiche peculiarità per cercar di riconoscere le affinità naturali dei gruppi. Certo le linee di evoluzione morfologica sono, come più sensibilmente marcate e meno ricche di divergenze deviatrici e di imbarazzanti convergenze, più facili e relativamente più sicure a seguire; ma, d'altra parte, linee di evoluzione fisiologica — tracciate, s'intende, con mano più che prudente — avrebbero il vantaggio di portarci più addentro nell'intimità dei processi vitali e, integrando le prime, ne farebbero vere linee di evoluzione biologica.

Io, per esempio, trovo nel *Mastotermes* (¹) batteriociti identici a quelli che tutti sanno albergarsi nel tessuto adiposo dei Blattidi.

Ebbene, io non posso indurmi a considerare questa coincidenza come puramente casuale; io non so trattenermi dal metterla in rapporto agli stretti vincoli filogenetici che ragioni paleontologiche e morfologiche concordemente dimostrano legare i due gruppi.

Perchè, sì, sono molti gli insetti che albergano nel loro corpo microrganismi unicellulari non patogeni, anzi verisimilmente associati coll'insetto ospite in relazioni simbiotiche, e trasmessi da generazione a generazione, traverso le uova, in ben definito modo. Oltre i Blattidi, tutto l'ordine degli Omotteri e la famiglia dei Formicidi hanno di questi simbionti (non è chiaro il caso di certi Lepidotteri e Coleotteri che albergherebbero organismi intracellulari simbiotici; potrebbe trattarsi invece di germi patogeni). Ma solo nel caso dei Blattidi, questi simbionti sono indubitabilmente batterî; in molti afidi sono certo blastomiceti; in altri casi, probabilmente, ifomiceti superiori. Ora, sta il fatto che nei Blattidi è costante la presenza di batterî simbionti entro speciali elementi cellulari del corpo adiposo, batteriociti, mentre nei Termitidi è limitata al genere più antico, all'unico rappresentante superstite della più antica famiglia (²).

(¹) Prezioso materiale è stato messo a mia disposizione, con tutta liberalità, dal prof. Silvestri.

(²) Pel *Termes lucifugus* e *Calotermes flavicollis* posso direttamente affermare la non esistenza di batteriociti; per le altre forme la induco dal non essersi mai imbattuti in simili caratteristici elementi gli autori che hanno, anche istologicamente, studiato il tessuto adiposo dei Termiti, come Bugnion, Feytaud, Holmgren e Imms (per *Archotermopsis*).

Io dunque attribuisco significato filogenetico alla presenza di batteriociti nel corpo adiposo del *Mastotermes*.

Nelle larve operaie (larve d'adulti che fanno funzione di operai) e nei soldati, in questi specialmente, il tessuto adiposo è scarso: a piccole falde, fodera qua e là i tegumenti, fascia le gonadi e i gangli della catena ventrale, si addossa alle pareti del tubo

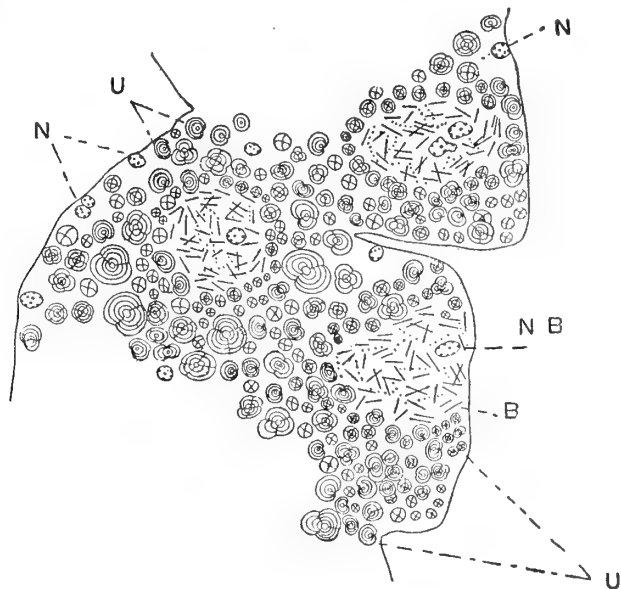



FIG. 22. — *Mastotermes darwiniensis.*

Tratto di lobo adiposo in soldato. Le concrezioni uratiche (U) riempiono le cellule adipose e ne nascondono i confini; solo ai margini del lobo si distingue qualche nucleo (N). Spiccano, tra la massa degli urosferiti, tre areole provviste di nucleo, N B (ed una di due nuclei), piene di bastoncelli cromatici (e file di cocci, stadio di sviluppo): i batteriociti. (Il contenuto dei quali è stato schematizzato nel senso di assai diradarlo per opportunità di rappresentazione).

intestinale, specie intorno al ventricolo chilifico e tra le anse dei malpighiani. Dell'intestino, la dilatazione preventricolare (gozzo e gisiere) si stende nel torace e nei due primi segmenti addominali; il ventricolo chilifico, poco sviluppato, sta tutto nei due successivi segmenti (e si spinge, con lunga doccia, nell'intestino posteriore); l'ampolla cecale, assai dilatata, piena di protozoi, occupa largamente la parte posteriore dell'addome (terzo, quarto, quinto, sesto e settimo segmento). La parte anteriore dell'addome e il torace sono riempiti da uno stroma lacunare, di apparenza connettivale, nel quale vanno a sfioccarsi le trachee, e l'emolinfa, canalizzata, circola.

Il tessuto adiposo (fig. 22) è tutto farcito di urati in grosse concrezioni sferocristalline; vanno facilmente disciolti nelle manipolazioni tecniche, e la loro assenza rende assai più agevole l'esame istologico.

Ogni lobo adiposo, rivestito di una membrana propria, consta di un numero più o meno grande di cellule, compattamente ammassate, senza o quasi interstizi, a limiti cellulari in genere distinguibili, a struttura citoplasmatica spugnosa (reticolo-alveolare in sezione), nucleo con nucleolo poco eccentrico, debolmente ma distintamente acidofilo. Il nucleo è più o meno ovalare o tondeggiante (ma non regolarmente sferoide, anzi piuttosto angoloso, come per stiramento delle briglie citoplasmiche che ad esso fan capo), a reticolo cromatinico ben evidente e granuli più intensamente cromatici alle maglie e contro la membrana nucleare. S'incontrano non di rado nuclei in varî stadii di divisione amitotica (iniziata dal nucleolo, pare); e, del resto, già le dimensioni abbastanza varie dei nuclei (μ 5,5-7,5) e la presenza frequente di gruppetti di nuclei non individuati in cellule attestano una notevole attività di moltiplicazione degli elementi adiposi. Ai nodi del reticolo citoplasmatico, spesso in aureola fitta attorno ai nuclei, stanno granuli o zollettine rifrangenti, di aspetto solido, cristallino, di color gialliccio, di forma angolosa, poligonale, non esattamente determinabile, date le infime dimensioni [1].

È interessante notare che questi granuli hanno un aspetto tutto simile a quelli che fittamente farciscono le cellule pericardiali e le cellule ipodermali pigmentifere.

Ma solo qualche falda o bandula adiposa più piccola, ad esempio i nastrini adiposi addossati ai tegumenti, risulta di elementi cellulari tutti simili. Nella maggior parte dei lobuli le suddescritte cellule, a trama caratteristicamente reticolare, occupano la porzione corticale, e medialmente spiccano, colorate dall'emallume nelle sezioni, una, due o più areole, nucleate al centro, farcite — senza lasciar distinguere nè trama citoplasmica, nè limiti cellulari — di innumerevoli piccoli bastoncelli cromatici, fittissimamente e in tutte le direzioni affasciati.

A piccolo ingrandimento queste areole hanno l'aspetto di masse filamentose in gomitolo; e nei preparati, ove le concrezioni uriche non siano andate disciolte, ancor più caratteristicamente spiccano come soli punti del lobo liberi dalla massa biancheggiante degli sferocristalli. Queste cellule, che chiamerò senz'altro batteriociti, hanno di solito dimensioni leggermente superiori a quelle degli elementi corticali (in media μ 25 $\times$ μ 30), come anche i loro nuclei (μ 5-7-9 di diametro).

La variabilità di dimensione riscontrabile nei batteriociti e nei loro nuclei (i più piccoli rotondi, i più grossi di forma ovale) e la presenza, in qualche areola batterica, di due nuclei, vicini, così che sembra da escludersi la confluenza di due batteriociti preesistenti, fanno sospettare l'esistenza di processi di moltiplicazione; e del resto non è raro sorprendere dei nuclei di batteriociti in via di divisione, preceduti, pare, dalla bipartizione del nucleolo (dimensioni d'uno di questi nuclei μ 10 $\times$ μ 5,5).

Osservando attentamente il contenuto dei batteriociti, si discerne — oltre una infinità di bastoncelli cromatici, più fitti alla periferia che non al centro, affasciati in tutte le direzioni, come mazzi di sigari ammonticchiati e sparpagliati — una quantità di corpuscoli cocciformi, anche più intensamente cromatici, che si direbbero a prima giunta sezioni trasverse di batterî, ma rappresentano invece probabilmente stadii di sviluppo.

[1] Grani di simile aspetto sono figurati, ma non descritti, da Cuénot nelle cellule periferiche (di cui il grasso è stato disciolto dai reattivi) del lobo adiposo, in giovine *Periplaneta* (*50*).

Questi granuli o cocci, per lo più, sembrano disposti in fila, e la lunghezza delle file è presso a poco la stessa che dei batterî (μ 3-6-7) così da riceverne l'impressione ch'essi sieno le spore, intensamente cromatofile, di un corpo batteriforme scolorato; tanto più che spesso s'incontrano batterî cilindrici, septati trasversalmente da tratti, più intensamente colorabili [1].

Ma io non ho avuto nè tempo nè materiale abbastanza adatto per uno studio minuto. Certo che le cellule centrali dei lobi adiposi di *Mastotermes* sono perfettamente corrispondenti ai batteriociti dei Blattidi; e, come i batteroidi dei Blattidi sono certamente batterî, certo sono batterî anche i batteroidi del *Mastotermes*.

Blochmann per primo (1877) segnalò l'esistenza, nel corpo adiposo di Blattidi (*Phyllodromia*, *Blabera* e *Periplaneta*), di cellule piene, invece che di grasso, di piccoli bastoncelli diritti o alcun poco ricurvi, batteriformi (*16*). Egli li ritenne batterî simbiotici; ma, avendo provato a isolarli in cultura, nè lui nè Forbes (1892) vi riuscirono. Cuénot (1896) considera invece questi corpicciuoli (li ritrova anche in *Ectobia*), che si colorano coi coloranti nucleari comportandosi come granuli di cromatina, come « des productions purement cellulaires » (*50*). Henneguy (1904) li ritiene cristalloidi, forse anche per analogia coi batteroidi degli Anellidi che Cuénot stesso aveva presi per batterî ma che Willem (1900, *228*) dimostrò essere cristalli d'acido urico: « Ce corps, que j'ai observé moi-même chez la Blatte, dans l'œuf et dans l'embryon, se retrouvent également dans les grandes cellules colorées du corps adipeux des Aphidiens; ils me paraîssent pouvoir être rapprochés de certains cristalloïdes qu'on observe quelquefois en grande quantité dans les tubes de Malpighi des Blattes, où ils sont beaucoup plus volumineux, mais ils présentent la même forme et les mêmes réactions » (pag. 88, *102*).

Prénant (1904) cita, tra la « foule de corps qui répresentent en quelque sorte des formes cristalloïdes très imparfaites au point de vue géométrique », insieme alle sferette vitelline delle uova e ai granuli acidofili dei globuli bianchi, i « corps bactéroïdes ou bacilliformes trouvés dans les cellules les plus variées », per esempio le « cellules à bactéroïdes » del corpo adiposo di Blatte (*180*).

Ma nel 1906 Mercier, verificando le osservazioni di Blochmann e di Wheeler (1889) sulla presenza di batteroidi nell'uovo di Blatta, si convince che trattasi veramente di batterî e cerca di coltivarli. Seminando su tubi di gelatina il contenuto di ooteche di Blatte ottiene culture pure di un bacillo che crede poter affermare identico ai corpi di Blochmann. « Ecco i caratteri morfologici del bacillo nelle culture. Nelle condizioni biologiche più favorevoli (velo di cultura su brodo, culture su patata) si presenta sotto forma di lunghi bastoncelli (4-8 μ), spesso arcuati, a estremità arrotondate; costituiscono lunghissimi filamenti. Nel brodo di cultura, al disotto del velo, il bacillo si presenta sotto forma di articoli corti (3-5 μ), con uno spazio più chiaro nel mezzo. Il bacillo dà spore più larghe degli articoli. Prende il Gram »; non è acido resistente. È mobile, peritrico.

Ora « questi caratteri morfologici del bacillo sono anche quelli dei corpi di Blochman ». Difatti: « in Blatte ben nutrite formano lunghi bastoncelli (4-8 μ), spesso arcuati, a estre-

[1] Una struttura simile riproduce Mercier in molte delle sue figure, ma non la descrive se non accennando a una « struttura granulare »

mità arrotondate. Frequentemente più articoli sono riuniti in un lungo filamento. In Blatte tenute lungo tempo a digiuno i corpi di Blochmann hanno invece forma di piccoli bastoncelli (3-5 μ) con uno spazio chiaro centrale, come nell'uovo, e molto spesso si presentano sotto forma di spilli (o bacchette di tamburo) per la presenza, a un'estremità, di formazioni che richiamano, per il loro aspetto, le spore che si formano nelle culture» (pag. 683, *151*).

In Blatte parassitizzate da un blastomicete, man mano che questo invade il tessuto adiposo, vanno scomparendo i bacilli e si assiste al passaggio dalle forme lunghe alle forme corte (pag. 349, *153*). «In presenza di questo insieme di caratteri comuni» Mercier crede poter affermare che «i corpi di Blochmann e il bacillo delle culture sono identici», e questo bacillo, cui dà il nome di *Bacillus cuenoti*, gli sembra vicino ai generi *mesentericus*, *subtilis* e *tyrotrix*. Ora, che rapporti corrono tra i bacilli e l'organismo della Blatta? «C'è simbiosi o parassitismo?». Speciali, delicate ricerche occorrono per risolvere la questione. Ma certo si è che le cellule a *Bacillus cuenoti* crescono e si moltiplicano per divisione diretta; il che «permette di supporre che queste cellule non siano nient'affatto offese nella loro vitalità» (pag. 355).

Javelly, dell'Istituto Pasteur, ripete (1914) su *Periplaneta orientalis* gli esperimenti di cultura dei batteroidi, ma con risultato affatto negativo. «Nos essais nous autorisent à conclure qu'il n'y a pas identité entre les bactéroides de la blatte et les germes cultivés par Mercier... Les corps bactéroïdes de la Blatte n'ont pas été cultivés. Leur nature bacterienne reste encore à démontrer» (*121*).

Buchner non sembra tener conto dei risultati negativi di Javelly. Egli accetta come indiscussi i dati del Mercier ed esclude ogni dubbio sulla natura batterica dei batteroidi; propone anzi di chiamare le cosidette «cellule a batteroidi» batteriociti.

Fränkel, scolara di Buchner, esaminando molte specie di Blatte indigene ed esotiche (*Periplaneta*, *Blatta*, *Ectobia*, *Heterogomia*, *Epilampra*, *Nauphoeta*, *Deurocalymna*, *Platyzosteria*, *Homolo*, *Blabera*, *Loboptera*), conferma che non v'è Blattide senza batteriociti e che, nelle linee generali, è uguale in tutti i Blattidi il comportamento dei batterî durante lo sviluppo embrionale dell'ospite.

Il modo d'infezione delle uova non è stato esattamente determinato. Mercier, avendo ritrovate, nella tunica peritoneale degli ovarioli, cellule ipertrofizzate e piene di batterî (oltre a batterî nelle cellule follicolari e nel sottostante strato periferico dell'uovo) crede probabile, data l'origine mesodermica della tunica, che l'infezione di queste cellule abbia luogo nell'embrione (*152*). Del resto, dato che il tessuto adiposo riveste i tubi ovarici, si può agevolmente supporre che di là fuoriescano batterî ad invadere le uova.

Lo stadio delle uova nel quale comincia l'invasione è esattamente determinato. In *Periplaneta* è nelle uova da 0,05 a 0,07 mm. di larghezza e 0.13 mm. di lunghezza che batterî poco numerosi traversano il follicolo e si dispongono in circolo attorno alla superficie dell'uovo, tra il follicolo e la membrana vitellina. Man mano che cresce l'uovo, i batterî si moltiplicano attivamente, rivestono tutta la sua superficie e s'accumulano specialmente ai due poli dell'uovo, in corrispondenza ai quali sembra disciogliersi la membrana vitellina, così che i batterî passano a poco a poco nel vitello.

Lo sviluppo successivo dei batterî in rapporto all'evoluzione embrionale dell'ospite è ben conosciuto per le ricerche di Wheeler, di Cholodkowsky e sopratutto di Heymons,

Glaser nel 1920, riprendendo le prove di cultura dei batterî dei Blattidi, ottiene risultato positivo. Seminando, su mezzi di cultura sterili, dei batteriociti, dissecati, con strumenti sterilizzati, da individui di *Parcoblatta virginica* e di *Periplaneta americana*, ottiene culture di due microrganismi (una da ogni specie di Blatta) molto pleomorfi e che, per la frequente forma di virgola o di spirillo (e per la presenza di un flagello polare e perchè non formano endospore), classifica nel genere *Spirillum*: differenti dunque dalla forma coltivata da Mercier, vero bacillo che forma endospore ovali. Glaser studia i caratteri culturali e biochimici di questi microrganismi allo scopo di stabilire correlazione tra l'attività enzimatica dei batterî e il metabolismo degli ospiti. Tutti e due gli spirilli posseggono proteasi e diastasi e si presenta probabile che questi enzimi prendano parte al metabolismo delle proteine e dei carboidrati nell'ospite; non risulta evidente una lipasi, benchè *a priori* sarebbe ben supponibile una relazione tra i microrganismi e il metabolismo del grasso (*82*) (1).

A risultati decisamente negativi giunge l'Hertig (1921) nel suo tentativo di coltivare artificialmente i batteroidi di *Blattella germanica*, di *Blatta orientalis* e di *Periplaneta americana*. La maggior parte delle culture, fatte col materiale estratto dalle ooteche, dal corpo adiposo, dagli ovarî, rimase sterile: e in quelle dove microrganismi appaiono, è tutto un miscuglio di forme di contaminazione. Isolando individualmente i batteroidi col metodo Barber in gocce pendenti di peptone e di brodo fluido sterilizzato, per escludere con sicurezza ogni contaminazione, l'Hertig non ha ottenuto nè moltiplicazione nè sviluppo di altri microrganismi. Secondo l'Hertig, « per quanto riguarda *Blattella germanica* e *Blatta orientalis*, il lavoro suo e quello di Javelly dimostrano in modo definitivo che i batteroidi non crescono su mezzi di cultura comuni e che il *Bacillus cuenoti* di Mercier è una forma di contaminazione. I risultati interamente negativi da lui ottenuti nella cultura dei batteroidi di *Periplaneta americana*, e criterî di analogia colle

(1) Glaser crede che i rapporti simbiotici tra i batterî e i loro ospiti « ripetano la loro origine da un vero parassitismo, forse da una malattia. In un primo periodo i microrganismi, che ora si rinvengono innocui nel corpo degli insetti, erano parassiti, produttori di condizioni patologiche, di malattie. Strutture come i micetociti, i batteriociti e i micetomi si presentano come i resti di antiche profonde modificazioni patologiche. Poi si sono sviluppati principii immunitarî, sono divenuti ereditarî e l'ospite è arrivato a contenere sotto il suo controllo » le attività biologiche del parassita, la sua propagazione, la produzione di tossine ecc. « L'insetto non si è potuto addirittura sbarazzare del parassita, perchè se ne era già stabilita, con precisione infallibile, la trasmissione da generazione a generazione. In seguito i microrganismi hanno perduto tutti i loro effetti nocivi; e, siccome essi segregavano tanti enzimi che potevano venire utilizzati dall'ospite, questo, se non venne sterminato, venne però probabilmente sviato dal suo corso filogenetico.... È impossibile supporre che strutture come gli pseudo-vitelli, i micetociti e i micetomi coi loro inquilini, si possano essere sviluppate senza alterare la fisiologia e conseguentemente le abitudini degli ospiti. Può essere che i microrganismi, come Buchner suppone, derivino qualche utile dall'associazione; ma pare probabile che più vantaggio verrebbe loro dal comportarsi come veri parassiti o patogeni. Giudicando dalla facilità colla quale i simbionti dei Blattidi possono essere coltivati su qualunque mezzo, io son sicuro che, se essi fossero riusciti a sterminare tutti i Blattidi, essi sarebbero rimasti in vita forse come saprofiti e se la sarebbero passata anche meglio » (*82*).

Quest'ipotesi dell'origine della simbiosi da malattia per invasione di germe parassita patogeno è ingegnosa; ed è giudiziosa l'osservazione che, per l'intervento del microrganismo, « the phylogenetic history must have likerwise taken another cours ».

altre specie, provano evidentemente che lo spirillo ottenuto da Glaser non rappresenta la forma culturale dei batteroidi di quella specie » (p. 186). « The results of the entire series of culture experiments on the three species of *Blattidae*, indicate that the bacteroids do not grow readily, if at all, on routine culture media » (pag. 184, *104*).

Concludendo, questi risultati così discordanti autorizzano il più ampio scetticismo. Non solo Javelly e Hertig ottengono, nella cultura dei batteroidi, risultati del tutto negativi; ma di Mercier e Glaser, che giungono a risultati positivi, l'uno ottiene forme culturali tutte diverse dall'altro.

In verità a me non pare probabile che i batterî dei Blattidi debbano essere così facilmente coltivabili sui soliti mezzi di cultura, come risulterebbe dalle esperienze di Mercier e di Glaser, così che quest'ultimo arriva a dire: « Judging from the ease with wich the Blattid symbionts can be cultivated on almost anything, I feel sure that had they succedeed in exterminating all Blattids, they would still persist today living possibly as saprophytes, under much more advantageous conditions » (*82*).

Io credo anzi probabile che i batterî dei blattidi siano specialmente e intimamente adattati all'ambiente che li ospita e che per coltivarli, e specialmente a volerne studiare le proprietà biochimiche, bisognerebbe trovare mezzi di cultura che riproducano, per quanto è possibile, le condizioni che i batterî trovano nell'organismo dei blattidi.

Io, se potessi occuparmi (purtroppo, per ora almeno, non posso) della cultura dei batterî dei Blattidi, comincerei coll'aggiungere, ai mezzi soliti di cultura, dei composti azotati catabolici: prodotti urici, ad esempio.

Ricordo, a questo proposito, che, secondo recenti ricerche, la formazione normale dei batteroidi nei tubercoli radicali delle leguminose (e, solo quando è avvenuta la trasformazione dei batterî in batteroidi, la simbiosi tra la pianta e il *Bacterium radicicola* comincia a farsi sentire), assai probabilmente dipende, più o meno, dalla presenza di speciali sostanze nelle radici della pianta: precisamente dalla presenza di alcaloidi, di cui le leguminose sono ricche. Difatti sperimentalmente, nelle culture di batterî su gelatina, si può determinare, sempre e con prontezza, la formazione di batteroidi, con l'aggiungere, in proporzioni convenienti, alcaloidi vegetali (caffeina, guanina, guanidina, piridina, chinolina) e certi composti organici azotati, come l'acido ippurico (*3*).

In ogni modo, prescindendo dai tentativi di cultura, a me pare che bastino i dati morfologici a farci considerare i corpuscoli di Blochman come microrganismi simbionti: come microrganismi, giacchè si moltiplicano [1], migrano ecc.; come simbionti, giacchè sono presenti in tutti gli individui della specie e inducono, nelle cellule dell'ospite, can-

[1] Ultimamente (1923) Lwoff comunica che tentativi di cultura han dato anche a lui risultati negativi, ma lo studio citologico del batteroide lo ha condotto alla convinzione che queste formazioni sono non produzioni cellulari ma Batterî vicini al genere *Bacillus*. In molti batteroidi si nota la presenza di un setto rifrangente che si colora in rosso col Giemsa e del quale si può facilmente seguire la comparsa e l'evoluzione. Appare sotto forma di due granuli laterali, poi riuniti da un setto sottile; in corrispondenza al quale, come per sua contrazione, la cellula si strozza. Possono formarsi setti nelle cellule figlie prima ancora che si separino o anche due setti formarsi simultaneamente nella stessa cellula. Cercando di provocare nel batteroide la formazione di spore, in un sol caso l'A. ha ottenuto forme interpretabili come stadî di sporogenesi (*143*).

giamenti determinati senza offenderne la vitalità. Sopratutto è singolare ed impressionante il fatto che le vie d'infezione e il metodo di localizzazione sono ben determinati e costanti, per ogni data specie (e per tutto il gruppo, nelle linee generali, coincidono).

Quel che ho detto per i batterî dei Blattidi vale anche per i batterî del *Mastotermes*, che, a giudicare dall'aspetto, si direbbe non differiscano da quelli dei Blattidi, più di quanto quelli di una specie di Blattidi differiscano da quelli di un'altra specie.

Anche nel corpo adiposo di alati sciamanti di *Mastotermes* ho ritrovato batteriociti; spiccano come masse punteggiate cromatiche al centro dei lobuli che sono pieni zeppi di concrezioni uriche e con pochi residui albuminoidi in piastrine disposte specialmente attorno a grosse vacuole grassose (dimensioni d'un lobulo adiposo μ 157 $\times$ 140; d'un batteriocito μ 28 $\times$ 38,5; d'un altro μ 31,5 $\times$ 38,5; diametro d'un nucleo di batteriocito μ 5-7; di grosse concrezioni uratiche μ 10,5-13,5).

Sono sicuro che, studiando l'apparato genitale femminile e lo sviluppo delle uova, si troverebbero per il *Mastotermes* fenomeni identici, o quasi, a quelli scoperti nei Blattidi.

A me sembra che il problema dei batterî simbionti dei Blattidi, già così importante di per sè, diventi assai più interessante ora, colla scoperta nel *Mastotermes* (il genere più antico dei Termitidi, l'unico rappresentante superstite della più antica famiglia) di fenomeni analoghi.

È certo audace, ma non mi sembra temerario, considerare questo caso — che, per ora, non posso che additare all'attenzione degli studiosi — come caso di simbiosi ontogeneticamente ereditaria, ereditato nella serie filogenetica.

I Protozoi dell'ampolla cecale.

Lespès fu il primo ad osservare la presenza di Protozoi nell'intestino posteriore delle Termiti (1856). Egli vide che negli operai di *T. lucifugus* « l'intestin est ordinairement rempli d'une sorte de bouille brune, vivante agglomération d'Infusoires » (pag. 237); e che anche negli adulti (« petits rois et petites reines ») « le tube digestif... fourmille toujours d'animalcules » (pag. 258, *138*).

Anche Leidy trova, in *T. flavipes*, il comune termite nord-americano, che l'intestino di operai, soldati e alati è dilatato da un enorme numero di Infusorii ed altri parassiti, frammisti a particelle sminuzzate di legno; egli li descrive e cerca di classificarli (1877, 1881). Grassi (1893), studiando, nel *T. lucifugus* e nel *C. flavicollis*, la struttura dei genitali, osserva che il grado di sviluppo di questi organi sta generalmente in ragione inversa dell'ampiezza dell'ampolla cecale, ampiezza che dipende a sua volta dalla presenza o meno di Protozoi. Questi Protozoi, che minutamente descrive, il Grassi li chiama « parassiti », benchè sospetti che rapporti simbiotici corrano tra loro e i loro ospiti. « Molte volte mi sono domandato se i Protozoi non abbiano un'importanza per la digestione, perchè il tritume, onde componesi la feccia, passa quasi tutto attraverso il loro corpo. La cosa è possibile, ma non dimostrata » (pag. 100).

Degli autori che successivamente si occuparono dei Termiti e dei loro Protozoi, alcuni, raccogliendo il sospetto del Grassi, si dichiarano per i rapporti simbiontici (Doflein 1901, *55*); altri, impressionati dalla abbondanza di Protozoi in individui ad organi genitali atrofici, parlano di «castrazione parassitaria» (Brunelli, 1905, *23*). Escherisch (1909) accetta la teoria della castrazione parassitaria, così che sembra accordare più importanza nella differenziazione dei neotenici, alla scomparsa dei Protozoi che non all'influenza diretta della saliva. Bugnion (1910–3) considera invece i Protozoi come simbionti delle Termiti: «Mon opinion est que les trichonymphides ne sont pas des parasites exerçant sur le développement du termite un effet nuisible, mais qu'associés à ces insects par une sorte de symbiose, ils jouent, au contraire, un rôle utile. L'infusoire, dont le corps est bourré de débris ligneux, effectue une première digestion du bois ingéré par le termite, avant d'être à son tour digéré et résorbé» (pag. 16, *34*).

Buscalioni e Comes (1910) portano, finalmente, un contributo sperimentale alla soluzione del problema (*37*). «Abbiamo fatta nostra la domanda del Grassi e crediamo di essere giunti appunto alla dimostrazione del fatto interessantissimo che i Flagellati in discorso hanno una grande importanza nella digestione delle Termiti, poichè trasformano nel loro corpo unicellulare il legno ingerito in vere sostanze nutritive, assimilabili con estrema facilità dalla mucosa intestinale dell'ospite. Così essendo, tutti o per lo meno la maggior parte dei Flagellati ospitati nell'interno dei Termiti vivrebbero in condizione di una vera simbiosi e non allo stato di parassiti».

Credo opportuno fermarmi a riassumere i risultati ottenuti da Comes e Buscalioni, dato anche che si tratta delle sole ricerche finora condotte su questo interessantissimo argomento, ricerche prese in poca considerazione, pare, dagli AA. successivamente occupatisi del problema.

«Delle sottilissime sezioni di semi di *Tropaeolum majus*, il cui albume... contiene delle cellulosi di riserva sotto forma di ispessimenti delle pareti cellulari, vennero collocate nel liquido fisiologico in cui erano state previamente spappolate parecchie ampolle cecali di Termiti allo scopo di inquinare il preparato con un grande numero di Flagellati. Dopo 24 ore, esaminatosi il preparato al microscopio, si potè constatare che le pareti cellulari erano state profondamente intaccate, ridotte in parte alle sole lamelle mediane, oppure ancora fornite degli strati di ispessimento, ma questi rigonfiati, corrosi, ridotti in granuli... Una tale disorganizzazione deve essere ascritta a particolari citasi anzichè ad acidi, poichè i saggi preliminari colle cartine di tornasole non ci avevano rivelato la presenza di questi» (la reazione del contenuto cecale è anfotera o anche leggermente alcalina).

Questo esperimento dimostra (ciò che del resto è naturale) che nell'ampolla cecale esistono fermenti capaci di sciogliere la cellulosa. Ma, come gli AA. stessi notano, «noi non sappiamo se le citasi fossero contenute nei Flagellati, oppure nel secreto delle cellule intestinali delle Termiti, o in entrambi; ma i fenomeni che abbiamo messo in evidenza e le molte reazioni fatte ci portano a ritenere che se i fermenti sono presenti nel liquido intestinale, sono pure presumibilmente contenuti nei Flagellati». Sui detriti e frammenti contenuti nel corpo dei Flagellati si ottiene, colla floroglucina e col solfato di anilina sciolto in H Cl, la reazione della lignina: su qualche frammento il bleu d'anilina dà la colorazione caratteristica delle membrane di natura callosica. Con lo iodo–io-

duro di potassio si ottiene una colorazione bruno-acagiù (come in presenza di glicogeno) diffusa in tutto il corpo in *Pirsonympha* e *Dinenympha*, mentre in *Lophophora* e *Triconympha* è limitata ad una regione presso il nucleo: questa regione del protoplasma funzionerebbe da fegato; e tale accantonamento al nucleo indicherebbe, forse, che il nucleo esercita qualche influenza sulla formazione del glicogeno da materiali plasticamente inferiori (cellulosa, callosi, gomme). Applicando la reazione di Raspail (acido solforico concentrato), si ottiene colorazione diffusa roseo-violacea, che attesta presenza di zucchero diffuso nel corpo protoplasmatico (come nelle cellule delle pareti intestinali delle Termiti). Col rosso di rutenio la massa protoplasmatica dei Protozoi, che ne rimangono uccisi, si colora in rosso vivo, indizio della presenza di sostanze mucillaginose-gommose (di origine pectica).

« Non vi ha quindi dubbio, dai fatti esposti, che i Flagellati disorganizzano le pareti callosiche, pectiche, cellulosiche e lignificate, riducendo le une e le altre allo stato di gomme, di zuccheri e di corpi glicogenici. È una profonda metamorfosi che essi determinano in grazia di speciali, e certo numerosi, enzimi, contenuti nel loro corpo. A questo punto noi non crediamo di andare errati affermando che siffatte trasformazioni tornano anche utili all'ospite. Lo attesta la reazione degli zuccheri nelle cellule intestinali delle Termiti, e lo accenna pure il fatto che i Flagellati, mentre si rinnovano continuamente, vanno pure incessantemente a morte, di guisa che gli zuccheri contenuti nei loro cadaveri fuoriescono, diffondendosi nel contenuto intestinale che viene di poi assorbito dalle pareti dell'intestino delle Termiti, per la fabbricazione dei grassi. Non è escluso, per altro, che anche in vita i microrganismi non possano cedere, in parte almeno, zucchero, a misura che vanno formandolo ».

Dai materiali forniti, glicogeno e zuccheri, « per quel più complicato meccanismo fisiologico che si riscontra nei Metazoi, le Termiti pervengono alle sostanze grasse e alle sostanze albuminoidi, sostanze plastiche più elevate nel ciclo continuo di trasformazioni che subisce la materia vivente ».

Quanto ai grassi, la ricerca col Sudan III nel corpo dei Flagellati dà risultato negativo. « All'opposto, delle granulazioni grasse od oleose furono con questo reattivo intensamente colorate in rosso, sia nel liquido intestinale, sia nelle cellule delle pareti dell'intestino delle Termiti. Anzi bisogna aggiungere che tali cellule negli individui forniti di protozoi sono completamente infarcite di granuli di grasso.... Evidentemente nel caso in esame i grassi non sono assorbiti come tali. Essi mancano nel legno ingerito; mancano pure nel corpo dei Flagellati, e solo in piccola quantità si riscontrano nel succo intestinale: quantità forse dovuta a disfacimento di una porzione dell'epitelio, da cui vengono fuori i globuli adiposi che v'erano contenuti. Essi derivano dalla trasformazione degli idrati di carbonio per azioni enzimatiche speciali della cellula della mucosa intestinale e nel suo interno ».

Da tutto questo risulta dimostrato che i Protozoi delle Termiti sono capaci di digerire il materiale legnoso; e appare verosimile che, in rapporto a questa capacità, rapporti simbiotici corrano tra i Protozoi e l'ospite. Verosimile, ma non certo.

« La ipotesi che io ho data come possibile », dice Grassi nel 1911, « è stata poi veramente trasformata in realtà da Comes e Buscalioni? A me non sembra. Anch'io avevo

tentato reazioni in parte simili a quelle tentate dal Comes, consigliato io pure dal botanico Baccarini, allora mio collega a Catania; ma non osai indurne alcuna conclusione definitiva, soprattutto perchè notoriamente passa sempre nelle feccie molto alimento intatto o quasi (in generale gli animali assumono una quantità di cibo molto maggiore di quella che possono utilizzare); e se questo, prima di venire eliminato, è usufruito da parassiti, non ne viene di conseguenza che l'ospite non possa vivere senza il loro aiuto. Per dimostrare questa tesi, occorrono lunghe e difficili ricerche fisiologiche, non solo sui Protozoi, ma anche su tutto l'intestino dei Termitidi, quali non ho fatto io, ma neppur Comes e Buscalioni, se si accettuano alcuni parziali tentativi (¹). Per mio conto, in questi ultimi anni ho cercato di decidere la questione in altro modo: se si tengono ad una temperatura di circa 35° C. scatolette contenenti legno pieno di *Calotermes*, i Protozoi

(¹) A questo scopo s'impone non solo la ricerca microchimica dei varii gruppi di sostanze organiche presumibilmente esistenti nell'intestino dei Termiti e nel corpo dei Protozoi, ma anche esperimenti di somministrazione di sostanze varie, a composizione determinata, per seguirne la sorte nell'intestino dei Termiti e nel corpo dei Protozoi.

Io avevo iniziato quest'ordine di ricerche, ma non ebbi nè tempo nè modo d'insistervi. Somministravo ai Termiti (specialmente al *Calotermes* che si tiene facilmente vivo in provette) amido, paraffina, albuminoidi in polvere; o, per studiare e le funzioni intestinali e i processi escretorii, legno imbevuto di varie sostanze coloranti (ed altre sostanze chimiche varie).

Adoperai, tra l'altro, il carminato d'ammoniaca che non passa nell'interno del corpo, neanche nelle cellule pericardiali, probabilmente perchè arrestato dalla peritrofica (gl'individui mostrano l'intestino tutto colorato dal contenuto legnoso; soprattutto vivamente il ventricolo chilifico, poco l'intestino posteriore, dove, tuttavia, i protozoi mostrano grumi di carminato nel loro interno).

Nutrendo Termiti con legno imbevuto di Sudan III, si diffonde pel loro corpo una leggera tinta giallastra. Spiccano colorati vivacemente in rosso l'esofago e l'intestino posteriore, nell'ampolla cecale e nel retto. Restano incolori il ventricolo chilifico, i tubi malpighiani, il corpo adiposo. Usando legno con rosso neutro, il corpo del termite si colora vivamente. Il ventricolo chilifico appare pieno di gocce e granuli, quali rosa, quali rosso intenso; mentre un colore assai debolmente rossastro hanno i detriti legnosi dell'ampolla rettale; i malpighiani restano incolori. Il corpo adiposo assume un bel colore rosso; dissociando, si distinguono incolore le sferule rifrangenti grassose, e colorate, in rosso violaceo, massule di sferule fittamente aggruppate (inclusioni albuminoidi o concrezioni uratiche ?). Il bleu di metilene riesce particolarmente tossico; dopo tempo relativamente breve, i *Calotermes* muoiono, sovraccarichi di colore, specie nell'addome posteriore. Nei primi giorni la colorazione si localizza specialmente lungo il cuore; poi si diffonde in tutto il corpo, ma soprattutto colorati appaiono gli organi genitali e i setti divisorii degli anelli addominali, con particolari aggruppamenti segmentali ai lati del vaso dorsale (cellule pericardiche od organi fagocitarî?). Anche il tessuto adiposo è penetrato, in fittissimi granuli, dal colore.

Sempre, dopo un certo tempo, tanto più rapidamente quanto più la sostanza è tossica, i Protozoi, o almeno i grossi Protozoi, farciti di sostanza colorante, deperiscono e muoiono, mentre per un certo tempo ancora il Termite sembra prosperare (come, del resto, pel digiuno: soccombono i Protozoi, specie i grossi, assai prima che le Termiti). Secondo alcuni miei esperimenti, le condizioni di salute dell'ospite non sono così strettamente legate a quelle dei Protozoi che una variazione di quelle si ripercuota subito su queste. Facendo nidini con legno imbevuto abbondantemente di acido lattico, ho visto i Protozoi prosperare (così le grosse Ioenie come le piccole Cercomonadi, pieno il corpo di detriti legnosi), mentre i *Calotermes*, loro ospiti, erano evidentemente mal ridotti.

Una serie completa di ricerche, sistematicamente condotte, con sostanze chimiche varie facilmente reperibili nell'organismo per loro speciale colore o per caratteristiche reazioni chimiche loro o dei prodotti loro, sarebbe necessaria per risolvere definitivamente il problema della nutrizione dei Termiti e della parte che in essa prendono i Protozoi.

muoiono, talvolta tutti, e più spesso restano in vita soltanto le forme piccole; si hanno così delle colonie di *Calotermes* senza *Joenia* e *Mesojoenia* e talvolta con molti individui anche del tutto privi di Protozoi. Io le tengo in vita prospera da parecchi mesi; perciò ritengo che i *Calotermes* possano digerire il legno anche senza gli speciali Protozoi (*Joenia* e *Mesojoenia*) » (pag. 741, *93*).

Se le reazioni di Comes e Buscalioni sono lungi dal dare la dimostrazione sicura che i Protozoi dei Termiti siano necessarî ai loro ospiti, neanche le esperienze del Grassi sembrano costituire un argomento decisivo contro la teoria della simbiosi. « Bisogna tener calcolo », obietta Imms, « della possibilità che i Termiti tirino avanti colle sole materie fecali; dato anche che non è provato che lo sviluppo prosegua. Del resto io ho osservato che le Termiti in cattività frequentemente s'accontentano di una ben piccola quantità di cibo. Per queste due ragioni io credo ben possibile che per limitati periodi di vita le termiti prosperino in assenza di protozoi. A mio avviso, un esperimento di controllo dovrebbe farsi prendendo giovani larve di Termiti e allevandole in cattività, su legno perfettamente sterilizzato, isolate da individui più vecchi che contengono Protozoi ». « If it is possible to rear Termites to the adult stage under these conditions, I would be prepared to abandon my belief in the existence of symbiosis between the Protozoa and their host » (pag. 161, *118*).

A queste condizioni ho paura che sarebbe difficile indurre Imms a cambiare opinione, perchè l'esperimento di controllo ch'egli propone non pare realizzabile. È probabile che larve giovani di Termiti, molto giovani per essere ancora senza Protozoi, non possano riescire da sole a raggiungere lo sviluppo finale, e ciò indipendentemente dalla necessità o meno dei protozoi.

Concludendo: che i Protozoi delle Termiti sieno necessarî ai loro ospiti è difficile a ben dimostrare; però certo tutto concorre a far credere che veramente rapporti simbiotici leghino questi due esseri.

I) La presenza diffusa, forse generale, di Protozoi nelle specie di Termiti che si nutrono di legno. « Si può dire che i Flagellati vivono in tutte le *Calotermitidae* di Silvestri in cui furono ricercati e nei generi più primitivi (paleogeni) delle *Termitidae* di Silvestri, mentre non furono trovati in quelle appartenenti ai generi più elevati (neogeni). Nella famiglia più bassa (*Mastotermitidae* di Silvestri) non furono ancora cercati: molto probabilmente vi esisteranno [1]. Evidentemente i Flagellati si trovano dunque in molte forme che vivono dentro il legno, e di questo si cibano. In particolare non si trovano mai nelle forme (*Metatermitidae*) che vivono in nidi fatti in terra, o con detriti completamente masticati ed impastati, e si cibano di terra, funghi » (Grassi, 1917, pag. 8, *94*) [2].

[1] Si: io li ho trovati in alati, soldati e larve.

[2] « Importa mettere in rilievo che la classificazione delle *Termitidae* ospitanti Flagellati parassiti si potrebbe fare, almeno fino a un certo punto, in base alle varie forme di questi. Così le *Calonymphidae* sono caratteristiche del genere *Calotermes* e dei generi ad esso affini (*Neo-*, *Glipto-*, *Cryptotermes*), da altri anzi giudicati sottogeneri del genere *Calotermes*. Le *Pseudotriconymphae* si trovano nei *Coptotermes* e nei *Schedorhinotermes*. Anche dallo studio dei Flagellati parassiti dei *Porotermes* risulta che questo genere è piuttosto lontano dai *Calotermes* e affine anche ai *Reticulitermes*. Il prof. Silvestri mi ha portato.... un ramo contenente Termiti vivi, dal suo viaggio in Eri-

II) La presenza costante di Protozoi nelle caste di individui che si nutrono di legno.

Questa correlazione tra dieta legnosa e presenza di Protozoi intestinali è così netta che Portier vede in essa una delle più belle prove della sua teoria dei simbionti (tutte le volte che un animale presenta adattamento a una nutrizione sprovvista di simbionti, si trova che un « trasformatore » viene a intercalarsi tra l'animale e la nutrizione). « Nous trouvons donc ici réalisée dans la nature une expérience cruciale; nourriture ligneuse s'accompagnant d'un developpement intense, dans l'intestin postérieur, de microorganismes associés; nourriture animale amenant la disparition subite et complète de cette adaptation et le retour aux functions normales du tube digestif » (pag. 199, *186*).

III) Il fatto che negli individui a nutrizione legnosa il centro dell'attività digestiva intestinale non è più il ventricolo chilifico, ma l'intestino posteriore in rapporto all'ampolla cecale. Io non ho visto mai segni di notevole attività secretoria nel ventricolo di individui a dieta legnosa, mentre processi attivissimi di secrezione ho sorpresi nel ventricolo di reali neotenici, a dieta salivare [1].

---

trea. Senza averli studiati, giudicando dall'aspetto, egli riteneva che si trattasse di uno dei generi già noti di *Calotermitidae*; dallo studio dei parassiti io conclusi che dovevamo essere invece davanti ad un genere nuovo: e difatti, quando il Silvestri esaminò questi Termiti, trovò necessario di fondare il genere nuovo, *Epicalotermes*. [Quel Calotermitino del Brasile, che io sopra ho lasciato indeterminato, anche giudicando dai Flagellati parassiti, deve essere un *Cryptotermes*. Secondo v. Buttel-Reepen (1914), quando i Protozoi mancano in una specie di un genere, non si trovano neanche nelle altre specie dello stesso genere, ma ciò vale soltanto per i Flagellati: io ho infatti trovato un ciliato in una specie del gen. *Termes* (il *bellicosus*) che ne dovrebbe esser privo]. Holmgren ritiene che le forme presentanti infusorii siano tipiche della regione orientale, mentre quasi tutte quelle che non li ospitano vi sarebbero immigrate. Mi sembra difficile sostenere questa opinione » (Grassi, *94*).

Sono anche interessanti, a questo proposito, le recenti (1921) osservazioni di Cutler sui protozoi di *Archotermopsis*: « In all the protozoa examined from the gut of *Archotermopsis wroughtoni* the nuclear division is very different from that found in related species. Further, in Ditrichomonas termitis the nuclear division and the locomotor complex is of a more primitive nature than that described for other Tricomonads; a statement probably true for *Ioenopsis polytrica* and *Pseudotryconympha pristina*. It appears that the protozoa to which *Archotermopsis* wroughtoni is host are in general more primitive than those inhabiting other species of termites. Imms describes A. wr. as 'one of the most primitive of living termites'. The association, therefore, of primitive parasites or 'guests', whichever the case may be, with a primitive host is extremely interesting, and is suggestive that the two groups of organisms have remained associated together for a long period, neither hawing developed into more complex species, as has occurred with other termites and their associated protozoa » (*52*).

[1] E così anche nei reali veri, come vide Feytaud, « le differenze anatomiche debbono essere in rapporto col cangiamento di regime. La struttura pseudostratificata a rinnovamento cellulare lento si osserva nel ventricolo chilifico delle forme che si nutrono di sostanze legnose e che hanno Protozoi nell'intestino posteriore dilatato. La digestione, in questi individui, si produce essenzialmente nell'ampolla cecale e con l'aiuto dei Protozoi, mentre il loro ventricolo chilifico non presenta se non una secrezione ristretta e non sembra che abbia importanza nel fenomeno. La struttura a ceste con rinnovamento cellulare attivissimo si trova invece negli individui (re e regine) che non mangiano legno, che son nutriti esclusivamente colla saliva degli operai e che debbono utilizzare la secrezione del ventricolo per digerire. In questi individui è il ventricolo chilifico che sembra avere la massima importanza, mentre l'intestino posteriore, vuoto di Protozoi, pare ridotto a un semplice canale d'evacuazione » (pag. 571, *69*).

D'altronde il materiale legnoso passa così rapidamente nel ventricolo (che non traversa nemmeno tutto, giacchè la valvola esofagea si spinge per lungo tratto nella cavità dell'intestino medio) che non pare possa efficacemente subire l'azione di eventuali secreti. Come nota anche l'Imms: « A significant fact is that the ligneous particles are not subjected to the action of the secretions of the mid-gut. Their passage through the latter appears to be very rapid, and on no occasion have I found woods matter in that region of the digestive system. The mid-gut frequently contains a thich fluid material which also extends up into the coeca. This fluid appears to be regurgitated from the hind gut, as I believe is the product of the breaking down and *emulsification* of the wood by the action of the Protozoa. The readmission of solid particles into the mid-gut is effectually precluded by means of the pyloric valve » (pag. 159, *118*).

Anch'io sovente, dall'esame istologico di individui in piena digestione del materiale legnoso, ho riportata questa impressione: possibilità di assorbimento, da parte del ventricolo, di materiale digerito nell'ampolla cecale.

Ma soprattutto hanno attirata la mia attenzione, nell'osservare il contenuto dell'ampolla cecale di giovane reale di *lucifugus*, in sezione dell'addome, dei grumetti vivamente tinti dall'ematossilina e delle sferule costituite da un aggregato di sferettine, come piccole morule. Studiando a più forte ingrandimento, non ho potuto risolvere i grumi violetti in immagini ben definite (ne ho riportata l'impressione come di prodotti digeriti), ma ho capito che quei corpicciuoli dall'aspetto di morule erano Protozoi farciti di vacuole digestive. La fig. 23 ne rappresenta alcuni.

A e *B* sono evidentemente due individui al principio della digestione; specie *A* nel quale compaiono solo due vacuole digestive (*v d*) e due frammentini legnosi (*l*).

Sembra trattarsi d'una *Dinenympha*, e a questo genere sembra appartenere anche il B che presenta corpo più irregolare per sviluppo di parecchie vacuole. In *A* e in *B* è nettamente riconoscibile, spostato a un polo, il nucleo (*n*) con grossi fitti granuli intensamente cromatici. *C* rappresenta un individuo in piena digestione, col corpo pieno di vacuole digestive, contenenti ciascuna un detrito violaceo, certo sostanza legnosa in digestione, e qualche frammento, di aspetto ancora evidentemente legnoso. Il nucleo è nettamente distinguibile a un polo della cellula. Sembra troppo grosso quest'individuo per potersi considerare una *Dinenympha* passata a forma sferoidale per lo sviluppo di numerose vacuole nel suo corpo; potrebbe essere una *Pirsonympha* (*Spirotrichonympha*, secondo l'ultima classificazione). *D* ed *E* sono due individui a forma più o meno sferica, pieni di vacuole digestive (*D* presenta anche una grossa bolla basofila d'aspetto omogeneo, come vacuola colmata dal materiale digerito), riconoscibili ancora per la presenza del nucleo, spinto da un lato, alla periferia. *F* è un gruppo di tre corpi a morula, dove più non è evidente un nucleo, e che si stenterebbe a riconoscere per protozoi, prima d'aver osservati gli stadii già descritti (il più grosso potrebbe derivare da una *Pyrsonympha*; i due minori da due *Dinenympha*).

Sicchè pare che, coll'assunzione di molto abbondante alimento legnoso e conseguente moltiplicarsi di vacuole digestive, il protozoo si sformi, passando a una figura sferoidale, cistica. È ancora possibile riconoscerlo quando si vede da un lato, spinto alla periferia, il nucleo. Ma altre volte non c'è evidente nucleo in questi corpi sferici, vere

cisti di vacuole, che si addossano in gruppi. Non posso dire, per ora, se subiscano ulteriori trasformazioni e se, per esempio, da essi si originino i grumi basofili, come tendo a credere.

Questa non è se non un'osservazione preliminare; ma io ne ho riportato l'impressione che *una parte dei protozoi, nel colmo della digestione, cada in preda dei succhi digestivi dell'ospite* (come, quasi direi, per dare una lontana idea, cadono in preda

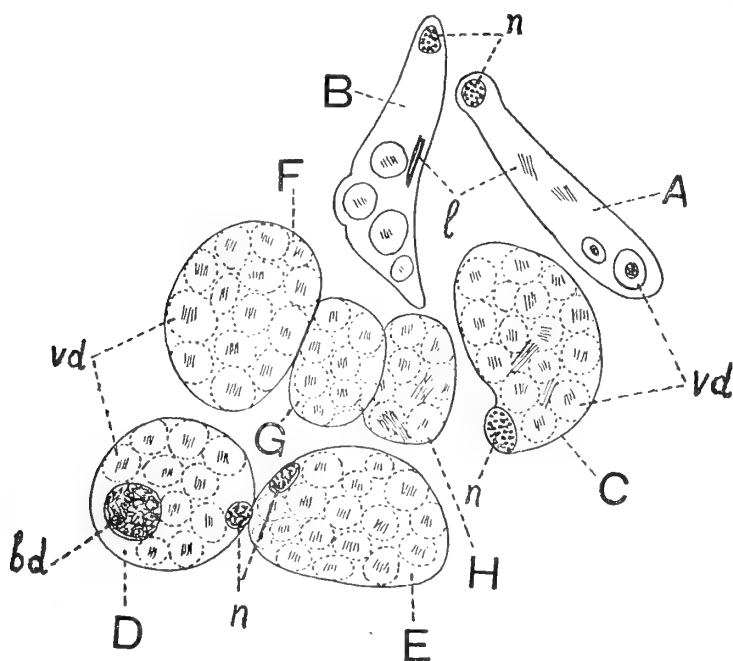



Fig. 23.

Gruppo di Protozoi nell'ampolla cecale di giovane re vero di *R. lucifugus*, nel periodo di attiva digestione. Da sezione dell'addome del re (un po' schematico). Oc. 8 C., ob. $^1/_{15}$ J. O.

di fagociti, o degli umori circolanti, le cellule migranti del sangue poi che si sono rimpinzate ben bene di materiali di rifiuto). Come e perchè, è difficile immaginarlo. Potrebbe supporsi, per affievolimento del potere vitale di resistenza dei Protozoi, quando, nell'ampolla cecale, e nel loro stesso corpo, la concentrazione dei prodotti intermedii della digestione legnosa (aldeidi ?) sorpassa un certo limite; o per l'intervento di particolari enzimi proteolitici, in una seconda fase della digestione; o, che è più probabile, e per l'uno e per l'altro.

Torna opportuno richiamare, a questo proposito, le osservazioni del Grassi (1911): « Ricordo che, come abbiamo dimostrato da tanti anni, i Termitidi amano molto di nutrirsi con la feccia dei loro compagni, che raccolgono direttamente dall'ano, provocandone artificialmente l'uscita. Prima di arrivare all'intestino posteriore del *Calotermes*, gran parte del corpo (quella dietro alla zona così detta cromidiale, contenente l'alimento in via di digestione) va perduta tanto nella *Joenia* quanto nella *Mesojoenia*. Un fenomeno simile

verificasi quando il Calotermite, appressandosi alla muta, cessa di nutrirsi; avvengono allora riduzioni anche nella parte anteriore del corpo (così nelle foglioline del collare, che possono perfino scomparire ecc.). Anche queste forme, evidentemente subenti gli effetti del digiuno, devono poter reintegrarsi, se ingoiate, prima che l'alterazione abbia raggiunto certi limiti, da qualche individuo della colonia » (pag. 739, *93*).

A me pare che queste del Grassi avvalorino singolarmente le mie osservazioni predette e le completino nel senso che, *durante la digestione*, *anche senza soccombere*, *il protozoo può abbandonare gran parte del suo corpo all'ospite*, salvo a reintegrarsi passando in altro individuo per la provvidenziale abitudine delle Termiti di mangiarsi scambievolmente la feccia (¹).

È anche da notare che, nell'ampolla cecale, i protozoi non stanno uniformemente distribuiti. In genere, in reali di *lucifugus* ho trovato, nella porzione iniziale, più stretta, dell'ampolla, prevalentemente Dineninfe che stanno attaccate, come feltro vivente, alla parete ; poi vengono anche i piccoli Protozoi e, più numerose verso il fondo dell'ampolla cecale, le Triconinfe. È possibile che anche l'attività fisiologica dei varii protozoi sia diversa. Potrebbe essere che alcune forme sieno semplicemente coprozoiche, altre veramente parassite (magari in certi stadii soltanto: per esempio, nello stadio di vita fissa alle pareti dell'intestino), mentre la maggior parte sono simbiontiche.

Certo è che, meno pochissimi, l'*Holomastigotes* ad es., tutti i Flagellati delle Termiti assumono legno. Ora, se lo assumono, già è *a priori* ammissibile che lo digeriscano; il che del resto, anche senza reazioni chimiche, risulta senz'altro dimostrato dall'osservazione microscopica dei Protozoi in digestione: il contenuto delle vacuole digestive è dato, senza ombra di dubbio, da frammenti di legno alterati.

Se poi l'intestino delle Termiti, colle sue secrezioni, sia capace anch'esso di digerire il legno per conto suo, è discutibile.

Ma a me non è mai sembrato questo il punto più problematico. Io mi sono sempre domandato sopratutto donde traggano le Termiti il materiale proteico (²).

(¹) « I Calotermiti preferiscono di gran lunga mangiar la feccia all'atto stesso della eliminazione, il che probabilmente è in rapporto colla circostanza che la feccia in questo momento è più umida, come si può di leggieri rilevare (di regola i Calotermiti non bevono) » (pag. 93, *92*). La ragione immediata di questa preferenza sarà appunto l'umidità che rende loro più gustosa la feccia; ma il vantaggio reale è forse quello di rinnovare internamente la provvista di Protozoi nell'ampolla cecale.

A questo proposito ricordo che l'alato, abbandonando la vecchia colonia per andarne a fondare una nuova, porta con sè una provvista di Protozoi. « Per quanto ricordo, i Termitidi, dopo la muta, non presentano mai alcun protozoo, eccezion fatta dell'ultima conducente all'insetto perfetto, nel quale passa sempre una quantità maggiore o minore dei varî ospiti (s'intende, più o meno ridotti). La cuticola dell'intestino posteriore si elimina in questo caso qualche tempo dopo la muta, cioè dopo che l'alato è diventato nero (ciò abbiamo osservato nel *Termes lucifugus*). Questa cuticula, prima di essere eliminata, presenta delle interruzioni che permettono il passaggio dei protozoi: molti però di questi muoiono e vengono eliminati con la cuticola » (pag. 789, *93*).

Tale disposizione si direbbe finale ; certo ci conferma nell'idea che rapporti simbiotici corrano tra i Protozoi e i loro ospiti.

(²) E trovo proprio strano che a Comes e Buscalioni sia sembrato così naturale che le Termiti pervengano alle sostanze albuminoidi, partendo dal glicogeno e dagli zuccheri, « per quel più com-

Perchè nel legno le sostanze proteiche debbono esser contenute in scarsissima quantità, direi quasi allo stato di impurità, essendo che i costituenti principali del legno (vasi, cellule legnose, tessuto midollare) non contengono protoplasma, sostanza azotata, ma sono ridotti alla parete formata essenzialmente di cellulosa lignificata.

Difatti avendo prelevato da un vecchio tronco di tiglio tutto invaso da *Calotermes*, campioni di legno e degli escrementi (granulari, più o meno secchi, estratti dalle gallerie, vecchie e nuove, e accuratamente isolati), l'analisi, gentilmente eseguitami dal prof. De Dominicis col metodo di Kieldal, ha dato le percentuali di azoto: 0,182-0,189 % per il legno; 0,260-0,294 % per gli escrementi. Questo saggio conferma l'esiguità del contenuto in sostanze proteiche del cibo legnoso delle Termiti e mostra che nelle feci l'N è contenuto in proporzioni d'assai superiori. Deve essere molto attiva la assimilazione, il consumo degli idrocarbonati per produrre un tale aumento percentuale dell'N nelle *egesta*. Questo aumento appare molto notevole specialmente se si pensa che negli individui giovani una parte dell'N ingesto è utilizzata nella costruzione e accrescimento dei tessuti e in tutti una gran parte dell'N catabolico è trattenuta nell'organismo in concrezioni uratiche nel tessuto adiposo; ma non ci può autorizzare, così da solo, a sospettare altra fonte d'introiti d'N, oltre quella del legno ingesto. (Bisognerebbe fare un esatto bilancio e solo quando si trovasse l'N delle *egesta* superiore a quello delle *ingesta* si potrebbe arrivare ad ammettere una produzione d'N nell'intestino dei Termiti).

Secondo l'osservazione mia succitata, che dimostrerebbe la previsione teorica del Bugnion, il materiale proteico deriverebbe alle Termiti dal corpo dei Flagellati. E ai Flagellati? Solo dal legno?

Di questo problema non si è preoccupato affatto Oshima (1919) nelle sue, del resto molto interessanti, ricerche sul principale alimento del *Coptotermes formosanus*.

Oshima ha fatto analisi comparative di un pezzo di legno di canfora (*Cinnamomum camphora*) e di un nido di *Coptotermes* costituito dello stesso legno.

	Acqua	Ceneri	Estratto aquoso	Pentosani	Cellulosa	Non cellulosa
Legno di canfora	11,51	1,29	4,53	13,92	48,35	20,40
Nido	11,39	17,86	4,83	6,02	12,73	47,17
Nido (calcolato facendo astrazione dalle ceneri)	13,87	0,00	5,88	7,33	15,50	57,42

« Evidentemente », osserva Oshima, « la principale differenza tra la composizione del legno di canfora e quella del nido si trova nella percentuale di cellulosa. Non essendovi diminuzione della non cellulosa, se ne deve concludere che, quando il legno di canfora è passato pel tubo alimentare, la cellulosa è stata presa come alimento e la non cellu-

plicato meccanismo fisiologico che si riscontra nei Metazoi». A me sembra anzi che, se ciò è possibile a qualche essere, lo è appunto a certe forme di Protozoi o, meglio, di Protofiti. Ricordiamo, a questo proposito, che non c'è nessuna ragione di escludere un'importanza fisiologica dei batterî dell'ampolla cecale, la presenza dei quali sembra generale nelle Termiti. « In tutte le forme senza Protozoi (come *Termes*, *Odontotermes*, *Microtermes*, *Eutermes*, *Capritermes* ecc.) si incontrano, come del resto anche nelle forme contenenti i flagellati, abbondanti Schizomiceti » (pag. 8, *94*).

losa, cioè la lignina, prodotto di decomposizione della ligno-cellulosa per attività specifica del tubo digerente, viene scaricata dall'intestino e utilizzata per costruire il nido » (*168*).

Che il principale alimento del *Coptotermes* sia la cellulosa, è confermato dal fatto che, nutrendo il *Coptotermes* di ovatta, che è cellulosa pura, esso si mantiene più vivace di quando gli si dà come alimento il legno tenero. Del resto è noto che il *R. flavipes* negli Stati Uniti attacca, producendo gravi danni, libri, cartoni, stoffe ecc. (Snyder *198* e *199*). Istituendo nidini col metodo di Oshima [1], ho verificato che il *lucifugus* scava gallerie nell'ovatta e la mangia, mantenendosi in prospere condizioni.

Questo è interessante, perchè il *R. lucifugus* non è facile da allevare, come il *Calotermes*, in tubetti di vetro. Grassi non riuscì mai a tener vivi i *Termes lucifugus* in recipienti molto piccoli. « Certo è che, dentro frammenti di legno anche non piccoli, i *Termes* in un tempo breve muoiono tutti, dopo un periodo di digiuno più o meno assoluto. Forse in conseguenza di questo digiuno dei loro ospiti, le Triconinfe si presentano presto senza legno, quando le altre forme ne contengono ancora una piccola quantità : perciò quelle morrebbero di fame, prima di queste. Ma sull'argomento occorrono ulteriori osservazioni » (pag. 741, *93*).

Io sono riuscito più volte a mantenere prospere coloniole di *lucifugus* in minuscoli nidini Janet (ottenendone anche regine di sostituzione) e anche in tubetti di vetro, per più mesi. Ma necessita una sorveglianza assidua per mantenere le opportune condizioni di umidità. Col metodo di Oshima la cosa diviene più facile.

Potranno però, non solo mantenersi in vita, ma anche andare avanti nello sviluppo nutrendosi di sola cellulosa ? E i Protozoi ?

È quello che mi propongo di vedere.

[1] Il fondo di un tubo da saggio, di 16 cm. di lunghezza per 2 cm. di diametro, è traversato da un foro capillare e viene riempito di ovatta. Sopra si mette uno strato d'argilla per metà altezza del tubo, che servirà di dimora alle termiti. Nello spazio libero si mettono, come nutrimento, pezzetti di legno tenero o di ovatta. Per procurare alle termiti l'umidità necessaria a mantenerli in buone condizioni, si mette l'estremità del tubo nell'acqua, così che per il foro capillare l'ovatta s'imbeva di liquido. Si tiene il tubo, ben turato, allo scuro.

Però, se non si usano speciali precauzioni, dopo un certo tempo si sviluppano muffe ed altri microrganismi, l'intervento dei quali certo modifica le condizioni del substrato cellulosico.

Ma, a pensarci bene, questa possibilità di modificazione dell'ambiente nutritivo, per intervento di agenti biologici, esiste anche per le condizioni naturali di vita delle Termiti nel materiale legnoso.

Non è inverosimile, per es., pensare che gli escrementi, emessi e accumulati nelle gallerie, possano arricchirsi di N per azione di microrganismi, che, diffusi nel terreno, trasportati dall'acqua, potrebbero trovare nel materiale fecale un ottimo terreno di cultura (un tale arricchimento contribuirebbe a spiegare il grande aumento della percentuale di N nelle fecci rispetto alla sostanza legnosa e a chiarire donde derivano alle Termiti i materiali proteici).

La nutrizione salivare.

La presence du mysterieux dans un ordre de faits est un présage certain de nouvelles découverts réservées pour l'avenir.

MARCHAL.

Confermato, in modo assoluto, che la differenziazione della casta neotenica avviene nel corso dello sviluppo per cangiamento nella nutrizione, bisognerà cercar di precisare.

Secondo le osservazioni del Grassi, il nutrimento speciale che viene somministrato dagli operai, o da chi ne fa le veci, ai neonati e alle larve di individui neotenici, è la saliva. Questa osservazione è in accordo con quanto si sa circa la nutrizione delle api (pappa reale) e delle formiche.

Ma « saliva » è una parola ; in fondo non ha torto Herbst quando dice: Si fa della saliva l'agente della differenziazione castale; ma tutto quello che sappiamo intorno alla saliva è che « è un liquido incoloro, spiccatamente alcalino e non contiene alcun elemento rilevabile al microscopio » (*103*).

È un po' troppo poco, in verità.

Che cos'è fisiologicamente, se non chimicamente, la saliva?

È un po' strano che da tanti anni si vada parlando, e non solo per le termiti ma per tutti gli insetti sociali, di saliva come agente della differenziazione castale, per lo meno degli individui riproduttori, senza cercare di precisare la sua natura fisiologica.

Gli è che precisare in questo campo diviene estremamente difficile. E certo questa indeterminatezza di concetti, – così che la saliva pare qualche cosa di misterioso, che opera miracoli biologici – ha molto favorito la corrente di scetticismo che si è andata sviluppando verso la teoria classica. I nuovi studiosi del problema della differenziazione castale applicano entusiasticamente i concetti, che ora vanno per la maggiore, dell'eredità mendeliana e delle mutazioni ; e dicono che, per i nostri tempi prosaici, in cui si cerca il fatto biologico nudo e crudo, hanno troppo sapore poetico le teorie fantastiche dei vecchi scrittori [1].

[1] In suo recente lavoro Snyder insiste: « In these prosaic days of biological facts, much of the mystery of the complex social system of the ants and termites which led to admiration by man has had to 'go by the board'. Many fantastic teories have collapsed... also the whole subject of the 'manufacture' of reproductive forms throngh feeding by the workers, so dear to students of termite biology of the eighteenth and nineteenth centuries » (pag. 123, *200*).

Le ricerche di Bugnion e Thompson hanno suscitata una larga eco nel mondo scientifico.

Emery fin dal 1894 aveva sostenuto che il polimorfismo delle ♀, operai e soldati delle Formiche dipende da fattori di nutrizione, fondandosi sui fatti conosciuti con certezza per le api e sulle esperienze del Grassi. Ma di fronte alle ricerche di Bugnion e Thompson, pur riconoscendo che « la dieta xilofaga, micofaga, coprofaga, ptialofaga e il parassitismo dei Triconinfidi ed altri Pro-

« *La saliva*, dice il Grassi, *esercita una mirabile influenza sugli individui in via di diventare insetti perfetti*; permette, *cioè, che si trasformino in individui reali di sostituzione o di complemento. Si tratta, in sostanza, di un curiosissimo fenomeno di neotenia* » (pag. 101).

Va bene: ma, come, per quale meccanismo fisiologico agisce la saliva?

Certo il Grassi dovette farsi questa domanda e pensò forse, dapprima, che la saliva agisca indirettamente provocando la scomparsa, dall'intestino, dei Protozoi (che ostacolano, distendendo l'ampolla cecale, lo sviluppo delle gonadi). Ma, sperimentando, constatò che questa scomparsa non basta a far diventare l'individuo neotenico.

Da questa constatazione scaturisce logicamente la conclusione che la saliva agisce direttamente: esercitando il suo potere « sugli organi genitali », come dice il Grassi, o meglio, mi pare, sul metabolismo dell'individuo.

Direttamente; ma come? Agisce essenzialmente per sue qualità nutritive o per particolari proprietà enzimatiche od ormoniche?

---

tozoi, esercitano senza dubbio una grande influenza sull'evoluzione larvale delle Termiti di tutte le caste, come provano le esperienze di Grassi e Sandias che meriterebbero di essere riprese sotto un nuovo punto di vista », crede dover « concludere che le Termiti presentino un polimorfismo congenito (predeterminato), almeno in parte, mentre che la Vespa e l'Ape hanno un polimorfismo acquisito dipendente dalle condizioni della loro ontogenesi larvale (pag. 737, *61*). E nella nuova edizione del suo trattato di Zoologia lascia annotare da Ghigi: « Recenti ed accuratissime osservazioni del Bugnion e della Thompson hanno tuttavia dimostrato un dimorfismo delle uova di certe specie di Termiti, giacchè l'uovo destinato a produrre p. es. un soldato, è differente da quello che diverrà un operaio o un sessuato » (pag. 157, *62*).

Il mirmeologo M. Forel che aveva combattuto fin dal 1894 le idee epigeniste di Emery, accoglie con soddisfazione la « scoperta » di Bugnion e nel suo ultimo libro (Le mond social des Fourmis, Genève, 1921) riafferma che « nelle formiche il polimorfismo parte dall'uovo ». Bouvier, sembrandogli difficile che le uova dei soldati nasicorni delle Termiti (e di Melipone) differiscano profondamente da quelle di forme vicine, nel senso di essere predeterminate mentre quelle no, cerca di conciliare le cose ammettendo, per tutti gli insetti sociali, che le uova siano più o meno blastogenetiche, cioè capaci di dare individui di una sorta determinata, ma che questa potenza raramente sia tanto grande da resistere agli effetti d'una alimentazione ulteriore (*20 b*).

Feytaud nel suo ultimo studio sul *lucifugus*, graziosa illustrazione popolare dei costumi sociali del Termite, sembra divenuto molto dubbioso anche lui circa l'agente della differenziazione anche dei neotenici: « Je ne discuterai point les *théories imaginées* pour expliquer l'élection et la mise au point de ces nouveaux venus, qui vont tenir le rôle des royaux défunts. La crise déterminante sérait le mode d'alimentation » (*72*).

Mac Bride, discutendo sul metodo dell'evoluzione (1920) dichiara che lo convincono poco le affermazioni predeterministe degli A. americani, in diretta contradizione non solo con le osservazioni del Grassi, ma anche con quelle di tutti gli studiosi delle api, unanimi nel considerare lo sviluppo come dipendente dal nutrimento (*144*).

Secondo Morstatt, invece, (1922), i lavori di Thompson e Snyder iniziano un'era nuova nello studio delle Termiti, sostituendo alle vecchie costruzioni fantastiche la ricerca precisa e obbiettiva: « Es hat den Anschein, das für die Termitenbiologie die Zeit gekommen ist, wo man von der mehr spekulativen Ausnutzung einzelner Tatsachen abgeht und sich exakt lösbaren Fragen zuwendet. Insbesondere sind es amerikanische Arbeiten, die unsere Kenntnis von der ständischen Gliederung der Termiten geklärt haben und dafür alte, auf Kombinationen bezuhende Vorstellungen beseitigen. Solche Forschungen haben um so mehr Bedeutung, als gerade dieses Gebiet der Biologie früher meist phantastische Darstellungen gefunden hat » (*163*).

Purtroppo non abbiamo dati di fatto che ci possano servire come punto di partenza o di appoggio per scoprire, o almeno intuire, una soluzione del problema.

Delle ghiandole salivari nelle Termiti non sappiamo gran che. Secondo Grassi, « le ghiandole salivari presentansi molto pronunziate in qualunque stadio di sviluppo ed in qualunque casta » (pag. 28); secondo Holmgren, « sono molto più grosse negli operai che non nei soldati » (pag. 25, *114*), ciò che è naturale, dato l'ufficio trofico del secreto salivare degli operai; secondo Thompson, le ghiandole salivari sono molto più sviluppate nelle forme riproduttive che non nelle caste sterili. Bugnion informa che nelle regine mature le ghiandole salivari tendono ad atrofizzarsi; io, in grossa regina tropicale di *Termes*, le ho viste istolizzarsi, sostituite da tessuto adiposo reale [1].

[1] « Le ghiandole salivari (Labialdrusen) sono molto più grosse negli operai che non nei soldati. A questo riguardo è molto dimostrativo il caso del *Rhinothermes taurus*, nel quale gli otricoli ghiandolari sono numerosi negli operai, si riducono a 4 o 5 nei grandi soldati e mancano del tutto nei nasuti. Questo indica naturalmente che le ghiandole salivari negli operai sono ben più importanti che non nei soldati. « *Das Speicheldrüsensekret der Arbeiter wird offenbar als Futter für die Larven und die jungen Nymphen und Imagines verwendet.* Denn in dem Darmkanal dieser Individuen findet man öfterst Koagulate, welche mit den Speicheldrüsen koagulaten übereinstimmen ».

Se si osserva, su preparati ben colorati all'ematossilina ferrica e al rosso congo, il contenuto dei dôtti salivari, lo si vede risultare di due sorta di sferule, colorate le une in bleu, le altre in rossiccio chiaro. Un esame istologico delle ghiandole salivari le mostra costituite sullo stesso tipo delle ghiandole mandibolari, con la sola differenza che i condotti escretori delle singole ghiandole sboccano in un canale collettore.

Le ghiandole sono costituite da gruppi di corti tubuli ghiandolari, e ognuno di questi da una grossa cellula ghiandolare apicale e da alcune piccole cellule che compongono il canalicolo escretore. Così le cellule ghiandolari stanno in rapporto con cavità di secrezione. *In ciascun lobo ghiandolare stanno due sorta di cellule ghiandolari, che,* nei preparati all'ematossilina ferrica – rosso congo, *si colorano alcune in bleu intenso o in nero, altre, che assumono il rosso congo, in rossiccio.*

Le cellule bleu dànno un secreto bleu, le rossiccie rossiccio. Sicchè queste ghiandole sono ghiandole miste, ed anche il secreto — si capisce — è un miscuglio.

Col dire che nelle ghiandole salivari si trovano due sorta di cellule ghiandolari non voglio mica affermare che queste due sorta di cellule non si possano trasformare l'una nell'altra. Anzi, appare assai verosimile che le due suddette forme cellulari non rappresentino se non stadii diversi, più o meno avanzati, della stessa cellula ghiandolare » (pag. 25, *114*).

Bugnion ha scoperto un particolare adattamento delle ghiandole salivari in *Termes ceylonicus.* Anche il soldato di questa specie, come quello di *Coptotermes*, emette, quando viene attaccato, un liquido d'un bianco latteo, di natura vischiosa, destinato, pare, a invischiare i nemici. « Siccome il *Termes ceylonicus* non ha poro frontale, il lattice espulso deve necessariamente avere un'altra origine. La dissezione mostra che questo umore bianco proviene dalle ampolle salivari e solo dagli orifici dei due condotti. Lacerando sul porta–oggetti un soldato, ancor pieno di lattice, si vedono i sacchi salivari, di un bianco opaco, riempire essi soli la più gran parte dell'addome, mentre il tubo digestivo, ad eccezione del ciecc, è quasi trasparente. Quando per caso l'ampolla salivare si rompe durante la dissezione, un liquido cremoso bianco si spande sul portaoggetti e circonda i vari organi. L'opacità di questo liquido proviene da una miriade di granuli rifrangenti sospesi nella sua massa; le reazioni microchimiche mostrano che questi granuli sono in maggior parte di natura albuminoide. Gli operai dissecati mostrano una disposizione tutta diversa: certo, le ampolle salivari esistono, come in tutte le Termiti, ma la saliva è trasparente, piena di granuli. Una tale dissomiglianza tra la saliva del soldato e la saliva dell'operaio è verosimilmente in relazione con una differenza di funzione ». Nell'operaio la saliva serve da cemento, nel soldato da mezzo difensivo

Bisognerebbe studiare minutamente, in tutte le caste e in tutti gli stadii di sviluppo, le ghiandole salivari. Questa ricerca è la base necessaria per passare ad induzioni fisiologiche. Mi propongo di compierla io stesso, appena avrò tempo; ma voglio intanto additarla all'attenzione degli studiosi.

Dei processi digestivi delle Termiti conosciamo ben poco; e il problema della parte che rappresentano i Protozoi non è stato ancora, l'abbiamo visto, definitivamente risolto.

Del metabolismo generale nelle Termiti sappiamo quel poco che ho potuto mettere in rilievo io colle mie ricerche e che mi sembra abbia valore, oltre e più che per i risultati acquisiti, perchè apre la via allo studio fisiologico delle Termiti e, anzi, degli insetti sociali.

Una soluzione definitiva del nostro problema è dunque impossibile, allo stato attuale delle nostre conoscenze.

Tuttavia, ripetiamoci la domanda:

La saliva agisce essenzialmente per sue qualità nutritive o per particolari proprietà enzimatiche od ormoniche?

Ormoniche, dico. Perchè, pensiamoci bene, la saliva potrebbe considerarsi come una secrezione interna della colonia. Per capire molti fenomeni biologici degli insetti sociali è necessario paragonare la colonia a un organismo pluricellulare; così ha fatto Darwin per spiegare il modo d'agire della selezione naturale; così dobbiamo far tutti per capire il fatto della differenziazione morfologica e funzionale e farci un'idea dello sviluppo filogenetico. Come in un organismo pluricellulare esistono ghiandole che, colle loro secrezioni specifiche, regolano, determinano, armonizzano lo sviluppo degli organi, così, nella colonia dei Termiti, gli operai (o chi ne fa le veci), colla loro secrezione salivare, regolano, determinano la differenziazione delle caste e ne mantengono la proporzione.

Convengo che considerar la saliva un ormone è idea troppo vaga e nebulosa; ma nemmeno credo che possa considerarsi la nutrizione salivare (chiamiamola così, perchè non sappiamo precisamente che cosa sia; probabilmente è secrezione delle ghiandole salivari commista a vomito) come caratterizzata esclusivamente, o quasi, dalla sua sovrabbondanza di materiali nutritivi, rispetto all'alimentazione comune legnosa. Certo sovrabbondanza c'è e contribuisce a spiegare la celerità di sviluppo delle gonadi e l'accumulo di riserve adipose e l'ingrossamento rapido ed eccezionale dell'individuo nutrito. Ma io credo che, oltrechè quantitativa, la differenza sia anche qualitativa.

La neotenia dei Termiti non mi pare possa considerarsi come semplice effetto della celerità di sviluppo delle gonadi che raggiungono la maturità prima che possa costituirsi l'organismo volante. D'altronde, perchè una nutrizione più intensa non accelera armonicamente lo sviluppo di tutto l'organismo, ma solo degli organi genitali? [1].

---

come in *Eutermes*. « Questo liquido bianco, straordinariamente vischioso, impegola le zampe, le antenne, i pezzi boccali delle Formiche e di altri nemici, rendendoli insomma momentaneamente inoffensivi... La saliva bianca del soldato sostituisce in questa specie il lattice del *Coptotermes* » (pag. 384, *31*).

[1] Secondo Berlese, « quanto alla causa della neotenia »... « è da credersi che la misura del cibo e la sua natura, se più o meno ricca di sostanze nutrienti, influiscano assai sullo sviluppo, quanto ad epoca, degli organi e dei prodotti sessuali. Intendasi però sempre per la medesima specie. Vo-

Mi sembra che debba ammettersi un arresto di sviluppo per vera e propria inibizione dello sviluppo ulteriore ad insetto perfetto; considerando insomma la neotenia dei Termiti prodotto di due fattori associati e non proprio riducibili a conseguenza l'uno dell'altro: arresto di sviluppo dell'organismo volante e accelerazione di sviluppo degli organi genitali [1].

---

glio dire che in condizioni favorevoli di nutrizione gli individui si trovano eccitati ad una maturanza sessuale precoce, la quale, per la stessa specie, può essere allontanata fino a coincidere con lo sviluppo di buoni organi di volo, se le condizioni stesse divengono meno fortunate, oppure se le riserve di sostanza nutritiva, che si sono fatte durante il periodo larvale, vengono distratte in parte alla costruzione dell'organismo volante. È un conflitto fra quello che l'individuo richiede per sè a buona formazione dei suoi organi locomotori, secondo il tipo, e quello che domandano i sessuali in pro' della specie. Se la richiesta, dirò così, dipendente da necessità, è meno viva in un senso, si guadagna nell'altro; e viceversa. Allorchè per la migrazione (diffusione a distanza), per la ricerca dell'altro sesso, per quella del cibo e di ambiente opportuno alla prole, è necessità di buoni organi locomotori, allora ne scapita la rapidità di sviluppo dei sessuali, mentre se per le specie sedentarie o per le generazioni tali in una data specie, per la vicinanza dei due sessi o per la nessuna necessità di fecondazione (forme partenogenetiche), per la comodità del cibo a portata, non è indispensabile un poderoso apparecchio locomotore, l'organismo, da buon amministratore, ritira la spesa in quel senso ed è più generoso all'incremento degli organi e dei prodotti sessuali » (pag. 286.)

A me pare che questo potrà essere il *perchè* della neotenia, ma non è certo il *come*. Come fa l'organismo a ritirare la spesa nel senso dell'apparato locomotore e a devolvere generosamente i suoi fondi all'incremento dei genitali?

In tutti i fatti biologici c'è un *come* e un *perchè*. Il *perchè* è lo scopo al quale tende il fenomeno; il *come* è il meccanismo, per mezzo del quale lo scopo è raggiunto.

Molti cercano il *perchè* e non si curano del *come*; altri studiano il *come* e dicono che un *perchè* non esiste. Dice Bohn: « Plus on réfléchit sur les divers mécanismes au sein de l'être vivant, plus on s'aperçoit de la fragilité des arguments de ceux qui, dans un phénomène, cherchent avant tout le but visé. Suivant l'enchaînement fatal des actions et réactions chimiques, un caractère apparaît, un caractère disparaît; tantôt c'est utile, tantôt c'est nuisible, l'etre prospère ou périt; il n'y a pas de *but* à chercher » (p. 296, *19*).

Io credo che un *perchè* esista e che la conoscenza d'un fatto biologico sia soddisfacente solo quando conosciamo e il *come* e il *perchè*.

Certo la ricerca del *come* è indispensabile per la conoscenza delle *cause efficienti immediate*; ma queste non sono le sole e forse nemmeno le vere *cause direttrici*. La questione del *come* e del *perchè* si riconduce al problema della *funzione* e della *forma*.

[1] Per neotenia oggi si suole intendere una « maturanza precoce dei sessuali, che anticipi più o meno su quello di completa evoluzione degli altri organi e sistemi di organi, specialmente di quelli pertinenti alla locomozione » (pag. 284, vol. II, Berlese).

Ma in realtà la neotenia non implica anticipazione della maturità sessuale. Secondo Camerano che nel 1885 introdusse il termine di *neotenia* (**νεόν** = giovinezza, **τείνω** = prolungo), « il fenomeno della neotenia, inteso nel suo significato più generale, consiste nel perdurare di parte o tutti i caratteri giovanili o larvali ». (« Quando l'allungamento di uno dei periodi larvali è molto spinto, tanto anzi da concedere all'animale di riprodursi in questo stato, si ha un caso di neotenia totale. Se l'animale poi non giunge a riprodursi se non dopochè ha cambiato stadio, si ha allora una semplice neotenia parziale »).

Anzi « probabilmente anche il polimorfismo sociale è dovuto a fenomeni neotenici (individui neutri). In questo caso la neotenia si estende anche agli organi riproduttori ».

Camerano considera come neotenici gl'individui che si riproducono allo stato larvale, analoghi a quelli che si osservano negli Anfibi; e le ♀ larviformi di molte specie; e le specie attere di

Questa inibizione sarebbe prodotta (o condizionata, se si vuole) da una differenza qualitativa della nutrizione. Qualitativa nel senso che sono alterate le proporzioni dei principii alimentari organici, proteici, grassi e sostanze idrocarbonate, e più che altro, io credo, le proporzioni dei principii alimentari inorganici, dei sali [1].

---

molti Ortotteri e Rincoti. Osserva inoltre che come negli Anfibi, così « negli Insetti l'apparato riproduttore si sviluppa senza essere in correlazione colla forma esterna dell'animale e spesso entra in funzione prima che l'animale sia giunto all'ultimo stadio del suo sviluppo generale» (*37 b*).

[1] Anche Bishop, per le api, si domanda in che precisamente consista la differenza tra il nutrimento somministrato alla larva di regina e quello somministrato alla larva di operaia. « Si sa che la larva di regina viene nutrita, durante tutto il periodo nutritizio, della cosidetta *pappa reale*, miscuglio, parzialmente digerito, di grassi, carboidrati e proteine, in proporzione costante, preparato nell'intestino medio delle operaie giovani o api nutrici. Le larve di operaie vengono nutrite di questo materiale i primi tre giorni della loro vita, dopodichè viene aggiunta notevole quantità di polline non digerito e di miele. Ora rimane da sapere se questa differenza nell'effetto dei differenti nutrimenti sia dovuta semplicemente alla parziale digestione, o non piuttosto all'estrazione o modificazione di qualche costituente del polline indigerito o del miele, che, mangiato dalla larva di operaia senza prima subire modificazione, ritardi o modifichi il suo sviluppo.

« Considering the fact that pollen, the chief protein-containing constituent of the larval food, contain a high percentage of nuclein, it seems possible that some constituent of nucleic acid, such as purines, may be modified or extracted from the queen's food and left in the larval metabolism of the worker modify the development of the imago » (pag. 592, *14*).

A questo proposito mi sembra opportuno ricordare gli esperimenti del Mathews (1909) il quale (partendo dalla considerazione che, « mentre è stata sperimentata l'influenza di molti fattori esterni sullo sviluppo, poco si conosce circa l'influenza dei varii prodotti metabolici che si originano nell'organismo stesso. Ora è probabile che questi prodotti influenzino sia l'andamento, sia il carattere dello sviluppo ») intraprese una serie di esperienze sull'influenza di certi aminoacidi sullo sviluppo di Echinodermi (aggiungendo ad acqua di mare, contenente uova in sviluppo di *Arbacia*, varie quantità di cistina, leucina e tirosina). Mathews ottenne risultati interessanti, sopratutto colla cistina. In genere molte delle uova per parecchi giorni stanno senza formare il pluteo o lo formano irregolare. Orbene, l'effetto costante della cistina è di affrettare, per accelerazione graduale dello sviluppo, il processo di formazione del pluteo, e di farli formare, tutti o quasi, normali. Azione, dunque, benefica sullo sviluppo di *Arbacia* (mentre tossica per uova di Asteria).

« The conclusion is not of course justified that the abnormality is due to a deficiency of cystin possibly produced normally by intracellular digestion, altough such a possibility, is not in itself improbable ». L'azione della tirosina sullo sviluppo di *Arbacia* fu invece costantemente nociva; ritardò lo sviluppo e finì coll'uccidere le uova. Quanto alla leucina, impura, riuscirono interessantissimi gli effetti di una soluzione diluita che, senza uccider le uova, ne arresta lo sviluppo, sopratutto allo stadio di blastula. « The embryos were unable to eshape from the membranes; they remained without further development in these membranes but still alive, from 24 to 72 hours ». Rimesse in acqua di mare pura, vissero per parecchi giorni e si svilupparono in ogni sorta di fantastici embrioni. « These experiments show that the products of intracellular protein digestion may be very important in determining development » (*149*).

[Ora è da notare che, secondo recenti analisi dell'Aeppler (1922), tra i componenti azotati della pappa reale la cistina è contenuta « in unusually large amounts »].

Secondo Bishop, nelle api il nutrimento salivare eliminerebbe fattori inibitori dello sviluppo degli organi genitali, fattori che potrebbero consistere nell'eccesso di certe sostanze proteiche. Della stessa opinione sembra Pézard (1919) che, a proposito della castrazione alimentare di galli tenuti a regime carneo esclusivo, dice: « Il regime esclusivamente carneo determina un'intossicazione lenta dell'organismo, alla quale le ghiandole genitali sono particolarmente sensibili e in conseguenza della quale esse possono atrofizzarsi gradatamente o non svilupparsi. Avvengono allora *secondariamente*

Purtroppo io non posso appoggiare questa mia ipotesi su dati precisi di fatto. Posso soltanto ricordare che, colle mie ricerche, ho dimostrato caratteristici del tipo di nutrizione legnosa i prodotti catabolici urosferitici, e del tipo di nutrizione salivare i prodotti catabolici ptialurici. I primi, da un'analisi sommaria, risultano essere urati; e certo sono urati alcalini. La loro precisa determinazione chimica è un'altra delle questioni che mi propongo risolvere, appena ne avrò tempo. I prodotti ptialurici non ho saputo determinarli. Io sono convinto che si tratta di prodotti di escrezione azotata, e ho qualche ragione per crederli affini al gruppo della chitina.

Ho l'idea, ancora indeterminata, che tra i prodotti escretivi urosferitici e i ptialurici passi una differenza analoga, paragonabile, a quella che c'è tra i prodotti purinici (in sali alcalini o alcalo-terrosi) dell'orina di mammiferi erbivori, e i prodotti ammoniacali (trasformati per la più gran parte in urea) dell'urina dei mammiferi carnivori.

Ho fede che lo studio dell'economia degli alcali nelle caste delle Termiti (insetti perfetti e neotenici) metterebbe su una nuova via più feconda il problema della differenziazione castale negli insetti sociali ed altri problemi ancora nel mondo degli insetti. Nell'esprimere il proposito, che ho, di applicarmi io stesso a questo studio, appena ne avrò tempo e possibilità, lo segnalo intanto all'attenzione degli studiosi, sperando di invogliarli alla ricerca ([1]).

La via è aperta.

---

le ben note modificazioni consecutive alla castrazione..... (Sicchè non bisogna più attribuire all'influenza diretta del regime alimentare le variazioni di dimorfismo sessuale — sterilizzazione progressiva; perdita, per parte dei galli, dell'istinto battagliero; formazione, per parte delle galline, di sproni — presentate dai galli carnivori)...

Risultati analoghi sono stati ottenuti dallo Schepelmann per le oche e da Paul per i ratti; essi permettono di intravedere la generalizzazione dei fatti di castrazione alimentare... Questi risultati possono servire di base a una spiegazione della neutralizzazione delle api operaie o, meglio, della trasformazione inversa di una larva di operaia in regina virtualmente feconda » (*179*).

Ultimamente (1922) Drummond, Crowden e Hill, somministrando a sorci e a gatti diete fortemente proteiche [contenenti dall'80 al 90 % del peso secco in forma di proteine (caseinogeno)], hanno trovato che gli animali d'esperimento crescono, meno però del normale; mantengono un'eccellente salute (i sorci), ma non si riproducono. Gli organi e i tessuti sembrano normali, nè il rene rimane danneggiato dall'escrezione di molto grande quantità di prodotti azotati di rifiuto. Gli AA. esprimono l'ipotesi che la crescita subnormale e la sterilità sieno dovute a squilibrio tra le proteine e qualche altro componente della dieta normale (vitamine ?) (*57*).

([1]) P. es. alimentando Termiti con ovatta o meglio ancora con carta da filtro purissima, sì, dapprincipio verranno utilizzate le riserve minerali dell'organismo e fors'anche mobilizzati i sali delle concrezioni uriche, ma coll'andar del tempo dovranno manifestarsi gli effetti di una *carenza* di elementi minerali. forse anche con conseguenze morfogenetiche. Sarebbe interessantissimo, dal punto di vista della fisiologia del metabolismo, stabilire la durata di sopravvivenza ad alimentazione esclusivamente cellulosica (escludendo lo sviluppo di microrganismi, il cannibalismo e qualunque altra possibile sorgente di sostanze azotate e minerali) e la possibilità o meno in queste condizioni di uno sviluppo e le possibili variazioni isto-fisiologiche e morfologiche.

RIASSUNTO

DEL (PROGRAMMA TERZO)

Volendo riassumere quanto risulta dall'Appendice (programmatica) del mio lavoro:

I. *Il cervello e le ghiandole cefaliche*). Presentano uno sviluppo diverso nelle varie caste e nei varî stadii. Il loro studio esatto, biometrico, comparato, si manifesta interessantissimo per il problema della differenziazione castale. Le ghiandole cefaliche dei Termiti hanno, con tutta probabilità, a parte una eventuale funzione di secrezione esterna (ghiandola fontenellare), valore di ghiandole a secrezione interna che regolano l'influenza delle variazioni di stato fisiologico sulla struttura ereditaria, l'espressione morfologica degli adattamenti fisiologici.

II. *Le cellule nutrici degli spermi*). Nel testicolo dell'alato sciamante e del re di *Calotermes* intere cisti (di spermatogonî e spermatociti) o cellule isolate (giunte a varî stadî della loro evoluzione), degenerano: il nucleo diviene picnotico, la sostanza cromatica acidofila. In queste condizioni le cellule scendono dal testicolo traverso il deferente e s'accumulano, insieme cogli spermi, nelle vescicole seminali.

Là prosegue il processo di degenerazione che porta allo spappolamento di queste cellule in un liquido nutritizio, il liquido che riempie le vescicole seminali del re: il nucleo si frammenta e finisce collo scomparire; il corpo protoplasmatico si rigonfia, si vacuolizza (il nucleo, se ancora esiste, viene spinto alla periferia come in una cellula adiposa), e la sua struttura reticolare si dilata e si smaglia fino a dissolversi.

Nel *lucifugus* si verificano fenomeni analoghi: tratto distintivo interessante, la formazione di spermatofore.

Nei reali di sostituzione del *Calotermes* si trova, anche per le cellule nutrici degli spermi, una condizione di cose tutta simile a quella dei reali veri. Il contenuto della camera terminale del testicolo, derivato dallo svuotamento delle cisti prossimali dei testicoletti, scende man mano pei deferenti e si raccoglie nelle vescicole seminali; è costituito di spermi e di detriti cellulari, residuo della spermiogenesi, e di elementi cellulari degenerati in varie fasi dell'evoluzione germinale. Da questi elementi certamente deriva, in massima parte, il liquido poltiglioso che riempie la vescicola seminale (di cui l'epitelio ghiandolare può concorrere colla sua secrezione) e serve a mantenere, nutrendoli, la vitalità degli spermi.

Questo di cellule trofiche libere nelle vescicole spermatiche si presenta come un tratto caratteristico dei Termitidi, anche rispetto agli altri insetti sociali, in rapporto evidente col fatto della persistenza del maschio e della periodica copula (tratto biologico caratteristico della società dei Termitidi).

III. *I batteriociti del Mastotermes*). Nei lobuli del corpo adiposo di *Mastotermes*, larve, soldati e alati, spiccano, situate centralmente, libere dalla massa biancheggiante di urati, delle areole nucleate, farcite di innumerevoli, piccoli bastoncelli cromatici fittissimamente affastellati: cellule a batteroidi o meglio batteriociti (dato che, se i tentativi di cultura hanno approdato a poco, i caratteri morfologici e il comportamento bastano però a togliere ogni dubbio circa la natura di microrgani mi simbionti), tutti simili a quelli dei Blattidi.

Si direbbe un caso di simbiosi ontogeneticamente ereditaria, ereditato nella serie filogenetica.

IV. *I Protozoi dell'ampolla cecale*). Che i Protozoi dei Termiti siano necessarì ai loro ospiti è difficile a ben dimostrare; però tutto concorre a far credere che veramente rapporti simbiotici leghino questi due esseri: I) la presenza diffusa, forse generale, di Protozoi nelle specie di Termiti lignivore; II) la presenza costante di Protozoi nelle caste di individui che si nutrono di legno; III) il fatto che negli individui a nutrizione legnosa il centro dell'attività digestiva intestinale non è più il ventricolo chilifico, ma l'intestino posteriore, in rapporto all'ampolla cecale.

E non solo carboidrati, prodotti di digestione del legno, i Protozoi fornirebbero all'ospite. Dal loro corpo, secondo mie osservazioni preliminari, proverrebbe alle Termiti il materiale proteico (e ai Protozoi? solo dal legno?): pare che una parte dei Protozoi nel colmo della digestione cada in preda dei succhi digestivi dell'ospite; al quale, del resto, durante la digestione, il protozoo, anche senza soccombere, può abbandonare gran parte del suo corpo.

V. *La nutrizione salivare*). La neotenia dei Termiti va considerata come prodotto di due fattori associati, e non riducibili l'uno a conseguenza dell'altro: arresto di sviluppo dell'organismo volante e accelerazione di sviluppo degli organi genitali.

L'inibizione dello sviluppo ulteriore ad insetto perfetto dev'essere condizion ta da una differenza qualitativa della nutrizione, qualitativa nel senso che sono alterate le proporzioni dei principî alimentari organici, proteine, grassi e carboidrati, e, più che altro, io credo, le proporzioni dei principî alimentari inorganici, dei sali.

Soprattutto da questo mio « Programma III » emerge l'interesse speciale e l'importanza grandissima che, nel caso dei Termiti, avrebbe uno studio esteso e profondo delle basi isto-fisiologiche degli adattamenti biologici, di quella che a me piace chiamare « *la fisiologia de la biologia* ».

INDICE BIBLIOGRAFICO ([1])

PAG.

(*1*) AEPPLER C. W., *Tremendous growth force: composition of the contents of the larval cell of the Bee.* « Gleanings in Bee Culture », 50, pp. 151-153, 1922. 483

(*2*) BALBIANI, *Études bactériologiques sur les Arthropodes.* « C. R. Acad. Sc. Paris », tom. CIII, 1886 . 368

(*3*) BARTHEL C., *Contribution à la recherche des causes de la formation des bactéroïdes chez les bacteries des légumineuses.* « Ann. Inst. Pasteur », tom. XXXV, pp. 634-646, 1921. 466

(*4*) BÉNOIT J., *Sur l'existence de phénomènes sécrétoires dans le canal déférent.* « C. R. Soc. biol. », tom. LXXXIII, n°. 37, pp. 1640-1641, dec. 1920. 458

(*5*) BÉNOIT J., *Sur la signification fonctionelle des sécrétions épididymaire et déférentielle.* « C. R. Soc. Biol. », tom. LXXXIV, n. 18, pp. 951-952, 1921 458

(*6*) BÉNOIT J., *Sur le rôle du noyau dans la sécretion épididymaire.* « C. R. Soc. Biol. », tom. LXXXV, n°. 33, pp. 946-948, 1921 458

(*7*) BERLESE A., *Fenomeni che accompagnano la fecondazione in taluni insetti.* Memoria I, « Rivista di patologia vegetale », Firenze, vol. VI, pp. 353-368, tav. XII-XIV, 1898; Memoria II, ibid., vol. VII, pp. 1-18, tav. I-III, 1899. 455

(*8*) BERLESE A., *Circa il mesointestino di alcuni Aracnidi.* « Rivista di patologia veget. », ann. VII, nn. 5-8, Firenze, 1899 402

(*9*) BERLESE A., *Osservazioni su fenomeni che avvengono durante la ninfosi degli insetti metabolici.* « Riv. di patol. veg. », Firenze, anno VIII-X, 444 pp. con 14 tav. e 100 fig. nel testo, 1899-901. 377, 402-3

(*10*) BERLESE A., *Intorno alle metamorfosi degli insetti* « Redia », vol. IX, fasc. 2°, pp. 121-36, Firenze, 1913 364

(*11*) BERLESE A., *Gli insetti* (vol. I, 1909; vol. II, 1912); Soc. editrice libraria, Milano, 1909-12 ([2]) . *passim*

(*12*) BISHOP G. H., *Fertilisation in the honey-bee* (I, *The male sexual organs: their histological structure and physiological functioning*). « Journ. of experim. zoöl. », vol. 31, n. 2, 1920. 452

(*13*) BISHOP G. H., *Fertilisation in the honey-bee* (II, *Disposal of the sexual fluids in the organs of the female*). « The Journ. of experim. zoöl. », vol. 31, n. 2, 1920. 452

(*14*) BISHOP G. H., *Cell metabolism in the insect fat body* (I, *Cytological changes accompanying growth and histolysis of the fat-body of Apis mellifica.* « Journ. of Morphol. », vol. 36, n. 4, pp. 567-94 con 6 fig. e 3 tav., 1922 . . . . 405, 483

(*15*) BISHOP G. H., *Cell metabolism in the insect fat body* (II, *A functional Interpretation of the changes in structure in the fat-body Cells of the Honey Bee.* « Journ. of. Morphol. », vol. 37, n. 3, pp. 533-553, 6 fig. e 3 tav., 1923 405

(*16*) BLOCHMANN, *Ueber das Vorkommen von bacterienahnliken Gebilden in dem Geweben und Eiern verschiedener Insekten.* « Centralbl. f. Bakt. und Parasit. », tom. XI, p. 234, 1892 463

(*17*) BOBE-MOREAU, *Mémoire sur les Termites observés à Rochefort,* Saintes, 1843. 290

(*18*) BOFFINET, *Notice sur les Termites de la Charente-Inférieure.* « Actes. Soc. Linnéenne Bordeaux », tom. XIX, pp. 145-57, 1853 278

([1]) Non è una bibliografia completa dei Termiti [rimando per questa il lettore alla bella monografia di Hegh (*100*)], nè una bibliografia completa dell'escrezione negli insetti [vedi per questa la rivista sintetica di Ehrenberg (*59*)]; è soltanto una lista delle opere consultate e citate.

Il numero progressivo premesso, tra parentesi, al nome dell'A., rappresenta l'indicazione bibliografica con la quale ogni pubblicazione è richiamata nel testo.

Ho creduto opportuno, per comodo del lettore, aggiungere per ogni lavoro l'indicazione delle pagine del testo nelle quali è citato.

([2]) A questa opera si riferisce ogni citazione che dall'A. venga fatta nel testo senz'altra indicazione bibliografica.

PAG.

(19) Bohn G. e Drzewina A., *La Chimie et la vie.* Flammarion, Paris (Biblioth. de Philosophie scientif.), 272 pp., 1920 . . . . . 315, 412, 424, 482

(20) Bounoure L., *Aliments, Chitine et Tube digestif chez les Coléoptères.* Hermann, Paris (Collect. Morphol. Dynamique), 292 pp., e 46 fig. nel testo, 1919 363

(20-b) Bouvier E. L., *La vie psychique des insectes.* « Bibl. de Philos. scientif. ». Paris, Flammarion. 1919. 479

(21) Brehm A. E., *La vita degli animali* tradotta da *Lessona M.* (2ª ediz. ital). Torino, Unione tipogr. editrice, 1893 411

(22) Brunelli G., *Sulla struttura dell'ovario dei Termitidi.* « Atti R. Acc. Lincei, Rendic. », vol. 14, 2º sem., pp. 122-27, 2 fig., 1905 409

(23) Brunelli G., *Sulla distruzione degli oociti nelle regine dei Termitidi infette da Protozoi.* « Atti R. Acc. Lincei, Rendic. », vol. XIV, pp. 718-21, 1 fig., 1905 . . . . . 301-2, 468

(24) Bruntz L., *Contribution à l'étude de l'excrétion chez les Arthropodes.* Thèse Sciences nat., Nancy; « Arch. biol. », tom. XX, pp. 217-422, pl. VII-IX, 1904 371

(25) Bruntz L., *Nouvelles recherches sur l'excrétion et la phagocytose chez les Thysanoures.* « Arch. zool. expér. et génér. » (4), tom. VIII, fasc. 7, pp. 471-88, pl. XVI, 1908 . . . . . 371, 373

(26) Bruntz L., *Les reins labiaux et les glandes céphaliques des Thysanoures.* « Arch. zool. expér. et génér. » (4), tom. IX, fasc. 4, pp. 195-238, pl. II e III, 5 fig., Ott. 1908 394

(27) Buchner P., *Tier und Pflanze in intrazellularer Symbiose.* Bontraeger, Berlin., 462 pp., 2 tav. e 103 fig., 1921 416

(28) Bugnion E., *Le Termite noir de Ceylan* (*Eutermes monoceros* K.). « Ann. Soc. Entomol. de France », Paris, vol. 78, pp. 271-81, 3 tav., 1909 433

(29) Bugnion E. (avec Popoff), *Le Termite à latex de Ceylan* (*Coptotermes travians* H.). « Mém. soc. zool. de France ». Paris, pp. 109-23, 2 tav., 1910 . . . . . 272, 434

(30) Bugnion E. (avec Popoff), *Les Calotermes de Ceylan.* « Mém. soc. zool. de France ». Paris, pp. 124-44, 3 tav., 1910 270

(31) Bugnion E. (avec Popoff et Ferrière), *Le Termes ceylonicus.* « Revue suisse de zool. », vol. 19, pp. 383-95, 2 tav., 1911. 480-1

(32) Bugnion E. (avec Popoff), *Anatomie de la reine et du roi Termite.* « Mém. soc. zool. de France ». Paris, pp. 210-32, 2 tav., 1912 . . . . . 411-2, 436, 445, 450

(33) Bugnion E., *Le Termes horni de Ceylan.* « Revue suisse de zool. » Genève, pp. 299-330, 3 tav., 1913. 434

(34) Bugnion E., *Les termites de Ceylan.* « Le Globe ». Genève, 36 pp., 8 tav. « Bull. Museum Hist. Natur. de Paris », n. 4, 1914; vedi anche: *Observations sur les Termites. Différenciation des castes.* « C. R. Soc. biol. ». Paris, tom. 72, pp. 1091-4, 2 fig., 1913. . . . . . 271-2, 468

(35) Bugnion E., *Le termite lucifuge dans les Basses-Pyrénées.* « Rev. d'histoire naturelle appliquée », n. 2, 1920 277

(36) Bugnion E., *La guerre des Fourmis et des Termites, la genèse des instincts expliquée par cette guerre,* 55 pp., 8 tav., Genève, Kundig, 1923.

(37) Buscalioni e Comes, *La digestione delle membrane vegetali per opera dei Flagellati contenuti nello intestino dei Termitidi e il problema della simbiosi.* « Atti Acc. Gioenia di Sc. Nat. ». Catania, anno LXXXVII, ser. 5ª, vol. III, 16 pp., 4 fig., 1910 468-9

(37-b) Camerano, *Osservazioni intorno alla neotenia degli Insetti.* « Bullettino Soc. entom. ital. », vol. 17, pp. 89-94, 1886 482

(38) Cavara, *Danneggiamenti delle Termiti a piante diverse.* « Bull. Ort. Botanico R. Univ. Napoli », tom. VII, pp. 129-33, 1922. 290

(39) Chaine, *L'attaque des végetaux par les Termites.* « Révue génér. d. Sciences pur. et appliq. », 31º ann., n. 8, 1920 290

(40) Charlton H. H., *The spermatogenesis of Lepisma domestica.* « Journ. of Morphol. », pp. 381-409, 6 tav., 1921. 454

(41) Cholodkovsky N., *Die Entwicklung von Phyllodromia germanica.* « Mém. Acad. Pétersbourg », tom. 38, 1891 . . . . . 415, 464

(41-b) Cholodkovsky N., *Ueber die Spermatodosen der Locustiden.* « Zoologischen Anzeiger », Bd. XLI, n. 13, pp. 615-9, 3 fig., 1913 444

(42) Cognetti de Martiis L., *Ricerche sulla distruzione fisiologica dei prodotti sessuali maschili.* « Memorie d. R. Acc. Scienze Torino », ser. II, tom. LXI, pp. 293-354, 1911. 441

PAG.

(43) Courrier M. R., *Sur l'existence d'une sécrétion épididymaire chez la chauve-souris hibernante et sa signification.* « C. R. Soc. biol. », t. LXXXIII, n. 3, pp. 67-9, Genn. 1920. 457

(44) Courrier M. R., *Sur l'existence d'une sécrétion de l'épithélium utérin chez la chauve-souris hibernante, sa signification.* « C. R. Soc. biol. », t. LXXXIII, p. 243, Febbr. 1920. 457

(45) Courrier M. R., *Sur l'existence d'une sécrétion intranucléaire dans l'épithélium du spermathèque de la reine d'Abeille* « C. R. Soc. biol. Paris. », tom. LXXXV, pp. 941-3, 1 fig., 1921 452

(46) Cuénot L., *Étude sur le sang et les glandes lymphatiques dans la série animale (Invertébrés).* « Archiv. Zool. expér. et géner. », 2° ser., tom. IX, p. 13, 1891 368

(47) Cuénot L., *Études physiologiques sur les Gastéropodes Pulmonés,* pp. 683-741, tav. XXIII, 1893. 366

(48) Cuénot L., *L'excrétion chez les Mollusques.* « Archiv. de Biol. », tom. 16, pp. 49-98, pl. V-VI, 1900 . . . . 369, 395, 409

(49) Cuénot L., *Études physiologiques sur les Crustacés décapodes.* « Archiv. de Biologie », tom. 13, pp. 245-304, 1895. 382

(50) Cuénot L., *Études physiologiques sur les Orthoptères.* « Archiv. de Biol. », tom. 14, pp. 295-342, pl. XII e XIII, 1896. . . . . 366, 369-70, 382, 401, 415, 462-3

(51) Cuénot, Gonet e Bruntz, *Recherches chimiques sur les coeurs branchiaux des Céphalopodes. Démonstration du rôle excréteur des cellules qui éliminent le carmin ammoniacal des injections physiologiques.* « Archiv. zool. expér. et génér., 4ᵉ ser., tom. IX, « N. e R. », n. 3, pp. XLIX-LII, 1908. 372

(52) Cutler Ward., *Observations on the Protozoa parasitic in Archotermopsis Wroughtoni D.* Part. III *Pseudotryconympha pristina.* « Quart. Journ. of Microsc. Sc. », vol. 65, n. 258, pp. 247-64, tav. 10, 8 fig., 1921. 472

(53) Delage Y., *Observations à propos des injections physiologiques.* « C. R. Acad. Scienc. », tom. CXXXV, n. 22, 1902 370

(54) Dewitz, *Sur l'action des enzymes (oxidases) dans la metamorphose des Insectes.* C. R. Soc. biol., t. 54, p. 645, 1902 335

(55) Doflein F., *Lehrbuch der Protozoenkunde,* 2ª ediz. Jena, 1909 468

(56) Dogiel e Archangelsky, *Der bewegungshemmende und der motorische Nervenapparat des Herzens.* « Arch. f. die ges. Physiol. » Bd. CXIII, pp. 1-96, 1906 367

(57) Drummond I. C., Crowden G., P. and Miss Hill E. L., *Nutrition in the high proteic dietaries.* « Journ. physiol. », v. 56, pp. 413-9, 1922 484

(58) Dufour, *Recherches anatomiques sur les Orthoptères, Hymenoptères et Neuroptères.* « Mém. des Savants Etrangers, Ac. d. Scienc. Paris », tom. VII, p. 608, 1841. 275

(59) Ehrenberg, *Die excretion in den Tracheaten.* « Handbuch der vergleichend. Physiol., Winterstein », Jena, Fischer. Band II, Physiologie des stoffwechsels, II Hältte, 1921 487

(60) Eisig, *Monographie der Capitelliden.* Flora und Fauna d. Golf. v. Neapel, 16, 907 pp., 37 tav. e 20 fig., 1887. 360

(61) Emery C., *Quels sont les facteurs du polymorphisme du séxe feminin chez les fourmis.* « Rév. génér. d. scienc. pur. et appliq. », 32° ann., pp. 737-41, 1921 478-9

(62) Emery C. e Ghigi A., *Compendio di zoologia,* 4° ediz., Cappelli, Bologna, 1921 479

(63) Escherisch K., *Die Termiten oder Weissen Ameisen.* Leipzig, 198 pp., 51 fig., 1 tav., 1909 . . 468

(64) Escherisch K., *Termitenleben auf Ceylon.* Fischer, Jena, 263 pp., 3 tav., 1911.

(65) Fabre, *Études sur l'instinct et les métamorphoses des Sphégiens.* « Ann. Sc. Natur., Zool. », 6, pp. 137-83, tav. 5 e 6, 1856 399-400

(66) Fabre, *Étude sur le rôle du tissu adipeux dans la sécretion urinaire chez les insectes.* « Ann. Sc. Natur., », tom. XIX, pp. 351-82, 1863 . . . . 365, 395, 400

(67) Fauré-Fremiet, *Le cycle germinatif dans l'Ascaris megalocephala.* « Arch. anat. microsc. », XV, p. 435-757, tav. XII-XIV, 163 fig., 1913 410

(68) Felix e Buhler, *Entwickelung der Geschleichtsorgane.* Hertwig-Entwick. der Virbelt. 410

(69) Feytaud J., *Contribution à l'étude du termite lucifuge (Anatomie, Fondation de colonies nouvelles).* « Archiv. d'anat. microscop. », tom. XIII, fasc. IV, pp. 481-607, tav. XI-XIII, 34 fig, 1912 [1]. 275, 279-280, 284-285-286, 288, 302 398, 432-433, 472

---

[1] A questa opera si riferisce ogni citazione che dell'A. venga fatta nel testo senz'altra indicazione bibliografica.

PAG.

(70) FEYTAUD J., *Sur les rois et reines du Termite lucifuge.* « C. R. Acad. Sc. » Paris, t. CLXX, 287 pp., Magg. 1920. 289

(71) FEYTAUD J., *Sur les jeunes colonies du Termite lucifuge.* « C. R. Ac. Scienc. », tom. CLXXI, n. 3, pp. 203-6, Lugl. 1920. . . . . 287-8, 290-1

(72) FEYTAUD J., *La cité des Termites. Mœurs sociales du Termite lucifuge.* Paris, Bordeaux, 1921. . 479

(72-b) FOREL, *Le mond social des fourmis*, Genève, 1921 479

(73) FRIEDMANN FR., *Beiträge zur Kenntniss der Anatomie und Physiologie der männlichen Geschlechtsorgane.* « Arch. f. mikr. Anat. », vol. 52, 1898 441

(74) FÜLLER CL., *Observations on some South-African Termites.* « Annals of the Natal Museum » London, v. III, pt. 2, pp. 329-504, tav. XXV-XXXV, 1915 444

(75) FÜLLER CL., *The Wing Venation and Respiratory System of certain South-African Termites.* « Annals of the Natal Museum », London, vol. IV, pt. 1, pp. 19-102, tav. III-XI, 1919 333-4

(76) FÜLLER CL., *Studies on the Post-embryonic Development of the Antennae of Termites.* « Annals of the Natal Museum », vol. IV, pt. 2, pp. 227-95, tav. XV, 14 fig., 1920 333

(77) FURTH, *Vergleichende chemische Physiologie der Niederen Tiere.* Fischer, Jena, 1903. 336

(78) GASSIES, *Sur l'introduction des Termites dans la ville de Bordeaux.* « Act. Soc. Linnéenne de Bordeaux », tom. XX, 1855 290

(79) GESSARD, *Sur la tyrosinase dans la mouche dorée.* « C. R. Acad. Sc. » Paris, tom. 139, p. 644, 1904. 335

(80) GIARD, *Sur une fonction nouvelle des glandes genitales des Oursins.* « C. R. Acad. Sc. » Paris, 1877. 411

(81) GILSON, *Étude comparée de la spermatogenèse chez les Arthropodes*, p. II, « La Cellule », tom. II. . 442, 444

(82) GLASER R. W., *Biological studies in Intracellular Bacteria.* « Biolog. Bullet. », vol. XXXIX, n. 2, pp. 133-45, 1920 . . . . 465, 466

(83) GOEBEL, *Kleistogame blüten* « Biolog. Centralbl. », 1909 283-4

(84) GÖRTNER, *The origine of the brown pigment in the integuments of the larva of Tenebrio Molitor.* « Journ. of. Biol. Chem. », vol. 7, p. 365, 1910 335

(85) GRABER V., *Ueber die Blutkörperchen der Insekten.* « Sitzungsber. Acad. Wiss. Wien, Math. natur. cl. », Bd. LXIV, I Abt., 1871 ; *Ueber den propulsatorischen Apparat der Insekten.* « Arch. f. Mikr. Anat. », Bd. IX, p. 129, tav. VIII-X, 1873 367

(86) GRAHAM KERR., *Text-book of embryology, VII Vertebrata*, 1919 411

(87) GRANDI G., *Studi sullo sviluppo postembrionale delle varie razze di* B o m b y x m o r i L., I. *L'evoluzione larvale della razza (bivoltina) bianca giapponese Nipponnishiki.* « Boll. d. Labor. di zool. gener. ed agraria d. R. Sc. Sup. d'Agr. in Portici », vol. XVI, pp. 138-206, 14 figg., 1922. . . 364

(88) GRANDI G., II. *L'evoluzione larvale della razza Treotti dello Schensi e considerazioni generali.* « Ibid. », vol. XVII, pp. 4-40, 8 fig., 1 grafica, 1923. 364

(89) GRANDIS V., *Sulle modificazioni degli epiteli ghiandolari durante la secrezione.* « Atti R. Accad. scienze », Torino, 25, pp. 765-88, tav. VIII, 1890 392

(90) GRASSI B. (e ALOI), *Relazione sui danni che arrecano le Termiti ai vigneti di Catania.* « Bull. nat. agric. », n. 51, Roma, 1885 ; *Intorno ad alcuni protozoi parassiti delle Termiti.* « Atti Acc. Gioenia (3), XVIII, pp. 235-40. 275

(91) GRASSI B., *Re e regine di sostituzione nel regno dei Termiti.* « Atti Acc. Lincei, Rendic. », ser. 4ª, vol. III, e « Bull. Entom. It. », XX, pp. 139-47, 1888 ; v. anche : 1888 « Zool. Anzeig. » XI e « Entom. Nachr. » XV e « Zool. Anz. » XII, 1889 . . . . 275, 292-3, 308

(92) GRASSI B. e SANDIAS., *Costituzione e sviluppo della Società dei Termitidi. Osservazioni sui loro costumi; con un'appendice sui Protozoi parassiti dei Termitidi e sulla famiglia delle Embidine.* « Atti Accad. Gioenia Sc. Nat. » Catania, (4), voll. VI e VII, 150 pp., 5 tav., 1893 (1) . . . . . 292–300 *et passim*

(93) GRASSI B (e FOÀ A.), *Intorno ai Protozoi dei Termitidi* (Nota preliminare). « Atti R. Acc. Lincei, Rendic. », ser. 5ª, vol. XX, pp. 725-41, 1911. . . . . 470–1, 474–5, 477

(94) GRASSI B., *Flagellati viventi nei Termiti.* « Memorie R. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XII, fasc. VIII, pp. 1-68, 10 tav., 1917 . . . . 471–2, 476

(95) GRÜNBERG, *Untersuchungen über die Keim- und Nährzellen in den Hoden und Ovarien der Lepidopteren. Ein Beitrag zur Kenntnis der Entwickelung und Ausbildung der Keimdrüsen bei den Insekten.* « Zeitsc. f. Wiss. Zool. », Bd. 74, 1903. 456

---

(1) A questa opera si riferisce ogni citazione che dell'A. venga fatta nel testo senz'altra indicazione bibliografica.

PAG.

(96) Gurtwitch, *Zur Physiologie und Morphologie der Nierentätigkeit* « Arch. f. gesam. Physiol. », tom. 91, 1902 . . . . — 371
(97) Hagen, *Monographie der Termiten.* « Linnaea Entom. », Bd. X, XII, XIV, 1856-60. 274
(98) Heath, *The habits of California Termites.* « Biol. Bullet. », vol. 4, n. 2, pp. 47-63, 1903 . . . . 281, 445
(99) Heath, *The longevity of Members of the different Castes of Termopsis angusticollis.* « Biol. Bullet. », vol. 13, n. 3, p. 161, 1907 342
(100) Hegh E., *Les Termites ; Partie générale.* Bruxelles, 756 pp., 460 fig. e 1 carta, 1922 . . . . . . 302, 487
(101) Henneguy, *Note sur l'existence de calcosphérites dans le corps graisseux de larves de diptères.* « C. R. Soc. Philom. », Paris, n. 4, pp. 9–11, 1896. 414
(102) Henneguy, *Les insectes.* Masson, Paris, 1904 . . . . 369, 463
(103) Herbst C., *Formative Reize in den thierischen Ontogenese.* Leipzig, 1901. 478
(104) Hertig M., *Attemps to cultivate the Bacteroids of the Blattidae.* « Biol. Bullet. », vol. XLI, n. 4, pp. 181–7, 1921 465–6
(105) Heymons, *Die Embryonalentwickelung von Dermapteren und Orthopteren.* Jena, 1895. 430
(106) Heymons, *Ueber bläschenförmige Organe bei den Gespenstheuschrecken.* « Sitzungsb. der K. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin », tom. XXX, p. 563, 1899 430
(107) Hill G. F., *On some Australian Termites of the genera Drepanotermes, Hamitermes and Leucotermes.* « Bullet. of entomol. research. ». pp. 363–99, tav. IX–XII, 1922. . . . 285, 453
(108) Hollande A. Ch., *Les cérodécytes ou « oenocytes » des insectes considérés au point de vue biochimique.* « Arch. anat. microscop. », tom. XVI, n. 25, 66 pp., 4 tav, 3 fig., 1913 358
(109) Hollande A. Ch., *Formations endogènes des cristalloïdes albuminoïdes et des urates des cellules adipeuses des Chenilles de Vanessa io et Vanessa urticae.* « Arch. Zool. expér. et génér. », tom. LIII, pp. 559–78, 1 tav., 1914 403–4
(110) Hollande A. Ch., *Le rôle physiologique des cellules péricardiques des insectes et leur coloration vitale par le carminate d'ammoniaque* (Note préliminaire). « Arch. Zool. expér. et géner. », tom. 55. « N et R. », n. 4, pp. 62–74, 1916 . . . . 373, 377–8–9
(111) Hollande A. Ch., *La cellule péricardiale des insectes* (*Cytologie, Histo-chimie, Rôle physiologique*). « Archiv. d'anat. microscop. », tom. XVIII, 307 pp., tav. V–VIII, 1922 . . . . . 375–6, 384–390
(112) Hollande A. Ch. e Moreau, *Présence de formes-levures bourgeonnantes dans le sang de Stenobothrus* (*Orthoptères*) ; *leur évolution par culture en un champignon entomophyte : Isaria Stenobothri* n. sp. « Arch. Zool. expér. et génér. », t. 61, N. e R., n. 3, 1922 372
(113) Holmgren N., *Studien über südamerikanische Termiten.* « Zool. Jahrbuch. Abt. System. », XXIII, pp. 371–676, 1906. 285
(114) Holmgren N., *Termitenstudien I Anatomische Untersuchungen.* « Kungs. Svenska Vet. Akad. Handl. Upsalla et Stockolm », Bd. 44, n. 3, 215 pp., 1909 . . . . 356, 431-2, 436-7, 480
(115) Hopkins, *The pigment of the Pieridae. A contribution to the study of excretory substances with function in ornament.* « Proc. R. Soc. London », LVII, 1894 o « Philos. Transact. R. Soc. London », CLXXXVI, 1895 ; vedi anche : *Uric acid derivatives functioning as pigments in butterflies.* « Proc. Chem. Soc. London », p. 117, e « Nature », XL, p. 335, 1889 ; e *Pigment in yellow butterflies.* « Nature », XLV, p. 197, 1891. 364
(116) Hubbard, *Notes on the three Nests of Termites in Jamaica.* « Proceed. Boston Nat. Hist. Soc. », XIX, pp. 267–74, 1878. 281
(117) Hufnagel A., *Recherches histologiques sur la métamorphose d'un Lepidoptère* (*Hyponomeuta padella*). « Arch. Zool. exp. et génér. », tom. 57, pp. 47-202, tav. II-V, 1918. 405–6
(118) Imms, *On the structure and biology of Archotermopsis.* « Philosoph. Transact. of the R. Soc. of London, ser. B », vol. 209, pp. 75–180, 1919 . . . . 314-5, 328, 341, 431, 436-7, 442, 457, 471, 473
(119) Janet Ch., *Sur les nerfs céphaliques, les corpora allata, et le Tentorium de la Fourmi* (*Myrmica rubra*). « Mém. de la Soc. zool. de France », p. 295–337, tav. III VI, 1899. . . . . . 315, 430-1
(120) Janet Ch., *Anatomie du corselet et histolise des muscles vibrateurs, après le vol nuptial, chez la reine de la fourmi* (*Lasius niger*), 149 pp., 13 tav., Ducourtieux, Limoges, 1907.
(121) Javelly, *Les corps bacteroïdes de la Blatte* (*Periplaneta orientalis*) *n'ont pas encore été cultivées.* « C. R. Soc. biol. Paris », tom. 77, p. 413, 1914. 464
(122) Jhering H., *Generationswechsel bei Termiten ; Nochmals der Generationswechsel bei Termiten.* « Entomologische Nachrichten von. Karsch. ». Berlin, ann. XIII, n. 1, pp. 1-4 ; n. 12, pp. 179-82, 1887 294

PAG.

(123) JOLY N., *Recherches pour servir à l'histoire naturelle et à l'anatomie des Termites, vulgairement désignés sous le nom de fourmis blanches.* « Mém. Acad. Scienc. Toulouse », sér. 3a, tom. V, tav. I, fig. 12, 1849 278

(124) JUCCI C., *Sulla differenziazione delle caste nella società dei Termitidi. I neotenici.* Nota I e II. « Rendic. Acc. Lincei, Scienze fis., matem. e natur. », vol. XXIX, ser. 5a, 2o sem., fasc. I e II, pp. 68-71 e pp. 95-98, 1920 310

(125) JUCCI C., *Sulla presenza di depositi uratici nel tessuto adiposo dei Termitidi.* « Rendic. Acc. Lincei », ser. 5a, vol. XXX, 1e sem., fasc. 3o, pp. 92–95, Febbr. 1921 415

(126) JUCCI C., *Sul metabolismo dei reali veri nella società dei Termitidi.* « Rend. Acc. Lincei », ser. 5a, vol. XXX, 1o sem., fasc. 7o, pp. 213–5, Apr. 1921 . . . . 417, 435-6

(127) JUCCI C., *Sulla curva di sviluppo del baco da seta.* « Boll. Labor. di Zool. gener. ed agraria, R. Sc. sup. agr. in Portici », vol. XVI, pp. 59-136, (o « Annali R. Sc. sup. di agric. in Portici », ser. 2a, vol. XVIII, 1923), 80 pp. e 5 tav. di diagrammi, 1922. 360-2

(128) KARAWAIEV V., *Die nachembryonale entwicklung von Lasius flavus.* « Zeitschr. f. wiss. Zöol. », Bd. 64, 1898. 359

(128-b) KNOWER H. Mc C., *Origin of the Nasutus (Soldier) of Eutermes.* « J. Hopkins Univ. Circ. » XIII, pp. 58-9, 1894; vedi anche: *The Embriology of a Termite.* « J. Morphol. », XVI, p. 505-68, 1900. 271

(129) KOFOID C. A., and SVEZY O., *Studies on the Parasites of Termites.* « Univ. of California, Publ. in Zoology », vol. 20, nn. 1-4, 116 pp., 14 tav., 8 fig., 1919.

(130) KOENIGSTEIN, *Ueber das Schicksal der nicht ejakulirten Spermatozoen.* « Arch. f. die gesammte Physiol. », Bd. 114, 1906 441

(131) KOSCHEVNIKOV, *Ueber den Fettkorper und die Oenocyten der Honigbiene.* « Zool. Anzeig. », p. 168, 1900 359

(132) KOWALEVSKY A., *Zum Verhalten des Rückengefässes und guirlandenförmigen Zellengsstrangs der Musciden während der Metamorphose.* « Biol. Centralbl. » Bd. VI, p. 74, 1887 368-9

(133) KOWALEVSKY A., *Ein Beitrag zur kenntnis der Excretionsorgane.* « Biol. Centralbl. », Bd. IX, p. 33, 1889 368

(134) KOWALEVSKY A., *Sur les organes excréteurs chez les Arthropodes terrestres, I part.* « Travaux du Congrès internat. de zool. à Moscou, en 1892 », 49 pp., tav. I-IV, 1893 368

(135) KOWALEVSKY A., *Sur le coeur de quelques Orthoptères.* « C. R. Acad. d. Sc. », Paris, tom. CXIX, 1894. 370

(136) KRUKENBERG C. Fr., *Grundzüge einer vergleichenden Physiologie der Farbstoff und der Farben.* Heidelberg, 1884 411

(137) LEIDY, *The parasites of termites.* « Journ. Acad. Nat. Soc. Philad. » (2), VIII, p. 145, 1874-81 . . 467

(138) LESPÈS Ch., *Recherches sur l'organisation et les moeurs du Termite lucifuge,* « Annal. Sc. Natur. Zool. » (4), vol. V, pp. 227-82, tav. V-VII, 1850 275

(139) LÉTELLIER, *La fonction urinaire chez les mollusques acéphales,* « C. R. Acad. Sc. » Paris, t. 112, p. 56, 1891 383

(140) LEVY R., *Contribution à l'étude des toxines chez les Araignées.* « Annal. d. Scien. Natur, Zool. », 10e sér., tom. I, pp. 161-399. Paris, 1916 411

(141) LEYDIG Fr. *Einige Worte über den Fettkorper der Arthropoden.* « Reichert u. du Bois-Reymond's Archiv. f. Anat. », pp. 192-203, 1863.

(142) LINDEN M. von, *Recherches morphologiques, physiologiques et chimiques sur la matière colorante des Vanesses,* « Annal. Sc. Natur. », sér. 8, tom. XX, p. 295, 1905 . . . . 365, 378, 387

(143) LWOFF, *Nature et position systematique des bacteroïdes des Blattes.* « C. R. Soc. biol. », Paris, tomo LXXXIX, n. 31, p. 945, 1923. 466

(144) MAC BRIDE, *The method of evolution,* Scientia, XIV, 1920 479

(145) MARCHAL P., *Contribution à l'étude de la désassimilation de l'azote. L'acide urique et la function rénale chez les Invertébrés.* « Mem. Soc. Zool. France », tom. III, pp. 42-57, 1889 401

(146) MARCHAL P., *Récherches anatomiques et physiologiques sur l'appareil excréteur des Crustacés Décapodes.* « Arch. zool. expér. et gén. » (2), vol. 10, p. 57, 1892 383

(147) MARCHAL P., *Sur le receptacle séminal de la Guèpe (Vespa germanica)* Note preliminaire. « Annal. de la soc. entom. de France », vol. LXIII, p. 44-9, 1 fig., 1894 450

(148) MARCHAL P., *Physiologie des insectes,* in « Dictionnaire de Physiologie, Richet Ch. », Alcan, Paris. tom. IX, I-L, 1913 . . . . 322, 401

PAG.

(149) MATHEWS A. P., *The influence of some amino-acids on the development of Echinoderms.* « Biol. Bullet. », vol. XVI, pp. 44-6, 1909 483
(150) MAYEROWNA Z., *La glande tyroide des Amphibiens au moment de la métamorphose.* C. R. Soc. Biol., t. LXXXVII, n. 36, 1922 435
(151) MERCIER L., *Les corps bacteroïdes de la Blatte (Periplaneta orientalis): Bacillus Cuénoti (n. sp. L. Mercier).* « C. R. Soc. biol. », vol. 61, pp. 682-4, 1906. 463-4
(152) MERCIER L., *Cellules à bacillus Cuénoti dans la paroi des gaines ovariques de la Blatte.* « C. R. Soc. Biol. », vol. 62, pp. 758-9, 1907 464
(153) MERCIER L., *Récherches sur les bacteroïdes des Blattides.* « Arch. f. Protistenk. », 9, 1907. . . . 464
(154) MERCIER L., *Bacteries des Invertébrés. Les cellules uriques du Cyclostome et leur Bactérie symbiote.* « Anat. Microscop. », XV, 1913 417
(155) METALNIKOV, *Recherches expérimentales sur les Chenilles de Galleria Mellonella.* « Arch. zool. exp. et génér. », ser. 4ª, t. VIII, pp. 489-588, tav. XVII-XXI, 1908 . . . . 371-2, 376, 394
(156) MIAL and DENNY, *The structure and life-history of the Cockroach (Periplaneta orientalis).* Londra, 224 pp., 125 fig., 1886. 355
(157) MINCHIN, *Note on the new organ and on the structure of the hypodermis in Periplaneta orientalis.* « Quart. Journ. Microsc. Soc. », vol. 29, pp. 229-34, tav. XXII, 1888. 355
(158) MINGAZZINI P., *Ricerche sulla struttura dell'ipodermide nella Periplaneta orientalis.* « Rendic. R. Acc. Lincei » (4), vol. 5, 1º sem., pp. 573-78, 1889. 355-6
(159) MOLLARD, *Les nerfs du cœur.* « Révue génér. d'histologie », 3, 1908 367
(160) MONTEROSSO B., *Sull'origine del grasso nei tubi seminiferi del topo (Mus decumanus, var. alba).* « Bollet. Acc. Gioenia di Sc. Nat. in Catania », ser. 2ª, fasc. XV, pp. 1-5, con 1 tav., 1911. 440-1
(161) MONTGOMERY Th. H., *Studies on the Habits of Spiders, particularly those of the Mating Period.* « Proceed. Acad. Philadelphia », 55, pp. 59-149, tav. IV-V, 1923 459
(162) MORGAN, *The physical basis of heredity.* Philadelphia and London, I. B. Lippincott Company, 1920 314
(163) MORSTATT H., *Zur ständischen Gliederung und Erhnährungsbiologie der Termiten.* « Entomolog. Mitteilung. », Bd. XI, n. 1, pp. 9-16, 1922 479
(164) MÜLLER Fr., *Beiträge zur kenntnis der Termiten.* « Jenaische Zeitschr. », VII, 1873. 285
(165) MÜLLER Fr., *Die larven von Calotermes rugosus H.* « Jenaische Zeitschr. », IX, pp. 241-64, 1875.
(166) MÜLLER Fr., *Die Nymphen der Termiten.* « Entom. Nachricht. », XIII, p. 177, 1887 283
(167) NABERT A., *Die corpora allata der Insekten,* « Zeitschr. Wiss. Zool. », vol. 104, pp. 181-358, tavv. 8-12, 8 fig., 1913 431
(168) OSHIMA MASAMITSU, *Formosan Termites and Methods of preventig their damage.* « The Philippine Journ. of Science », Manila, vol. XV, n. 4, pp. 319-383, tavv. I-XIII, 1919 476-7
(169) PACKARD, *Text-book of Entomology.* Macmillan, London, 1898 . . . . 370, 453
(170) PANTEL J., *Thrixion Halidayanum Rond. Essai monographique sur les caractères extérieurs, la biologie et l'anatomie d'une larve parasite du groupe des Tachinaires.* « La Cellule », vol. 15, 1898. 352
(171) PARKER, *California redwood attached by Termes lucifugus.* « Journ. Ec. Entom. », vol. 4, n. 5, p. 422, 1911. 281
(172) PEREZ CH., *Les Termites dans le Sud-Ovest.* « Bull. Soc. d. Zool. agric. », Bordeaux, 1907 275
(173) PEREZ CH., *Recherches histologiques sur la Métamorphose des Muscides (Calliphora erithrocephala).* « Arch. Zool. expér. et génér. », 5 sér., tom. IV, fasc. I, 274 pp., pl. I-XVI, 162 figure, 1910 . . . . 359, 379, 404-5, 441
(174) PEREZ CH., *Observations sur l'histolise et l'histogénèse dans la métamorphose des Vespides.* « Mem.. Ac. R. Belgique ». Bruxelles, 1911 405
(175) PEREZ CH., *Sur les inclusions des cellules grasses des insectes pendant la métamorphose.* « Archiv. de zool. expér. et génér. », tom. LIX, N. e R., n. 1, pp. 5-10, 1920 404
(176) PEREZ J., *Sur la formations des colonies nouvelles chez le Termite lucifuge,* e *Sur les essaims du Termite.* « C. R. Acad. Scienc. », t. CXIX, p. 804 e p. 866, 1894. 279
(177) PERRIS E., *Nouvelles promenades entomologiques.* « Bull. soc. entom. France », (5), VI, pp. 201-2. 1876 279
(178) PETTIT, *Sur le rôle des calcosphérites dans la calcification pathologique.* « Archiv. anat. micr. ». 1897 415

PAG.

(*179*) Pézard, *Castration alimentaire chez les coqs soumis au régime carné exclusif*, « C. R. Ac. Sc. », tom. LXIX, n. 24, pp. 1177-9, 1919. 483-4

(*180*) Prénant-Bouin-Maillard, *Histologie*, tom. I, p. 87, 1904. 463

(*181*) Philiptschenko, *Anatomische Studien über Collembola* (*Fettkörper, Exuvialdrüsen, subypodermale Zellen*). « Zeitschr. f. wiss. Zool. », vol. 85, pp. 270-304, tav. XVII-XVIII, 1906 . . . . . 357-8, 415

(*182*) Philiptschenko J., *Sul tessuto adiposo della Blatta nera* (*Stylopyga orientalis*). « Revue russe d'Entom. », pp. 181-9, 5 fig., 1907. 416

(*183*) Physalix, *Sur le changement de coloration des larves de Phyllodromia germanica.* « C. R. Soc. biol. » Paris., tom. 57, p. 172, 1905. 335

(*184*) Phisalix C., *Sur la presence de venin dans les oeufs d'Abeilles.* « C. R. Ac. Scienc. », CXLI, pp. 275-8, 1905. 411

(*185*) Policard J., *Le tube urinaire des Mammifères.* « Revue générale d'Histologie » Masson, Paris. 381-2

(*186*) Portier P., *Les Symbiotes.* Masson, Paris, 315 pp., 63 fig. e 1 tav., 1918. 472

(*187*) Poyarkoff E., *Recherches histologiques sur la métamorphose d'un coléoptère* (*la galéruque de l'orme*). 150 pp., 69 fig. Thèse, Masson, Paris, 1910 . . . . 353, 364

(*188*) Quatrefages (De), *Note sur les Termites de La Rochelle.* « Annal. Scienc. Natur., zool. », tom. XX, pp. 16–21, 1853 290

(*189*) Régaud, *Étude sur la structure des tubes seminifères et sur la spermatogenèse chez les Mammifères.* « Archiv. d'anatom. microsc. », tom. 4, 1901 456

(*190*) Russo A., *Sulla funzione renale dell'organo genitale delle Oloturie.* « Riv. Labor. anat. Roma », 18, pp. 83–91, 1901 410

(*191*) Russo A., *I prodotti del metabolismo nelle ova ovariche e tubariche della coniglia.* « Riv. di biologia », vol. II, fasc. II, 1920 412

(*192*) Schindler, *Beiträge zur Kenntnis des Malpighi'schen gefasse der Insekten.* « Zeitsch. f. Wiss. Zool. », XXX, pp. 587–660, tav. 38–40. 1878 . . . . 393, 479

(*193*) Schwartz E. A., *Termitidae observed in Southwestern Texas in* 1895. « Proc. Entom. Soc. Washington », vol. 4, pp. 38–41, 1896 ; *Note on first true Termite Queen in N. America.* « ibid. », p. 347, 1901 303

(*194*). Semichon, *Signification physiologique des cellules à urates chez les mellifères solitaires.* « C. R. Acad. Sc. », CXL, pp. 1715–7, 1905. 401

(*195*) Silvestri, *Operai ginecoidi di Termes con osservazioni intorno all'origine delle varie caste nei Termitidi.* « Rendic. R. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. 10, pp. 479–84, 1901 300

(*196*) Silvestri, *Contribuzione alla conoscenza dei Termitidi e Termitofili dell'America meridionale.* Redia, Portici, vol. I, 234 pp., 6 tav., 1903 . . . . 284, 287, 300-1, 444

(*197*) Silvestri, *Die Fauna Südwest–Australiens. Isoptera.* Bd. 2, Lief. 17, pp. 280-6 (Michaelsen und Hartmeyer) 1903. 330

(*197-b*) Snodgrass R. E., *The anatomy of the honey bee.* U. S. Dept. of Agric. Bur. of Entom. Techn. Ser. N. 8, 162 pp., 1910 452

(*198*) Snyder Th. E., *The Biology of the Termites of the Eastern Un. States.* Bureau of Entomology, U. St. Dept. of Agric., Bull. 94, 1915 . . . . 281, 304, 309, 325-8, 339

(*199*) Snyder Th. E., *Termites or White Ants in the Unit. St. Their Damage and Methods of Prevention.* U. St. Dept. of Agric., Bull. 333, 1916. . . . . 282, 287, 303

(*200*) Snyder Th. E., *The Colonizing Reproductive Adults of Termites.* « Proc. Ent. Soc. Washington », tom. XXII, n. 6, pp. 109-150, 1920 . . . . 309, 311, 314-5, 478

(*201*) Snyder e Banks N., *Revision of the Nearctic Termites* (*N. Banks*) *with Notes on Biology and geografic Distribution* (*Th. E. Snyder*). « Bull. 108, Unit. St. National Museum, Smithsonian Institution ». Washington, 1920. . . . . 314, 317, 344

(*202*) Snyder Th. E., e Thompson C. B., *The question of the phylogenetic origin of termite castes.* « Biol. Bullet. », vol. XXXVI, n. 2, pp. 115–32, tav. I–II, 1919 306-7

(*203*) Snyder Th. e Thompson C. B., *The third form, the wingless reproductive type of Termites: Reticulitermes and Prorhinotermes.* « Journ. of Morphology », vol. 34, n. 3, 1920. . . . . 287, 308, 310-3

(*204*) Sinety, *Recherches sur la biologie et l'anatomie des Phasmes.* « La Cellule », tom. XIX, pp. 119-278, tav. I–V, 1902 358

(*205*) Stevens N. M., *Studies in spermatogenesis with especial reference to the 'Accessory chromosome'.* « Carnegie Institution of Washington », pubbl. n. 36, 32 pp., tav. I–VII, 1905 . . . . . 451, 453-4

PAG.

(*205-b*) Strasburger e Jost, Schenck, Karsten, *Trattato di botanica.* 2ª ediz. ital., Soc. Editrice libraria. Milano, 1913 289

(*206*) Strickland, *A quiescente stage in the development of Termes flavipes* K. « Journ. New-York Entom. », 1911 327

(*207*) Suslow, *Ueber die Phagocytose, die Excretionsorgane, und das Hertz einiger Insekten (Pterigota).* « Trav. Soc. Nat. St. Pétersbourg », XXXV, 4 (in russo; recensione di E. Schultz in « Zoolog. Centralbl. », 13. 1906 366-7

(*208*) Swingle W., *Experiments on the metamorphosis of neotenous amphibians.* « The Journ. of Exper. Zoology », pp. 397-423, 1922 435

(*209*) Tettenhamer E., *Ueber die Entstehung der acidophilen Leukocytengranula aus degenerirender Kernsubstanz.* « Anat. Anzeig. », Bd. 8, pp. 223-8, 1893 441

(*210*) Thompson C. B., *A comparative study of the brains of three genera of ants, with special reference to the mushroom bodies.* « Journ. Comp. Neur. », vol. 23, 1913.

(*211*) Thompson C. B., *The mushroom bodies of the worker of Bombus sp.* « Journ. Comp. Neur. », vol. 24. 1914.

(*212*) Thompson C. B., *The brain and the frontal gland of the Castes of the 'White ant', Leucotermes flavipes* K. « Journ. of Compar. Neur. », vol. 26, n. 5, pp. 554-593, 5 tav., 1916 432-3

(*213*) Thompson C. B., *Origin of the Castes of the common Termite, Leucotermes flavipes* K. « Journ. Morphology », vol. 30, n. 5, D., 1917 304-5

(*214*) Thompson C. B., *The development of the Castes of nine genera and thirteen species of Termites.* « Biolog. Bullet. », vol. XXXVI, n. 6, pp. 380-398, 10 fig., 1919 . . . . . 271, 305

(*215*) Thompson C. B., *The Castes of Termopsis.* « Journ. of Morphology », vol. 36, n. 4, pp. 495-536, 9 fig. e 2 tav., 1922. . . . . 311-4, 341. 436, 441-3, 456-7

(*216*) Urech, *Beobachtungen den Puppenflügelchen von Pieris brassicae.* « Ebenda », vol. 15, p. 294, 1892 . . . . . 319, 335

(*217*) Urech F., *Beiträge zur Kenntnis der Farbe von Insektenschuppen*: I *Zur Kenntnis der Farbe der Lepidopterenschuppen*; II *von Käferschuppen.* « Zeitscr. f. wiss. Zool. », Bd., 57, pp. 306-74, 1893. 365

(*218*) Vaney C., *Contribution à l'étude des larves et des métamorphoses des Diptères.* Thèse de Lyon, nouv. sér., I, Sc. médic., fasc. 9, 1902 369

(*219*) Veneziani, *Valore morfologico e fisiologico dei Tubi Malpighiani.* Redia, Firenze. II, pp. 177-230, tav. 18-20, 1905 . . . . . 392, 395-6

(*220*) Verson E., *Cellule ghiandolari di origine postlarvale.* « Ricerche anat. d. R. Staz. bacolog. » VII, con 1 tav., Padova, 1892 359

(*221*) Verson E., *Ancora degli elementi ghiandolari che il filugello alberga nelle sue lacune interviscerali.* « Annuario d. Staz. Bacolog. » Padova, v. XXXV, p. 32, 1907 359

(*222*) Verson E., *Sul vaso pulsante della Sericaria.* « Atti R. Istit. Veneto Sc., lett. e arti », tom. LVII, 1908 e « R. staz. bacolog. sperim. » Padova, XVII, 1909 . . . . . 374, 385

(*223*) Verson E., *Il filugello e l'arte di governarlo.* Milano, Soc. editr. libraria, 1917. . . . . 359, 365, 393

(*224*) Wlacovich G. P., *Sulla presenza dell'acido urico nella cute del baco da seta.* « Annuario d. soc. dei naturalisti », anno VI 365

(*225*) Wallace L. B., *The spermatogenesis of Agalena naevia.* « Biolog. Bullet. », v. XVII, n. 2, pp. 120-151, tav. I-IV, 1909. 458

(*226*) Wielowiejsky, *Ueber das Blutgewebe der Insekten.* « Zeitscr. f. wiss. Zool. ». XLIII B., 1886. . 367

(*227*) Willem V., *Recherches sur les Collemboles et les Thysanoures.* « Mém. couronn. Acad. R. Belgique », t. LVIII, 144 pp., tav. I-XVII, 1900. . . . . . 357, 454

(*228*) Willem V. e Minne A., *Recherches sur l'excrétion chez quelques Anellides,* « Mém. c. s. », 1900. 463

(*229*) Winterstein, *Handbuch der vergleichenden Physiologie.* Fischer, Jena, 1914; in III Band, I Hälfte, II Teil: Biederman W. *Farbe und Zeichnung der Insekten,* pp. 1658-1994 336

(*230*) Zavattari, *È l'ipergamesi un fenomeno frequente negli insetti?* « Atti d. Soc. dei Natural. e Matem. di Modena », ser. V, vol. VI, 1922. 455

ADDENDUM.

CLEVELAND L. R., *Symbiosis between Termites and their intestinal Protozoa* « Proceed. of the Nation. Acad. of Science », vol. 9, n. 12, pp. 424-8, dec. 1923.

CLEVELAND L. R., *The physiological and symbiotic relationship between the intestinal protozoa of termites and their host, with special reference to Retic. flavipes* K. « Biol. Bullet. », vol. XLVI, nn. 4 e 5, aprile-maggio, 1924.

È un interessantissimo lavoro, uscito in questi ultimi giorni (stato preceduto nel dic. 1923 da una Nota della quale non avevo conoscenza). Cedo al desiderio di riassumerne i risultati. Confermata la perfetta correlazione che esiste tra regime legnoso delle Termiti e presenza di Protozoi intestinali, l'A. cerca il modo di rimuovere i Protozoi senza offendere gli ospiti. Dopo vari tentativi infruttuosi trova ottimo mezzo l' incubazione (il mezzo usato dal Grassi nel 1911!) a 36° per 24 ore: tutti i Protozoi rimangono uccisi. Le Termiti così incubate e *defaunate* muoiono entro 10-20 giorni se nutrite col loro normale alimento legnoso o con cellulosa; ma se nutrite di legno digerito, p. es. *umus*, o di cellulosa digerita da funghi, si mantengono in vita indefinitamente (la durata della vita delle Termiti defaunate può anche essere allungata parecchio aggiungendo *destrosio* al legno). La morte non è dunque dovuta all' incubazione per sè stessa, ma ad una consecutiva incapacità di digerire il legno, che appare legata alla scomparsa dei Protozoi. Difatti se queste Termiti incubate e defaunate si reinfettano di Protozoi, col metterle in compagnia di Termiti normali, riacquistano la capacità di utilizzare il legno e si mantengono indefinitamente in vita. L'A. esclude che altri microrganismi, ospiti intestinali delle Termiti, possano coadiuvarle nella digestione del legno: non avendo potuto coltivarne alcuno su mezzi di cultura nei quali la cellulosa fosse il solo carboidrato presente. Dato tutto questo e considerato che evidentemente i Protozoi reingeriscono la maggior parte dell'alimento legnoso ingerito dall'ospite e lo digeriscono, come dimostrarono Buscalioni e Comes, l'A. giustamente conclude che « it is highly probable, if not certain, that the termites are dependent on the protozoa to digest their food for them ». Sicchè la relazione tra i Protozoi che digeriscono legno (alcuni no, e vivranno a spese degli altri o degli ospiti) e i Termiti è certo una simbiosi: « The protoza receive from the termites food and lodging, for which they give in return protozoal wood digestion products».

Quanto alle sostanze azotate l'A. vi accenna appena « It is highly possible that the protozoa are dependent on their host for proteins, since they live much longer on a cellulose-inorganic culture medium to which protein have been added ». Io sono convinto che la dipendenza è inversa: la sorgente diretta e principale delle sostanze proteiche è per le Termiti il corpo dei Protozoi.

E probabilmente anche i Protozoi che non digeriscono il legno ma si nutrono, come carboidrati, dei prodotti elaborati dagli altri Protozoi, come sostanze azotate, degli schizomiceti dell'ampolla cecale, riescono utilissimi all'ospite col quale possono considerarsi anch'essi legati da rapporti simbiotici, nel senso che ne ricevono, più o meno direttamente, nutrimento per restituirglielo poi col loro corpo stesso sotto forma proteica.

ABAREVIAZIONI NELLA FIGURA 8

A	antenna	Q^1	lobo esterno labbro inferiore
B	ocelli	R	lobo interno mascelle I paio
C	clipeo	R^1	lobo interno labbro inferiore
D	gola	S	sterno
E	episterno	T	trocantino
F	femore	TT	pretrocantino
G	epimero	U	trocantere
H	ali mesotoraciche	V	coxa
HH	ali metatoraciche	VV	exocoxa
I	pezzi iugulari	Z	submento
L	labbro superiore		
M	Stipite delle mascelle I paio	I	pronoto
N	cardine delle mascelle I paio	II	mesonoto
O	occhi	III	metanoto
P	mandibole		
P^1	palpi mascellari	1	
P^2	palpi labiali	2	uriti corrispondenti
Q	lobo esterno mascelle I paio	3	

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tutte le figure, meno 4 per le quali non è notato l'ingrandimento, sono state eseguite con la camera lucida (Abbe-Apaty), sul piano del preparato (2 sole, ed è notato, sul piano del tavolino). Microscopio Koristka, tubo accorciato. Tutte le figure, meno le poche per le quali è notato riferirsi al *Calotermes flavicollis* o al *Mastotermes*, riguardano il *Reticulitermes lucifugus*.

ABBREVIAZIONI

a	tessuto adiposo	mt	regione metanotale
al	abbozzi alari	n	nucleo
am	ameociti	na	nuclei del tessuto adiposo
b	membrana basale	nc	cuticola nuova
c	cuticola	ncn	nuclei connettivali
ca	cristalloidi albuminoidi	ne	nuclei epiteliali
cb	cristalli bianchi	nf	nefrociti
cc	cellule coriogene	ng	nuclei ghiandolari
ce	coagulo eosinofilo	ni	nuclei del tessuto adiposo imaginale
cn	connettivo	nm	nuclei della parete muscolare del vaso dorsale
cnn	connettivo nervoso		
cnp	connettivo perivasale	nmm	nuclei muscolari
cp	strato profondo della cuticola	nr	nuclei del tess. adiposo reale
cs	strato superficiale della cuticola	p	concrezioni ptialuriche
cu	cellule uriche	pc	cellule pericardiali
e	emolinfa	pn	diaframma perineurale
ep	regione epimerale	pr	diaframma pericardico
es	esofago	pt	regione pronotale
est	regione episternale	s	dôtti salivari
g	ghiandole ipodermali	sf	sferocristalli
gl	ganglio	sg	coaguli guttiformi di sostanza gialla
gll	cellule ganglionari	st	regione sternale
gs	guttule di secreto	t	trachea
i	ipoderma	te	tubuli emolinfatici
ie	inclusioncelle eosinofile	tg	tubo malpighiano
ig	cellule ipodermali differenziantisi in ghiandolari	tm	tunica muscolare del vaso dorsale
		u	urosferiti
m	muscoli	v	vaso dorsale
ma	muscoli alari	vc	cuticola vecchia
ms	regione mesonotale	vg	vacuole grassose

Tavola I.

1. *Abbozzo alare e regione epimerale in Ninfa di II forma* (sezione trasversa). Ipoderma alto a cellule peduncolate, attivamente segreganti la nuova cuticola. Nella regione epimerale vanno differenziandosi degli elementi ghiandolari. oc. 1 ob. 8.

2. *Abbozzo alare ninfale* (porzione più fortemente ingrandita della fig. 1). Cellule ipodermali delle due lamine alari in piena attività secretrice; nei tubuli emolinfatici corrono le trachee, circolano il plasma e gli amebociti. oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

3. *Vaso dorsale in Ninfa di II forma* (tratto di sez. longitudinale in corrispondenza all'addome). Il vaso pulsante ha una sola tonaca, la muscolare. Decorre, nell'addome, serrato tra le due lamine connettivali, membrana basale e diaframma pericardiale. oc. 4 C. ob. 8.

4. *Sclerite (epimero mesotoracico) in Ninfa di II forma* (da sezione frontale). L'ipoderma appare come bistratificato; una fila superiore di nuclei, non individualizzati nettamente in cellule, rappresenta il vero ipoderma attivamente segregante la nuova cuticola; le grosse cellule a protoplasma più chiaro, reticolare, della fila inferiore, sono le ghiandole ipodermali in via di differenziazione. Due sono già differenziate; una mostra il nucleo che si trasforma in ghiandolare; l'altra il nucleo ghiandolare in divisione amitotica (Cop. piano tavolino). oc. 8 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

5. *Tergite in giovane regina di complemento* (tratto di sez. trasversa). Lo strato delle piccole cellule ipodermali, compita la secrezione cuticolare, è ridotto; tra esso e la basale stanno, perfettamente differenziate, le grosse cellule ghiandolari. oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

6. *Tratto tegumentale di passaggio da sclerite a cute molle in vecchia regina complementare* (sezione trasversa).

Lo strato superficiale della cuticola si assottiglia, lo strato profondo s'inspessisce e la basale passa ininterrotta dalla fascia ipodermale sclerale all'ipoderma appiattito. oc. 4 C. ob. 9.

7. *Tratto di tubo malpighiano a concrezioni miste in vecchia regina complementare* (sezione trasversa).

Granuli escretizi di natura diversa (bianchi e gialli, attorno ai nuclei ghiandolari).

oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

8. *Tratto di lobo adiposo in giovane regina sostitutiva* (in abito di insetto perfetto, parzialmente abbrunato). Si è sostituito il tessuto adiposo reale all'imaginale di cui vedesi qualche nucleo superstite.

oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

9, 10, 11. *Cellule pericardiali di alato sciamante di «Calotermes».*

Giovani lobuli plurinucleati e cellule mononucleate con granuli.

Tavola II.

12, 13. *Cellule pericardiali nel torace di Ninfa di II forma.*

(12, sezione longitudinale mediale; 13, sez. longitudin. mediana).

Nel protorace le cellule pericardiali sono disposte tra l'ipoderma e il vaso dorsale; nel meso e metatorace, ai lati del vaso dorsale che resta aderente per del connettivo all'ipoderma.

oc. 4 C. ob. 4.

14. *Cellule pericardiali nel protorace di giovane regina complementare* (sez. trasversa).

Stanno tra ipoderma e vaso dorsale, evidentemente imbrigliate da fibrille connettivali della basale.

oc. 1 ob. 8.

15. *Regione pericardiale nel mesotorace di Ninfa di II forma* (sez. trasversa).

Al mesonoto, ove tra gli elementi ipodermali peduncolati in attiva secrezione cuticolare spiccano elementi in via di differenziazione ghiandolare, si attacca il vaso dorsale per del connettivo che, partendo dalla basale, manda propaggini involucranti il vaso dorsale e imbriglianti le cellule pericardiche.

oc. 4 C. ob. 8.

16, 17, 18, 19, 20. *Cellule pericardiali in ninfa di II forma.*

Piccole mononucleate, binucleate più grandi; lobulo plurinucleato, dal quale s'individuano cellule mononucleate. A forte ingrandimento appaiono nel corpo cellulare glomerulini eosinofili. (Solo 20: cellula più fortemente ingrandita). oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

21, 22. *Cellule pericardiali in ancor giovane regina complementare* (sez. trasversa del torace). Elementi più giovani (plurinucleati, a reticolo plasmatico netto) all'apice della formazione pericardica; elementi più vecchi, ricchi di concrezioni cristalline gialle, alla base: 21: oc. 1 ob. 8.
22: oc. 4C. ob. 8.

23, 24, 25, 26. *Cellule pericardiali in vecchia regina complementare* (da sezione trasversa del torace). Tessuto sinciziale pericardico, tutto vacuolare, come costituito da tanti otricoli ripieni di grosse concrezioni giallo-marrone (23: tratto del tessuto pericardiale; 24: apice della piramide pericardiale) Concrezioni più piccole in elementi meno vecchi, a briglie protoplasmatiche irraggianti numerose da un nucleo (26; gli elementi più vecchi ridotti a sacchetti pieni di grosse concrezioni; 25: una maglia della rete pericardiale): 25 e 26 più fortemente ingranditi 23 e 24: oc. 4 C. ob $^1/_{15}$ I. O.

27, 28 *Nefrociti sparsi* (27: in giovane regina complementare; 28: in vecchia regina complementare.

Da elementi cellulari ben definiti, a struttura reticolare del protoplasma, fittamente granulati di cristallini gialli, si riducono a sacchetti senza briglie protoplasmiche nè nucleo, pieni di grosse sferiche concrezioni giallo-marrone. oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

29 *Cellule pericardiali nel torace di vecchia regina complementare* (da sezione longitudinale mediale). Sotto i terghi (meso- e metanoto) le fascie muscolari longitudinali dorsali, e, sotto, la formazione pericardiale, verso l'apice (confronta tav. IV fig. 53). oc. 4 C. ob. 4.

Tavola III.

30. *Connettivo epicardico (tra vaso dorsale e tergiti) in Ninfa di II forma* (porzione più ingrandita della fig. 15, tav. II). oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

31. *Setto perineurale in Ninfa di II forma* (da sezione longitudinale). Tra i lobi adiposi circola l'emolinfa ricca di amebociti. oc. 4 C. ob. 8.

32, 33, 34, 35, 36. *Tubi malpighiani in vecchie regine di complemento* (32, 33, 34: sez. trasverse; 35 e 36: sez. tangenziali, tratto a elementi poliedrici, tratto a elementi rotondati). In 32, elemento (tratto di malpighiano) ancor giovane, vedesi lo strato protoplasmatico basale e la zona interna granulo-filare basofila. In 33 è rappresentato un tratto di sezione ove spiccano concrezioni bianche rifrangentissime. In 34 il tubo, bordato da orlo striato, ha largo lume occupato da bolle di secrezione, e, nella parete epiteliale, concrezioni gialle come quelle che spiccano nettamente nel corpo cellulare degli elementi ghiandolari di 35 e 36. oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

37. *Tubo malpighiano di alato sciamante di «Calotermes»* (sez. trasversa). Lume ridottissimo: epitelio in piena attività secretoria, farcito di concrezionule sferitiche in elaborazione.
oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

38. *Tessuto adiposo in Ninfa di II forma.* Farcito di goccie grassose e di inclusioni albuminoidi. Al centro del lobulo una cellula urica, binucleata. Gli urosferiti sono andati disciolti.
oc. 4. ob. $^1/_{15}$ I. O.

39. *Tessuto adiposo in alato sciamante di «Calotermes».* Tra i mucchi di urosferiti spiccano, soprattutto ai margini dei lobuli, nuclei adiposi, vacuole grassose e cristalloidi albuminoidi, residui delle provvigioni ninfali. oc. 8 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

40, 41, 42, 43. *Urosferiti del tessuto adiposo di alato sciamante* (preparati per striscio e visti in sezione ottica, a livello dell'ilo); 42 e 43: osservati a luce polarizzata; (piano tavolino) oc. 8 C. ob $^1/_{15}$ I. O.

44. *Cristallo ptialurico in cellule pericardiali di giovani regine di complemento:* fortemente ingrandito.

45. *Tessuto adiposo in vecchia regina di complemento.* Cellule adipose reali, nucleolate, fortemente basofile, inquinate di granuli gialli. oc. 4 ob. $^1/_{15}$ I. O.

TAVOLA IV.

46. *Cellule uriche, cariche di urosferiti, trasparenti, in neonato di « Calotermes »* (sorpreso all'uscita dall'uovo) osservato vivente in acqua. oc. 4 ob. 5.

47 *Inserzione muscolare in Ninfa di II forma* (tratto ingrandito della fig. 1, tav. I). Le cellule ipodermiche si allungano a bastoncello che, prima di giungere alla fibra muscolare, che si arresta alla basale, si sfiocca in fascetti. oc. 4 C. ob. 8.

48, 49, 50. *Tegumenti di vecchia regina complementare*; 48: *porzione di sclerite* (coxa) *in sezione tangenziale.*

I grossi nuclei ghiandolari sono circondati da areole di granuli gialli: e fra queste (ghiandole ipodermali pigmentifere) s'interpongono piccoli nuclei ipodermali. oc. 4 C. ob. 8.

49. *Tratto di epimero in sez. trasversa.* Passando dalla cute molle alla regione sclerale, la cuticola s'inspessisce nello strato superficiale, e si riduce, nello strato profondo, a pochi fascetti: l'ipoderma, da appiattito, cresce a larga fascia dove spiccano, contornati da areole di granuli gialli, i grossi nuclei ghiandolari, tra i quali s'intramezzano colonnine, dal derma alla basale, con piccoli nuclei ipodermali. oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

50. *Tratto di tergite in sez. trasversa.* Le cellule ghiandolari pigmentifere appaiono come innicchiate nello stroma di piccoli nuclei ipodermali. oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

51. *Porzione di sclerite* (*in sezione tangenziale*) *di soldato di « Mastotermes ».* Come nel 48, tra le cellule ghiandolari pigmentifere s'interpongono piccoli nuclei ipodermali. Sopra, in qualche tratto, scorgesi il reticolo connettivale basale con nuclei triangolari ai nodi. oc. 8 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

52. *Cellule pericardiali di operaio di « Mastotermes »* (sul piano del tavolino). oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O.

53. *Mesotorace* (in sez. trasversa) *di vecchia regina di complemento.*

Un po' schematizzata: mostra l'ipoderma ghiandolare sclerale (tergale e pleurale), la fascia di tessuto escretore che riempie la cavità pericardica e i nefrociti sparsi (2 presso l'esofago). oc. 1 ob. 4.

54, 55. *Calice dell'ovariolo in vecchia regina di complemento*; [54 *estremità prossimale dell'ovariolo* (mostra coaguli guttiformi di sostanza gialla tra le cellule coriogene); 55: *tratto, più fortemente ingrandito, della parete del calice* (mostra coaguli guttiformi di sostanza gialla tra le maglie di uno stroma fatto di nuclei ramificati)].

56. *Ovidutto* (in sez. trasversa) *in regina complementare giovane.* Un grosso coagulo eosinofilo riempie quasi il lume. oc. 4 ob. $^1/_{15}$ I. O.

57, 58. *Tubo malpighiano in Ninfa di II forma* (sez. trasversa). 57: oc. 4 C. ob. $^1/_{15}$ I. O. 58: tratto più fortemente ingrandito per mostrare i granuli minutissimi tra le maglie tondeggianti del reticolo protoplasmico.

C. Jucci dis.

C. Jucci dis.

Lit. Cucchi, Pellegrini, Pieroni & C. Pavia

C. Jucci dis.

Lit. Cucchi, Pellegrini, Peroni & C. Pavia

C. Jucci dis.

Lit. Cucchi, Pellegrini, Piersanti & C. Pavia

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXIII. (1892-1924). Fasc. 6°. Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 5°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIV. Fasc 9°
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. Fasc. 5°.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XX. Fasc. 10°-12°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXX 1923)

Serie quinta — Volume XIV — Fascicolo X.

FEDERICO MILLOSEVICH

IL FERRO METEORICO DI UEGIT

(SOMALIA ITALIANA)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Il ferro meteorico di Uegit (Somalia italiana).

Memoria del Socio F. MILLOSEVICH

presentata nella seduta del 13 gennaio 1924.

Il ferro meteorico, che è descritto nella presente Memoria, è stato ritrovato nel giugno 1921 dal tenente Michele Dall'Olio, in località Dersa, ad est di Uegit, nei pressi della carovaniera Uegit-Oddur (Somàlia italiana). I pozzi di Uegit (El Uegit) sono situati nell'altipiano fra il Giuba e l'Uebi Scebeli, a circa 60 chilometri in linea retta ad oriente di Lugh. Il ferro stesso fu, a cura del tenente Dall'Olio, trasportato a Mogadiscio ed in seguito dato in consegna all'Ufficio del Genio civile della colonia [1].

S. E. Luigi Federzoni, Ministro delle colonie, aderendo alla preghiera da me rivoltagli volle destinarlo in dono al Museo mineralogico dell'Università di Roma, nel quale esiste già una ricca collezione di meteoriti. Di essa il ferro di Uegit, per le sue dimensioni veramente notevoli e non comuni, è diventato il più bell'ornamento. Vadano a S. E. Federzoni i miei più vivi ringraziamenti per il dono veramente prezioso fatto al Museo mineralogico della Sapienza, splendida e, pur troppo, quasi ignorata raccolta di minerali, che è senza dubbio la prima d'Italia e costituisce uno dei maggiori tesori del nostro Ateneo.

Compio anche il dovere di ringraziare S. E. Riveri, già Governatore della nostra colonia dell'Oceano Indiano, per la premura posta nel far pervenire a destino la meteorite e nel fornirmi le informazioni riguardanti il suo ritrovamento.

L'epoca della caduta non è ben precisata: tuttavia, da informazioni assunte dagli indigeni del luogo, la caduta risalirebbe a circa 70 anni fa. Che la data della caduta sia relativamente recente, si desume dallo stato di relativa freschezza della crosta, che è pochissimo ossidata superficialmente. Gli stessi indigeni affermano esistere, nei pressi di El Uri (Uegit) e di Ircud (Lugh), altri due massi consimili; ma manca ancora conferma di tale esistenza.

La meteorite fu rinvenuta intera e solo in seguito fu divisa in due pezzi, per comodità di trasporto. Ambedue i pezzi, che combaciano perfettamente, sono in possesso di questo Museo. Solo un piccolo frammento fu rilasciato nel 1921 dal governatore al tenente Dall'Olio come ricordo personale. Tale frammento deve essere quello che passò

[1] Lettera 9 aprile 1923, del governatore della Somàlia italiana.

poi nelle mani del maggiore Ugo Ferrandi, l'illustre esploratore della Somàlia, e fu poi successivamente ceduto al prof. P. Vinassa, che a sua volta ne fece dono all'Istituto di mineralogia dell'Università di Parma.

Il peso complessivo del ferro meteorico, detratto quello del piccolo frammento che non conosco con precisione, è di kg. 251,800.

Non è uno dei giganti della specie, come il grosso blocco di Chupaderos (14.114 kg.) che si trova nella scuola delle miniere del Messico, o quello di Bendegò (5300 kg.) del museo di Rio de Janeiro, o il ferro di Cranbourne (3731 kg.) del British Museum ; non raggiunge neanche i grossi calibri del Hof Museum di Vienna (Penkarring Rock, 909 kg.) o del Museum d'histoire naturelle di Parigi (Charcas, 775 kg.); ma non cessano per questo le sue dimensioni di essere veramente notevoli e rare a riscontrarsi.

Forma e superficie esterna. — La forma è, nell'insieme, discoidale con una superficie pianeggiante ed un'altra fortemente convessa. La superficie pianeggiante, più estesa, ha figura quadrangolare, con lati rispettivamente di 70, 45, 30 e 20 cm.

Il disco (o, meglio, il mezzo disco) ha approssimativamente un asse più lungo, di circa 65-70 cm., e uno più corto, di cm. 45; e l'altezza, cioè la lunghezza della normale alla faccia pianeggiante, di 30-35 cm.

Per la sua forma caratteristica (una metà della superficie pianeggiante e l'altra invece irregolarmente convessa) il ferro di Uegit si avvicina a quelli di Morito, di N. Goureyma, di Algoma, tra i più noti nella letteratura, e un poco forse anche a quello di Agram, sebbene questo sia, in complesso, molto più appiattito. Come nei sopracitati, anche nel ferro di Uegit si può credere che la parte pianeggiante sia il dorso, mentre quella convessa il petto della meteorite.

La superficie esterna si presenta notevolmente diversa nelle varie parti.

La faccia maggiore pianeggiante ed altre due, pure pianeggianti, una minore (che si vede di scorcio in alto a destra nella fig. 1 della tav. I) e un'altra più piccola ancora, ad essa contigua, hanno gli incavi poco profondi, della forma di semplici avvallature ad orli netti precisi, in qualche caso quasi rettilinei, che dànno l'impressione come di impronte di scheggie staccatesi dalla superficie. Invece il rimanente della meteorite presenta incavi profondi, con contorno che è sempre curvilineo, e assai fitti, cosicchè la superficie tutta si presenta profondamente e irregolarmente incavata. Su questa parte della superficie si nota inoltre una insolcatura profonda e prolungata che la divide in due porzioni ineguali ; (si può osservare nella parte inferiore della fig. 3, tav. I). Tale solcatura probabilmente corrisponde alla traccia di quel piano di minor coesione, il quale ha permesso che, con un'esplosione artificialmente provocata, il blocco si dividesse nei due frammenti di cui si è detto sopra. Infatti, corrispondentemente a questo solco è avvenuta con l'esplosione la frattura, che ha interessato poi anche la faccia piana superiore, dividendola all'incirca per mezzo.

Gli incavi poco pronunciati presentano nel loro interno un insieme di piccoli solchi ad andamento quasi parallelo, cosicchè la loro superficie appare come striata e rugosa: in qualcuno è evidente la sporgenza di lamine di camacite che si incrociano fra loro come i lati di un triangolo equilatero, risultandone, fra lamina e lamina, dei solchi regolari e rettilinei. La striatura o rugosità è dovuta evidentemente all'attrito con l'atmosfera, mentre

i solchi rettilinei sono in relazione con la struttura del ferro stesso. Gli stessi incavi mostrano orli netti e pressochè sprovvisti di una vera crosta di fusione: il che dimostra che il contatto della superficie pianeggiante con l'atmosfera fu relativamente breve.

A tali impressioni della faccia pianeggiante si converrebbe più il nome, proposto da Berwerth ( ), di *remagliti*, in opposizione a quello, più comune e più noto, di *piezogliti* proposto dal Daubrée. Il nome di remagliti fu dato dal Berwerth nella sua descrizione del ferro di Quesa, che, come è noto, è veramente un frammento di un grosso cristallo ed è tutto limitato da faccie piane di rottura (ottaedro) o di scorrimento (icositetraedro), e vale a significare infossature dovute a distacco o scheggiatura. Non sarei però d'accordo col Berwerth nel generalizzare tale nomenclatura, attribuendo una siffatta origine a tutte le infossature o irregolarità di superficie dei ferri meteorici. Quello di Uegit, con la profonda diversità che presenta nelle due porzioni ben distinte della superficie, mette in evidenza che in realtà possono aversi, anche nella stessa meteorite, infossature cui conviene il termine di piezogliti ed altre cui conviene meglio quello di remagliti, attribuendo ai due termini il loro stretto significato etimologico (figg. 1 e 3, tav. I).

Le piezogliti propriamente dette nel ferro di Uegit, a differenza delle remagliti, hanno la superficie interna piuttosto liscia e l'orlo più arrotondato; sono molto più profonde e più fittamente addensate fra loro. La parte in cui esse si presentano fu certamente a più lungo contatto con l'atmosfera, cosicchè su di essa si esercitò più a lungo il fenomeno della fusione superficiale.

Una ragione, che mi induce a non accettare la generalizzazione del termine remagliti proposto dal Berwerth, sta anche in ciò: egli ritiene che il prolungato processo di ossidazione e di alterazione, dovuto al lungo contatto con la superficie terrestre, abbia, nei ferri di ritrovamento, che sono poi i più comuni, più di ogni altra causa contribuito a conferire alle incavature l'aspetto che attualmente presentano. Ma nel ferro di Uegit (in cui, come si disse, l'ossidazione non è molto progredita, anche perchè la data di caduta è relativamente recente) sta il fatto che si trovano incavature profonde accanto ad altre poco accentuate, con particolarità di superficie interna molto diverse fra loro.

Le tre superfici pianeggianti, una maggiore e due di ben minori dimensioni, che hanno un carattere così diverso dal rimanente, rappresentano certo piani di rottura e fanno ritenere che il nostro meteorite sia un frammento di altro maggiore spezzatosi dopo il suo ingresso nell'atmosfera. Infatti, anche lo spessore della crosta di fusione è minore in corrispondenza delle superfici pianeggianti dove non supera il mezzo millimetro, mentre tale spessore nelle altre parti si accosta al millimetro. È noto che la rottura si produce assai facilmente nei ferri a spiccata struttura ottaedrica, come è il nostro, secondo piani corrispondenti alle faccie stesse dell'ottaedro, perchè secondo questi piani si sono venute ordinando e sovrapponendo le impalcature camacitiche, che ne rappresentano la parte essenziale. Viene quindi naturale la supposizione che le tre superfici pianeggianti corrispondano a tre piani di ottaedro.

Ma potrebbe anche ammettersi che uno dei piani, forse il più esteso, corrispondesse ad una superficie di separazione per scorrimento, giacchè è noto che nei rari ferri con for-

[1] Berwerth F., *Das Meteoreisen von Quesa*, « Annalen K. K. natur. histor. Hof museums », *23*. 318; Wien, 1909.

ma ben definita furono constatate, sia faccie di rottura secondo {111}, sia faccie di scorrimento secondo {211}.

Tra i ferri con facce distintamente piane sono notevoli quello di Franceville [1] e quello, già ricordato, di Quesa.

Nel caso attuale propenderei a ritenere che la superficie pianeggiante maggiore sia un piano di rottura e non di scorrimento, per le seguenti considerazioni:

a) non si osserva una faccia regolarmente piana, come dovrebbe essere se si trattasse di scorrimento e come si è effettivamente osservato nel ferro di Quesa. Essa, oltre a presentare incavature, presenta anche rilievi o sporgenze che s'incrociano regolarmente, come i lati del triangolo equilatero; e, se non ha quella tipica apparenza di rottura quale è quella che si osserva spezzando artificialmente un ferro meteorico, ciò si deve al fatto che il contatto con l'atmosfera ha cancellato o, meglio, attenuato con una fusione superficiale le caratteristiche di questa apparenza;

b) le tre faccie pianeggianti formano angoli che, per quanto si possano misurare in modo grossolanamente approssimativo, corrispondono a quelli propri dell'ottaedro;

c) ho tagliato una lastra parallelamente ad una delle facce pianeggianti ed ho ottenuto figure di Widmannstaetten corrispondenti a piani di ottaedro.

Componenti e struttura. – Fra i normali componenti di un ferro meteorico prevale in quello di Uegit la *camacite*, di gran lunga su gli altri. La presenza di lamelle di camacite ben sviluppata, sia in spessore, sia in estensione, dà al ferro una delle più belle e tipiche strutture ottaedriche che si conoscano.

In prevalenza la camacite è lamellare, e le lamine sono di dimensioni piuttosto considerevoli. Una sezione levigata, e poi corrosa con acido nitrico diluito (tav. II), mostra in modo evidente questa prevalenza delle lamelle, nelle quali ho misurato una lunghezza massima di 40 millimetri circa, mentre non sono rare le lunghezze intorno ai 30 millimetri. La larghezza massima è di tre millimetri; ma in questo caso si tratta generalmente di lamelle doppie, formate da due liste parallele contigue, solo separate da un sottile strato di tenite. Le lamelle sono o lunghe e sottili, o brevi e tozze, e talvolta alla estremità presentano il passaggio ad una struttura grossolanamente granulare.

La camacite granulare forma, in genere, delle masse indipendenti dalle liste stesse, spesso nell'interno dei campi da queste liste limitati. Non mancano esempi di quella che il Brezina chiamò Wickelkamacit, la quale in genere si sviluppa intorno a inclusi di minerali, nel nostro caso, di troilite, come si vede nella parte centrale della figura della tav. II. In questi casi la camacite ha forma e sviluppo indipendenti da quella delle liste, di cui non occupa neanche in modo evidente i campi centrali; presenta meno distinte le linee di Neumann e racchiude sempre noduli di troilite e più raramente piccoli cristalli di schreibersite.

La camacite lamellare ha in modo evidentissimo la struttura di geminazione polisintetica, di cui le linee di Neumann sono il risultato, dimodochè quel riflesso orientato, o damascatura che dir si voglia, che ne è la conseguente e più spiccata manifestazione, è in genere così tipico che, girando una lastra levigata e corrosa, si vedono zone e striscie

[1] Preston U., *Franceville metéorite*, « Proceed. ot the Rochester Ac. of sc. », *4*, p. 75.

passar repentinamente da una lucentezza viva a una vera opacità. Ma anche la camacite granulare presenta in molti casi (specialmente quando i granuli sono di dimensioni abbastanza grandi) le linee di Neumann, e queste procedono parallelamente in modo da far riconoscere che i granuli stessi sono isorientati.

La *tenite* appare, come al solito, in rilievi lunghi e sottili, dello spessore di un foglio di carta o poco più, sporgenti sulla superficie levigata e corrosa col caratteristico colore bianco-lucente tendente al giallo; di solito essa forma il contorno delle lamine di camacite e talvolta, quando queste sono di rilevanti dimensioni, si interpone nella loro linea mediana, dividendole in due. In altri casi, piuttosto frequenti, la delimitazione tenitica delle lamine di camacite non è completa.

Non manca anche la tenite come costituente di una massa plessitica differenziata nell'interno dei campi di camacite; e a questo proposito anzi si può osservare che nel nostro ferro si hanno due distinte varietà di plessite: una che si può considerare come un aggregato finamente cristallino di camacite e di tenite, nel quale la prima ha la forma di piccoli granuli, mentre la seconda si presenta più spesso in striscioline di dimensioni quasi microscopiche: l'altra, meno frequente, che è una massa plessitica vera e propria col solito aspetto apparentemente omogeneo o finissimamente granulare di colore oscuro poco lucente, anzi quasi opaco.

La *schreibersite* è un elemento poco comune nel nostro ferro, in confronto di altri; si presenta talora con laminette a sezione regolare e qualchevolta col caratteristico aspetto di geroglifici, entro la camacite lamellare e anche nei campi plessitici della prima maniera.

Frequente, e talora anche in noduli di grandi dimensioni, è la *troilite*. Sopra la superficie esterna della meteorite si osserva un incavo molto diverso dalle cosidette piezogliti, a contorno elittico col maggior asse lungo 45 mm. e il minore di mm. 20, che è evidentemente l'impronta di un grosso nodulo di troilite in gran parte scomparso, sia per asportazione in causa della maggior fusibilità durante il percorso atmosferico della meteorite, sia per alterazione successiva durante il lungo soggiorno della massa di ferro a contatto del terreno. In fondo a questo incavo rimangono, ancora freschi e ben distinguibili per la lucentezza e per il colore caratteristico, resti di troilite come fu osservato anche da Brezina nel ferro di Cabin Creek e da Meunier nel ferro di La Caille. Da queste dimensioni massime degli aggregati di troilite si passa a quelle minori e fino a quelle microscopiche; molto frequenti sono i piccoli noduli a contorno irregolare, di diametro intorno al millimetro, circondati dalla cosiddetta Wikelcamacit.

Non ho potuto osservare ordinamento regolare di lamelle di troilite nell'interno del ferro a costituire le lamine di Reichenbach, mentre le note forme cilindriche osservate in tanti ferri meteorici sono piuttosto frequenti, ma di dimensioni non rilevanti (4 mm. per ½ mm.).

All'esame microscopico alcuni di questi noduli di troilite mostrano una costituzione non omogenea, come se fossero costituiti di straterelli sovrapposti, fra i quali s'intercalano sottilissime laminette, probabilmente di grafite, a giudicar dal fatto che, sciogliendo qualche noduletto isolato di troilite in acido cloridico diluito, resta quasi sempre un tenue residuo che ha i caratteri di materia grafitica.

Struttura della zona superficiale. — Molto interessante riesce l'esame della struttura della zona superficiale del ferro, quella nella quale, per la elevata temperatura, la camacite originaria ha subìto una trasformazione; il più caratteristico segno di questa trasformazione è la graduale scomparsa delle linee di Neumann nella camacite, che diventa granulare o finamente cristallina. Come già è stato osservato da Fraenkel, da Tammann e Berwerth [1], con questa trasformazione si passa ad una lega che ha tutti i caratteri dei cristalli misti di γ-ferro-nichel artificiale.

Costituzione chimica. — I dati dell'analisi che qui riporto sono la media di varie determinazioni. Dopo varii saggi quantitativi di orientamento ho prescelto il metodo di separazione del ferro dal nichel e dal cobalto col succinato sodico; il nichelio fu determinato come nichel-dimetilgliossima secondo Tschugaeff-Brunk; nichelio e cobalto furono separati secondo Fischer-Brunk, col nitrito potassico. Fosforo e zolfo furono determinati a parte.

Fe	92,39
Ni	7,11
Co	0,55
S	0,21
P	0,11
	100,37

Fra i molti ferri, che hanno una composizione chimica e una struttura consimil a quello di Uegit, ricordo quelli più noti e meglio studiati: il ferro di Toluca (Messico) con

Fe	91,13
Ni	7,54
Co	0,66
Cu	0,01
P	0,07
	99,41

per il quale Cohen [2] calcola la seguente composizione:

camacite 95,33; tenite 4,67;

(1) Fraenkel V., und Tammann G., *Zeitschr. f. anorg. Chemie*, 1908, *60*, 428; Berwerth P. *Sitz. ber. Akad. Wien.*, 1905, *114*, p. 343; Berwerth F. u. Tammann G., *Ueber die natürliche und Kunstliche Brandzone der Meteoreisen und d's Verhalten der « Neumann' schen Li en » in erhitzten Kamacit*, Wien, « Sitz. berich. d. K. Akad. d. Wissensch », 1911, cxx, 31.

(2) Cohen, *Meteoreisen Studien (II)*, « Ann. K. K. Naturhistorischen Hofmuseum Wien », VII, 1893, p. 143.

e quello di Lion River (Namaqua-Land, Sud-Africa), di cui Cohen (¹) diede la seguente analisi:

Fe	92,06
Ni	7,79
Co	0,69
P	0,05
	100,59

e che ha con quello di Uegit anche le più spiccate analogie strutturali (²).

(¹) idem., *Meteoreisen Studien (V)*, ibidem, 1897, p. 42.

(²) Brezina e Cohen, *Die Structur und Zusammensetzung der Meteoreisen*, Tafel XIX; Stuttgart 1887.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tav. I.

Fig. 1. — Ferro meteorico di Uegit, $^1/_6$ circa del naturale — In alto superficie pianeggiante più estesa, con remagliti; in alto, a destra e di scorcio, altra superficie pianeggiante più piccola. In basso, parte della superficie convessa, con piezogliti.

Fig. 2. — Ferro meteorico di Uegit, $^1/_6$ circa del naturale. — Superficie opposta alla precedente, con grandi e tipiche piezogliti. Nella parte superiore fu tagliata una lastra; e la superficie piana, parallela all'incirca ad una faccia di ottaedro, fu levigata e corrosa con acido nitrico diluito.

Fig. 3. — Ferro meteorico di Uegit, $^1/_6$ circa del naturale. — Visto di lato; inferiormente la profonda insolcatura che corrisponde al piano di rottura del blocco.

Tav. II.

Lastra levigata e corrosa con acido nitrico diluito, parallela all'incirca ad $\{111\}$: $^4/_3$ del naturale. Tipica struttura ottaedrica con camacite predominante Nelle liste più grandi di camacite sono visibili le linee di Neumann. Nel centro, nodulo di *Wickelcamacit* con inclusi cristalli di troilite; in basso, a sinistra, aggregati cilindrici di troilite.

Fig. 1

Fig. 2

Danesi-Roma

Pubblicazioni della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXXIII. (1892-1924). Fasc. 6º. Sem. 1º.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXXII. (1892-1923). Fasc. 5º-10º.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIV. Fasc. 9º.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. Fasc. 5º.
NOTIZIE DEGLI SCAVI DI ANTICHITÀ. Vol. I-XX. Fasc. 10º 12º.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO XI.

Prof. BERNARDO ODDO

IL MAGNESILPIRROLO

ED IL SUO IMPIEGO PER LA SINTESI DI COMPOSTI PIRROLICI

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RELAZIONE

letta dal Socio A. Angeli, relatore, anche a nome del Corrisp. A. Peratoner, nella seduta del 1° giugno 1923, sulla Memoria del prof. Bernardo Oddo, avente per titolo: *Il magnesilpirrolo ed il suo impiego per la sintesi di composti pirrolici.*

Il prof. Bernardo Oddo ha esteso al pirrolo ed ai suoi derivati il metodo di sintesi, fondato sull'impiego dei composti organomagnesiaci, che ha reso celebre il nome del prof. V. Grignard. In tal modo egli ha potuto non solo realizzare la preparazione di un grande numero di derivati del pirrolo che ancora non erano noti, ma altresì ha reso più accessibili altri termini della stessa serie che da molto tempo erano conosciuti.

Nel complesso, il contributo portato dal prof. B. Oddo è notevole e merita lode, avendo egli ammannito un vasto materiale che potrà essere utilmente consultato da quanti si occupano dello studio dei derivati pirrolici, i quali vanno acquistando un interesse sempre maggiore per la loro presenza e funzione negli organismi vegetali ed animali.

Per questa ragione i Commissari propongono che la Memoria del prof. B. Oddo venga inserita negli Atti accademici.

Il magnesilpirrolo ed il suo impiego per la sintesi di composti pirrolici.

Memoria del prof. BERNARDO ODDO

presentata nella seduta del 15 aprile 1923

INTRODUZIONE.

Nel momento in cui la chimica organica, già ricca dei più svariati e preziosi metodi sintetici, che ne hanno reso rapidissimo lo sviluppo anche nei campi della tecnica in genere, veniva ad impossessarsi, con le combinazioni organomagnesiache, di un altro meraviglioso strumento di sintesi, non poteva non fermarsi l'attenzione sopra un capitolo della serie dei composti eterociclici: quello del pirrolo, prodotto questo di interesse ognora crescente, come uno dei costituenti principali di tutto un insieme di sostanze naturali. Malgrado infatti la semplicità e l'eleganza di molti dei processi sintetici noti, se ci riferiamo a quelli di carattere più generale, e che richiedono già preformato l'anello eterociclico, non si può fare a meno di riconoscere che al pirrolo, per le sue proprietà aromatiche poco spiccate, solo alcuni sono applicabili. Esso infatti ha, come è noto, forte tendenza alla resinificazione o alla polimerizzazione (ciò che ricorda il comportamento dei composti non saturi della serie grassa) e, se è suscettibile di alcuni processi di sostituzione, comuni agli idrocarburi aromatici (per es., l'alogenazione), ed anche di alcuni metodi diretti di sostituzione che, nelle classi aromatiche, si riscontrano solamente se presenti nel nucleo un ossidrile od un amminogruppo (p. es., reazioni di copulazioni con i diazocorpi), non lo è per altri. Così per esso non esistono processi nè di solfonazione nè di nitrazione diretti; la reazione di Friedel e Craft non è applicabile, e nella stessa alogenazione bisogna aver cura che la reazione si svolga non troppo energicamente, cercando di lavorare con soluzioni diluite, acquose-alcooliche od alcaline.

Ottimi servigi ha reso in alcuni casi il suo derivato potassico, ma sono casi particolari che non si possono ritenere come facenti parte di un metodo generale di sintesi. Il pirrolato potassico poi, prodotto solido, alterabilissimo con l'acqua, insolubile nell'etere, conduce costantemente a composti all'azoto.

Potere quindi disporre di un derivato metallico del pirrolo che, al pari dei comuni composti organo-magnesiaci, potesse aversi facilmente in soluzione nell'etere anidro, pronto cioè a reagire nel modo più blando, è stato il mio obbiettivo; ed essendo riuscito nell'intento da qualche anno, reputo che, anche a rendere più agevoli le ulteriori applicazioni di esso prodotto, meritino di essere riepilogate in un'unica Memoria le ricerche

che ho finora eseguite, in parte da solo, in parte con la collaborazione di studenti laureandi e di colleghi, ricerche che (comprese nello stesso titolo) si riferiscono pure ai magnesilderivati del pirrolo sostituito o condensato con altri nuclei come nell'indolo ed omologhi, e nel carbazolo.

Per dare poi una trattazione completa dell'argomento, vi comprenderò anche i lavori di quei chimici, nei quali si fa uso della mia reazione.

Note preliminari.

Dalle ricerche, divenute ben presto numerose, eseguite sui composti organo-magnesiaci misti di Grignard (1902), un fatto era stato messo subito in evidenza, che poteva interessare il pirrolo: che cioè le ammine primarie agiscono in soluzione eterea, sostituendo un atomo di idrogeno all'azoto col radicale magnesile [1] (equaz. I), ed in soluzione di etere amilico a caldo sostituiscono tutti e due gli idrogeni (equaz. II).

Durante la reazione si svolge l'idrocarburo, corrispondente all'ioduro alcoolico impiegato; trattando successivamente con acqua, si rigenera la base primitiva [2]:

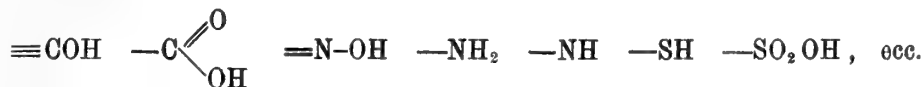
$$\text{I.}\quad CH_3\,MgI + RNH_2 = CH_4 + RNH(MgX) \xrightarrow{+\,H_2O} MgX(OH) + RNH_2$$

$$\text{II.}\quad RNHMgX + CH_3\,MgX = CH_4 + RN(MgX)_2 \xrightarrow{+\,2\,H_2O} 2\,MgX(OH) + RNH_2$$

Lo stesso veniva dimostrato per le basi secondarie [3], con la differenza che l'unico atomo d'idrogeno all'azoto viene sostituito dal magnesile anche in soluzione nell'etere anidro:

$$RR_1{:}NH + CH_3\,MgX = CH_4 + RR_1{:}NMgX \xrightarrow{+\,H_2O} MgXOH + RR_1NH$$

Quasi contemporaneamente si arrivava a stabilire che tale facilità di reazione, con eliminazione dell'idrocarburo corrispondente all'alogenoalchile usato, avviene con tutti quei corpi la cui funzione chimica è caratterizzata da uno dei seguenti aggruppamenti atomici:

$$\equiv COH \quad -C{\Large\langle}^{O}_{OH} \quad =N{-}OH \quad -NH_2 \quad -NH \quad -SH \quad -SO_2OH\text{, ecc.}$$

(1) Col nome di *magnesile* ho proposto di chiamare i gruppi monovolanti alogenati –MgCl, –MgBr, –Mg I, ed in generale il gruppo –Mg X, indicando con X, come è di uso generale, l'alogeno.

In questo modo i composti C_2H_5MgI, C_6H_5MgBr ecc., come pure quello, che vedremo tosto, del pirrolo e dell'indolo, assumono rispettivamente i nomi di *magnesiletano*, *magnesilbenzolo*, *magnesilpirrolo*, *magnesilindolo*, che riescono più brevi ed eleganti delle diciture ordinarie (ioduro di magnesioetile, bromuro di magnesiobenzolo, iodiomagnesiopirrolo, alogenomagnesioindolo). Nelle reazioni poi di sostituzione e di addizione del gruppo –Mg X, sarà più agevole chiamarlo senz'altro *magnesile*, invece di gruppo alogeno–magnesiaco.

(2) L. Meunier, *Bl. 29*, 314, (1903): *Proc. chim. soc. 20*, 165, (1904).

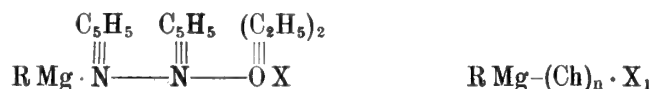
(3) *B. 37*, 3978, (1904).

aventi cioè uno o più idrogeni, facilmente sostituibili, come pure con quei prodotti nei quali la presenza di radicali negativi dà carattere acido ad alcuni atomi d'idrogeno, quali i composti chetonici capaci di assumere la forma enolica o di coesistere sotto la forma stessa:

$$—CO–CH_2— \xrightarrow{+\ RMgX} —C(OMgX)=CH—$$

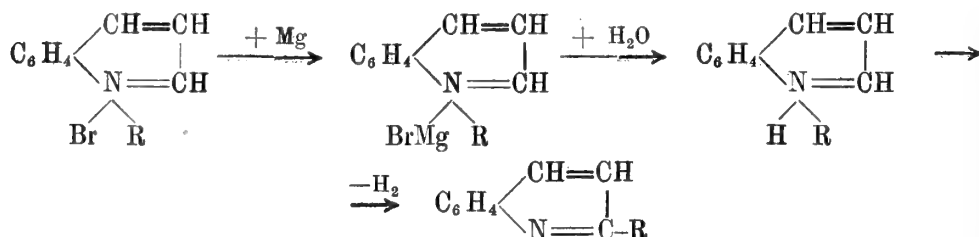
La reazione in tutti questi casi si svolge in modo così netto, che qualche anno dopo ci si servì di essa per fare dei preziosi metodi [volumetrico (1) e ponderale (2)] di determinazione degli idrogeni attivi nelle molecole organiche.

Per le basi terziarie che non hanno più alcun atomo di idrogeno sostituibile, io intanto avevo dimostrato (3) che possono formarsi due tipi diversi di magnesilcomposti col variare delle condizioni di esperienza. Il primo risulta costituito da prodotti di addizione delle seguenti formole:

$$RMg\cdot \overset{C_5H_5}{\overset{|||}{N}}——\overset{C_5H_5}{\overset{|||}{N}}——\overset{(C_2H_5)_2}{\overset{|||}{O}}X \qquad\qquad RMg–(Ch)_n\cdot X_1$$

indicando con Ch la chinolina, nei quali rimane inalterato il comportamento delle stesse combinazioni organo-metalliche (4), e che vennero in seguito confermati da composti analoghi ottenuti da Fr. e L. Sachs (5) da Tschelintsef e da altri (6).

Il secondo tipo è costituito da prodotti isomeri, i quali, trattati con acqua, non dànno, come quelli, l'idrocarburo corrispondente all'alchile e la base libera, ma invece la base medesima alchilata nel nucleo. Essi si ottengono dall'azione simultanea del magnesio sull'alogeno-alchile e la piridina o la chinolina, e la base alchilata si forma secondo gli schemi seguenti:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CH=CH\\ |\\ N(Br)(R)=CH\end{matrix}\right. \xrightarrow{+\ Mg} C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CH=CH\\ |\\ N(BrMg)(R)=CH\end{matrix}\right. \xrightarrow{+\ H_2O} C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CH=CH\\ |\\ N(H)(R)=CH\end{matrix}\right. \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{-H_2} C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CH=CH\\ |\\ N=C–R\end{matrix}\right.$$

Ora, di tutte le ricerche eseguite fino allora con le basi azotate organiche, certamente il fatto più notevole era la trasposizione dell'alchile.

Fu così che ebbi l'idea di provare se anche nei composti ciclici ad azoto immidico non potesse ripetersi una migrazione analoga, e precisamente dello stesso magnesile

(1) Zerewitinoff, *B. 40*, 2023, (1907).
(2) B. Oddo, *G. 41*, I, 1709 (1911) e *B. 44*, 20388 (1911).
(3) *R. A. L. 13*, II, 177 (1904); ibid. *16*, I, 413 e 538 (1907).
(4) *G. 37*, II, 356 (1907).
(5) *B. 37*, 3088 (1904).
(6) Tschelintsef. *B. 39*, 773 (1906) e *40*, 1487 (1907); J. Honben, ibid. *38*, 3017 (1905); M. Popoff. J. d. Russ. *Phys. chem. 38*, 681; Senier, Austin und Clarke, *Proc. Chem. Soc. 81*, 227, e *87*, 1469.

MgX, ed arrivare, in tal modo, a quei magnesilcomposti, col gruppo sostituente al carbonio che, per la loro natura, sono adatti a tutte le sintesi.

Riuscii nell'intento, facendo reagire il pirrolo su una soluzione eterea di magnesilmetano : ogni goccia di pirrolo produce un vivo sviluppo di gas (metano) e si forma un prodotto oleoso, solubile nell'etere, che è il derivato organo-magnesiaco del pirrolo, il quale non presenta la costituzione (I), ma l'altra (II):

$$\underset{NH}{\overset{HC—CH}{HC\quad CH}} \xrightarrow{+ MgI\,CH_3} CH_4 + \underset{N\cdot MgI}{\overset{HC—CH}{HC\;\;\text{I}\;\;CH}} \longrightarrow \underset{NH}{\overset{HC—CH}{HC\;\;\text{II}\;\;C\,MgI}}$$

$$\text{(II)} + H_2O \longrightarrow MgI(OH) + \text{pirrolo}$$

cioè quella di un α-magnesilpirrolo.

Questa costituzione mi venne confermata, fin dal primo lavoro, dai seguenti due fatti sperimentali:

1° facendo gorgogliare nella soluzione eterea del prodotto ottenuto una corrente di anidride carbonica, si forma a temperatura ordinaria l'acido α-pirrolcarbonico:

$$NH\left<\begin{matrix}CH=CH\\ C(MgI)=CH\end{matrix}\right. + CO_2 = NH\left<\begin{matrix}CH=CH\\ C(CO_2MgI)=C\end{matrix}\right. \xrightarrow{+H_2O} MgI(OH) +$$

$$+ NH\left<\begin{matrix}CH=CH\\ C(CO_2H)=CH\end{matrix}\right.$$

mentre col pirrolato potassico, per ottenere la stessa reazione occorre una temperatura elevata.

2° facendo agire l'ester clorocarbonico, si ottiene l'ester etilico dello stesso acido α-pirolcarbonico (I), contrariamente a quanto avviene, in condizioni analoghe, col pirrolato potassico che conduce unicamente alla tetroluretana (II):

$$\text{I.}\quad NH\left<\begin{matrix}CH=CH\\ C(CO_2C_2H_5):CH\end{matrix}\right. \qquad\qquad \text{II.}\quad CO\left<\begin{matrix}OC_2H_5\\ N=C_4H_4\end{matrix}\right.$$

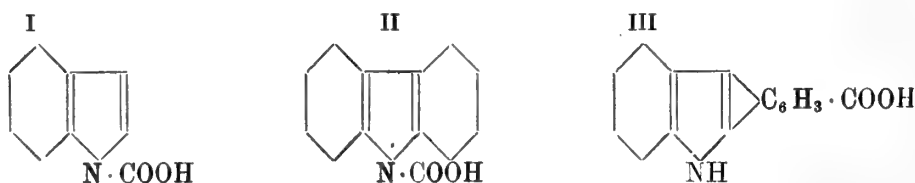
Vedremo che le successive reazioni, studiate da me, come da altri, hanno confermato la costituzione del magnesilpirrolo. Tuttavia un fatto merita di essere subito notato : e cioè che, se la corrente di anidride carbonica attraverso ad esso la si fa passare, a caldo, quando sia stato prima liberato dall'etere che lo tiene in soluzione, allora, invece dell'acido pirrolcarbonico sostituito in α, si forma il corrispondente β-acido.

Anche nel caso del magnesile, quindi, così come avviene con altri N-derivati del pirrolo, la temperatura ha notevole influenza sulla posizione finale che il gruppo stesso viene a pigliare; e ciò è degno di rilievo, specialmente per l'interesse che hanno pure acquistato i prodotti pirrolici β-sostituiti, dopo i lavori sulle materie coloranti dell'emoglobina e della clorofilla.

A riguardo di tali migrazioni, sono poi particolarmente notevoli alcuni fatti osservati con l'indolo ed i suoi omologhi e col carbazolo, attraverso i loro magnesilderivati

che pur'essi forniscono. Li riassumo quì brevemente, perchè mettono bene in rilievo l'influenza esercitata dalla natura diversa dei gruppi sostituenti.

Ho già ricordato che facendo passare una corrente di anidride carbonica, a temperatura ordinaria, sulla soluzione eterea del magnesilpirrolo, si arriva all'acido α–pirrolcarbonico; operando nelle stesse condizioni, od a temperature più elevate, sul magnesilindolo, si ottiene invece costantemente l'acido N. indolcarbonico (I).

Questo comportamento si presenta diverso, non solo da quello del pirrolo, ma anche del carbazolo, del quale pur formandosi, a bassa temperatura, l'acido N-carbazolcarbonico (II), si riesce, aumentando la temperatura, ad ottenere la migrazione del carbossile ad uno degli atomi di carbonico dei due nuclei benzenici (III):

Esso si mostra caratteristico anche per il fatto che col medesimo magnesilindolo ho potuto ottenere la sintesi diretta dei suoi omologhi, e di altri corpi, ad es. chetonici, col gruppo sostituente al carbonio. La sostituzione allora, sia con gli alchili sia con gli acili avviene quasi costantemente in posizione β, che è ancora il posto che si trova di preferenza occupato nei prodotti indolici, provenienti dalla decomposizione di sostanze naturali, come lo scatolo, il triptofano ecc.; facendo invece uso degli esteri dell'acido clorocarbonico, ne risultano bensì derivati al carbonio, ma in posizione α.

Passando poi dall'indolo ai suoi omologhi (il metilchetolo e lo scatolo), considerandoli sempre attraverso i loro magnesilderivati, si osserva che il metilchetolo, pur avendo tutte e due le posizioni α del nucleo pirrolico occupate, fornisce facilmente l'acido al carbonio.

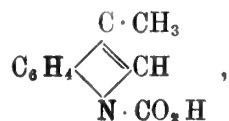
La sua formazione avviene per trasposizione del carbossile dall'azoto al carbonio, perchè, provocando l'assorbimento dell'anidride carbonica a temperatura ordinaria, ed a quella dell'ebolizione dell'etere etilico, dà solo in piccole quantità l'acido α–metil-β–indolcarbonico: $C_6H_4\langle\overset{C.CO_2H}{\underset{NH}{\diamond}}\rangle C\cdot CH_3$, mentre come prodotto principale si separa un corpo che ha pure le proprietà di un acido, ma si decompone a poco a poco in α–metilindolo e CO_2, essendosi formato l'acido α–metil–N–indolcarbonico, $C_6H_4\langle\overset{CH}{\underset{N\cdot CO_2H}{\diamond}}\rangle C\cdot CH_3$, analogamente cioè a quanto avviene col carbazolo, col quale infatti il metilchetolo presenta la maggiore analogia di costituzione:

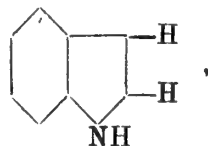
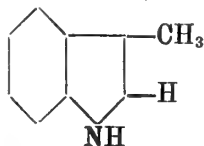
—H
—CH_3
NH

NH

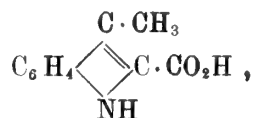
Se si fa avvenire invece l'assorbimento dell'anidride carbonica alla temperatura d'ebollizione del toluene, allora si ottiene unicamente l'acido α–metil–β–indolcarbonico, in modo cioè pure identico al carbazolo che fornisce l'acido al carbonio, come si è ricordato, solo ad elevata temperatura.

Lo scatolo, al contrario, si comporta diversamente, sia per la stabilità dell'acido all'azoto, sia per la temperatura di trasformazione di questo in acido al carbonio. Il suo magnesilderivato, in presenza di solventi o a secco, assorbendo anidride carbonica, dà costantemente l'acido β–metil–N–indolcarbonico

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} C\cdot CH_3 \\ \| \\ CH \\ N\cdot CO_2H \end{matrix}\right. ,$$

anche riscaldando fino a 200°. L'acido che così si ottiene è poi molto più stabile di quello corrispondente dell'α–metilindolo (fonde, con decomposizione, a 129°), e non trova riscontro se non nell'acido N-indolcarbonico, $C_6H_4\left\langle\begin{matrix} CH \\ \| \\ CH \\ N\cdot CO_2H \end{matrix}\right.$, che si decompone solo facendolo bollire con acqua, o riscaldando lentamente a 108°, alla quale temperatura prima fonde: comportamento, questo, che conduce a pensare ad una coppia di maggiore analogia: lo scatolo e l'indolo,

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} C-CH_3 \\ \| \\ C-H \\ NH \end{matrix}\right. \qquad\qquad C_6H_4\left\langle\begin{matrix} C-H \\ \| \\ C-H \\ NH \end{matrix}\right. ,$$

in opposizione ad un'altra costituita dal metilchetolo e dal carbazolo.

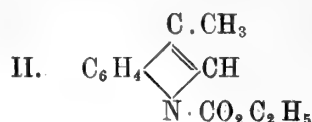
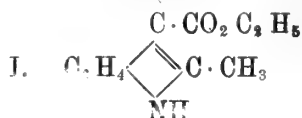
Si ottiene invece l'acido β-metil-α indolcarbonico,

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} C\cdot CH_3 \\ \| \\ C\cdot CO_2H \\ NH \end{matrix}\right. ,$$

provocando l'assorbimento dell'anidride carbonica sul composto magnesiaco dello scatolo alla temperatura di circa 210° (temperatura esterna del bagno), che, come si vede, è di molto superiore a quella richiesta per la formazione dell'acido al carbonio del metilchetolo.

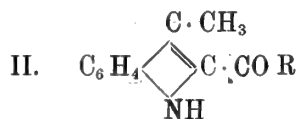
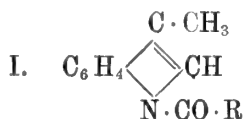
Queste differenze intanto, riguardo all'azione dell'anidride carbonica sui due magnesiaci dei C–metilindoli, si ripetono anche nell azione di altri reagenti, e qui voglio ancora notare il comportamento, rispetto agli esteri alchilici, dell'acido clorocarbonico ed a quello dei cloruri d'acidi.

Trattando con i primi il magnesilmetilchetolo, alla temperatura d'ebolizione dell'etere etilico, si formano unicamente e con rendimenti teorici l'ester dell'acido α–metil–β-indolcarbonico (I); il magnesilscatolo, nelle stesse condizioni, fornisce invece solo

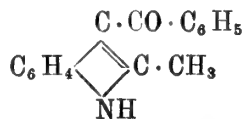
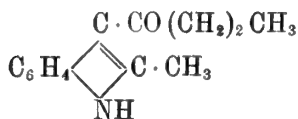
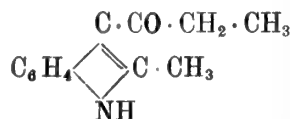
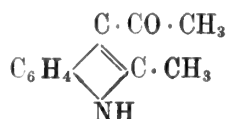
l'uretana (II), che è poi l'ester dell'acido all'azoto: l'acido β-metil-N-indolcarbonico:

$$\text{I.}\quad C_6H_4\langle C\cdot CO_2C_2H_5 \rangle C\cdot CH_3 \langle NH \rangle \qquad \text{II.}\quad C_6H_4\langle C.CH_3 \rangle CH \langle N\cdot CO_2C_2H_5 \rangle$$

Abbassando però la temperatura nel primo caso, ed innalzandola nell'altro, i due prodotti inversi che si dovrebbero formare non si ottengono: l'α-metilindolo, anche raffreddando con ghiaccio, fornisce sempre l'ester dell'acido al carbonio, per quanto con minore rendimento, perchè la reazione rimane incompleta; e lo scatolo, messo a reagire con l'ester etilico dell'acido clorocarbonico alla temperatura di 130°–140°, dà ancora l'uretana; incalzando poi nel calore sino a 240–250°, la maggior parte del prodotto si decompone, con formazione di anidride carbonica, di acido β-metil-N-indolcarbonico, di uretana e di scatolo, e solo in tracce pare che si formi l'ester dell'acido al carbonio, rimanendo così, anche qui marcata la differenza di comportamento fra il metilchetolo e lo scatolo.

Con i cloruri acidi, per ultimo, si nota che col magnesilscatolo si ottengono composti con gli acili all'azoto (I), quando si opera a temperature basse; tuttavia la loro formazione è accompagnata sempre da quella dei corrispondenti prodotti chetonici (II), e questi hanno il sopravvento se si riscalda appena alla temperatura d'ebollizione dell'etere. In tal caso gli isomeri prodotti all'azoto, o non si formano più affatto, o si hanno solo in tracce:

$$\text{I.}\quad C_6H_4\langle C\cdot CH_3 \rangle CH \langle N\cdot CO\cdot R \rangle \qquad \text{II.}\quad C_6H_4\langle C\cdot CH_3 \rangle C\cdot CO\,R \langle NH \rangle$$

Col metilchetolo poi la tendenza a dare derivati al carbonio è ancora più marcata. Così dai seguenti composti chetonici:

$$C_6H_4\langle C\cdot CO\cdot CH_3 \rangle C\cdot CH_3 \langle NH \rangle \qquad C_6H_4\langle C\cdot CO\cdot CH_2\cdot CH_3 \rangle C\cdot CH_3 \langle NH \rangle$$

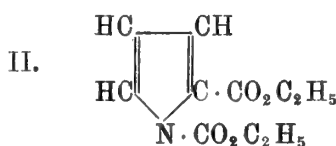
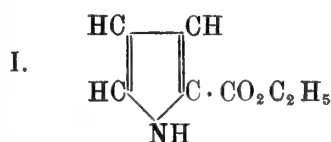
$$C_6H_4\langle C\cdot CO(CH_2)_2CH_3 \rangle C\cdot CH_3 \langle NH \rangle \qquad C_6H_4\langle C\cdot CO\cdot C_6H_5 \rangle C\cdot CH_3 \langle NH \rangle$$

non si è riusciti ad isolare se non tracce soltanto dell'isomero all'azoto dell'ultimo prodotto, e ciò operando unicamente a temperatura bassa, nel qual caso la reazione rimane quasi sempre incompleta, per cui si riottengono quantità diverse di α-metilindolo inalterato.

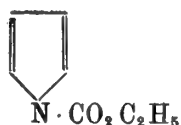
Mentre quindi con piccole variazioni di temperatura è ancora possibile con lo scatolo di ottenere N-acilderivati, ciò non avviene con il metilchetolo, e, confrontando questi risultati con quelli precedentemente esposti, si ha che, col magnesilderivato di quest'ultimo, anche i cloruri acidi si comportano in modo identico all'anidride carbonica ed agli eteri clorocarbonici. Per il magnesilscatolo invece, fra il comportamento dei cloruri acidi

è quello dell'anidride carbonica, e degli esteri clorocarbonici, si riscontra soltanto analogia, perchè con questi ultimi, anche a temperatura piuttosto elevata, si formano ancora come prodotti principali l'acido all'azoto e l'uretano ; mentre con i cloruri d'acidi basta innalzare di poco la temperatura, perchè si ottengano già non più i derivati all'azoto, ma quelli al carbonio. Con ciò, mentre si è condotti sempre alla conclusione di una differenza di mobilità fra il radicale sostituente l'idrogeno metinico del metilchetolo e quello dello scatolo, più accentuata nel primo che non nel secondo, resta dimostrato che nell'apprezzamento di detta mobilità non può trascurarsi la natura di tale radicale.

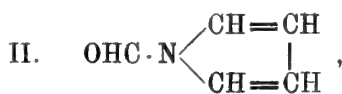
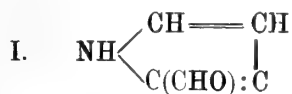
Vedremo, in seguito, come anche col magnesilpirrolo io stesso abbia potuto osservare che nell'azione dell'ester metilico dell'acido clorocarbonico si forma, con tutta probabilità, oltre al derivato sostituito in α (I), che è il prodotto principale della reazione, anche l'1–2–dietilester (II);

I. HC—CH / HC C · $CO_2C_2H_5$ / NH

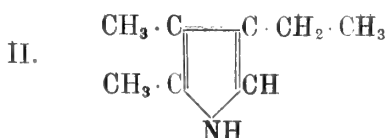
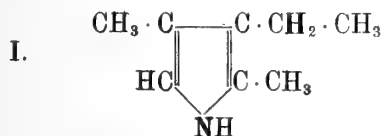
II. HC—CH / HC C · $CO_2C_2H_5$ / N · $CO_2C_2H_5$

Recentemente tale possibilità di ottenere anche per il pirrolo derivati all'azoto è stata confermata [1], essendosi riusciti, operando a bassa temperatura, ad ottenere l'N-carbossietilpirrolo :

N · $CO_2C_2H_5$

per azione del carbonato di etile sul magnesilpirrolo.

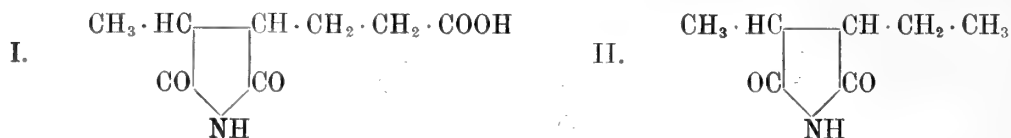
Pure recentemente [2] si è ritenuto probabile che anche nell'azione dell'etere formico sul magnesilpirrolo si formi, assieme con l'α-pirrolaldeide [2], l'N-formilpirrolo (II),

I. NH<(CH═CH)(C(CHO):C) II. OHC · N<(CH═CH)(CH═CH) ,

mentre rimane degno di nota, nei riguardi della natura dei radicali sostituenti, quanto ho potuto verificare, come vedremo meglio in seguito, nell'alchilizzazione del pirrolo attraverso sempre il suo magnesilderivato. Essa si compie preferibilmente in β-; invariate poi rimanendo le condizioni di esperienza, la formazione del β-derivato viene favorita dalla lunghezza della catena sostituente; fatto, questo, di cui non può sfuggirne l'importanza, in quanto che, completando l'osservazione precedentemente fatta, sia gli alchilpirroli che costituiscono gli emopirroli, quali ad es., il criptopirrolo (I) e l'isoemopirrolo (II),

I. CH_3 · C—C · CH_2 · CH_3 / HC C · CH_3 / NH

II. CH_3 · C—C · CH_2 · CH_3 / CH_3 · C CH / NH

(1) Tschelintsef e Skworzow, *C.* I., 789 (1916).
(2) Alessandri e Passerini, *G.* *51*, I, 262 (1921).

sia i prodotti di ossidazione dell'emoglobina e della clorofilla, cioè l'acido ematinico (I) e l'imide metiletilmaleica (II), nella quale può essere trasformato direttamente l'isoemopirrolo :

$$\text{I.}\quad \begin{array}{c} CH_3 \cdot HC\text{——}CH \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot COOH \\ CO \qquad CO \\ NH \end{array} \qquad\qquad \text{II.}\quad \begin{array}{c} CH_3 \cdot HC\text{——}CH \cdot CH_2 \cdot CH_3 \\ OC \qquad CO \\ NH \end{array}$$

contengono sempre le catene più lunghe in posizione β- del nucleo pirrolico.

Per ultimo col crescere del peso molecolare dello ioduro alcoolico e della temperatura alla quale si fa avvenire la reazione, si ottengono anche pirroli più volte alchilati.

Per proseguire nella descrizione delle esperienze, dividerò nei seguenti capitoli e sottocapitoli l'esposizione dei fatti trovati. Ho cercato di disporli in modo da offrire un legame fra reazioni analoghe, senza tuttavia trascurare del tutto l'ordine cronologico.

I. — *Preparazione del magnesilpirrolo.*

II. — *Costituzione.*

III. — *Azione dell'ossigeno, dello solfo, del selenio e del tellurio sul magnesilpirrolo.*

IV. — *Alogenopirroli.*

V. — *Azione degli ioduri alcoolici sul magnesilpirrolo.*
A) Alchilpirroli; B) Alchilizzazione diretta degli indoli; C) Su alcune reazioni degli indoli e sui loro polimeri; D) Sintesi del fillopirrolo; E) Pirrolenine.

VI. — *Sintesi di alcooli pirrolici.*

VII. — *Sintesi di chetoni pirrolici.*
A) Alchilpirrilchetoni; B) Basi piridilpirroliche; C) Basi chinolilpirroliche; D) Azione dei cloruri d'acidi organici sui magnesilindoli; E) Derivati acilici del carbazolo; F) Azione delle anidridi organiche sul magnesilpirrolo; G) Azione degli eteri d'acidi organici e del fosgene.

VIII. — *Sintesi di aldeidi pirroliche ed indoliche.*
Comportamento del nitrato di etile col magnesilmetilchetolo.

IX. — *Sintesi di acidi pirrolici.*
Acidi del gruppo dell'indolo ed acidi carbazolici.

X. — *Sintesi di eteri dell'acido α-pirrolcarbonico.*

XI. — *Sintesi di polipeptidi pirrolici e di alogeno ed ammino-metil-pirroili.*

XII. — *Sintesi di dichetoni pirrolici.*
Dichetoni indolici.

XIII. — *Sintesi di acidi chetonici pirrolici.*

XIV. — *Conclusione.*

I.

Preparazione del magnesilpirrolo.

Per tale preparazione, che può essere fatta con due metodi diversi, serve bene lo stesso apparecchio, di cui si fa uso per ottenere i comuni composti organo-magnesiaci. È costituito essenzialmente da un pallone chiuso da un tappo a due fori, da uno dei quali passa la canna di un refrigerante a bolle, terminante con una doppia valvola ad acido solforico (di cui solo la parte seconda, cioè l'esterna, contiene acido), e dall'altro un imbuto a rubinetto, piegato opportunamente.

1º metodo (1). Si prepara, prima, del magnesilmetano o magnesiletano, secondo il noto metodo di Grignard (2); poi, servendosi dell'imbutino a rubinetto, annesso all'apparecchio, vi si aggiunge una quantità equimolecolare di pirrolo, diluito del doppio suo volume di etere anidro. Terminata l'aggiunta, si riscalda a b. m. fino a cessazione completa di sviluppo gazzoso (occorrono pochi minuti); si ha così per ultimo il magnesil-pirrolo in soluzione nell'etere (od eventualmente separato in parte), soluzione che è colorata in un bel verde grigiastro.

Col raffreddamento però, e vedremo tosto la ragione, la colorazione passa al bruno, diventando sempre più intensa.

2º metodo (3). Seguendo il metodo, or ora descritto, si richiede la preparazione preliminare di un comune magnesiaco, ciò che conduce ad una perdita di tempo non trascurabile, quando si voglia lavorare con quantità piuttosto rilevanti. Si può arrivare invece ugualmente al magnesil-pirrolo, facendo un'unica operazione, mettendo cioè, assieme col pirrolo, l'alogenoalchile ed il magnesio; il tutto in presenza di etere anidro.

La reazione si inizia subito vivamente e, mentre si sviluppa l'idrocarburo corrispondente allo ioduro alcoolico impiegato, si nota la scomparsa del magnesio. In tal modo si arriva al magnesil-pirrolo, in non più di mezz'ora.

Il magnesil-pirrolo possiede tutti i caratteri di un organo-magnesiaco: si altera all'aria umida, assorbe l'anidride carbonica ed anche l'ossigeno atmosferico, ed è dotato di una grande reattività. Volendolo utilizzare, non si ha da cambiare nulla all'apparecchio; basta infatti far cadere, a poco a poco, mediante l'imbuto a rubinetto, il composto (d'ordinario in soluzione eterea) che si vuole far reagire.

(1) *G.* *39*, I, 649 (1909); *Seventh international congress of applied chemistry*, section IV, a I: « Organic chemistry and allied industries », pag. 214, London 1909.

(2) La natura dell'alogeno attaccato all'alchile ha, non rare volte, notevole importanza nei riguardi delle reazioni che si vogliono poi fare svolgere sul magnesilpirrolo che ne risulta. In linea generale ho potuto constatare che è preferibile partire dal bromuro di etile invece che da uno ioduro alcoolico. Andando avanti, avremo occasione di giustificare tale preferenza.

(3) *G.* *44*, I, 482 (1914).

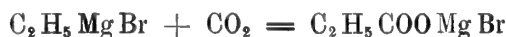
La formazione di magnesilderivato, seguendo l'uno o l'altro dei predetti metodi, non rimane limitata solo al pirrolo, ma è estensibile anche agli omologhi del pirrolo, come all'indolo ed ai suoi omologhi ed anche al carbazolo. Così sono stati preparati magnesilderivati degli omopirroli e dell'α-etil-pirrolo; dell'α-α_1-dimetil-pirrolo e dell'α-β_1-dimetilpirrolo; del 2-3-5-trimetil-pirrolo ed altri ancora, che hanno pure servito a definire interessanti quesiti, come quello della identificazione dei prodotti trialchilati del pirrolo, aventi un posto β-libero.

Non si ottengono invece magnesilderivati con i pirroli aventi un alchile od un arile all'azoto [1], contrariamente a quanto si era supposto al riguardo [2] con l'N-metil-pirrolo:

$$\text{(pirrolo) CH} \cdot \text{N} \cdot CH_3 \xrightarrow{+ C_2H_5MgBr} \text{(pirrolo) C} \cdot MgBr \cdot \text{N} \cdot CH_3 + C_2H_6$$

I.

Aggiungendo dell'N-metil-pirrolo ad una soluzione eterea di C_2H_5MgBr, questa rimane perfettamente limpida e sviluppa dell'etano solo per ulteriore aggiunta dell'acqua, avvenendo allora la scomposizione del C_2H_5MgBr, mentre si riottiene l'N-metil-pirrolo. Se si fa poi passare una corrente di anidride carbonica, non si arriva all'acido N-metil-α-pirrolcarbonico $\begin{matrix} CH{=\!=}C \\ | \\ CH:(CO_2H)C \end{matrix}\!\!>NCH_3$, come dovrebbe avvenire se fosse presente il magnesiaco (I); il pirrolo terziario rimane invece inalterato e si forma l'acido corrispondente all'alogenoalchile impiegato, con un atomo di carbonio in più, secondo la nota sintesi:

$$C_2H_5MgBr + CO_2 = C_2H_5COOMgBr$$

Facendo cadere, al contrario, del cloruro di acetile sulla mescolanza di N-metil-pirrolo e di C_2H_5MgBr, si ottiene dell'N metil-α-acetilpirrolo $CH_3 \cdot N\!\!<\!\begin{matrix} CH{=\!=}CH \\ | \\ C(CO \cdot CH_3):CH \end{matrix}$, ma questo acilderivato si forma anche per azione diretta del cloruro acido sul pirrolo terziario. La reazione avviene anzi con molta energia in assenza di solvente (etere anidro), per cui una buona parte del pirrolo si resinifica, in seguito all'eliminazione di acido cloridrico.

Comportamento analogo ho riscontrato con l'N-benzilpirrolo, per cui i pirroli terziarii vanno riferiti alle basi piridiche e chinoleiche, con la differenza che, date le loro proprietà di basi molto deboli, non arrivano a fornire il sale di ammonio, che è così caratteristico per quelle.

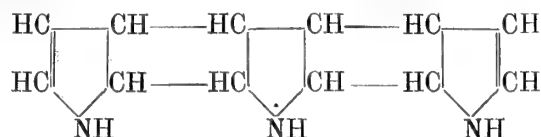
Anche del tripirrolo [3] è stato preparato il magnesilderivato [3]. Esso, aggiunto

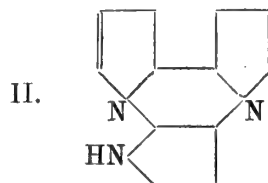
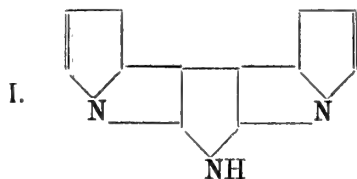
(1) B. Oddo, *G. 44*, I, 706 (1914) e *B. 47*, 2427 (1914).

(2) K. Hesse e F. Wissing, *B. 47*, 1416 (1914).

(3) Tschélintsef, Tronof e Voskressensky, *Journ. Soc. phys. chem.*, *R.* 47 1224 (1916). *Bl 20*, 521 (1916). Per altre applicazioni vedi anche ibid. *48*, 127 (1916) e Bl. *24*, 31 (1918).

ad una soluzione di bromuro di magnesio-etile, sviluppa etano, però solo in rapporto che è sensibilmente di un terzo di quello che ammetterebbe la formola che si è finora attribuita a tale polimero:

```
HC——CH——HC——CH——HC——CH
HC   CH——HC   CH——HC   CH
  NH        NH        NH
```

Il tripirrolo quindi conterrebbe anche degli azoti terziarii, e potrebbe essere rappresentato da una delle due seguenti formole strutturali:

I. N — N — NH   II. N — N — HN

In esse vi è del C unito a 2 atomi di N, come nell'urea e nelle ammidine, per cui si esplicherebbe anche la facile decomposizione del tripirrolo con formazione di ammoniaca, contemporaneamente ad indolo e pirrolo, come pure la formazione di sali.

Nello stesso modo si comporta anche il triindolo, di cui sarà detto avanti, per cui la condensazione dei due prodotti sarebbe identica, mentre verrebbe ad aversi una conferma per la formola (II) assegnata al tripirrolo (1).

E terminerò questo capitolo col ricordare che Zaleski (2), lavorando sulla mesoporfirina ha trovato che essa non fornisce dei derivati magnesiaci con i processi che conducono agli altri derivati metallici (Zn, Cu, Fe, Mn), ma si ottengono tali derivati applicando il mio metodo all'etere etilico della mesoporfirina. Nello stesso anno Willstätter e Forsen (3), facendo reagire il magnesilmetano sulla feofitina, il prodotto esente di magnesio che si ottiene dalla clorofilla-*a*, per azione moderata degli acidi, osservò che essa fissa nuovamente il magnesio e ne conclude che la clorofilla sembra appartenere alla medesima classe di magnesilcomposti da me ottenuti nel gruppo del pirrolo, che sono capaci di fissare l'anidride carbonica.

II.

Costituzione.

Scacciando a b. m. l'etere che tiene disciolto il magnesilpirrolo, rimane una sostanza oleosa, densa, di colore bruno, che non solidifica nemmeno raffreddando con buona miscela frigorifera. Chiusa alla lampada, in un tubo d'assaggio, non cambia d'aspetto, anche

(1) Su un'altra possibile struttura del tripirrolo vedi il lavoro di Pieroni e Moggi, comparso in *Gazz. chim. ital.*, fascicolo 2° del 1923, pag. 120, durante la stampa della presente Memoria, e su quella del triindolo il lavoro di B. Oddo e G. B. Crippa in R. A. L., vol. I, 1924.

(2) *B. 46*, 1687 (1913).

(3) *A. 396*, 180 (1913).

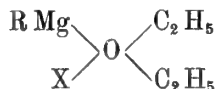
dopo molto tempo. Distillandola a secco e nel vuoto, terminato lo sviluppo tumultuoso di etere, fornisce pirrolo. Trattata con acqua, non si ottiene sviluppo alcuno di gas, mentre precipita del sale basico di magnesio che forma col pirrolo, che viene a liberarsi, una poltiglia colorata intensamente in bruno.

Per poterne intanto dimostrare la costituzione, mi sono avvalso dello stesso metodo, di cui già mi sono servito [1] per le comuni combinazioni magnesio-organiche di Grignard.

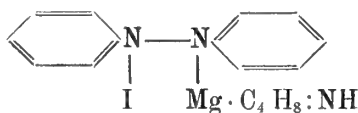
Questi, contemporaneamente a Blaise, studiando l'azione del calore su dette combinazioni, aveva notato che, per liberarle completamente dall'etere, bisognava riscaldarle nel vuoto, e per più giorni, vicino a 150°. Ritenne quindi, basandosi specialmente su un fatto analogo che Frankland aveva osservato preparando lo zincometile, che i composti magnesio-organici dovessero corrispondere alla formola generale

$$R \cdot MgX + O(C_2H_5)_2$$

Poco tempo dopo, Bayer e Villiger, fondandosi pure sul fatto che gli ioduri alcoolici non reagiscono col magnesio in presenza di altri solventi neutri, come benzolo, ligroina, ecc., vennero indotti ad ammettere che i magnesilcomposti dovessero considerarsi come derivati d'ossonio e ne diedero la formola:

$$\begin{matrix} RMg \\ X \end{matrix} \!\!>\! O \!<\!\! \begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix}$$

Mancava tuttavia una prova sperimentale a queste vedute teoriche, non essendosi potute fino allora isolare dette combinazioni. Ciò si ebbe con i prodotti di addizione che ottenni facendo agire su detti composti la piridina e la chinolina, prodotti che si formano con tutte le combinazioni magnesiache [2].

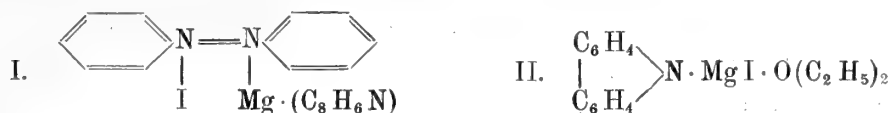
Il composto piridico del magnesilpirrolo si presenta sotto forma di polvere o grumi bianchi, tendenti al giallo. Alla luce piglia subito una tinta verde-bruna e si decompone facilmente con l'umidità in pirrolo, piridina, ioduro ed idrato di magnesio. La sua formola $C_{14}H_{14}N_3MgI$ è quella di un prodotto di addizione fra una molecola di iodomagnesio-pirrolo e due molecole di piridina. A differenza delle altre combinazioni piridiche, delle quali si è fatto cenno, non contiene la molecola di etere e vi si può assegnare la costituzione

$$\begin{matrix} C_5H_5N & — & NC_5H_5 \\ | & & | \\ I & & Mg \cdot C_4H_3 : NH \end{matrix}$$

corrispondentemente alla decomposizione che subisce con l'acqua.

(1) *G. 34*, II, 420 (1904) e *37*. I, 568 (1907); *R. A. L.*, *13*, 100 (1904) e *16*, I, 538 (1907).

(2) Le combinazioni piridiche trovarono poi successo anche nel dosaggio degli idrogeni attivi nelle sostanze organiche: Zerewitinoff, *B. 40*, 2023 (1907). Vedi anche *Analise und Constitutionsermittelung organischer Verbindungen*, von H. Meyer, II Auflage, pag. 547 e 930 (1909).

Costituzione analoga presenta il magnesilindolo sotto forma di composto piridico (I), mentre il magnesilcarbazolo (II)

$$\text{I.}\quad C_6H_4\text{-}N{=}N\text{-}C_5H_4 \;(\text{N-I};\ \text{N-Mg}\cdot(C_8H_6N)) \qquad \text{II.}\quad \begin{matrix} C_6H_4 \\ | \\ C_6H_4 \end{matrix}\!\!>N\cdot MgI\cdot O(C_2H_5)_2$$

trattiene una molecola di etere, come è risultato dall'analisi diretta, che si è potuta eseguire, di esso, senza cioè ricorrere alla preparazione del composto piridico.

Il magnesilindolo piridico, $C_{11}H_{11}N_3Mg,I$, forma una polvere fina, facilmente alterabile all'aria e, dopo qualche giorno, anche se tenuta nel vuoto. Trattata con acqua, dà indolo, piridina, ioduro ed idrato di magnesio.

Il magnesilcarbazolo, $C_{12}H_8NMgI\cdot O(C_2H_5)_2$, si presenta invece come olio, pesante, poco solubile nell'etere; dallo stato oleoso passa però facilmente a quello solido: polvere amorfa, bianca, ma che ingiallisce dopo qualche tempo, anche se mantenuta nel vuoto. Con l'acqua si decompone dando carbazolo, ioduro, ed idrato di magnesio; bollita colla maggior parte dei solventi organici neutri, qualora non siano perfettamente anidri, cede a questi il carbazolo, che si può anche separare dalla parte minerale per sublimazione.

La benzina, il toluene e il cimene anidri lo sciolgono molto facilmente.

III.

Azione dell'ossigeno, del selenio e del tellurio sul magnesilpirrolo.

Si è già accennato che la soluzione del magnesilpirrolo, appena preparata, quando è ancora calda per il riscaldamento subìto a b. m., è colorata in un bel verde-grigiastro; col raffreddamento però la colorazione passa al bruno che diventa sempre più intenso sia col tempo, sia nel caso che si debba sottoporlo a forte raffreddamento, prima di metterlo a reagire con alcuni prodotti.

Tale imbrunimento è dovuto all'ossigeno atmosferico [1], per cui in ogni caso, appena ultimata la preparazione, conviene fare avvenire il raffreddamento in corrente di azoto o di idrogeno.

Modificazioni di colore, ma, a vista, molto più lente, si hanno pure con i magnesilindoli e più specialmente col magnesilmetilchetolo.

Facendo gorgogliare una corrente di ossigeno sulla soluzione eterea di quest'ultimo si riesce a separare dei prodotti [2] che sembra possano riferirsi al colore rosso che si ottiene per ossidazione con ipoclorito alcalino della soluzione acquosa di α-metilindolo, colore quest'ultimo che è stato riscontrato identico al colore pure rosso che si

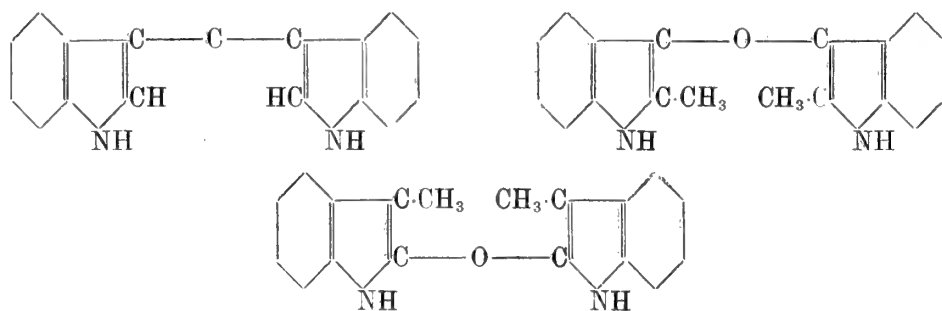
[1] B. Oddo e R. Mameli, *G. 43*, II, 504 (1904).
[2] G. 50, II, 268 (1902).

forma nelle orine, dopo ingestione di metilchetolo (¹). Io continuo ancora i miei studii sulla natura di tali rossi, che rimangono intanto differenziati da alcuni prodotti di autossidazione che, qualche anno prima, ero riuscito ad isolare (²) per l'indolo, il metilchetolo e lo scatolo, che mi hanno dato occasione di richiamare uno dei problemi più importanti nel dominio biologico, sia dell'uomo e degli animali superiori, sia di alcuni vegetali: il meccanismo cioè d'ossidazione dell'indolo per arrivare alle sostanze cromogene, generatrici delle materie coloranti che fanno capo al gruppo dell'indaco.

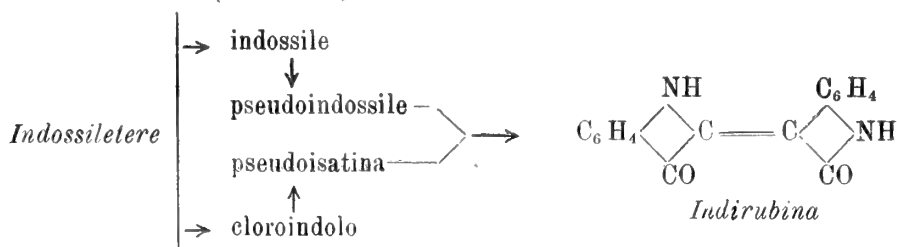
Ad essi prodotti spetta rispettivamente la costituzione seguente:

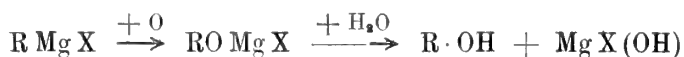
C—O—C ; CH, HC ; NH, NH

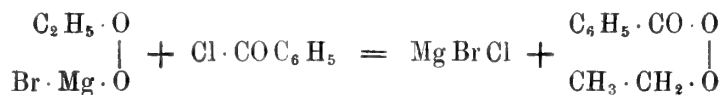
C—O—C ; $C\cdot CH_3$, $CH_3\cdot C$; NH, NH

$C\cdot CH_3$, $CH_3\cdot C$; C—O—C ; NH, NH

Sono cioè *eteri indossilici*, e difatti, per es., l'indossiletere, per scissione idrolitica fornisce indossile e cloroindolo. Questo, ossidandosi ad isatina, dà, per successiva copulazione, rosso d'indaco (indirubina):

Indossiletere → indossile ↓ pseudoindossile — ; → cloroindolo ↑ pseudoisatina — ; → $C_6H_4\langle{}^{NH}_{CO}\rangle C = C\langle{}^{C_6H_4}_{CO}\rangle NH$

Indirubina

Anche gli ordinarîi composti organo-magnesiaci sono capaci di fissare l'ossigeno atmosferico, e si è creduto dapprima di potere ciò rappresentare con lo schema semplice:

$$R\,Mg\,X \xrightarrow{+O} RO\,Mg\,X \xrightarrow{+H_2O} R\cdot OH + Mg\,X(OH)$$

Questa reazione però, oltre ad essere stata limitata alla serie aromatica dagli autori che se ne sono occupati (L. Bouveaul, F. Bodroux), si svolge in modo più complesso per la formazione di perossidi $R\cdot O\cdot O\cdot Mg\,X$ (³), più che di prodotti a tipo alcoolato, perossidi che sono riuscito anche ad isolare (⁴), facendo agire il cloruro di benzoile sul prodotto di ossidazione del magnesilderivato:

$$\begin{array}{c} C_2H_5\cdot O \\ | \\ Br\cdot Mg\cdot O \end{array} + Cl\cdot CO\,C_6H_5 = Mg\,Br\,Cl + \begin{array}{c} C_6H_5\cdot CO\cdot O \\ | \\ CH_3\cdot CH_2\cdot O \end{array}$$

(¹) Ch. Porcher e Ch. Hervieu, *Journ. de physiol. et phatol.* gen., 841: Benedicenti, *Arch. ital. di biol.*, *51*, 253.

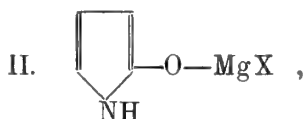
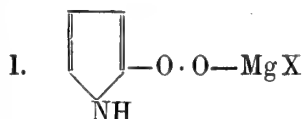
(²) *G. 46*, I, 323 (1916).

(³) H. Wuyts, *C. R. 148*, 930 (1909).

(⁴) B. Oddo, *G. 50*, II, 214 (1920).

Si forma cioè, in tal caso, del perbenzoato di etile, che si decompone durante la distillazione, per la maggior parte, e con piccole esplosioni, in benzoato di etile ed ossigeno.

A. Angeli e A. Pieroni [1], riprendendo in considerazione il fatto che l'anello pirrolico, oltre ad imbrunire facilmente stando all'aria, forma con gli ossidanti prodotti intensamente colorati, hanno supposto che dall'azione dell'ossigeno sul magnesilpirrolo, attraverso pure ad un perossido (I), più che ad un prodotto tipo alcoolato (II):

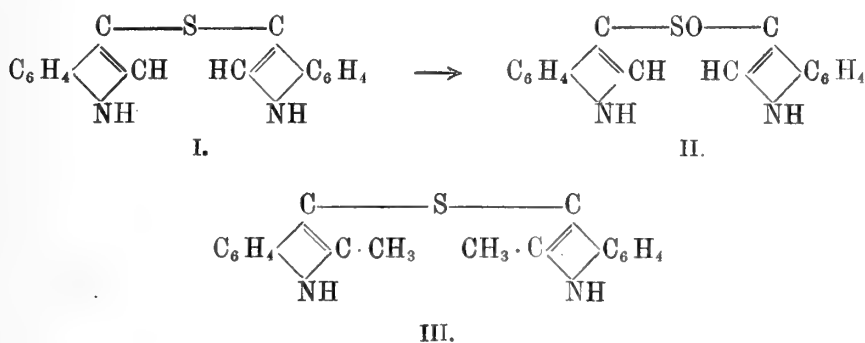
I. $C_4H_3NH—O \cdot O—MgX$ II. $C_4H_3NH—O—MgX$,

si potesse arrivare più vantaggiosamente a dei *neri di pirrolo* che lo stesso Angeli ritiene analoghi alle *melanine*, pigmenti, come è noto, neri o bruni, assai diffusi in natura, che si riscontrano nei capelli, nella pelle dei negri, nella sepia, ecc.

Nel fatto, facendo passare una debole corrente d'aria, purificata con potassa e priva d'umidità, si ottiene una polvere nerissima, di un nero molto più intenso di quello che si ha con altri ossidanti del pirrolo. Come gli altri neri poi, ed in modo del tutto simile ad una ippomelanina, ottenuta dai tumori dei cavalli, è insolubile negli alcali, e viene facilmente ossidata dalle soluzioni alcaline di acqua ossigenata e dal perossido di sodio.

Analogamente all'ossigeno si comportano lo zolfo, il selenio ed il tellurio rispetto al magnesilpirrolo. Si formano dei composti nerastri, infusibili, che, per le loro proprietà si mostrano come dei neri di pirrolo, contenenti rispettivamente solfo, selenio e tellurio [2].

Facendo agire invece lo solfo sul magnesilindolo e sul magnesilmetilchetolo, si ottengono dei prodotti cristallini [3], che sono rispettivamente il solfuro di diindolile, probabilmente sostituito in β-(I): aghi incolori, fusibili a 232°, e il solfuro di α-α-dimetildiindolile (III), fusibile a 226°:

C——S——C
C_6H_4 CH HC C_6H_4 ⟶ C——SO——C
NH NH C_6H_4 CH HC C_6H_4
I. NH NH
II.

C——S——C
C_6H_4 $C \cdot CH_3$ $CH_3 \cdot C$ C_6H_4
NH NH
III.

Sono cioè dei *tioeteri*, della stessa costituzione dei prodotti precedentemente citati. Il composto (I), trattato con SO_2 liquida, fornisce il solfossido di diindolile (II): aghi incolori fus. a 157°.

(1) *G. 49*, I, 154 (1919).
(2) M. Giua e F. Cherchi, *G. 50*, I, 362 (1920).
(3) W. Madelung. e M. Tencer, *B. 48*, 949 (1915).

IV.

Alogeno-pirroli.

È nota la facilità con cui gli alogeni sostituiscono gli idrogeni al carbonio del pirrolo ; siccome però, durante la reazione, si produce un idracido, questo resinifica con altrettanta facilità la parte del pirrolo che non si è ancora trasformata in derivato alogenico. È stato così escogitato l'uso di parecchie sostanze (alcool, alcali, ossidi dei metalli pesanti ecc.) atte a neutralizzare gli idracidi. In ogni caso, però, si arriva a composti tetralogenati; e così Ciamician e Dennstedt (1), facendo agire lo iodio in soluzione eterea sul pirrolato potassico, poterono ottenere il tetraiodopirrolo $C_4 I_4 : NH$. Cloropirroli, poi, più o meno sostituiti, si ottengono per azione del pentacloruro di fosforo sulla dicloromaleinimmide, come sulle immidi di altri acidi bibasici (2) ; ed in soluzione eterea ben secca, anche il cloruro di solforile (3) fornisce, a seconda la quantità di cloruro impiegato, pirroli mono-di-tri e tetra-clorurati. Il composto però mono- e il diclorurato non si sono potuti identificare se non nella soluzione eterea in cui si sono formati, aggiungendovi bromo che finisce col sostituire gli idrogeni metinici del pirrolo per dare clorotribromo e dicloribromopirroli.

Dato pertanto il comportamento diverso, che si riscontra in ogni reazione, del magnesilpirrolo rispetto a quello del pirrolato potassico, K. Hess e F. Wissing (4) hanno voluto studiare la reazione espressa dalla seguente equazione:

$$C_4H_3(NH)\text{—MgBr} + 2X = C_4H_3(NH)\text{—X} + Mg\langle^{Br}_{X}$$

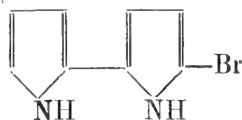
Essa si svolge molta violenta, ma, raffreddando energicamente (— 40 a 50°), si riesce ad ottenere, specialmente per il cloro ed il bromo, una reazione netta, senza formazione di prodotti resinosi. L'isolamento è stato ottenuto scacciando subito il prodotto di reazione con corrente di vapor d'acqua. Si ottiene così del monocloropirrolo sotto forma di olio pesante, incolore, di odore dolciastro, che ricorda quello del cloroformio ; si decompone con facilità.

Il monobromopirrolo è stato anche isolato, trattando con acqua ghiacciata il prodotto di reazione, e distillando, dopo avere eliminato l'etere, il residuo acquoso nel vuoto a bagno maria. Forma un olio che si cristallizza a bassa temperatura. Se si cerca però di disseccarlo o se si avvicina ad una fiamma, esplode.

Se, invece di distillare nel vuoto il residuo acquoso, lo si distilla a pressione ordinaria, si ottiene nel distillato una combinazione oleosa, di odore cloroformico, molto poco sta-

(1) *B. 15*, 2582 (1882); Ciamician e Silber, *B. 18*, 1766 (1885).
(2) Anschutz e Schröter, *A. 295*, 82 (1897).
(3) Mazzara e Borgo, *G. 32*, II, 315 e 317 (1902); *34*, I, 257 e 415 (1904); *35*, I, 478 (1905).
(4) *B. 47*, 1416 (1914); *48*, 1884 (1915).

bile, il cui tenore in bromo corrisponde a quello di un bromo dipirrolo:

```
 ┌───┐     ┌───┐
 ║   │─────║   │—Br
  \ /       \ /
  NH        NH
```

che potrà essersi formato in seguito ad eliminazione di 1 mol. di HBr fra 2 mol. di bromopirrolo.

Lo iodiopirrolo esplode ancora più facilmente dei precedenti pirroli monoalogenici. Per tutti tale potere esplodente pare che possa attribuirsi alla seguente netta decomposizione:

$$C_4H_3(X):NH \quad = \quad C_4 + NH_4 \cdot X$$

Il sale ammoniaco, nel fatto, è quello che predomina assieme con masse carboniose.

V.

Azione degli ioduri alcoolici sul magnesilpirrolo.

Lo studio dell'azione degli ioduri alcoolici sul pirrolo, come è noto, è valso a mettere in rilievo in modo spiccato le proprietà per le quali si distinguono, a parità di reazioni, i fenoli le ammine.

Facendoli agire sul pirrolato potassico si formano dapprima i pirroli terziarii; siccome però si adoperano elevate temperature, la reazione si complica e, mentre alcuni alchili si portano al carbonio, in modo da fornire gli omologhi del pirrolo, altri reagiscono così da condurre a prodotti basici, con comportamento quindi che si può paragonare a quello fornito da alcuni fenoli nell'alchilizzazione e specialmente dalla resorcina e floroglucina.

Le prime osservazioni, come si vedrà fra breve, su dette sostanze basiche vennero fatte con gli indoli e datano dal 1887 [1]; ad esse però fecero subito sèguito i primi lavori sui prodotti basici che si ottengono dal pirrolo [2]. Con l'uso del magnesilpirrolo si può arrivare sia agli omologhi del pirrolo, sia a sostanze basiche; partendo poi dal magnesilderivato di un pirrolo già alchilato, si è arrivati anche alla sintesi del fillopirrolo.

Le reazioni, in tutti i casi, si compiono nelle migliori condizioni, cioè in soluzione in etere etilico.

A) Alchilpirroli.

I primi termini che mi sono preoccupato di ottenere sono stati gli omopirroli: l'-α e β-metilpirrolo [3].

```
CH=CH——\                CH===CH\
|       >NH             |       >NH
CH=C(CH3)/              C(CH3)=CH/
```

(1) E. Fischer, *B. 20*, 819 e 2198 (1887); *A. 242*, 348 (1887)

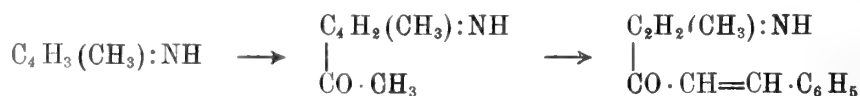
(2) Ciamician e Anderlini, *G. 18*, 557 (1888).

(3) B. Oddo e R. Mameli, *G. 43*, II, 504 (1913).

Essi si riscontrano nel cosidetto olio animale di Dippel (¹), che si ha per distillazione secca delle sostanze albuminoidee; e, indipendentemente dalle basi a cui si è fatto cenno, si è tentato di ottenerli per sintesi diretta, per azione dello ioduro di metile, sia sul pirrolo libero, sia sul suo composto potassico. In nessun dei due casi però, operando a pressione ordinaria, si ha reazione alcuna, e, operando in tubi chiusi, si ottiene quasi unicamente il derivato all'azoto: l'N-metilpirrolo, $CH_3 \cdot N\langle\begin{smallmatrix} CH=CH \\ | \\ CH=CH \end{smallmatrix}$. Facendo reagire invece lo ioduro di metile sulla soluzione eterea di magnesilpirrolo, basta un riscaldamento di due ore a b. m. perchè si abbia una reazione completa. Come prodotto principale non si forma però il composto α- ma il β-derivato; altri prodotti della reazione sono un dimetilpirrolo, con tutti e due i metili legati al carbonio, e delle sostanze basiche, ad odore fortemente piridico, che passano in parte, assieme coi pirroli alchilati nella distillazione a vapor di acqua, per quanto la distillazione venga compiuta in ambiente neutro, ed in parte si separano alcalinizzando le acque madri residuali. Per dimostrare la costituzione dei C-metilpirroli (studio che presentava speciale interesse, perchè con tutte le altre reazioni si erano ottenuti dei composti sostituiti nel posto α) (²), mi sono avvalso dell'ossidazione con potassa fusa e dell'azione del cloruro di acetile sui magnesilderivati corrispondenti ai pirroli alchilati.

Si sono così trasformati con la fusione con potassa gli omopirroli nei due acidi isomeri, l'acido α-pirrolcarbonico ed il β-pirrolcarbonico, che separai mediante i sali di piombo, per il loro diverso grado di solubilità in acqua.

Per azione del cloruro di acetile si è confermata l'esistenza del β-metilpirrolo, avendo ottenuto il composto acetilico corrispondente e di questo il derivato cinnamilico, mediante l'aldeide benzoica:

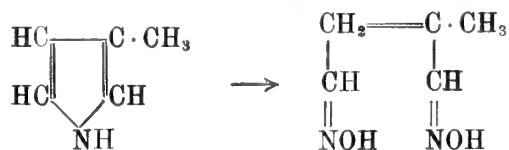
$$C_4H_3(CH_3):NH \longrightarrow \begin{array}{l} C_4H_2(CH_3):NH \\ | \\ CO \cdot CH_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} C_2H_2(CH_3):NH \\ | \\ CO \cdot CH{=}CH \cdot C_6H_5 \end{array}$$

Estendendo poi la preparazione ad altri pirroli alchilati, senza trascurare la preparazione dei derivati acetilici e cinnamilici, ho pure applicato ad essi la reazione di Ciamician e Zanetti (³), e cioè l'azione dell'idrossilammina sui pirroli, per cui vengono trasformati nelle ossime dei dichetoni, delle dialdeidi e delle chetoaldeidi corrispondenti, reazione che si è dimostrata molto vantaggiosa specialmente per stabilire la costituzione di prodotti isomeri fra di loro.

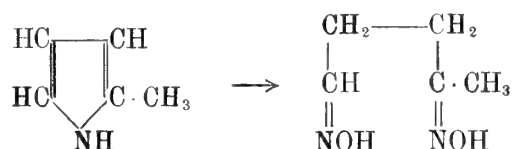
Ho operato anzitutto sul prodotto che si forma nella metilazione del pirrolo e per il quale si è detto trattarsi di β-metilpirrolo, assieme con piccola quantità di α-metilpirrolo, e poi sull'omologo superiore ottenuto dall'azione dello ioduro di etile sul magnesilpirrolo.

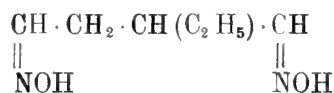
Col primo pirrolo alchilato infatti l'azione dell'idrossilammina mi ha fornito una diossima a p. f. 160°, che costituisce buona parte del prodotto della reazione, assieme

(¹) Weidel e Ciamician, *B. 13.* 75 (1880).
(²) Si è già fatto cenno a qualche eccezione, e su ciò avremo occasione ancora di ritornare.
(³) *G. 21*, I, 231, (1891).

con una piccola quantità di un'altra ossima isomera, a p. f. 69–70°. La prima deve essere considerata come la diossima dell'aldeide metilsuccinica e quindi come proveniente dal β-metilpirrolo,

$$\begin{array}{c} HC\!=\!C\cdot CH_3 \\ HC\!=\!CH \\ NH \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ll} CH_2 & C\cdot CH_3 \\ | & | \\ CH & CH \\ \| & \| \\ NOH & NOH \end{array}$$

mentre la seconda corrisponde alla diossima che si ottiene dall'aldeide levulinica e quindi come derivante dall'α-metilpirrolo:

$$\begin{array}{c} HC\!=\!CH \\ HC\!=\!C\cdot CH_3 \\ NH \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ll} CH_2 & CH_2 \\ | & | \\ CH & C\cdot CH_3 \\ \| & \| \\ NOH & NOH \end{array}$$

Operando invece la trasformazione ossimica sul C-etilpirrolo, non si è potuto isolare se non una sola ossima, a p. f. 140°, che corrisponde a quella della diossima dell'aldeide etilsuccinica,

$$\begin{array}{lr} CH\cdot CH_2\cdot CH\,(C_2H_5)\cdot & CH \\ \| & \| \\ NOH & NOH \end{array}$$

derivante dal β-etilpirrolo, mentre la propionilpropionaldiossima, che deriva dal pirrolo etilato in -α-, fonde a 84–85° [1]. Se a ciò si aggiunge che dello stesso C-etilpirrolo, preparato col mio metodo, anche l'acetil (I) ed il cinnamilderivato (II)

$$\text{I.}\quad \begin{array}{l} C_4H_3\,(CH_2\cdot CH_3):NH \\ | \\ CO\cdot CH_3 \end{array} \qquad \text{II.}\quad \begin{array}{l} C_4H_3\,(C_2H_5):NH \\ | \\ CO\cdot CH\!=\!CH\cdot C_6H_5 \end{array}$$

corrispondono a quelli del β-etilpirrolo, non rimane dubbio che nell'azione degli ioduri alcoolici sul magnesilpirrolo si formano preferibilmente i β-alchilpirroli. Siccome poi con lo ioduro di metile si è potuta isolare anche piccola quantità di derivato α-, è da supporre (rimanendo invariate le condizioni d'esperienza) che ciò sia in relazione con la lunghezza della catena sostituente, e che il composto α, o non si forma affatto, o si forma con rendimenti sempre scarsi da sfuggire facilmente nella ricerca.

È da aggiungere, per ultimo, che in tutte queste reazioni, oltre a piccole quantità di dialchilpirroli, si formano anche trialchilpirroli ed in quantità tale che sembrano aumentare col crescere del peso molecolare dello ioduro alcoolico e della temperatura alla quale si fa avvenire la reazione.

1) *Sintesi degli omopirroli.* Come si è già ricordato, si ottengono per azione diretta dello ioduro di metile sulla soluzione eterea del magnesilpirrolo, e formano la porzione bollente fra 143 e 147°, di cui la maggior parte è costituita da β-metilpirrolo.

[1] Zanetti, *G. 21*, II, 166 (1891).

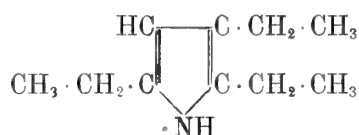
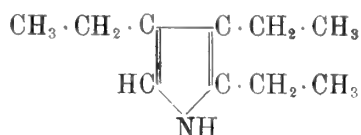
Nella reazione tra ioduro di metile e magnesilpirrolo, come pure nell'azione di altri alogeno–alchili, non si formano pirroli terziarii. Lo dimostra fra l'altro il fatto che i pirroli ottenuti dalle diverse reazioni reagiscono tutti, sia con una soluzione eterea di magnesiletano, sia col potassio.

2) *C-dimetilpirrolo* $C_4H_2(CH_3)_2:NH$. Si ottiene come prodotto secondario nella reazione precedente fra ioduro di metile e magnesilpirrolo. Alla pressione di 758 mm. bolle a 168–170°.

3) *Sintesi del β-etilpirrolo* $C_4H_3(C_2H_5):NH$. Ho riprodotto questo composto riscaldando a b. m. per quattro ore parti equimolecolari di ioduro di etile e magnesilpirrolo. Costituisce il prodotto principale della reazione ed alla distillazione passa fra 164 e 166°.

4) *C-dietilpirrolo.* Si forma assieme col prodotto precedente, facendo reagire lo ioduro di etile sul magnesilpirrolo. Di sei dietilpirroli teoricamente possibili, non ne sono noti se non due: un N-C-dietilpirrolo $C_4H_3(C_2H_5):N \cdot C_2H_5$ ed un C-dietilpirrolo. Il primo a p. di eb. 165–175° si forma nell'azione dello ioduro di etile sul pirrolato potassico (1), e non si conosce quale dei due idrogeni α– o β– del nucleo tetrolico sia sostituito dall'etile. Ugualmente non è nota la posizione d'attacco del C–dietilpirrolo a p. di eb. 185–187°, che si ottiene per azione dei vapori di alcool sulla polvere di zinco riscaldata a 270–280° (2). Il dietilpirrolo da me separato è certamente un C-dietilpirrolo, e da quanto è stato già esposto, uno degli alchili deve trovarsi in posizione β–. A pressione ordinaria bolle a 183–186°.

5) *C–trietilpirrolo.* Si forma assieme con mono- e dietilpirrolo, quando si riscalda per due ore a b. m. ed in assenza di etere etilico lo ioduro di etile con magnesilpirrolo. Bolle a 200–205°, formando un liquido colorato debolmente in giallo, che dà nettamente la reazione dei pirroli con la scheggia di pino. Reagisce col potassio e con una soluzione eterea di C_2H_5MgBr, per cui, essendo l'idrogeno immidico ancora libero, deve possedere una delle due formole

```
CH3·CH2·C=====C·CH2·CH3            HC=====C·CH2·CH3
         |    |                       |    |
        HC    C·CH2·CH3   CH3·CH2·C    C·CH2·CH3
          \  /                      \  /
           NH                        NH
```

cioè o quella di un α-β-$β_1$–trietilpirrolo o di un α-$α_1$-β-trietilpirrolo.

6) *Sintesi del β-propilpirrolo,* $C_4H_3(CH_2 \cdot CH_2 . CH_3):NH$. È il prodotto principale di reazione fra ioduro di propile e magnesilpirrolo; p. di eb. 176–179°. Appena distillato, si presenta come liquido incoloro, di odore pirrolico. Lasciato all'aria ed alla luce, s'ingiallisce dopo poco tempo, mentre si conserva abbastanza bene se tenuto in recipienti chiusi alla lampada.

Fornisce la reazione con la scheggia di pino.

7) *C-dipropilpirrolo e C-tripopilpirrolo.* Si formano assieme col prodotto precedente, anche quando si faccia avvenire la reazione fra ioduro di propile e magnesilpir-

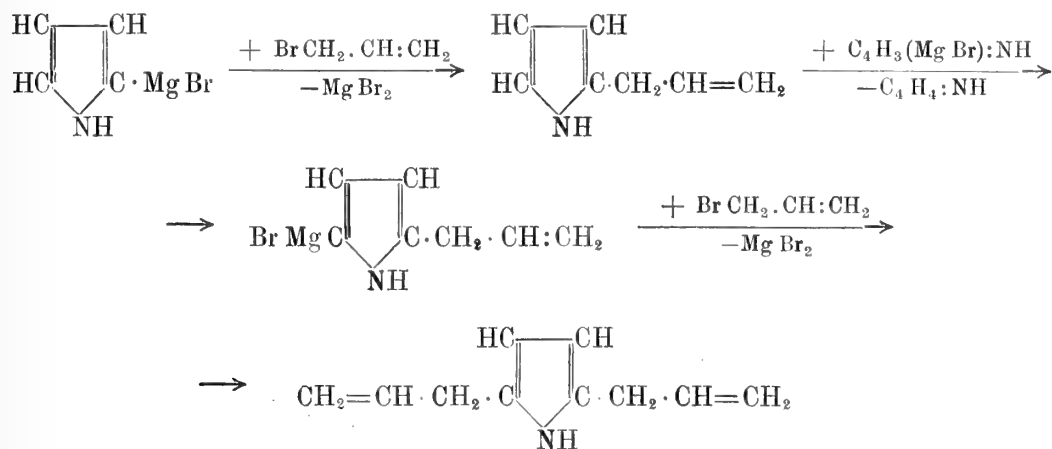
(1) Zanetti, *G. 19*, 290 (1889).
(2) Dennstedt., *B. 33*, 2563 (1890).

rolo in presenza di etere anidro. Il primo bolle, alla pressione di cm. 1,5 a 123-126°; il secondo a 150-160° alla stessa pressione. Appena distillati, ambedue sono incolori; come i termini precedenti, forniscono la reazione dei pirroli.

8) *Azione del bromuro di allile sul magnesilpirrolo.* L'azione di questo bromuro alcoolico sul magnesilpirrolo è stata studiata da K. Hess (1). La reazione si svolge analogamente alle precedenti, formandosi un monoallilpirrolo ed un diallilpirrolo. Molto verosimilmente, anche qui il gruppo allilico sostituisce gli idrogeni in β, più che in α. A spiegazione della formazione di composti bisostituiti l'A. ammette che tra il C-allilpirrolo ed il magnesilpirrolo si formino, per doppia decomposizione, del pirrolo ed un nuovo magnesilderivato, e che questo allora reagisca sul bromuro di allile per fissare un nuovo radicale allilico al posto del magnesile:

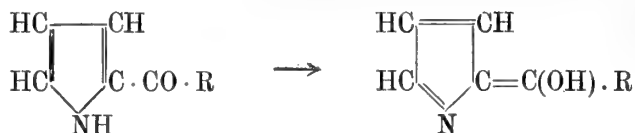
$$\begin{array}{c} HC\text{—}CH \\ HC\quad C\cdot MgBr \\ NH \end{array} \xrightarrow[-MgBr_2]{+BrCH_2.CH:CH_2} \begin{array}{c} HC\text{—}CH \\ HC\quad C\cdot CH_2\cdot CH{=}CH_2 \\ NH \end{array} \xrightarrow[-C_4H_4:NH]{+C_4H_3(MgBr):NH}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} HC\text{—}CH \\ BrMgC\quad C\cdot CH_2\cdot CH:CH_2 \\ NH \end{array} \xrightarrow[-MgBr_2]{+BrCH_2.CH:CH_2}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} HC\text{—}CH \\ CH_2{=}CH\cdot CH_2\cdot C\quad C\cdot CH_2\cdot CH{=}CH_2 \\ NH \end{array}$$

Ciò verrebbe confermato dal fatto che se si fa gorgogliare una corrente di CO_2 su del magnesilpirrolo, addizionato prima di allilpirrolo, è l'acido C-allilpirrolcarbonico che si forma, per cui l'allilpirrolo sposta il pirrolo dalla sua combinazione magnesiaca, mostrando così proprietà negative più pronunciate. Una variante opportuna a tale meccanismo d'azione, sarebbe tuttavia di incominciare la reazione col magnesile attaccato all'azoto, e si è visto, al riguardo, che, in casi per quanto ancora molto limitati, ciò bisogna necessariamente ammettere. Allora sarebbe il radicale che subirebbe la trasposizione in α o in β, ed il nuovo prodotto reagirebbe sul restante magnesiaco all'azoto per ripetere il giuoco di trasposizione, che potrà variare di misura a seconda della natura del gruppo sostituente. Il meccanismo così inteso, per quanto presenti sempre come punto debole la messa in libertà di pirrolo libero, rimarrebbe applicabile anche ai magnesilderivati dell'indolo e dei suoi omologhi, per i quali, come è già stato esposto, la sostituzione al solo azoto si è potuta constatare in più di un caso, ed in dipendenza della natura del radicale sostituente. Esso sarebbe poi istruttivo nei riguardi della mancata formazione di composti due o più volte sostituiti al carbonio del nucleo pirrolico (vedi avanti), quando si tratta il suo magnesilderivato per es. con i cloruri acidi, per l'influenza esercitata dall'ossigeno carbonilico sull'idrogeno imminico, essendo in tal caso

(1) *B. 46*, 3125 (1913).

il gruppo sostituente nella posizione vicina,

HC——CH   HC==CH
HC C·CO·R ⟶ HC C=C(OH).R
NH   N

mentre con l'indolo, in cui l'acile si porta, per primo, in β–, rimarrebbe possibile (come nel fatto avviene, data la lontananza dell'ossigeno carbonilico con l'immidogruppo) di ottenere composti bisostituiti.

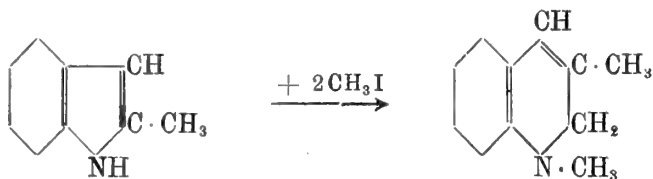
Il *C-allilpirrolo* è un liquido incoloro, molto mobile, p. d. eb. 82–83° a 24 mm. di pressione. Si altera rapidamente all'aria formando una massa nera, amorfa, poco solubile nell'acqua a freddo, volatile a vapor d'acqua, solubile in alcool, etere e benzolo.

Il *C-diallilpirrolo* bolle a 110–115° a 17 mm. di pressione.

B) Alchilizzazione diretta degli indoli.

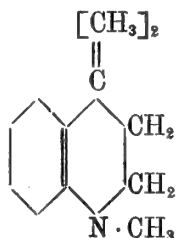
La preparazione sintetica degli omologhi dell'indolo non era stata mai ottenuta direttamente.

È infatti noto che E. Fischer assieme con alcuni suoi allievi ([1]), cercando nel 1887 di metilare gli indoli, ottenne, invece, delle sostanze dotate di proprietà basiche e che ritenne diidrochinoline, e così, con Steche ([2]), dall'α–metilindolo, per azione dello ioduro di metile, credette d'aver ricavato la dimetildiidrochinolina, $C_{11}H_{13}N$, cioè per introduzione di un gruppo metilenico, derivante da una molecola di ioduro alcoolico, in posizione α- nel nucleo pirrolico dell'indolo e successiva metilazione all'azoto:

CH; C·CH$_3$; NH $\xrightarrow{+\ 2CH_3I}$ CH; C·CH$_3$; CH$_2$; N·CH$_3$

Poco tempo dopo, Ciamician e Zatti ([3]) trovarono che anche l'indolo viene trasformato, dallo ioduro di metile, nella stessa supposta dimetildiidrochinolina ed ammisero come probabile che l'indolo in un primo tempo avesse dato l'α–metilindolo, usato da Fischer e Steche. Successivamente E. Fischer e Meyer ([4]), ritornando a trattare con ioduro di metile sia lo scatolo, sia il Pr-2-3-dimetilindolo, avendo ottenuto sempre il medesimo prodotto, dimostrarono che la base precedente conteneva nella molecola non due, bensì tre metili, di cui uno si trovava certamente legato all'azoto e gli altri due dovevano trovarsi nel nucleo piridico.

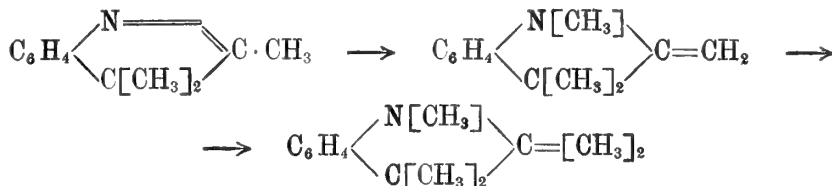
([1]) *B. 20*, 918 e 2199; *242*, 348 (1887).
([2]) *A. 242*, 353 (1887).
([3]) *G.* XX, 91 (1890).
([4]) *B, 23*, 2628 (1890).

Ad analoghi risultati pervennero quasi contemporaneamente Zatti e Ferratini [1], lavorando sull'indolo e sull'α-metilindolo, e, in seguito ad altre ricerche, si credette per questa sostanza definitiva la formola seguente [2]:

$$\begin{array}{c} [CH_3]_2 \\ \| \\ C \\ C_6H_4 \langle \quad CH_2 \\ \quad CH_2 \\ N \cdot CH_3 \end{array}$$

Invece la costituzione esatta delle basi che si formano nell' azione di ioduri alcoolici sugli indoli non si ebbe se non più tardi con gli studii di K. Brunner [3] e sopratutto di G. Plancher [4]. Esse non devono considerarsi come derivati della chinolina idrogenata, ma dell'indolo o indolenine, chiamando indolina il diidroindolo, $C_6H_4\langle\begin{smallmatrix} CH_2 \\ NH \end{smallmatrix}\rangle CH_2$.

Nell'azione quindi dello ioduro di metile, sia sull'indolo, sia sui suoi omologhi α- o β-metilati, si ottiene la trimetilindolenina, la quale però a sua volta si metila ulteriormente e, attraverso a prodotti instabili, dà la N-$\beta \cdot \beta$-trimetil α-metilenindolina e quindi ancora la N-$\beta \cdot \beta$-trimetil-α-isopropilidenindolina:

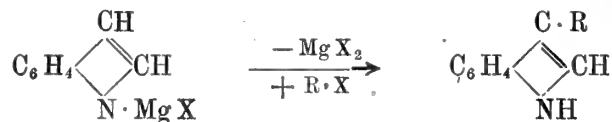
$$C_6H_4\langle\begin{matrix} N = \\ C[CH_3]_2 \end{matrix}\rangle C \cdot CH_3 \longrightarrow C_6H_4\langle\begin{matrix} N[CH_3] \\ C[CH_3]_2 \end{matrix}\rangle C{=}CH_2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C_6H_4\langle\begin{matrix} N[CH_3] \\ C[CH_3]_2 \end{matrix}\rangle C{=}[CH_3]_2$$

La preparazione di queste basi è stata fatta sempre in apparecchi chiusi; sembra, così, che questa reazione dipenda dalle condizioni speciali di temperatura e specialmente di pressione cui vengono sottoposte le sostanze che debbono entrare in combinazione; tuttavia è da ricordare che A. Piccini [5], dal metilchetolo sospeso in una liscivia alcalina, per azione dello ioduro di metile, ottenne, alla pressione ordinaria e alla temperatura di ebollizione dello ioduro alcoolico, quella stessa base che poi venne dimostrata trimetilindolenina, ed anzi in questa reazione ordinariamente il prodotto finale è sempre più metilato.

Sta nel fatto quindi che in nessun modo è riuscita finora la preparazione degli omologhi dell'indolo per azione diretta degli ioduri alcoolici; ed i termini che si riscontrano in letteratura si sono potuti preparare soltanto con processi indiretti che si possono riunire pure secondo due gruppi diversi: il primo è fondato sulla chiusura di un nucleo

(1) *G. 20*, 711 (1890).
(2) Ciamician, *B. 29*, 2460; Ciamician e Piccinini, *B. 29*, 2465 (1896).
(3) *B. 31*, 612, 1588 (1898).
(4) *R. A. L.* 1898 e volumi seguenti.
(5) *G. 28*, II, 87 (1888).

benzolico sul nucleo pirrolico preesistente, ed ha fornito specialmente gli indoli metilati nel nucleo benzenico ; il secondo si basa sulla chiusura di un nucleo pirrolico sul benzolico ed ha condotto alla preparazione dei veri omologhi dell'indolo, cioè col gruppo sostituente nel nucleo tetrolico. Col magnesilindolo invece la sintesi diretta degli omologhi dell'indolo si compie in modo facile ; i prodotti che ne risultano sono di solito alchilati in β :

$$C_6H_4\langle \begin{matrix} CH \\ \rangle CH \\ N\cdot MgX \end{matrix} \xrightarrow[+R\cdot X]{-MgX_2} C_6H_4\langle \begin{matrix} C\cdot R \\ \rangle CH \\ NH \end{matrix}$$

Alcune volte tuttavia l'alchilizzazione si ha anche all'azoto per piccole differenze di condizioni sperimentali e si formano pure tracce di composti bialchilati N. β. Condizione necessaria è, almeno per i primi termini, di fare agire lo ioduro alcoolico non in presenza di etere etilico, ma sul magnesilindolo libero. L'eliminazione poi della parte minerale avviene pure facilmente, qualora assieme coll'alogeno–alchile si aggiunga una piccola quantità di cloruro di potassio precedentemente calcinato. È un fatto questo che ho avuto occasione di osservare anche con i comuni composti di Grignard: cioè che, nel caso in cui l'alogeno sia della stessa natura delle due molecole che debbono reagire, le doppie decomposizioni avvengono più difficilmente ; al contrario i derivati clorurati reagiscono molto bene con gli ioduri di magnesio–alchili. L'azione quindi del cloruro potassico la possiamo interpretare come un'azione catalizzante

$$R\cdot J + KCl = KJ + R\cdot Cl,$$

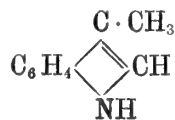
ed il cloruro organico allora entra immediatamente in reazione col derivato organo–magnesiaco :

$$R_1MgJ + RCl = MgJCl + R_1\cdot R$$

Questa mia osservazione va riferita però unicamente ai composti organomagnesiaci, perchè, con altri derivati organici alogenati [1] avviene proprio il contrario : le doppie decomposizioni cioè si compiono più facilmente qualora l'alogeno sia della stessa natura.

Ioduro di metile e magnesilindolo.

a) *Sintesi dello scatolo* (β-metilindolo) :

$$C_6H_4\langle \begin{matrix} C\cdot CH_3 \\ \rangle CH \\ NH \end{matrix}$$

Si ottiene facendo agire un eccesso di ioduro di metile, in presenza di una piccola quantità di cloruro potassico, sul magnesilindolo liberato dall'etere e riscaldando per circa 15 ore : squammette bianchissime, cristallizzando prima dall'acqua e poi dalla ligroina, fondenti a 94°. Appena purificate, hanno poco odore fecale ; ricordano invece marcatamente l'odore della naftalina. Con una soluzione all'1 % di benzaldeide in alcool e con soluzione acquosa di solfato ferrico e acido solforico, forniscono una colora-

[1] Wohl, *Bl.* 1607, II, p. 76.

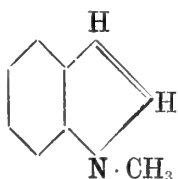
zione bleu-violetta [1]. Disciolte in alcool diluito, colorano in rosso-ciliegia una scheggia di pino imbevuta di acido cloridrico, colorazione che, dopo qualche tempo, si trasforma in violetto scuro; dànno inoltre la reazione descritta da G. Deniges [2]; mescolando cioè 5 cc. di una soluzione alcoolica molto diluita di scatolo (meno di gr. 0,50 di scatolo per un litro di alcool a 90°) con cc. 0,2 a 0,3 di soluzione alcoolica (5 gr. per un litro di alcool) di vaniglina e tre cc. di acido cloridrico puro (d. l. 18), si ottiene dapprima una colorazione giallastra, che cambia a poco a poco in un bel violetto. Nelle stesse condizioni l'indolo dà immediatamente una colorazione rosso-eosina che persiste per molte ore, ma tuttavia a poco a poco tende verso il rosso-vinoso con una bella fluorescenza bleu-violetta.

Distillando a vapor d'acqua il prodotto della reazione, si riesce a separare una piccola quantità di sostanza bianco-giallastra; dopo parecchie cristallizzazioni, da questo solvente si ottiene sotto forma di polverina giallo-pallida a p. f. 197-200°. Osservata al microscopio, si presenta in cristalli bipiramidali. Data la piccola quantità, non si è potuto studiarla; essa non presenta però proprietà basiche e non pare debba riferirsi quindi alle basi indoliche.

b) *Sintesi dell'N-metilindolo:*

H

H

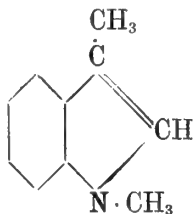
$N \cdot CH_3$

Ho riprodotto questa sostanza limitando nella reazione precedente il tempo di riscaldamento: liquido denso, bollente fra 240 e 245°. La sua emulsione acquosa, trattata con acido nitrico fumante a gocce, dà una colorazione rosso-oscura, seguita da un precipitato fioccoso [3]. Il picrato cristallizza dall'etere in lunghi prismi rosso-oscuri; fonde a 150°, per cui è identico a quello conosciuto per l'N-metilindolo.

Oltre alla predetta sostanza, si riesce anche a separare in tali condizioni una piccola quantità di prodotto a p. di eb. di 225-232°, che dà un picrato, cristallizzato in aghi, colorati in rosso-porpora, con un p. di f. vicino a 140°. Sia il p. di eb. del prodotto sia il p. f. del picrato coincidono con quelli dell'*n*-β-dimetilindolo

CH_3

C

CH

$N \cdot CH_3$

ottenuto per la prima volta da Degen [4].

[1] Reiche, *M. 11*, 156.

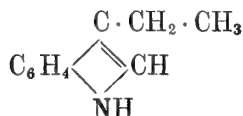
[2] *Compt. rend. Soc. bioch.*, 1908, pag. 689; *Bl.* 1908, III, pag. 879.

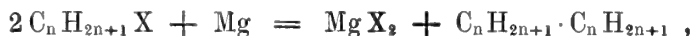
[3] Beilstein, *Handbuch der organische Chemie*, IV, p. 218.

[4] *A. 236*, 163.

Ioduro di etile e magnesilindolo.

Sintesi del β-etilindolo:

$$C_6H_4\langle C(CH_2\cdot CH_3)=CH, NH \rangle$$

La preparazione venne condotta come per il β-metilindolo, solo che si limitò il riscaldamento a cinque ore. Il β-etilindolo ottenuto distillò a 276-277° a 754 mm.; sciolto in cloroformio, per aggiunta di bromo pure in soluzione cloroformica, fornisce una colorazione violetta intensa [1]. La sua soluzione alcoolica colora intensamente in rosso-rosa una scheggia di pino imbevuta di acido cloridrico. Il picrato, già noto, lo ottenni in fiocchi rossi, fondenti a 144°,5. In un'altra preparazione ho voluto vedere se l'introduzione del radicale etilico nella molecola dell'indolo avvenisse anche operando in presenza di etere e con minor tempo di riscaldamento, ma non riuscii nell'intento. Rimarrebbe da provare con catene ancora più lunghe, ed a questo proposito ricordo che la reazione di Wurtz applicata al magnesio nei composti di Grignard,

$$2\,C_nH_{2n+1}X + Mg = MgX_2 + C_nH_{2n+1}\cdot C_nH_{2n+1}\ ,$$

avviene solo in minima parte con i primi termini della serie degli alogeno-alchili; diventa invece la reazione principale con gli alchili a 6 atomi di carbonio, e l'eliminazione della parte minerale si ha ancora più facilmente se si impiega un derivato non saturo [2]; per es.

$$CH_2{=}CH\cdot CH_2Br + BrMg\cdot C_6H_4\cdot OCH_3 = MgBr_2 + CH_3O\cdot C_6H_4\cdot CH_2\cdot CH{=}CH_2$$

C) Su alcune reazioni degli indoli e sui loro polimeri.

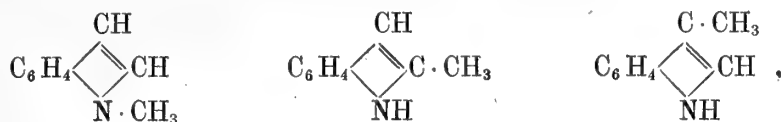
Durante la preparazione di indoli alchilati, ho avuto occasione di osservare alcune reazioni colorate e formazione di precipitati per trattamento di un indolo con sali di metalli pesanti. Così una squammetta di scatolo puro, sciolta in due gocce di alcool etilico, dà, per aggiunta di soluzione satura di nitrato mercuroso, un precipitato giallo solubile in acqua. Nelle stesse condizioni l'indolo fornisce un precipitato grigio, verdastro. Inoltre, sempre nelle stesse condizioni, con nitrato mercurico lo scatolo dà un precipitato giallo-scuro, con l'indolo grigio. Con cloruro mercurico, sia lo scatolo sia l'indolo, come pure l'α-metilindolo, dànno un precipitato bianco.

Ho potuto inoltre notare che l'indolo è capace di fornire polimeri.

Sulla loro formazione nulla si trovava in letteratura; molto poco per quanto ri-

(1) Beilstein, ibid., pag. 224.
(2) *Bl.* *24*, 1156, (1903).

guarda la formazione di sali sia semplici sia doppii. Se si prescinde infatti dalla preparazione dei picrati dei tre indoli isomeri monometilici

$$C_6H_4\langle\begin{smallmatrix} CH \\ \diamond \\ N\cdot CH_3 \end{smallmatrix}\rangle CH \qquad C_6H_4\langle\begin{smallmatrix} CH \\ \diamond \\ NH \end{smallmatrix}\rangle C\cdot CH_3 \qquad C_6H_4\langle\begin{smallmatrix} C\cdot CH_3 \\ \diamond \\ NH \end{smallmatrix}\rangle CH ,$$

il solo sale doppio che si trovava descritto era il cloroplatinato del Pr. 2-metilindolo [1] $[C_9H_9N\cdot HCl]\cdot PtCl_4 + 3H_2O$ e di sali semplici erano noti solamente lo iodidrato dello stesso metilindolo ed il cloridrato dello scatolo, della formola $[C_9H_9N]_2\cdot HCl$, cioè con due molecole di scatolo per una di idracido [2]. Nessun sale era conosciuto nè dell'indolo, nè dei suoi derivati bialchilati, nè di quelli acilici, come pure degli alchilacilici. Di alcuni di essi era nota solamente la loro solubilità in acido cloridrico concentrato [3]: fatto, questo, che analogamente allo scatolo e al metilchetolo, li ha fatti comprendere fra le basi deboli, trascurando tuttavia lo studio sulla natura dei prodotti che si formano per azione dell'acido cloridrico, sia diluito sia concentrato.

Indicazioni, alcune di data molto antica, di formazione di precipitati con le soluzioni acquose d'indolo si avevano poi con l'acido cromico che fornisce un precipitato bruno-violetto [4], col bromuro ferrico che dà una polvere verde, non volatile, solubile in bruno nell'anilina [5]; col bromuro mercurico che dà un precipitato bianco [6]; ed infine col bisolfito sodico [7]. Anche la natura di questi precipitati non era nota, non escluso quello che si ottiene col bisolfito sodico, che è cristallizzabile ed ha servito a scoprire l'indolo nell'essenza di gelsomino.

Le esperienze da me eseguite riguardano l'indolo, il metilchetolo e lo scatolo. Facendo passare una corrente di acido cloridrico gassoso su una soluzione in etere anidro di indolo, si forma il *cloridrato di diindolo*, $[C_8H_7N]_2\cdot HCl$: polvere microcristallina, fondente a 180° in un liquido giallo. Questo stesso prodotto si ottiene poi senz'altro per contatto dell'indolo con una soluzione acquosa cloridrica al 5 % e si ha subito per trattamento dell'indolo con una soluzione concentrata di acido cloridrico. Riscaldandolo con acqua e neutralizzando con soda l'acido, avviene una ulteriore polimerizzazione e si arriva ad un *triindolo* $[C_8H_7N]_3$ [8].

Comportamento diverso presentano invece, rispetto all'HCl, il metilchetolo e lo scatolo, ma più il primo che non il secondo; esso fornisce un cloridrato a molecola semplice, $C_8H_6(CH_3):NH\cdot HCl$, mentre lo scatolo dà un cloridrato a molecola dimera.

---

(1) Jakson, *B. 14*, 879 (1881).
(2) Wagner, *A. 242*, 388 (1887).
(3) Wenzig., loc. cit.
(4) Beilstein, *Handbuch der organische Chemie*, vol. 4°, pag. 217, 218, 221 e 222 (1889).
(5) Engler e Jänecke, *B. 9*, 1411 (1876).
(6) Ladenburg, *B. 10*, 1123 (1877).
(7) Hervieux, *Recherches biochimiques sur l'indol et l'acide glycuronique*, « Thèse doc. sciences » Paris, 1908; Hesse, *B. 32*, 2611 (1899).
(8) Osservazione inedita. Il triindolo che così si forma è analogo a quello ottenuto, contemporaneamente, da K. Keller *B. 46*, 626 (1913).

Essendo mio scopo anche di stabilire in quali condizioni l'indolo libero ed i suoi derivati siano in grado di dare sali semplici o doppii, ne determinai il grado di solubilità in HCl di diverse concentrazioni, usando per quantità equimolecolari di prodotto uno stesso volume di acido e seguendo come criterio la formazione di precipitati con alcuni dei reattivi generali degli alcaloidi.

Nella seguente tabella riunisco i risultati ottenuti:

	Soluzioni in acido cloridrico al			
	5 %	10 %	20 %	HCl fumante
Indolo	Apparentemente insolubile, però con evidente trasformazione.	id. come accanto.	id. come accanto.	cambia rapidamente di aspetto, impartendo al liquido, dopo poco tempo, colorazione lievemente rosea.
Metilchetolo	apparentem. insolubile.	id.	id.	facilm. solub ; soluzione incolora dapprima; rossa, legg. viola, dopo qualche tempo, che diventa sempre più intensa.
Scatolo . . .	apparentem. insolubile.	id.	id.	difficilmente solubile, con colorazione leggerm. giallognola.

Ad assicurarmi poi della solubilità effettiva dei tre indoli anche nell'acido cloridrico diluito, dopo di averli polverizzati per bene in seno al solvente, li ho lasciati in riposo per dodici ore e successivamente li ho filtrati per poterli saggiare con i reattivi degli alcaloidi. Le porzioni rimaste sul filtro, messe ad asciugare, mostrarono per l'indolo il p. f. del cloridrato di diindolo suddetto ; i due metilindoli conservarono inalterato il loro punto di fusione.

Ne è risultato che il cloridrato di diindolo non è completamente insolubile in acqua ; l'acido cloridrico, anche al 5 %; è capace di sciogliere tutti e tre gli indoli impiegati, ed infine dalla formazione di precipitati con i suddetti reattivi appare come possibile l'isolamento di qualche doppio sale. Un'ulteriore conferma del potere basico, per quanto debole degli indoli, si è avuta poi con alcune esperienze crioscopiche eseguite con soluzioni acquose di HCl, analogamente a quello che è stato fatto per alcune basi [1] e per alcuni pirroli [2]. Per l'indolo con concentrazioni di 0,0151 % e di 0,0719 % si ottenne soluzione completa, a cui corrispose un piccolissimo innalzamento. Portando la concentrazione a 0,0886 %, si osservò che la polvere cristallina dell'indolo, che in primo tempo pareva essersi disciolta, dopo poco si era separata grumosa ed era il cloridrato. Determinando il punto di congelamento, si ebbe un innalzamento di temperatura, superiore ancora alle due precedenti concentrazioni, dovute evidentemente alla sottra-

[1] Paternò e Peratoner, *G. 21*, I, 119, (1891).

[2] Ciamician e Zanetti, loc. cit.

zione di acido cloridrico da parte del cloridrato che era precipitato, oltre alla eventuale minore dissociazione delle soluzioni del cloridrato rispetto a quelle equimolecolari di HCl, ciò che spiega pure i due piccoli innalzamenti precedenti. Anche il metilchetolo e lo scatolo presentarono lo stesso comportamento; si ebbe cioè innalzamento, piuttosto che un abbassamento del punto di congelazione, un po' più elevato nel metilchetolo rispetto allo scatolo (per quanto sempre compreso dentro i limiti degli errori di osservazione) ed il punto di congelazione rimase quasi costante anche per ulteriore aggiunta di prodotti che non arrivarono però a disciogliersi, pur non essendo stata oltrepassata la quantità di acido necessaria per la saturazione.

D) Sintesi del fillopirrolo

È noto che degli emopirroli si è riusciti pochi anni addietro a stabilire anche la costituzione ed a farne la sintesi.

Così, applicando ad alcuni trialchilpirroli la reazione fra prodotti pirrolici e metilato o etilato sodico ad elevata temperatura, per la quale si ha sostituzione degli idrogeni metinici con gruppi metilici od alchilici, si è arrivati a fissare la costituzione del fillopirrolo [1]:

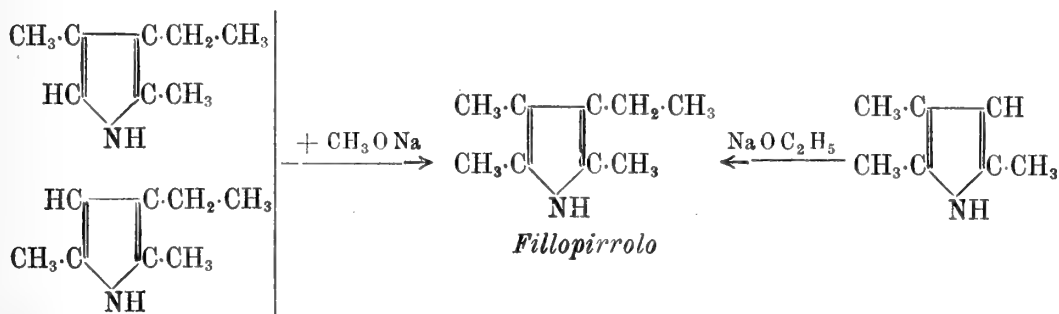
$CH_3 \cdot C$═══$C \cdot CH_2 \cdot CH_3$
HC ║ ║ $C \cdot CH_3$
NH

HC═══$C \cdot CH_2 \cdot CH_3$
$CH_3 \cdot C$ ║ ║ $C \cdot CH_3$
NH

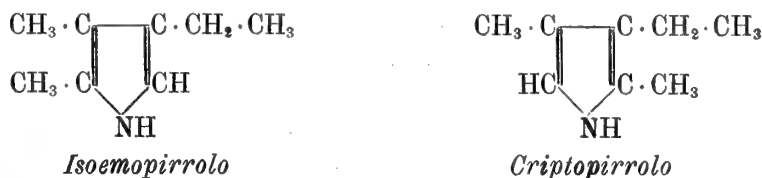
$\xrightarrow{+\ CH_3ONa}$

$CH_3 \cdot C$═══$C \cdot CH_2 \cdot CH_3$
$CH_3 \cdot C$ ║ ║ $C \cdot CH_3$
NH
Fillopirrolo

$\xleftarrow{NaOC_2H_5}$

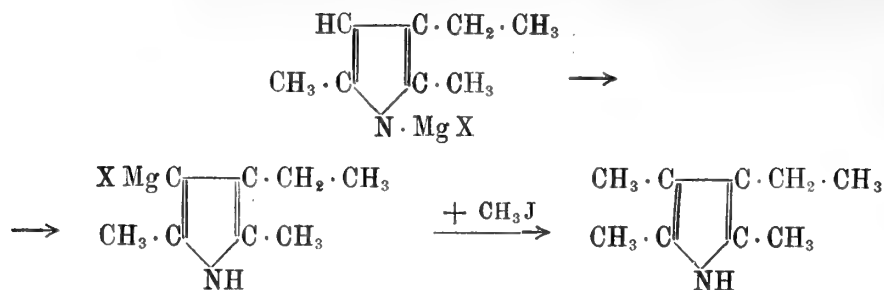
$CH_3 \cdot C$═══CH
$CH_3 \cdot C$ ║ ║ $C \cdot CH_3$
NH

Con altri metodi sono state stabilite anche la costituzione dell'isoemopirrolo e quella del criptopirrolo [2]:

$CH_3 \cdot C$═══$C \cdot CH_2 \cdot CH_3$
$CH_3 \cdot C$ ║ ║ CH
NH
Isoemopirrolo

$CH_3 \cdot C$═══$C \cdot CH_2 \cdot CH_3$
HC ║ ║ $C \cdot CH_3$
NH
Criptopirrolo

Alla sintesi del fillopirrolo si è arrivati anche più recentemente [3], facendo agire CH_3I sul magnesilderivato del 2-5-dimetil 3-etilpirrolo:

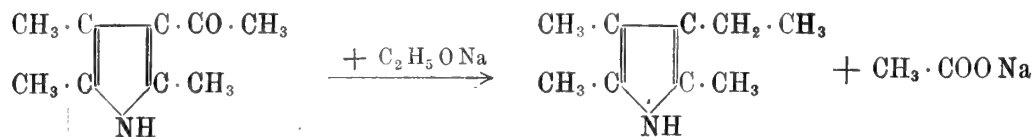
[1] H. Fischer e Bartholomaeus, *B. 45*, 466 (1912).
[2] Willstätter ed Asahina, *A. 385*, 188 (1911); Fischer e Bartholomaeus, *B. 45*, 1879, (1912).
[3] K. Hess, F. Wissing ed A. Suchier, *B. 48*, 1865 (1915); *Bl. 20*, 571 (1916).

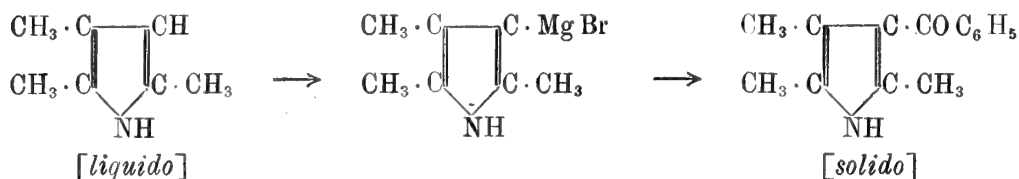
$$\begin{array}{c} HC\!=\!\!=\!\!C \cdot CH_2 \cdot CH_3 \\ CH_3 \cdot C \quad C \cdot CH_3 \\ N \cdot Mg\,X \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} X\,Mg\,C\!=\!\!=\!\!C \cdot CH_2 \cdot CH_3 \\ CH_3 \cdot C \quad C \cdot CH_3 \\ NH \end{array} \xrightarrow{+\ CH_3J} \begin{array}{c} CH_3 \cdot C\!=\!\!=\!\!C \cdot CH_2 \cdot CH_3 \\ CH_3 \cdot C \quad C \cdot CH_3 \\ NH \end{array}$$

Il fillopirrolo però, con questo processo, si forma solo in piccola quantità; come prodotto principale si ha invece una base che è, come si vedrà fra breve, una pirrolenina. A pirrolenine si arriva pure, come prodotti principali, facendo agire il bromuro di etile sia sul magnesil-2-3-trimetilpirrolo, sia sul magnesil-2-4-dimetil-5-etilpirrolo.

Il fatto però della possibilità di formazione di magnesilderivati anche con pirroli che abbiano i due posti α sostituiti, o questi con un posto β, lascia supporre che si possa arrivare ad emopirroli, partendo da un magnesilderivato, opportunamente alchilato, col fare poi agire su di esso un cloruro d'acido organico e per ultimo col sostituire, mediante metilato od etilato sodico, il gruppo acilico con un metile od etile.

Il 2-4-5-trimetil-3-acetilpirrolo conduce infatti, in queste condizioni, al fillopirrolo [1]

$$\begin{array}{c} CH_3 \cdot C\!=\!\!=\!\!C \cdot CO \cdot CH_3 \\ CH_3 \cdot C \quad C \cdot CH_3 \\ NH \end{array} \xrightarrow{+\ C_2H_5ONa} \begin{array}{c} CH_3 \cdot C\!=\!\!=\!\!C \cdot CH_2 \cdot CH_3 \\ CH_3 \cdot C \quad C \cdot CH_3 \\ NH \end{array} + CH_3 \cdot COONa$$

mentre, d'altra parte, il predetto metodo, basato sulla preliminare preparazione del magnesilderivato, ha condotto già a stabilire un comodo processo di trasformazione in composti solidi, facilmente trattatibili, di quei pirroli, come i trialchilati aventi un posto libero, che non forniscono se non difficilmente derivati solidi (picrati, stifnati, cloropicrati), come per es. il 2.3.5.trimetilpirrolo [2]:

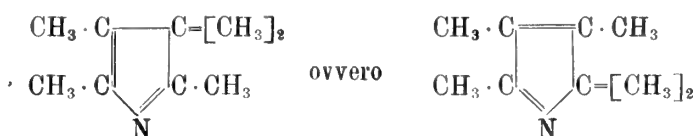
$$\begin{array}{c} CH_3 \cdot C\!=\!\!=\!\!CH \\ CH_3 \cdot C \quad C \cdot CH_3 \\ NH \\ [\textit{liquido}] \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} CH_3 \cdot C\!=\!\!=\!\!C \cdot Mg\,Br \\ CH_3 \cdot C \quad C \cdot CH_3 \\ NH \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} CH_3 \cdot C\!=\!\!=\!\!C \cdot CO\,C_6H_5 \\ CH_3 \cdot C \quad C \cdot CH_3 \\ NH \\ [\textit{solido}] \end{array}$$

E) Pirrolenine.

Si è visto, a proposito dell'alchilizzazione del pirrolo, per mezzo del suo magnesilderivato, che, per quanto l'azione degli ioduri alcoolici si faccia svolgere a temperatura bassa (in presenza di etere etilico), tuttavia si formano sempre dei prodotti basici.

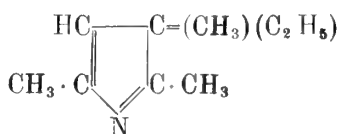
(1) H. Fischer e Bartholomaeus, *Harchiv. für Hygien*, 77; U. Colacchi, *R. A. L. 21*, I, 489 (1912)
(2) Colacicchi e Bertoni, *R. A. L. 21*, II, 518 (1912).

Ora siccome, questi prodotti (sulla cui costituzione vi era ancora incertezza) [1] erano stati ottenuti finora solo in piccola quantità, pur operando in tubi chiusi nell'impiego del pirrolo in presenza di potassa e riscaldando per molto tempo, quando si è voluto usare, per un migliore rendimento, il sale sodico dell'acido α-pirrolcarbonico, era da prevedere che anche sotto questo punto di vista il magnesilpirrolo avesse potuto fornire dei rendimenti in prodotti alcaloidei, da fare superare più facilmente le difficoltà che tali ricerche avevano finora presentate. La preparazione delle seguenti pirrolenine, di cui la prima si deve a G. Plancher [2], hanno confermato tale previsione.

1°) *Pentametilpirrolenina* :

```
CH3·C———C=[CH3]2                 CH3·C═══C·CH3
    ║   |              ovvero        |   |
CH3·C   C·CH3                    CH3·C   C=[CH3]2
     \ //                             \\ /
      N                                N
```

Si ottiene riscaldando a b. m. il 2.3.4.5tetrametil-N.magnesilpirrolo con ioduro di metile. Bolle ad 88-90° a 75 mm., ed a 160-162° a pressione ordinaria, ed è notevolmente stabile all'aria ed alla luce. Il suo picrato $C_9H_{15}N \cdot C_6H_3O_7N_3$ fonde a 168°. Il rendimento in prodotto basico è buono, superiore a quello che si ottiene dall'azione dello ioduro di metile, in presenza di idrato potassico e di carbonato al 10 %, sul tetrametilpirrolo, anche riscaldando in tubi chiusi. In questo caso poi si forma un'altra base, la pentametilmetilenpirrolina, che non è agevole separare.

2°) *Trimetil*-2.3.5-*etil*-3.*pirrolenina* [3]:

```
     HC———C=(CH3)(C2H5)
     ║    |
CH3·C     C·CH3
     \   //
       N
```

Si forma come prodotto principale nell'azione del bromuro di etile sul magnesilpirrolo 2.3.5.metilato. Forma un liquido di odore piridico e mentolico, bollente a 155-156° a 735 mm. di pressione, ed a 158-159° a 742 mm. È solubile in circa p.26 di acqua, fornendo una soluzione, da cui la base si separa parzialmente a caldo. Il picrato $C_{15}H_{18}O_7N_4$ si decompone a 188-189°; il cloromercurato $(C_9H_{15}N \cdot HgCl_2)_2 \cdot HCl$ fonde a 122°.

Che non sia derivato diidropiridico, risulta dal fatto che, ossidato con permanganato di potassio, si trasforma in acido ossalico e non in un acido piridincarbonico; non dà, per azione di HNO_2, nitrosoderivato, nè derivato piridico sotto l'azione di N_2O_3.

[1] Nella conferenza *Intorno allo sviluppo della chimica del pirrolo nell'ultimo quarto di secolo*, [*B. 37*, 4200 (1904)], G. Ciamician, infatti, pur supponendo che, analogamente all'indolo, si possono formare, per il pirrolo, delle pirrolenine, non aveva tralasciato di dire: «Das studium dieser Letzteren (Pyrrolreihe) ist zwar noch sehr unvollständing, und die Methylirung der Pyrrole einer erneueten Bearbeitung bedürftig ... ».

[2] G. Plancher e T. Zambonini, *R. A. L. 22*, II, 708 (1913).

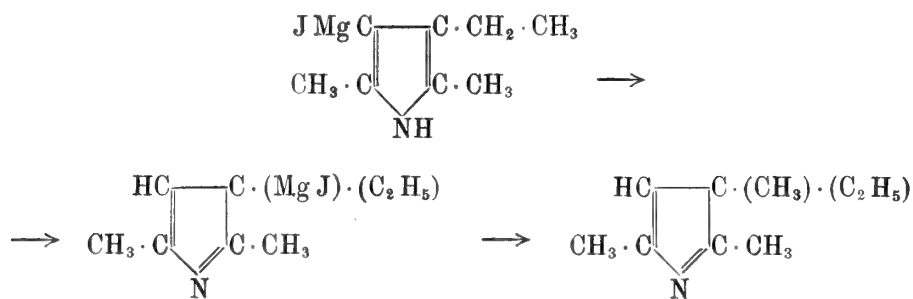
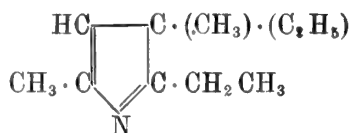
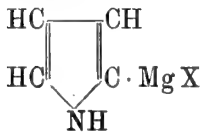
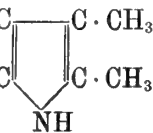
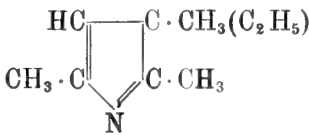
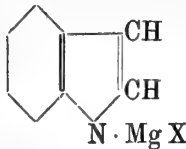
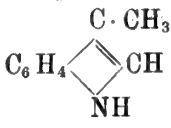
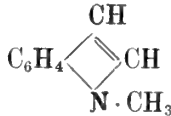
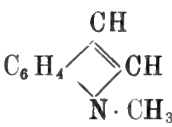
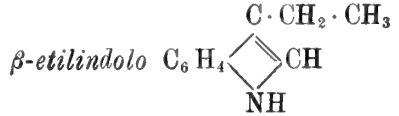
[3] K. Hess, F. Wissing ed A. Suchier, loc. cit.

La sua costituzione rimane poi fissata dalla sintesi ottenuta facendo agire lo ioduro di metile sul magnesilderivato del 2-5-dimetil-3-etilpirrolo, per cui rimane anche probablie che il magnesiaco si trasformi prima nella forma pirroleninica:

$$\begin{array}{c} JMg\,C \text{———} C\cdot CH_2\cdot CH_3 \\ CH_3\cdot C \quad\quad C\cdot CH_3 \\ NH \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} HC \text{———} C\cdot(Mg\,J)\cdot(C_2H_5) \\ CH_3\cdot C \quad\quad C\cdot CH_3 \\ N \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} HC \text{———} C\cdot(CH_3)\cdot(C_2H_5) \\ CH_3\cdot C \quad\quad C\cdot CH_3 \\ N \end{array}$$

3°) *Dietil.2.3.dimetil.3.5.pirrolenina:*

$$\begin{array}{c} HC \text{———} C\cdot(CH_3)\cdot(C_2H_5) \\ CH_3\cdot C \quad\quad C\cdot CH_2\,CH_3 \\ N \end{array}$$

Si ha dall'azione del bromuro di etile del dimetil-3.5-etil-2.magnesilpirrolo. Alla pressione di 76 mm., bolle fra 70 e 73°; a 173°, sotto 726 mm. Il picrato $C_{16}H_{20}N_4O_7$ fonde a 190°; il cloromercurato $C_{10}H_{17}N\cdot 2HgCl_2$ fonde a 115°.

La tabella seguente riassume i prodotti di alchilizzazione ottenuti, partendo da magnesilderivati diversi.

Reagente	Prodotti		
HC——CH HC C·MgX NH	Prodotti di sostituzione con RADICALI ALCOOLICI		
CH_3J	α *α-metilpirrolo* $C_4H_3(CH_3):NH$ liquido; p. eb. 148-150° C-*dimetilpirrolo* $C_4H_2(CH_3)_2:NH$ liq.; p. eb. 168-170° a 758 mm.	β *β-metilpirrolo* $C_4H_3(CH_3):NH$ liquido; p. eb. 142-143°	
C_2H_5J	*β-etilpirrolo* $C_4H_3(CH_2{\cdot}CH_3):NH$ liquido; p. eb. 164-166° C-*trietilpirrolo* $C_4H(C_2H_5)_3:NH$ liquido; p. eb. 200-205°	C-*dietilpirrolo* $C_4H_2(CH_2 \cdot CH_3)_2:NH$ liquido; p. eb. 183-186°	
C_3H_7J	*β-propilpirrolo* $C_4H_3(C_3H_7):NH$ liq.; p. eb. 176-179°	C-*dipropilpirrolo* $C_4H_2(C_3H_7)_2:NH$ liq.; p. eb. 123-126° a 1,5 cm.	C-*tripropilpirrolo* $C_4H(C_3H_7)_3:NH$ liq.; p. eb 150-160° a 1,5 cm.
C_3H_5Br	C-*allilpirrolo* $NH:C_4H_3 \cdot CH_2 \cdot CH{=}CH_2$ liquido incoloro; p. eb. 82-83° a 24 mm.	C-*diallilpirrolo* $NH:C_4H_2(CH_2 \cdot CH{=}CH_2)_2$ liquido; p. eb. 110-115° a 17 mm.	
XMgC——C·CH_3 CH^8·C C·CH_3 NH			
C_2H_5Br	*Trimetil*-2-3-5-*etil*-3-*pirrolenina* HC——C·$CH_3(C_2H_5)$ / CH_3·C C·CH_3 / N Liquido, odore piridico e mentolico; p. eb. 155-156° a 735 mm. ed a 158-559° a 742 mm. Picrato e cloromercurato.		

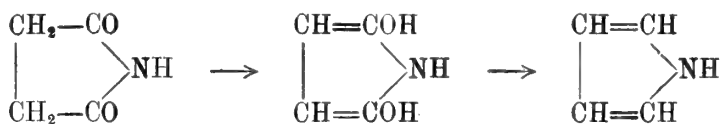
$XMgC$——$C \cdot C_2H_5$ $CH_3 \cdot C$ $C \cdot CH_3$ NH	Prodotti di sostituzione con RADICALI ALCOOLICI	
CH_3J	*Fillolpirrolo* (trimetil-2-4-5-etil-3-pirrolo) $CH_3 \cdot C$——$C \cdot CH_2 \cdot CH_3$ $CH_3 \cdot C$ $C \cdot CH_3$ NH Scagliette poco colorate; p. di fus. 64-65°. Picrato.	*Trimetil*-2.3-5-*etil*-3=*pirrolenina.* Come sopra.
$XMg \cdot C$——C(CH_3)(C_2H_5) $CH_3 \cdot C$ $C \cdot C_2H_5$ NH		
C_2H_5Br	*Dietil*-2-3-*dimetil*-3-5-*pirrolenina* HC——C(CH_3)(C_2H_5) $CH_3 \cdot C$ $C \cdot CH_2 \cdot CH_3$ N Liquido; p. eb. 70-73° a 76 mm.; a 173°, a 726 mm. Picrato e cloromercurato.	
$CH_3 \cdot C$——$C \cdot CH_3$ $CH_3 \cdot C$ $C \cdot CH_3$ $N \cdot MgX$		
CH_3J	*Pentametilpirrolenina* $CH_3 \cdot C$——$C=(CH_3)_2$ $CH_3 \cdot C$ $C \cdot CH_3$ N ovver o $CH_3 \cdot C$══$C \cdot CH_3$ $CH_3 \cdot C$ $C=(CH_3)_2$ N Liquido di odore mentolico; p. di eb. 80-90° a 75 mm., ed a 160-162° a press. ordinaria. Picrato.	

CH / CH / C_6H_4 (indolo) N · Mg X	Prodotti di sostituzione con RADICALI ALCOOLICI	
CH_3J	*Scatolo* (β-metilindolo) $C_6H_4 \langle C \cdot CH_3,\ CH,\ NH \rangle$ Squamette bianchissime; p. di fus. 94°,5.	*N-metilindolo* $C_6H_4 \langle CH,\ CH,\ N \cdot CH_3 \rangle$ Liquido; p. di eb. 240-245°.
	N-β-dimetilindolo $C_6H_4 \langle CH,\ CH,\ N \cdot CH_3 \rangle$ Liquido; p. di eb. 225-232°. Picrato.	
C_2H_5J	*β-etilindolo* $C_6H_4 \langle C \cdot CH_2 \cdot CH_3,\ CH,\ NH \rangle$ Liquido oleoso; p. di eb. 276-277° a 754 mm. di Hg. Picrato.	

VI.

Sintesi di alcooli pirrolici.

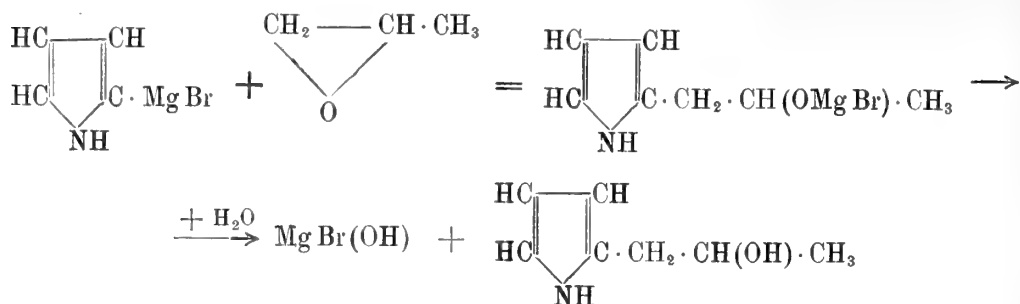
La succinimide (I), distillata con polvere di zinco, conduce, come è noto, a pirrolo:

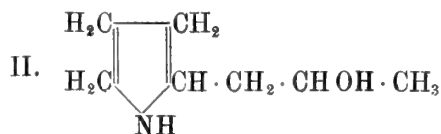
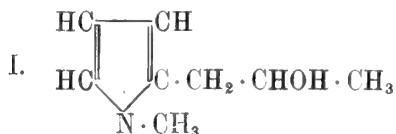
$$\begin{matrix} CH_2-CO \\ | \quad \quad \rangle NH \\ CH_2-CO \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} CH=COH \\ | \quad \quad \rangle NH \\ CH=COH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} CH=CH \\ | \quad \quad \rangle NH \\ CH=CH \end{matrix}$$

Questo processo rimane anche molto istruttivo, in quanto che la formola dienolica della succinimide (II), non rappresenta altro se non un 2-5-diossipirrolo, cioè un prodotto che viene a costituire « *un fenolo* » della serie del pirrolo. Di tali ossiderivati però, provenienti dalla sostituzione di un idrogeno nucleare con uno o più ossidrili, finora non se ne conoscono; altrettanto si può dire per gli alcooli pirrolici. Fu solo poco tempo addietro che K. Hess [1] riuscì ad ottenere un alcool della serie del pirrolo, per mezzo di trasposi-

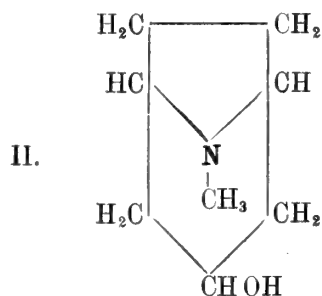
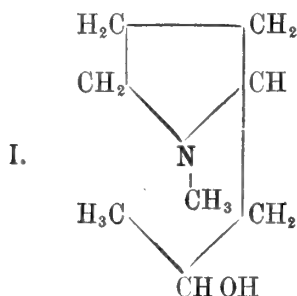
[1] *B. 46,* 3117 (1913).

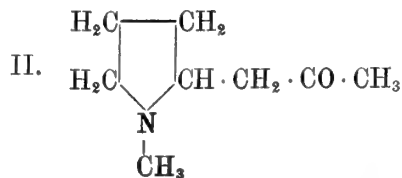
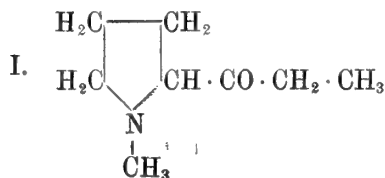
zioni ottenute facendo agire l'ossido di propile sulla soluzione eterea del magnesilpirrolo:

$$\begin{array}{l} HC\!=\!CH \\ HC\!=\!C\cdot MgBr \\ \quad NH \end{array} + \begin{array}{c} CH_2 - CH\cdot CH_3 \\ \diagdown \diagup \\ O \end{array} = \begin{array}{l} HC\!=\!CH \\ HC\!=\!C\cdot CH_2\cdot CH(OMgBr)\cdot CH_3 \\ \quad NH \end{array} \longrightarrow$$

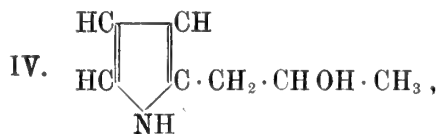
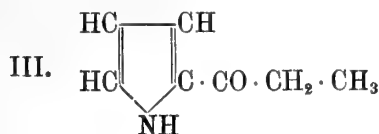
$$\xrightarrow{+H_2O} MgBr(OH) + \begin{array}{l} HC\!=\!CH \\ HC\!=\!C\cdot CH_2\cdot CH(OH)\cdot CH_3 \\ \quad NH \end{array}$$

Si forma cioè l'1 (α–pirril) propanol-2 che si presenta sotto forma di un olio, di consistenza della glicerina, incristallizzabile. Bolle a 94-96° a 25 mm. di pressione. Il permanganato di potassio lo ossida profondamente, senza che si possa isolare il chetone corrispondente. Ridotto con acido iodidrico e fosforo, fornisce l'α-propilpirrolo. Per metilazione del suo derivato potassico, dà l'α-N-metilpirril-1-propanol-2 (I), e per idrogenazione catalitica col nero di platino, dà l'α-pirrolidil--1propanol-2 (II).

$$\text{I.}\ \begin{array}{l} HC\!=\!CH \\ HC\!=\!C\cdot CH_2\cdot CHOH\cdot CH_3 \\ \quad N\cdot CH_3 \end{array} \qquad \text{II.}\ \begin{array}{l} H_2C\!-\!CH_2 \\ H_2C\ \ CH\cdot CH_2\cdot CH\,OH\cdot CH_3 \\ \quad NH \end{array}$$

L'α-pirrolidil-1-propanol-2 è probabilmente un miscuglio d'isomeri ottici; ha proprietà fortemente basiche, riduce istantaneamente il permanganato di potassio e per metilazione fornisce l'1-N-pirrolidil-propan-2-ol (I), che possiede una costituzione analoga a quella della tropina (II):

$$\text{I.}\ \begin{array}{l} H_2C - CH_2 \\ CH_2 \quad CH \\ \quad N\cdot CH_3 \\ H_3C \quad CH_2 \\ \quad CH\,OH \end{array} \qquad \text{II.}\ \begin{array}{l} H_2C - CH_2 \\ HC \quad CH \\ \quad N\cdot CH_3 \\ H_2C \quad CH_2 \\ \quad CH\,OH \end{array}$$

A risultati pure notevoli è arrivato nei riguardi della sintesi dell'igrina. Questa, come è noto, contiene in α una catena a 3 atomi di C, di cui uno allo stato di carbonile (poichè fornisce un'ossima): la sua costituzione risulta poi dal fatto che per ossidazione si trasforma in acido igrinico od acido N-metilpirrolidin- α-carbonico. Non si conosce però con certezza la posizione del carbonile, e si possono ammettere per l'igrina le due formole I e II:

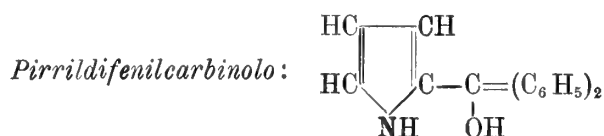
$$\text{I.}\ \begin{array}{l} H_2C\!-\!CH_2 \\ H_2C\ \ CH\cdot CO\cdot CH_2\cdot CH_3 \\ \quad N \\ \quad CH_3 \end{array} \qquad \text{II.}\ \begin{array}{l} H_2C\!-\!CH_2 \\ H_2C\ \ CH\cdot CH_2\cdot CO\cdot CH_3 \\ \quad N \\ \quad CH_3 \end{array}$$

L'A. ha intrapreso la sintesi dei composti I e II, partendo, anche in questo caso, dal magnesilpirrolo, attraverso le seguenti fasi: preparazione delle combinazioni pirroliche (III e IV)

III. $HC{=}CH$, HC, $C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3$, NH (anello pirrolico)

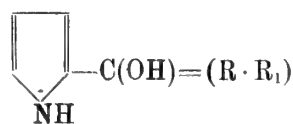
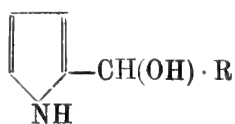
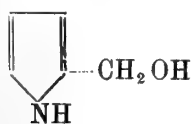
IV. $HC{=}CH$, HC, $C \cdot CH_2 \cdot CHOH \cdot CH_3$, NH (anello pirrolico),

loro idrogenazione nelle corrispondenti combinazioni pirrolidiniche e per ultimo metilazione all'azoto.

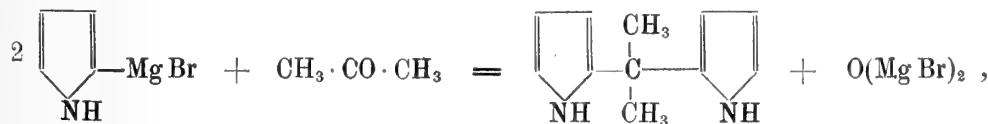
Il derivato (III) si ottiene, come mostrerò in seguito, per azione del cloruro di propionile sul magnesilpirrolo, ed il composto (IV) per azione dell'ossido di propilene sullo stesso magnesilderivato, nel modo che è stato esposto.

Il processo ha condotto a così eccellenti risultati che sono stati presi due brevetti dalla « Farbenfabriken vorm. Friedr. Bayer e Co. » (Leverkusen b. Cöln a Rh.) [1] sulla preparazione di alcooli della serie pirrolidinica.

Pirrildifenilcarbinolo: $HC{=}CH$, HC, $C{-}C{=}(C_6H_5)_2$, NH, OH

Gli ordinarii composti organo-magnesiaci reagiscono con le aldeidi ed i chetoni. L'aldeide formica fornisce alcooli primarî; le altre aldeidi alcooli secondarî ed i chetoni alcooli terziarî.

Analogamente si dovrebbe arrivare, mediante l'uso del magnesilpirrolo, alle tre classi di alcooli aventi un nucleo pirrolico:

$C_4H_3NH{-}CH_2OH$ $\qquad$ $C_4H_3NH{-}CH(OH) \cdot R$ $\qquad$ $C_4H_3NH{-}C(OH){=}(R \cdot R_1)$

Le esperienze al riguardo sono però ancora molto limitate. Io già da qualche tempo ho voluto vedere se in tale senso si comportano l'acetone, l'aldeide benzoica ed il piperonal; ma la natura dei prodotti ottenuti, facilmente resinificabili, non mi ha ancora permesso di definire l'andamento della reazione, che potrebbe anche, fra l'altro, svolgersi in modo analogo a quanto avviene direttamente per condensazione fra chetoni e pirrolo

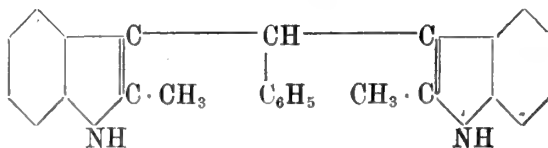
$$2\ C_4H_3NH{-}MgBr + CH_3 \cdot CO \cdot CH_3 = C_4H_3NH{-}C(CH_3)_2{-}C_4H_3NH + O(MgBr)_2,$$

ed aldeidi e pirrolo, i cui primi lavori si devono a Baeyer per i chetoni [2] ed a Feisst per le aldeidi [3].

[1] Kl. 12 *p.*, n. 282456 (21 ottobre 1913; 2 marzo 1915) [*Z.* 1915 I, pag. 583]; Kl. 12 *p.*, n. 283333 (21 ottobre 1913; 9 aprile 1915) [*Z.* 1915. I. pag. 927].

[2] *B.* *19*, 2184, (1886).

[3] *B.* *35*, 1537 e 1847.

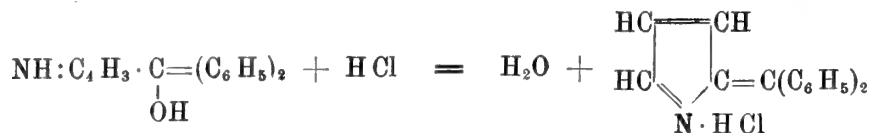
Ricordo ancora che Fischer (1), contemporaneamente a Baeyer, riusciva per il primo ad ottenere un prodotto di condensazione fra α-metilindolo ed aldeide benzoica, al quale attribuì la formola:

$$\text{Indolo-C}(\text{C}\cdot CH_3)(NH)-CH(C_6H_5)-\text{C}(CH_3\cdot\text{C})(NH)\text{-Indolo}$$

Si trovò poi, da altri non pochi lavori eseguiti sullo stesso argomento, che il nucleo pirrolico si condensa meno facilmente con le combinazioni aromatiche che non con quelle grasse, ma i prodotti che si formano sono più semplici ed il meccanismo della condensazione è di più facile interpretazione.

Seguendo questo criterio, si è studiata l'azione del benzofenone sul magnesilpirrolo (2). Il prodotto di reazione, dopo trattamento con acqua, fornisce, per estrazione con etere, dei prodotti densi, resinosi, dai quali si separano dei cristalli solo quando si sia impiegato un eccesso di magnesilpirrolo (2 mol. per 1 mol. di benzofenone) e non nel caso contrario. Il prodotto cristallino è costituito da dipirrildifenilmetano (I), e la sostanza amorfa è pirrildifenilcarbinolo (II)

$$\text{I.}\quad \begin{matrix} NH:C_4H_3 \\ NH:C_4H_3 \end{matrix}\!\!\Big\rangle C=(C_6H_5)_2 \qquad\qquad \text{II.}\quad NH:C_4H_3\cdot \underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{C}}=(C_6H_5)_2$$

Quest'ultimo, che è poi il composto pirrolico analogo al trifenilcarbinolo, si trasforma molto facilmente, sotto l'influenza degli acidi minerali (HCl e H_2SO_4) od organici (acido acetico od ossalico), in una sostanza rossa intensa, simile, per la tinta alla fucsina, e che per neutralizzazione diviene giallo-chiara e ripassa al rosso con gli acidi. Ridotta con polvere di zinco ed acido cloridrico, si trasforma in leucoderivato. Con gli acidi, il pirrildifenilcarbinolo reagisce secondo l'equazione:

$$NH:C_4H_3\cdot \underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{C}}=(C_6H_5)_2 + HCl = H_2O + \begin{matrix} HC=\!=CH \\ | \qquad | \\ HC\diagdown\;\diagup C=C(C_6H_5)_2 \\ N\cdot HCl \end{matrix}$$

ed il leucoderivato avrebbe la formola

$$NH:C_4H_3\cdot CH=(C_6H_5)_2$$

I saggi di tintura con questo colorante, che dà dei toni rossi cremisi, molto stabili di fronte al sapone, al bisolfito ed all'acqua bollente, confermerebbero che l'atomo di N del nucleo pirrolico abbia l'ufficio di gruppo auxocromo. Concludendo quindi, per quanto finora in via limitata, è possibile di arrivare, mediante il magnesilpirrolo, ad alcooli pirrolici; ed esperienze io ho già istituite, al riguardo, con i magnesilderivati degli indoli.

(1) *B.* *19*, 2988 (1886).

(2) Tschélintsef, Tronof e Térentief, *Journ. Soc. phys. chim.*, R. *47*, 1211 (1915); *Bl.* *20*, 519 (1916).

VII.

Sintesi di chetoni pirrolici.

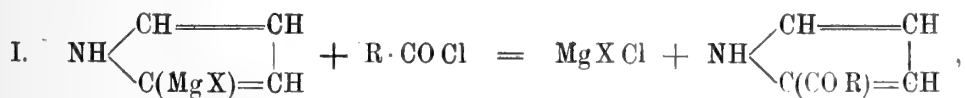
Uno speciale interesse ha presentato il magnesilpirrolo nel suo comportamento con i cioruri e le anidridi degli acidi ed i loro eteri; essi hanno condotto facilmente alla preparazione di composti chetonici.

Di siffatti prodotti si conoscevano finora pochissimi termini, e questi avevano dato luogo agli interessanti lavori di Ciamician e suoi discepoli sugli spostamenti che subiscono i radicali acidi quando si cerca d'introdurli nel nucleo pirrolico (lavori che si riallacciano all'azione dell'anidride acetica sugli indoli, che ha pure formato oggetto di ricerche di non pochi chimici, trattandosi di definire anche quì la posizione che veniva ad occupare il gruppo sostituente). Si preparavano per acilazione diretta del pirrolo. Però con questo processo anzitutto avviene che il radicale si attacca in parte all'azoto ed in parte al carbonio, per cui si ottengono sempre i due isomeri che bisogna separare; i rendimenti poi non sono, invero, molto rilevanti; sono già scarsi impiegando l'anidride acetica, ed ancora di più con le altre anidridi, quale la benzoica, con cui si formano notevoli quantità di materia resinosa (1). Altro processo, che era stato pure tentato, era quello dell'azione dei cloruri d'acidi sul pirrolato potassico. La reazione è molto viva ed evidentemente si svolge in modo analogo a quello della precedente, con formazione simultanea dei due isomeri; però col cloruro di acetile s'è ottenuto principalmente il derivato all'azoto (2); e col cloruro di benzoile, mentre Ciamician e Dennstedt (3) non erano riusciti ad isolare alcun prodotto, Pictet (4) ottenne soltanto l'N-benzoilpirrolo. Altri cloruri non erano stati studiati.

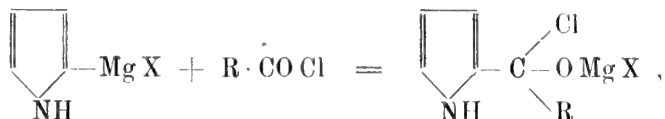
L'impiego del magnesilpirrolo presenta, al riguardo, un indiscutibile vantaggio, sia per la generalità del metodo e le sue estensioni ed applicazioni, sia per gli ottimi rendimenti. In questo capitolo si dirà, prima, degli alchil-ed aril-pirrilchetoni che si formano dall'azione dei cloruri d'acidi monobasici sul magnesilpirrolo; poi di alcune chetobasi; poi ancora dello studio eseguito con le anidridi d'acidi e con gli eteri composti, a cui annetterò quello del fosgene. Ad ogni trattazione faranno sèguito le analoghe reazioni, eventualmente eseguite, mediante magnesilderivati degli indoli e del carbazolo.

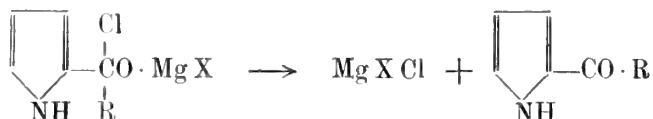
A) Pirrilalchilchetoni.

I cloruri d'acidi reagiscono energicamente sul magnesilpirrolo: la reazione conduce unicamente a degli alchil- o arilpirrilchetoni:

$$\text{I.}\quad NH\left\langle\begin{array}{l}CH{=\!=}CH\\ \quad\quad\quad\;\;|\\ C(MgX){=}CH\end{array}\right. + R\cdot COCl = MgXCl + NH\left\langle\begin{array}{l}CH{=\!=}CH\\ \quad\quad\quad\;\;|\\ C(COR){=}CH\end{array}\right. ,$$

(1) Ciamician e Dennstedt, *G. 15*, pag. 9 (1885).
(2) Ciamician e Dennstedt, *G. 13*, pag. 455 (1883).
(3) *G. 15*, pag. 9 (1885).
(4) *B. 37*, 2796 (1904).

col gruppo sostituente cioè al carbonio in posizione α. Il processo è d'indole così generale e si compie con tale uniformità (a differenza di altre reazioni che il magnesilpirrolo fornisce con altri corpi) da lasciare supporre che il processo stesso non si sviluppi secondo l'equazione tanto semplice, quanto dimostrativa, espressa in (I), ma che tra il magnesilpirrolo ed il cloruro d'acido, appena vengono a contatto, si formi prima un prodotto di addizione, in virtù dell'ossigeno del carbonile presente nel cloruro d'acido

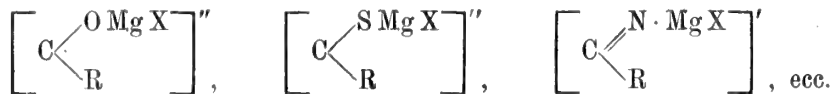
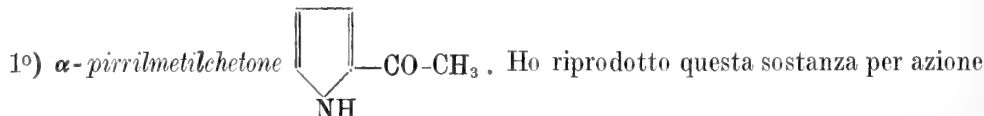
$$C_4H_3(NH)\text{—}MgX + R\cdot COCl = C_4H_3(NH)\text{—}C\begin{matrix}Cl \\ \text{—}OMgX \\ R\end{matrix},$$

e che la parte minerale si elimini solo in un secondo tempo, con produzione del chetone pirrolico:

$$C_4H_3(NH)\text{—}\underset{R}{\overset{Cl}{C}}O\cdot MgX \longrightarrow MgXCl + C_4H_3(NH)\text{—}CO\cdot R$$

Sta nel fatto che, appena il cloruro acido viene a contatto col magnesilpirrolo, si forma, qualunque sia il termine, un precipitato rosso (qualche volta giallo) che è caratteristico. Lo stesso precipitato colorato si produce poi, in generale, con tutti i corpi aventi un ossigeno carbonilico; così avviene, per es., con le anidridi; così pure con gli esteri, mentre, per es., nulla di notevole si ha, come si è visto, quando si fanno reagire gli alogenoalchili i quali, per fornire gli alchilpirroli, devono pure eliminare la parte minerale.

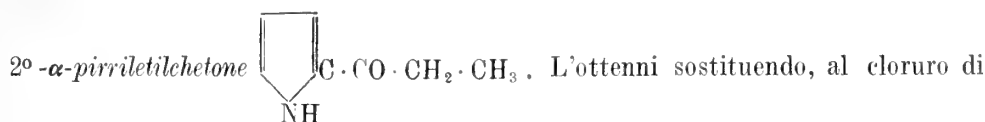
Il magnesilpirrolo in tal modo si comporterebbe, in linea generale, come gli ordinarî magnesilderivati di Grignard, per i quali appunto si ammette che la fissazione su corpi a funzione diversa

$$(C{=}O)'', \quad (C{=}S)'' \quad (C{\equiv}N)', \quad (N{=}O)', \quad (S{=}O)'',$$

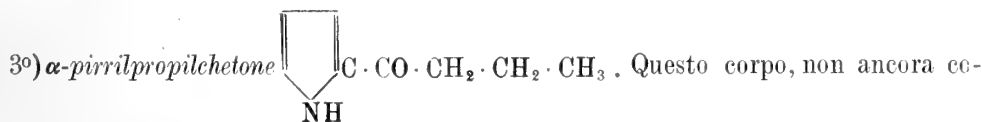
avvenga su due atomi contigui, con rottura, del doppio o triplo legame fra essi interposto:

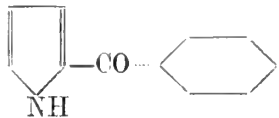
$$\left[C\begin{matrix}\diagup OMgX \\ \diagdown R\end{matrix}\right]'', \quad \left[C\begin{matrix}\diagup SMgX \\ \diagdown R\end{matrix}\right]'', \quad \left[C\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup N\cdot MgX \\ \diagdown R\end{matrix}\right]', \text{ ecc.}$$

Si differenzia tuttavia nettamente da essi, perchè non conduce in definitiva ad alcooli terziarî, ma unicamente a prodotti chetonici, con comportamento che è quindi differente anche da quello dei zincoalchili, mediante i quali si può arrivare ad un chetone, secondo il metodo di Freund, o ad un alcool terziario, secondo il metodo di Boutleroff.

1°) *α-pirrilmetilchetone* $C_4H_3(NH)\text{—}CO\text{-}CH_3$. Ho riprodotto questa sostanza per azione del cloruro di acetile sulla soluzione eterea di magnesilpirrolo: cristalli, dall'acqua, fondenti a 90°; p. di eb. 218°. Sciolti in acqua bollente, forniscono, per aggiunta di una soluzione concentrata di nitrato di argento e di alcune gocce di ammoniaca, un precipitato

bianco cristallino, che è il derivato argentico : $C_4H_3(COCH_3):NAg$. L'idrazone fonde, come era noto, a 146°. Trattato con ioduro di magnesio metile, l'idrogeno immidico, rimasto libero, determina sviluppo di metano per dare il magnesilderivato corrispondente, sotto forma di polvere fine, bianca, che, scomposta con acqua, ridà il chetone inalterato e precipita sale idrato di magnesio.

L'α-pirrilmetilchetone fu preparato per la prima volta da R. Schiff [1], ma egli ritenne che il radicale acido si fosse legato all'azoto. Ciamician e Dennstedt, qualche anno dopo [2], dimostrarono che nel composto di Schiff l'acetile era legato al C in posizione α- ; lo chiamarono anche pseudo-acetilpirrolo, e separarono inoltre l'isomero col radicale unito all'azoto che si forma simultaneamente.

2° -*α-pirriletilchetone* $C_4H_3NH \cdot C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3$. L'ottenni sostituendo, al cloruro di acetile, l'omologo superiore : aghi incolori a p. di fus. 52°,5 ; p. di eb. 225°. Resiste alla potassa bollente ; in soluzione ammoniacale calda, fornisce, con nitrato di argento, un precipitato bianco cristallino, corrispondente alla formola $C_4H_5(CO \cdot CH_2 \cdot CH_3):NAg$, e, con ioduro di magnesiometile, sviluppa metano.

L'α-propionilpirrolo era stato ottenuto da Dennstedt e Zimmermann [3], riscaldando un miscuglio di pirrolo, anidride propionica e propionato sodico. Anche in questo caso si formano i due isomeri azo- e carbopirrilpropionile. Contrariamente però a quanto affermano questi due chimici, esso è distillabile a vapor d'acqua, e così in altre preparazioni, fatte col mio processo, mi sono avvalso di questo metodo per separarlo, ed averlo quasi puro. Ho potuto anzi osservare che, trattando il residuo della distillazione a vapore, con miscuglio di alcool ed acqua a caldo, dopo qualche giornata di riposo, si separa una sostanza a piccoli grumi, che fonde a 72-73°. Data la piccola quantità che se ne ottiene, non si potè vedere se si trattava di un isomero del pirriletilchetone, che poteva essere il β-derivato, perchè, nei confronti con l'acetilpirrolo, l'N-propionilpirrolo dovrebbe fondere a temperatura più bassa e dovrebbe essere più volatile, a vapor di acqua, dell'isomero con l'acile in posizione β.

Fenilidrazone $\begin{matrix} NH:C_4H_3 \\ CH_3CH_2 \end{matrix} > C:(N_2H) \cdot C_6H_5$: aghi con tinta leggermente paglierina, fondenti a 111-112°. Il nuovo corpo è molto solubile in alcool ed in etere etilico, anche a freddo ; meno solubile in benzolo ed in etere di petrolio ; portandolo all'ebollizione con acido cloridrico diluito, ridà fenilidrazina e pirriletilchetone inalterato.

3°) *α-pirrilpropilchetone* $C_4H_3NH \cdot C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_3$. Questo corpo, non ancora conosciuto, si ottiene mediante l'impiego del cloruro dell'acido butirrico : cristalli bianchi, aghiformi ; p. di fus. 48°,5 ; p. di eb. 235-237°. È solubile, anche a freddo, nell'alcool, nella

[1] *B. 15*, 1500 (1877).
[2] *G. 13*, p. 355 (1883) ; *15*, p. 11 (1885).
[3] *B. 20*, p. 1760.

benzina, nell'etere di petrolio e nell'etere etilico; odora un po' di acido butirrico. Presenta il comportamento chimico dei suoi omologhi inferiori, e cioè si scioglie nelle soluzioni bollenti di idrati alcalini e, col raffreddamento, ne ricristallizza inalterato. La sua soluzione in acqua bollente, per aggiunta di nitrato d'argento e qualche goccia di ammoniaca, dà il corrispondente derivato argentico, $C_8 H_{10} O N Ag$, solubile in eccesso di ammoniaca.

Fenilidrazone $\genfrac{}{}{0pt}{}{NH:C_4H_3}{CH_3(CH_2)_2}\!\!>\!C=(N_2H)\cdot C_6H_5$: lunghi aghi con leggera colorazione paglierina, dall'etere di petrolio in presenza di nero animale; p. di fus. 80°,5. A caldo è pure solubile in benzolo; molto più facilmente in alcool. Bollito con acido cloridrico diluito, si scinde in fenilidrazina e in C-propionilpirrolo.

Ossidazione dell'α-pirrilpropilchetone. Le esperienze ora descritte dimostrano sufficientemente che, il composto che si ottiene per azione del cloruro di butirrile sul magnesilpirrolo, si deve considerare come un omologo superiore dello pseudoacetilpirrolo, col radicale butirrico legato cioè al carbonio ed in posizione **α**. A maggiore conferma ho voluto ossidarlo per vedere se, analogamente al C-acetilpirrolo, si potesse arrivare all'acido chetocarbonico: $C_4H_3N\!>\!C\cdot CO\cdot COOH$. L'ossidazione, eseguita con permanganato potassio in soluzione alcalina, condusse al predetto acido: lunghi aghi, dall'etere, o ciuffetti di cristalli aghiformi che, ricristallizzati dal benzolo bollente in presenza di carbone animale, fondono, con decomposizione, a 112°,5 (p. di fus. dell'acido pirrolchetocarbonico 113-115°), e per riscaldamento con acido cloridrico forniscono, come era noto, una colorazione rosso-carminio intensa; aggiungendo una base, si ha una tinta giallo-verdastra, e poi di nuovo rossa per acidificazione.

4°) *α-pirrilfenilchetone* $C_4H_3NH\text{—}CO\text{—}C_6H_5$. L'α-pirrilfenilchetone era stato preparato con una reazione analoga a quella del pirrilmetilchetone e del pirriletilchetone [1], riscaldando cioè in un apparecchio a ricadere, in un bagno di olio a 200-240°, per circa 8 ore, pirrolo, anidride benzoica e benzoato di sodio. Questa reazione offre però maggiori difficoltà perchè dà origine a notevoli quantità di materia resinosa, oltre che sempre ai due isomeri, di cui quello col radicale acido legato all'azoto non si è riusciti a purificarlo. Pictet [2] l'ottenne inoltre facendo passare i vapori dell'N-benzoilpirrolo in un tubo riscaldato al rosso incipiente; ma questo metodo non ha, evidentemente, se non un interesse tutto teorico.

Io l'ottenni facilmente per azione del cloruro di benzoile sul magnesilpirrolo: aghi, alcuni lunghissimi e quasi incolori, che, ripurificati da alcool ed acqua, in presenza di nero d'animale, diventano del tutto incolori; p. di fus. 78°; p. di eb. 305-307°.

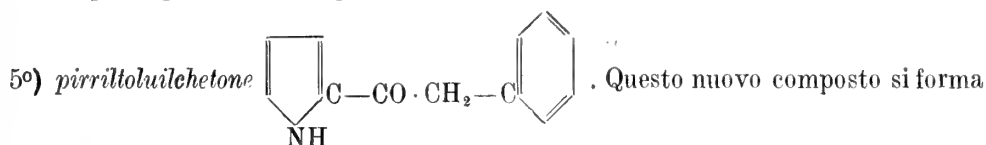
Il pirrilfenilchetone, disciolto in acqua bollente, e trattato con qualche goccia di

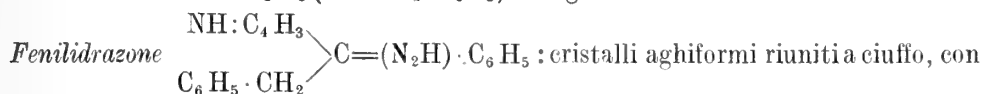
[1] Ciamician e Dennstedt, loc. cit.
[2] loc. cit.

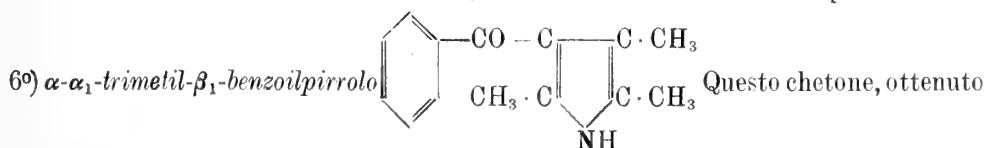
soluzione di nitrato d'argento ed alcune gocce di ammoniaca, dà anch'esso il composto argentico. Reagisce pure, come i termini precedenti, con i composti organi-magnesiaci.

Di questo chetone, però, non si è riuscito, ad ottenere nè il fenilidrazone, nè l'ossima corrispondente. Pictet (loc. cit.) dice invece di avere ottenuto l'ossima che fonde a 147° e di cui riporta una determinazione di azoto, ma non ne descrive il metodo. Comunque, è da credere che il gruppo fenilico renda difficile queste due condensazioni.

Ho voluto pure sottoporre all'ossidazione questo chetone per vedere se, analogamente a quanto ho trovato col butirrilpirrolo, si fosse potuto arrivare all'acido pirroilcarbonico. L'esperienza ha dimostrato che, dei due nuclei contenuti nel fenilpirrilchetone, il primo ad ossidarsi è quello pirrolico, ed il prodotto dell'ossidazione è acido benzoico.

5°) *pirriltoluilchetone* $C_4H_3(NH)\!-\!C\!-\!CO\cdot CH_2\!-\!C_6H_5$. Questo nuovo composto si forma

per azione del cloruro dell'acido fenilacetico sul magnesilpirrolo. Dall'acqua bollente si ha in scagliette bianche a riflessi madreperlacei; p. di fus. 95°; p. di eb. 335-340° con parziale decomposizione. Il trattamento con acqua bisogna ripeterlo parecchie volte, perchè la sostanza è poco solubile in tale solvente; aggiungere dell'alcool non conviene, perchè allora non si ha buona cristallizzazione. Si può anche cristallizzarlo da etere di petrolio, in presenza di poco benzolo.

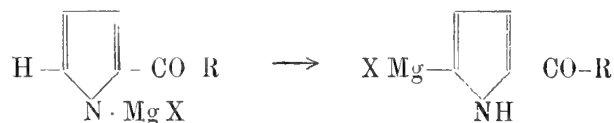
Il toluilpirrilchetone resiste all'azione della potassa bollente; la sua soluzione in acqua calda dà, per aggiunta di una soluzione concentrata di nitrato di argento e di una goccia di ammoniaca, un precipitato bianco (solubile in eccesso di ammoniaca), che, raccolto su filtro, lavato ripetutamente ed asciugato, diede all'analisi numeri corrispondenti alla formola $C_4H_3(CO\cdot CH_2\cdot C_6H_5):NAg$.

Fenilidrazone $\begin{matrix} NH:C_4H_3 \\ C_6H_5\cdot CH_2 \end{matrix}\!\!>\!C\!=\!(N_2H)\cdot C_6H_5$: cristalli aghiformi riuniti a ciuffo, con colorazione leggermente paglierina; p. di fus. 133°. Sono solubili in quasi tutti i solventi organici; bolliti con acido cloridrico diluito, ridanno fenilidrazina e toluilpirrilchetone.

6°) *α-α₁-trimetil-β₁-benzoilpirrolo* $C_6H_5\!-\!CO\!-\!C\!=\!C\cdot CH_3;\ CH_3\cdot C\!=\!C\cdot CH_3;\ NH$. Questo chetone, ottenuto

da Colacicchi e Bertoni [1], si forma facendo agire sul 2-3-5-trimetil-4-magnesilpirrolo il cloruro di benzoile. Cristallizzato prima dell'acool diluito e dall'etere solforico, si presenta in minutissimi aghi, leggermente rosei, fondenti a 172-173°.

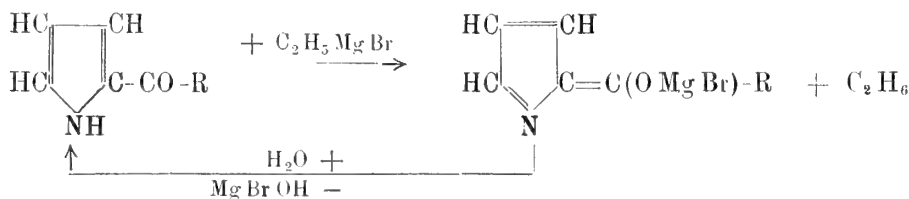
[1] loc. cit.

È stato detto, per qualche termine, che i chetoni pirrolici reagiscono a loro volta con i composti di Grignard analogamente al pirrolo: si ha eliminazione dell'idrocarburo corrispondente allo ioduro alcoolico impiegato e formazione di un nuovo magnesilderivato, contenente cioè oltre al radicale -MgX, anche il radicale acido in posizione *α*.

Ammettendo, come per il pirrolo, che il gruppo -MgX, appena introdotto nella molecola, si fissi nella posizione *α* rimasta libera,

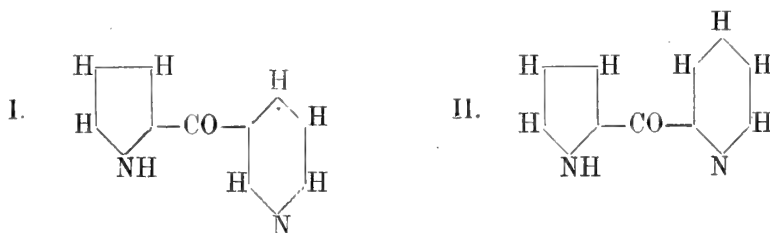
$$\mathrm{H-C_4H_2N(MgX)-CO\,R} \longrightarrow \mathrm{XMg-C_4H_2(NH)-CO-R}$$

(cioè che si formino di nuovo dei composti carbomagnesiaci), essi dovrebbero fornire dei composti bisostituiti per azione di un'altra molecola di cloruro d'acido, e così pure, evidentemente, nel caso che il magnesile rimanga all'azoto. Le esperienze che ho eseguito col pirrilmetilchetone e coi pirrilfenilchetone mi hanno invece dimostrato che non è possibile, almeno a bassa temperatura, l'introduzione di un secondo gruppo acido, non solo al carbonio, ma nemmeno all'azoto; per cui riesce probabile che sia l'ossigeno carbonilico che eserciti una tale azione perturbatrice:

$$\mathrm{HC{=}CH{-}HC{=}C(CO{-}R){-}NH} \xrightarrow{+\ C_2H_5MgBr} \mathrm{HC{=}CH{-}HC{=}C{=}C(OMgBr){-}R\ (N)} + C_2H_6$$

(ritorno: $+ H_2O - MgBrOH$)

Gli alchilpirrilchetoni assumerebbero cioè forma enolica con azoto terziario. Siccome lo stesso fatto si verifica anche con gli indolilchetoni, ciò potrebbe poi stare a spiegare le deboli proprietà basiche che mostrano, come vedremo, detti prodotti.

B) Basi piridil-pirroliche.

Sono due chetobasi, che hanno molta attinenza col gruppo della nicotina: il *β*-piridil-*α*-chetopirrolo (I) e l'*α*-piridil-*α*-chetopirrolo (II):

I. $\mathrm{C_4H_3NH{-}CO{-}C_5H_4N}$ (β) II. $\mathrm{C_4H_3NH{-}CO{-}C_5H_4N}$ (α)

Si ottengono rispettivamente per azione del cloruro dell'acido nicotico e dell'acido picolico sul magnesilpirrolo. La reazione si compie con facilità, ed i prodotti separati pre-

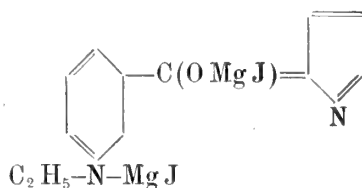
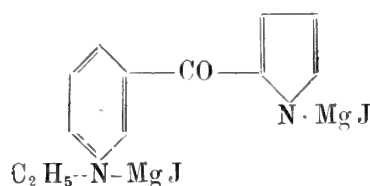
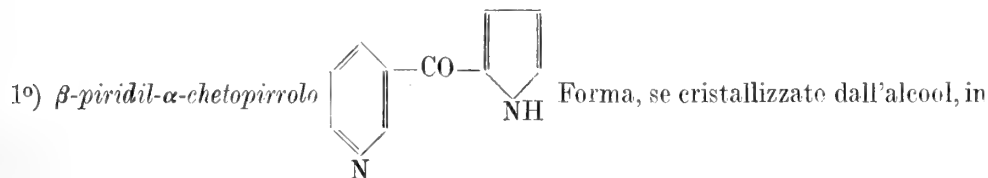
sentano le proprietà del nucleo piridico e del nucleo pirrolico. Si disciolgono negli acidi minerali anche diluiti e riprecipitano con gli alcali; le loro soluzioni cloridriche dànno con cloruro di platino e di oro, il rispettivo cloroplatinato e cloroaurato; con nitrato di argento dànno dei precipitati, in seguito alla sostituzione del metallo con l'idrogeno legato all'azoto del nucleo pirrolico; con ioduro di magnesio-etile sviluppano etano e forniscono dei prodotti polverulenti che sono ad un tempo prodotti di sostituzione dell'idrogeno immidico del pirrolo col gruppo Mg I e di addizione di una molecola di $Mg I C_2H_5$ all'azoto terziario della piridina, in analogia quindi a quanto avviene separatamente col pirrolo e le basi piridiche.

Al composto del β-piridil-α-chetopirrolo, che è il solo che ho analizzato, può spettare, tenendo conto di quanto è stato esposto precedentemente, una delle seguenti formole:

—CO— N · Mg J

C_2H_5—N—Mg J

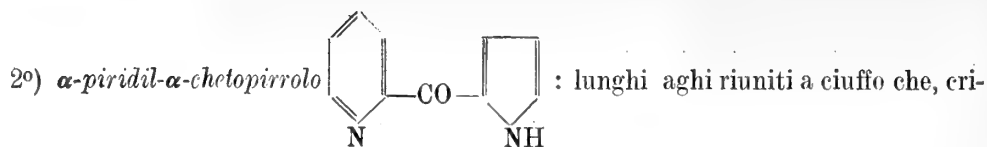
—C(O Mg J)= N

C_2H_5—N—Mg J

Contiene una molecola d'etere di costituzione, e, trattato con acqua, ridà il corpo di partenza inalterato, con sviluppo di etano e formazione di sale basico di magnesio.

1°) *β-piridil-α-chetopirrolo* —CO— NH N Forma, se cristallizzato dall'alcool, in presenza di nero animale, aghi bianchi con leggera tendenza al giallo, a p. fus. 132°. Sono solubili in alcool, benzolo, etere etilico e cloroformio; quasi insolubili in etere di petrolio. Il cloroaurato è un precipitato fioccoso, giallo-arancio, che fonde intorno a 165°; con cloruro mercurico si formano, dopo un po' di tempo, degli aghetti con tendenza al giallo.

Cloroplatinato del -β-piridil-α-chetopirrolo $[C_5H_4N \cdot CO \cdot C_4H_3 : NH \cdot HCl]_2 \cdot PtCl_4$: piccoli grani, colorati in giallo, solubili in acqua specialmente a caldo; cristallizzato da questo solvente non presenta un punto di fusione nè di decomposizione netto: vicino a 235° è decomposto senza prima fondere.

Picrato $C_5H_4N \cdot CO \cdot C_4H_3 : NH + C_6H_2(NO_2)_3OH$: minuti aghi, riuniti a foglie, gialli, untuosi al tatto, solubili a caldo in acqua ed in alcool; p. di fus. 228-230°.

Magnesilderivato del β-piridil-α-chetopirrolo $\begin{array}{l} C_5H_4 : N + C_2H_5MgJ \\ | \\ CO \cdot C_4H_3 : N MgJ \end{array} + O(C_2H_5)$.

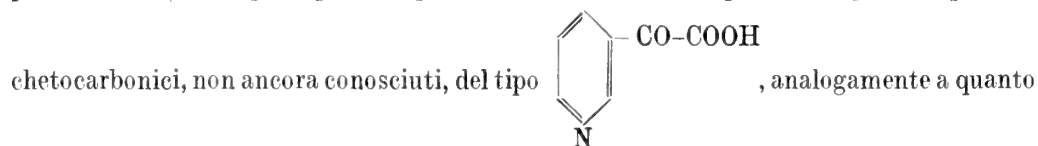
Costituisce una sostanza che facilmente, lasciata all'aria, si decompone nei prodotti che ho già ricordati. Data la sua costituzione di derivato magnesiaco, si dovrebbe prestare ad altre sintesi di alcaloidi piridilpirrolici.

2º) *α-piridil-α-chetopirrolo* [formula: piridina—CO—pirrolo (N, NH)] : lunghi aghi riuniti a ciuffo che, cristallizzati dall'alcool in presenza di carbone animale, si mostrano colorati in giallo-canarino, molto chiaro. Fondono a 74º. Sono solubili, oltre che nell'alcool, anche nel benzolo e nell'etere etilico ; si sciolgono a caldo in acqua, e sono poco solubili nella ligroina e nell'etere di petrolio.

Picrato $C_5H_4N \cdot CO \cdot C_4H_3 : NH + C_6H_2(NO_2)_3OH$: piccoli aghi gialli, setosi, dall'acqua, fondono a 85º.

Cloroplatinato $[C_5H_4N \cdot CO \cdot C_4H_3 : NH \cdot HCl]_2 \cdot PtCl_4$. Precipita colorato in giallo oscuro per aggiunta di cloruro di platino alla soluzione cloridrica del piridilchetopirrolo. È solubile a caldo nell'acqua. A 265º non è ancora fuso.

Il *cloroaurato* si forma nelle stesse condizioni, per trattamento della soluzione cloridrica con cloruro d'oro. È pur'esso colorato in giallo scuro.

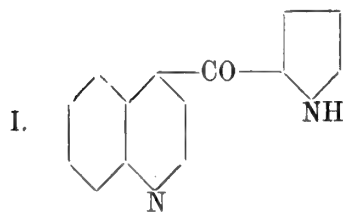
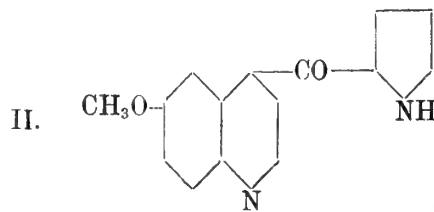
Il *derivato argentico* si ottiene dalla soluzione in acqua bollente dell'α-piridil-α-chetopirrolo con nitrato di argento ed una goccia di ammoniaca : sostanza di aspetto caseoso, colorata in giallo, solubile in eccesso di ammoniaca.

A completare la serie, sarebbe interessante di preparare anche il γ-piridil-α-chetopirrolo e dai tre composti passare, per ossidazione del nucleo pirrolico, agli acidi piridinchetocarbonici, non ancora conosciuti, del tipo [formula: piridina (N) — CO-COOH], analogamente a quanto avviene, come si è visto, con gli alchilpirrilchetoni, che, per ossidazione con permanganato di potassio, forniscono l'acido pirrilchetocarbonico.

C) Basi chinolil-pirroliche.

Sono in stretta relazione con le basi precedenti :

I. [formula: chinolina (N)—CO—pirrolo (NH)]

α-Pirril-γ-chinolilchetone

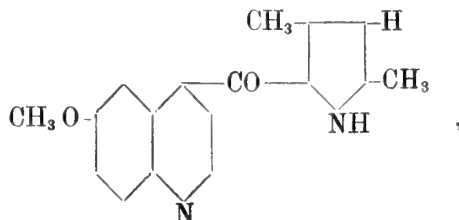
II. [formula: CH_3O—chinolina (N)—CO—pirrolo (NH)]

α-Pirril-p-metossichinolilchetone

Il prodotto (I) è stato ottenuto per azione del cloruro dell'acido cinconico sul magnesilpirrolo [1]. È in aghi giallo-pallidi, p. fus. 153º. Ridotto con polvere di zinco ed acido acetico, dà il carbinolo corrispondente. Il prodotto (II) si forma per azione, sullo stesso

[1] F. Karrer, *B.* *50*, 1499 (1917).

magnesilpirrolo, del cloruro dell'acido chinico; è in aghi bianchi, p. fus. 139°; per riduzione dà il corrispondente carbinolo.

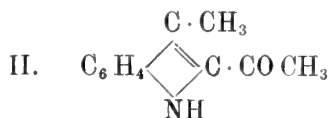
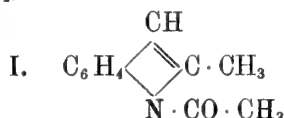
Altra base chinolilpirrolica è stata poi ottenuta per azione del cloruro dell'acido chinico sul magnesilderivato dell'α-β-dimetilpirrolo. È un dimetil 3-5-pirril-p-metossichinolilchetone,

CH_3 — — H
— CO — — CH_3
CH_3O — NH ,
N

sostanza cristallina, fusibile a 165°.

D) Azione dei cloruri d'acidi sui magnesilindoli.

Ho già ricordato che lo studio degli alchilpirrilchetoni ha avuto una notevole importanza anche per il fatto che è servito a fissare la posizione del gruppo sostituente nei prodotti di reazione tra anidride acetica ed indoli. Finchè infatti non venne resa nota la tendenza del pirrolo a formare con l'anidride acetica un derivato chetonico ([1]), i prodotti acetilici dell'indolo ([2]) e quello dell'α-metilindolo ([3]) vennero ritenuti paragonabili ai derivati acetilici delle basi secondarie, cioè che l'acetile sostituisse in questi composti eterociclici l'idrogeno immidico. Solo in seguito ([4]), sia per l'acetilmetilchetolo sia per gli acetilindoli ([5]), si mostrò che dovevano considerarsi come chetoni. Venivano però allora a mancare i veri derivati acetilici di questi prodotti, con l'acetile cioè legato all'azoto.

A colmare questa lacuna, era stato diretto un lavoro sull'azione dell'anidride acetica sul metilchetolo e lo scatolo ([6]), ma non si è riusciti ad isolare se non piccole quantità di N-acetilmetilchetolo [I], seguendo il metodo di E. Fischer ([7]) per la preparazione dell'isomero con l'acetile in posizione β, e lo scatolo non diede se non il derivato chetonico [II]):

$$\text{I.}\quad C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CH\\ \\ N\cdot CO\cdot CH_3\end{matrix}\right\rangle C\cdot CH_3 \qquad\qquad \text{II.}\quad C_6H_4\left\langle\begin{matrix}C\cdot CH_3\\ \\ NH\end{matrix}\right\rangle C\cdot CO\,CH_3$$

La formazione dei veri acetilderivati degli indoli rimase così non del tutto risolta, senza dire che i tentativi si sono sempre limitati all'introduzione del radicale acetico

([1]) Ciamician e Dennstedt, *R. A. L.*, *15*, (1882-1883).
([2]) Baeyer, *B. 12*, 1309 (1881).
([3]) Jackson, *B. 16*, 880 (1883).
([4]) E. Fischer, *B. 19*, 2960 (1886).
([5]) Zatti, *G. 18*, 496 (1888); *19*, 107 (1889); *20*, 84 e 561 (1890).
([6]) Magnanini, *G. 18*, 94 (1888).
([7]) *A. 242*, 379.

Non mi è parso quindi privo di interesse, nello sviluppare questa parte del lavoro, di tenere presente, oltre alla formazione dei prodotti *α*- o *β*- sostituiti, che sono i più interessanti, anche quella dei derivati dall'azoto.

Per procedere con ordine, prima tratterò delle reazioni ottenute col magnesilindolo; dirò poi di quelle avute con i corrispondenti derivati magnesiaci dello scatolo e del metilchetolo, ai quali due ultimi si riferiscono le prove eseguite per la preparazione anche degli N-derivati.

1. — *Reazioni col magnesilindolo.*

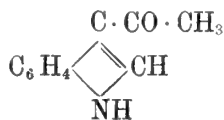
Le reazioni del magnesilindolo con i cloruri acidi si compiono, parimente a quelle del magnesilpirrolo, a temperatura ordinaria ed in presenza di etere etilico. Anche qui non si arriva ad alcooli terziarî, ma unicamente a dei composti chetonici, che portano l'acile legato al carbonio in posizione *β*-. Essi infatti, per ossidazione con potassa, forniscono l'acido *β*-indolcarbonico

$$C_6H_4\langle\begin{matrix}C\cdot COR\\ \diamond \\ NH\end{matrix}\rangle CH \longrightarrow C_6H_4\langle\begin{matrix}C\cdot COOH\\ \diamond \\ NH\end{matrix}\rangle CH\ ,$$

e le loro proprietà chetoniche rimangono poi ancora fissate dalla formazione di idrazoni ed ossime.

I *β*-indolilalchilchetoni non sono però i soli prodotti della reazione. Assieme con essi si riesce anche ad isolare piccole quantità di prodotti bisostituiti che, come si vedrà fra breve, debbono considerarsi come N-*β*-composti.

β-acetilindolo (*β* indolilmetilchetone):

$$C_6H_4\langle\begin{matrix}C\cdot CO\cdot CH_3\\ \diamond \\ NH\end{matrix}\rangle CH$$

È il prodotto di reazione fra il cloruro di acetile ed il magnesilindolo. Dall'acqua bollente cristallizza in aghi bianco-sporchi; ricristallizzato dal benzolo, si ha in scaglie bianche, a p. fus. 189°. È poco solubile, anche a caldo, nell'acqua, nell'etere di petrolio e nel benzolo; si scioglie invece facilmente nell'alcool, e dalle soluzioni alcooliche riprecipita per aggiunta di acqua. Nella potassa a caldo vi si discioglie e riprecipita inalterato per raffreddamento, come pure sublima indecomposto in piccole squame.

Il picrato forma cristalli aghiformi rossi che, purificati dalla benzina, tendono al giallo aranciato. Rammoliscono a 170° e fondono completamente a 183°.

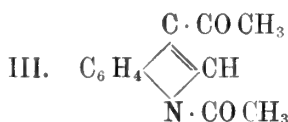
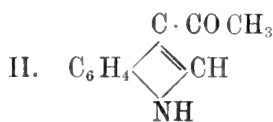
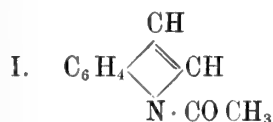
Fusione con potassa. Come è noto, sia gli omologhi del pirrolo sia quelli dell'indolo non dànno cogli ossidanti ordinarii gli acidi carbossilici corrispondenti. Così, secondo Jackson [1], il metilchetone, per ossidazione con permanganato di potassio, dà acido acetil-*γ*-amidobenzoico.

[1] *B.* XIV, 885.

Fu per tale ragione che, a dimostrare la costituzione del predetto composto e degli altri termini, ricorsi all'ossidazione con potassa. L'operazione si compie per riscaldamento di una parte del chetone con 20 parti di potassa in polvere in un piccolo crogiuolo d'argento; l'acido β-indolcarbonico che ne risulta fonde a 214°.

Fenilidrazone del β-acetilindolo: $NH\langle C_6H_4, CH \rangle C \cdot C(CH_3):N \cdot NH \cdot C_6H_5$. Questo corpo, che non era stato ancora preparato, si presenta in cristalli aghiformi, colorati in giallo chiaro, se cristallizzati da alcool acquoso in presenza di nero animale. Fonde a 118°.

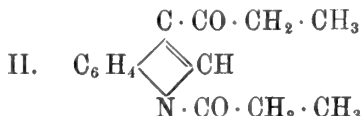
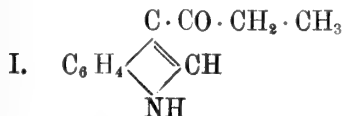
I derivati acetilici conosciuti dell'indolo sono l'N-acetilindolo (I), il β-acetilindolo (II) e l'n-β-diacetilindolo (III):

$$\text{I.}\quad C_6H_4\langle CH,\ N \cdot CO\,CH_3 \rangle CH \qquad \text{II.}\quad C_6H_4\langle C \cdot CO\,CH_3,\ NH \rangle CH \qquad \text{III.}\quad C_6H_4\langle C \cdot CO\,CH_3,\ N \cdot CO\,CH_3 \rangle CH$$

Gli ultimi due furono preparati per la prima volta da Baeyer [1], facendo reagire l'anidride acetica sull'indolo alla temperatura di 180-200°. Per il monoacetilico diede un p. di fus. di 182-183°, per il diacetilico 146°; per nessuno dei due determinò però la posizione del gruppo sostituente. Zatti, in seguito [2], per azione dell'anidride acetica sull'acido α-indolcarbonico in tubi chiusi, alla temperatura di 220°, ottenne un composto monoacetilico ed un altro diacetilico, identici a quelli preparati da Baeyer. Fondendo il primo con potassa, dimostrò che era il derivato β-, e, idrolizzando l'altro, trovò trattarsi dell'N-β-composto.

Il fatto pertanto che nell'azione dell'anidride acetica, sia sull'indolo, sia sull'acido α-indolcarbonico, si forma anche un composto diacetilato, m'indusse a vedere se anche per azione del cloruro di acetile sul magnesilindolo si formasse un prodotto di tale natura.

Le previsioni vennero confermate, poichè dalla soluzione benzenica madre della cristallizzazione del β-acetilindolo per aggiunta di etere di petrolio, si ottiene ancora un prodotto che fonde prima tra i 120 e 135°. Questo, cristallizzato dal benzolo, dà ancora una piccola porzione di β-acetilindolo e, per precipitazione con etere di petrolio, un prodotto a p. fus. 146°, che è l'N-β-derivato. Bollito con alcali concentrato, perde l'acetile attaccato all'azoto e si ha il composto chetonico, di cui si è detto sopra.

β-propionilindolo (β-indoliletilchetone) [I] ed N-*β-propionilindolo* (II):

$$\text{I.}\quad C_6H_4\langle C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3,\ NH \rangle CH \qquad \text{II.}\quad C_6H_4\langle C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3,\ N \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3 \rangle CH$$

(1) *B.* *12*, 1314.
(2) *G.* *18*, p. 496 (1888); *19*, p. 107. Vedi ancora *20*, p. 84 e 561 (1890)

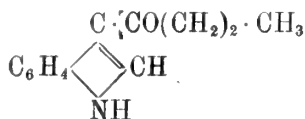
Il cloruro di propionile, aggiunto al magnesilindolo, conduce in definitiva ad una sostanza senza un punto di fusione netto. Trattando questa col benzolo bollente, in presenza di nero animale, si ottengono bei cristalli con p. fus. costante di 157–158° e sono costituiti da β–propionilindolo. L'N-β-derivato si ottiene dalla benzina-madre per aggiunta di etere di petrolio. Piccoli cristalli fondenti a 128–130°.

Nessuno dei due predetti corpi era conosciuto.

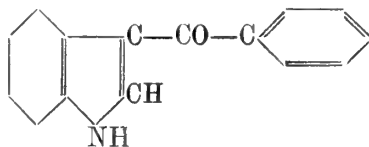
L'ossima dell'indolilchetone, $NH\langle {}^{C_6H_4}_{CH} \rangle C \cdot C(C_2H_5):NOH$, forma cristalli bianchi, dall'acqua bollente in presenza di poco alcool, fondenti a 120–122°. Il fenilidrazone $NH\langle {}^{C_6H_4}_{CH} \rangle C \cdot C(C_2H_5):N \cdot NH \cdot C_6H_5$, si ottiene cristallino e colorato in rosso. Fonde a 108-110°, purificandolo dall'alcool acquoso, in presenza di nero animale.

È da notare che il rendimento in N–β–biderivati sembra che diminuisca col crescere della compiessità della molecola dell'alchile; così nella preparazione del β-indolilpropilchetone e del β-indolilfenilchetone, di cui si dirà qui appresso, seguendo anche lo stesso metodo di preparazione, non si è riusciti ad avere, oltre ai suddetti prodotti, se non tracce di altri, che non hanno permesso di poter fare alcuna esperienza.

β–butirrilindolo (β–indolilpropilchetone):

$$C_6H_4\langle {}^{C \cdot CO(CH_2)_2 \cdot CH_3}_{NH} \rangle CH$$

Operando col cloruro di butirrile, come con gli altri cloruri d'acidi, si ottiene il β-butirrilindoio cristallino, bianco, che, purificato da acqua e alcool, fonde a 169°. Resiste all'azione degli alcali anche bollenti; è molto solubile in alcool, meno in benzolo, pochissimo in etere di petrolio. Il fenilidrazone è una sostanza cristallina e fonde a 107°.

β-benzoilindolo (β–indolilfenilchetone):

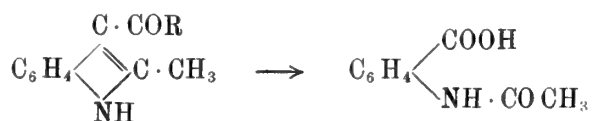
$$C_6H_4\langle {}^{C-CO-C_6H_5}_{NH} \rangle CH$$

La reazione fra cloruro di benzoile e magnesilindolo conduce prima ad una sostanza cristallina, di colorito rosso, che, purificata dall'alcool, diluito appena con acqua, fonde vicino a 170°. Bollita con idrato potassico al 50 % ed in presenza di poco alcool, non fornisce indolo, il che dimostra trattarsi di un C–derivato; ma il p. fus. aumenta fino a 227° È molto probabile quindi che anche in questo caso si formino piccole

quantità di N-β-dibenzoilindolo, il quale, per ebollizione con gli alcali si trasforma nel derivato β. che ha come p. di fus. 227°.

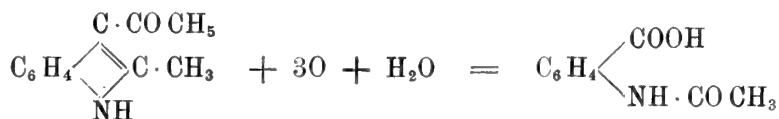
Il fenilidrazone si ha da alcool ed acqua, in cristalli, fondenti a 192-194°. Il derivato argentico è solubile in eccesso di ammoniaca.

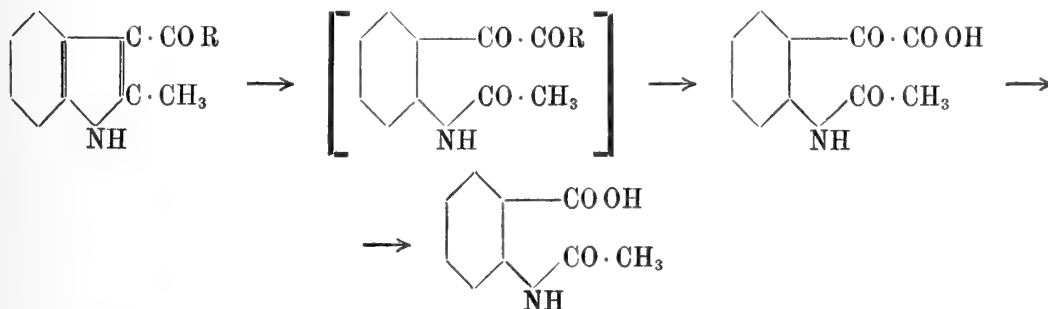
2. — *Reazioni col magnesilscatolo e magnesilmetilchetolo.*

Di alcuni prodotti chetonici che descrivo in questa parte del lavoro, oltre che con la resistenza verso gli alcali bollenti, che li differenzia dai prodotti all'azoto, ne ho confermato la funzionalità chetonica mediante i prodotti di ossidazione. Ho usato il permanganato di potassio nel caso dei β-acil-α-metilindoli, che mi hanno condotto all'acido acetil-o-amidobenzoico:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} C\cdot COR \\ \| \\ NH \end{matrix}\right\rangle C\cdot CH_3 \longrightarrow C_6H_4\left\langle\begin{matrix} COOH \\ NH\cdot CO\,CH_3 \end{matrix}\right.$$

Bedson e King [1] ottennero lo stesso prodotto nell'ossidazione dell'acetil-o-toluidina; Jackson [2] in quella del metilchetolo e Magnanini [3] nell'azione dell'acetilderivato di quest'ultimo.

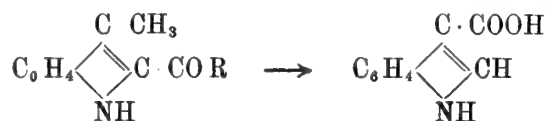
Magnanini interpreta tale risultato ammettendo che avvenga prima l'eliminazione dell'acetile e poi la ossidazione del metilchetolo risultante:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} C\cdot CO\,CH_5 \\ \| \\ NH \end{matrix}\right\rangle C\cdot CH_3 + 3O + H_2O = C_6H_4\left\langle\begin{matrix} COOH \\ NH\cdot CO\,CH_3 \end{matrix}\right.$$

Credo più possibile, invece, che l'ossidazione suddetta si svolga nel seguente modo:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} C\cdot CO\,R \\ \| \\ C\cdot CH_3 \end{matrix}\right. (NH) \rightarrow \left[C_6H_4\left\langle\begin{matrix} CO\cdot COR \\ NH\,CO\cdot CH_3 \end{matrix}\right. \right] \rightarrow C_6H_4\left\langle\begin{matrix} CO\cdot CO\,OH \\ NH\,CO\cdot CH_3 \end{matrix}\right. \rightarrow C_6H_4\left\langle\begin{matrix} CO\,OH \\ NH\,CO\cdot CH_3 \end{matrix}\right.$$

analogamente cioè a quanto avviene, come si è già visto, con gli alchilpirrilchetoni, ed anche col dipirroile (di cui sarà detto in seguito), i quali tutti conducono all'acido α-chetocarbonico.

(1) *Soc.* 1880, p. 752.
(2) *B.* XIV, 885.
(3) loc. cit.

Impiegai invece la potassa fusa nell'ossidazione degli α-acil-β-metilindoli ed ottenni in questo caso l'acido indolcarbonico:

$$C_6H_4\langle C(CH_3)=C\cdot COR \rangle NH \longrightarrow C_6H_4\langle C(COOH)=CH \rangle NH$$

Inoltre, di qualche termine preparai il derivato argentico, e tentai la preparazione del fenilidrazone o dell'ossima:

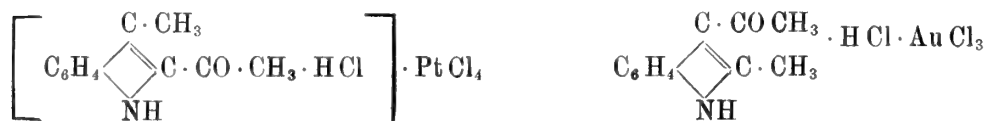
Tutti i chetoni da me impiegati offrono una grande resistenza all'azione sia della fenilidrazina sia dell'idrossilamina, anche facendo uso di soluzioni concentrate del prodotto in esame. La stessa resistenza si nota anche, come si è già detto, col pirrilfenilchetone e si ripete con altri prodotti chetonici che studieremo avanti; cercheremo allora di darcene ragione.

Un altro lato di studio infine per alcuni fra i suddetti acilderivati mi è stato fornito dal loro comportamento come basi deboli.

Si sciolgono facilmente in HCl conc. e riprecipitano inalterati, solo nel caso che si aggiunga molta acqua; in un acido che abbia una concentrazione del 20 % sono ancora sufficientemente solubili.

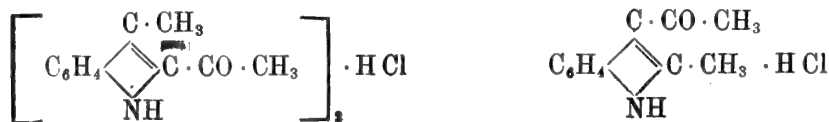
In queste condizioni forniscono dei precipitati con la maggior parte dei reattivi degli alcaloidi, come lo ioduro doppio di bismuto e di potassio, il bicromato potassico, il cloruro di platino ed il cloruro di oro.

Con questi due ultimi, operando con soluzioni di HCl concentr. e servendomi anche di esso come liquido di lavaggio dei precipitati ottenuti, ho potuto isolare ed analizzare dei cloroplatinati, corrispondenti alle formole normali:

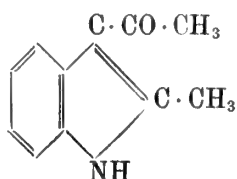
$$\left[C_6H_4\langle C(CH_3)=C\cdot CO\cdot CH_3 \rangle NH \cdot HCl\right]\cdot PtCl_4 \qquad C_6H_4\langle C(CO\,CH_3)=C\cdot CH_3 \rangle NH \cdot HCl\cdot AuCl_3$$

Inoltre, sciogliendo il chetone in etere anidro e saturando con una corrente pura e secca di HCl, di alcuni ho potuto isolare ed analizzare i rispettivi cloridrati. Essi sono cristallini; ma, lasciati all'aria, sfioriscono per dare, dopo poco tempo, il chetone inalterato di partenza.

Queste proprietà debolmente basiche di questi derivati dell'indolo, a quanto è a me noto, non erano state messe in evidenza; e nel trattato del Beilstein, dei soli due termini a funzionalità chetonica finora conosciuti (l'α-metil-β-acetilindolo, e l'α-acetil-β-metilindolo), solo del primo è detto che si scioglie in acido cloridrico concentrato, ma nè il cloridrato nè alcun sale doppio era stato ottenuto.

Il cloridrato del C-acetilscatolo corrisponde a quello di un dimero (I) e si differenzia in questo con l'isomero del metilchetone che dà un cloridrato normale (II):

$$\left[C_6H_4\langle C(CH_3)=C\cdot CO\cdot CH_3 \rangle NH\right]_2\cdot HCl \qquad C_6H_4\langle C(CO\cdot CH_3)=C\cdot CH_3 \rangle NH \cdot HCl$$

La stessa polimerizzazione si è visto che avviene con lo scatolo, mentre il metilchetolo fornisce un cloridrato a molecola semplice. Si ptrebbe quindi pensare ad un carattere peculiare dei due prodotti α- e β- sostituiti dell'indolo; e, siccome quest'ultimo fornisce pure un cloridrato con molecola doppia dell'indolo, ne risulta anche da questo punto un nuovo rapporto fra i termini di una aelle due coppie di cui ho detto precedentemente cioè fra l'indolo e lo scatolo.

α-metil-β-acetilindolo (c-acetilmetilchetolo):

$$C\cdot CO\cdot CH_3$$
$$C\cdot CH_3$$
$$NH$$

Risulta dall'azione del cloruro di acetile sul magnesilmetilchetolo. Forma aghi incolori dalla benzina, a p. fus. 196°. Rendimento dell'86 % sull'α-metilindolo impiegato. Specialmente a freddo è poco solubile, oltre che nell'acqua e nell'etere, anche nel benzolo; si scioglie facilmente nell'alcool e nell'acetone.

Resiste all'azione degli idrati alcalini caldi, mostrandosi così identico al prodotto di Jackson, ripreparato poi da E. Fischer. Si scioglie abbastanza in acido cloridrico diluito, facilmente in quello concentrato; con acido solforico concentrato fornisce una soluzione colorata appena in giallo-paglierino, che col riscaldamento passa al giallo-viola.

Nell'intento di poter ottenere il vero acetilmetilchetolo: $C_6H_4\langle\begin{smallmatrix}CH\\ \\ N\cdot CO\,CH_3\end{smallmatrix}\rangle C\cdot CH_3$ in una altra preparazione si è aggiunto il cloruro di acetile, raffreddando prima fortemente il magnesilderivato dell'α-metilindole e poi, dopo aver agitato per bene, si è lasciato il tutto in riposo per circa dodici ore in modo da fare raggiungere, a poco a poco, la temperatura dell'ambiente; il precipitato giallo-rossastro, formatosi fin da principio, passò gradatamente al rosso cupo. Trattato prima con ghiaccio e neutralizzato, si distillò l'etere: il prodotto residuale poi venne distillato a vapor d'acqua, ma la distillazione non diede se non piccole quantità di α-metilindolo rimasto inalterato, assieme con quantità pure piccole di α-metil-β-acetilindolo, mentre la parte principale di quest'ultimo si ottenne dalle acque madri che filtrai ancora calde.

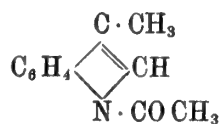
Cloridrato dell'α-metil-β-acetilindolo: $C_{11}H_{11}ON\cdot HCl$. Si forma facendo passare una corrente di acido cloridrico gassoso puro e secco sul C-acetilmetilchetolo, in parte disciolto e in parte in sospensione nell'etere anidro, raffreddato con ghiaccio: polvere a piccoli grumi, bianca, che, lasciata all'aria, sfiorisce facilmente per dare, dopo poco tempo, il chetone inalterato.

Cloroaurato: $C_{11}H_{11}ON\cdot HCl\cdot AuCl_3$. Partendo da una soluzione di acido cloridrico concentrato del chetone, si separa in fiocchi gialli; imbruniscono intorno a 135°, per fondere, con decomposizione, a 158°. Sono solubili facilmente nell'alcool, ma non si riesce a cristallizzarli senza decomporli. Trattati con acqua, il cloruro d'oro passa in soluzione e rimane il chetone inalterato.

Cloroplatinato: $(C_{11}H_{11}ON \cdot HCl)_2 \cdot PtCl_4$. Si ottiene come precipitato fioccoso colorato in giallo, aggiungendo alla soluzione in acido cloridrico concentrato del chetone una soluzione acquosa satura di cloruro platinico. Può essere lavato con acido cloridrico concentrato, mentre l'acqua lo idrolizza. Col riscaldamento incomincia ad annerirsi al di sopra di 170°, per fondere, con decomposizione, a 195°.

La soluzione cloridrica del chetone dà poi le seguenti reazioni: con *acido fosfotungstico* un precipitato bianco; con *ioduro di cadmio* e *di potassio* un precipitato bianco che poco dopo diventa grigio-marrone; con ***ioduro di bismuto* e *di potassio*** un precipitato giallo-sporco; con *bicromato potassico* un precipitato verde-bruno.

β-metil-n-acetilindolo (*n*-acetilscatolo):

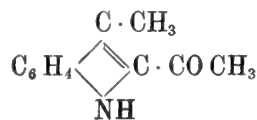
$$C_6H_4\langle \begin{matrix} C \cdot CH_3 \\ \quad CH \\ N \cdot COCH_3 \end{matrix}$$

Questo corpo, non ancora conosciuto ed isomero del precedente, si forma nelle migliori condizioni facendo agire il cloruro di acetile sul magnesilscatolo raffreddato con ghiaccio: aghi bianchi, p. di fus. 68°.

La sua soluzione alcoolica, per aggiunta di idrato potassico al 50 %, dà, già a freddo, odore di scatolo, che aumenta di molto facendo bollire a ricadere per circa mezz'ora. Distillando, in seguito, a vapor d'acqua, passa unicamente dello scatolo che riconobbi, oltre che dal suo odore caratteristico e dal suo punto di fusione, anche dalla sua combinazione con acido picrico. Le acque alcaline rimaste nel pallone a distillare, acidificate con acido solforico e distillate di nuovo, forniscono, portando a secco il distillato, previa neutralizzazione con carbonato sodico, l'odore caratteristico dell'etere acetico, per aggiunta di acido solforico ed alcool.

Trattando poi la soluzione in acqua bollente dell'acetil-composto con nitrato di argento ed una goccia di ammoniaca, non si ottiene nessun precipitato, come dovrebbe avvenire se l'idrogeno imminico fosse ancora libero: si ha invece solo una piccola riduzione.

L'*n*-acetilscatolo è discretamente solubile in acqua bollente, molto in alcool; si scioglie facilmente, anche a freddo, in etere, in benzolo, in ligroina; un po' meno in etere di petrolio. È solubile in acido cloridrico anche concentrato; vi si scioglie a caldo separando scatolo; in acido solforico concentrato si scioglie a freddo, colorandolo in giallo; per riscaldamento comparisce una bella colorazione rosso-porpora.

β-metil-α-acetilindolo (*α*-acetilscatolo):

$$C_6H_4\langle \begin{matrix} C \cdot CH_3 \\ \quad C \cdot COCH_3 \\ NH \end{matrix}$$

Questo composto che, in piccola quantità, si ottiene anche nella precedente reazione, si forma come prodotto quasi unico facendo agire il cloruro di acetile sul magnesilscatolo, ad una temperatura più elevata di quella che si richiede per la preparazione del suo isomero il *β*-metil-N-acetilindolo.

È insolubile o quasi in acqua fredda, abbastanza solubile in etere etilico, poco in etere di petrolio, facilmente in alcool ed acetone. Cristallizzato dall'etere di petrolio, si ottiene in lunghi e fini aghi di aspetto di lanugine, a p. di fus. 146°-5.

Rendimento dell'82 % sullo scatolo impiegato.

A differenza del composto precedente, resiste all'azione degli alcali bollenti. La sua soluzione in acqua calda dà, per aggiunta di nitrato di argento e di una goccia di ammoniaca, un precipitato giallastro che però subito annerisce per riduzione. In acido solforico concentrato, vi si discioglie con colorazione giallo-arancio; riscaldando comparisce, come per l'isomero all'azoto dello scatolo, una bella colorazione rosso-porpora.

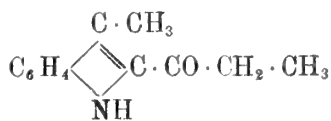
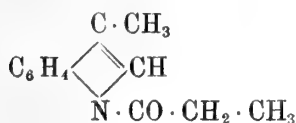
Il β-metil-α-acetilindolo era stato ottenuto precedentemente da Magnanini [1], facendo reagire lo scatolo col cloruro di acetile in presenza di cloruro di zinco. Si forma anche per azione di un eccesso di anidride acetica sullo scatolo in tubi chiusi; ma il rendimento in questo caso è molto scarso e diventa ancora minore se si sostituisce all'anidride acetica il cloruro di acetile e si operi alla pressione ordinaria.

Cloridrato del β-metil-α-acetilindolo. Il C-acetilscatolo si mostra meno basico del corrispondente isomero al carbonio del metilchetolo. In acido cloridrico anche concentrato, vi si discioglie meno facilmente, impartendo una colorazione gialla che ricorda quella delle soluzioni acquose di acido picrico, ed i reattivi generali degli alcaloidi forniscono reazioni meno nette. Saturando con acido cloridrico gassoso e secco la soluzione satura a freddo in etere anidro del chetone, si separa il cloridrato cristallino, che è quello di un dimero, colorato in giallo, colorazione che assume pure l'etere, nel quale solvente è abbastanza solubile.

Lasciato all'aria sfiorisce facilmente con scomparsa contemporanea della colorazione gialla, per dare il prodotto inalterato di partenza. Le reazioni ottenute con alcuni dei reattivi degli alcaloidi sono:

Con *acido fosfotungstico* un precipitato bianco-sporco che, dopo poco tempo, vira al giallo; con *ioduro doppio di bismuto e di potassio* un debole precipitato violaceo e poco dopo, grigio; con *bicromato di potassio* un debole precipitato bianco, giallastro. Il *cloruro d'oro*, se è in soluzione di acido cloridrico molto concentrata, dà quasi subito un precipitato giallo; se la soluzione invece non è sufficientemente satura, solo dopo qualche tempo si forma un intorbidamento. Il *cloroplatinato* $(C_{11}H_{11}ON \cdot HCl)_2 \cdot PtCl_4$, si forma come precipitato polverulento, giallo, versando una soluzione cloridrica di cloruro platinico sulla soluzione in acido cloridrico concentrato del C-acetilscatolo preparata sul momento.

N-propionil-β-metilindolo (*n*-propionilscatolo) (I),
α-propionil-β-metilindolo (*c*-propionilscatolo) (II):

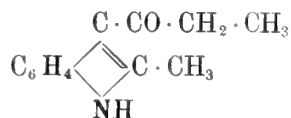
$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} C \cdot CH_3 \\ \quad CH \\ N \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3 \end{matrix}\right. \qquad\qquad C_6H_4\left\langle\begin{matrix} C \cdot CH_3 \\ \quad C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3 \\ NH \end{matrix}\right.$$

Si formano nelle stesse condizioni dei due omologhi inferiori isomeri, per azione del cloruro di propionile sul magnesilscatolo, e la loro separazione avviene frazionando per

[1] loc. cit.

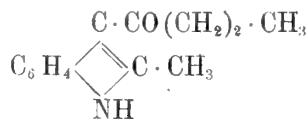
distillazione a vapor d'acqua. L'n-derivato, cristallizzato da acqua e poco alcool, fonde a 45°; trattando la sua soluzione alcoolica con idrato potassico al 50 %, anche a freddo, si sente marcatamente l'odore di scatolo; la decomposizione diviene completa per leggero riscaldamento. Non fornisce alcun precipitato con soluzione di nitrato di argento e di ammoniaca.

Il C- derivato fonde a 161°, dopo averlo purificato dall'etere di petrolio in presenza di poca ligroina. Contrariamente al suo isomero, resiste all'azione degli alcali, e fornisce un derivato argentico. Fuso con potassa, dà l'acido β-indolcarbonico.

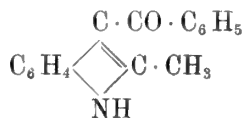
α-metil-β-propionilindolo (c-propionilmetilchetolo):

$$C_6H_4 \langle \begin{matrix} C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3 \\ \\ NH \end{matrix} \rangle C \cdot CH_3$$

Risulta dall'azione del cloruro di propionile sulla soluzione eterea di magnesilmetilchetolo. Cristallizzato prima dall'alcool ed acqua, poi dal benzolo in presenza di carbone animale, si ottengono bei cristalli bianchi a p. di fus. 194°, che resistono all'azione degli alcali e forniscono, nelle solite condizioni, un derivato argentico. È solubile in alcool e benzolo; poco solubile in etere etilico, meno in ligroina, quasi insolubile in etere di petrolio. Nell'acqua bollente è poco solubile. Ossidato con permanganato di potassio, fornisce l'acido acetilortoamidobenzoico.

α-metil-β-butirrilindolo (c-butirrilmetilchetolo):

$$C_6H_4 \langle \begin{matrix} C \cdot CO(CH_2)_2 \cdot CH_3 \\ \\ NH \end{matrix} \rangle C \cdot CH_3$$

È il prodotto di reazione fra cloruro di butirrile e magnesilmetilchetolo. Purificato dal benzolo in presenza di carbone animale, si ha bianco, tendente al giallo se lasciato all'aria; p. di fus. 157-158°. È poco solubile in ligroina; quasi insolubile in etere di petrolio; si scioglie invece, oltre che nella benzina, anche nell'alcool. Resiste all'azione degli alcali e la sua soluzione in acqua bollente, dove è poco solubile, precipita per aggiunta di nitrato di argento e di una goccia di ammoniaca.

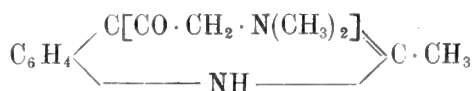
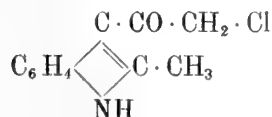
α-metil-β-benzoilindolo (c-benzoilmetilchetolo):

$$C_6H_4 \langle \begin{matrix} C \cdot CO \cdot C_6H_5 \\ \\ NH \end{matrix} \rangle C \cdot CH_3$$

Si forma per azione del cloruro di benzoile sul magnesilmetilchetolo: aghi bianchi dal benzolo, in presenza di carbone animale; p. di fus. 181°. Anche il C-benzoilmetilchetolo è poco solubile in ligroina, quasi insolubile in etere di petrolio; resiste all'azione degli alcali e fornisce un derivato argentico.

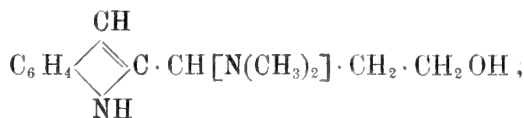
Facendo agire il cloruro di benzoile diluito con etere anidro sul magnesilmetilchetolo raffreddato con ghiaccio e poi lasciato il tutto a sè per 24 ore allo scopo di poter ottenere

il derivato all'azoto, ho notato che, anche in queste condizioni, si forma il derivato al C come prodotto principale. Se si neutralizza però esattamente, dopo aver scomposto con ghiaccio il prodotto della reazione, e si distilla a vapor d'acqua frazionando con cura (in provette), allora nelle prime porzioni passa un po' di α-metilindolo che si è ripristinato, e subito dopo si ottiene una piccola quantità di un prodotto bianco a punto di fusione 81° che rimane costante cristallizzandolo dall'alcool. Esso, con tutta probabilità corrisponde all' N-benzoilmetilchetolo $C_6H_4 \langle CH \rangle C \cdot CH_3$ ($N \cdot CO\,C_6H_5$), identico a quello ottenuto da E. Fischer e Wagner (1) per azione del cloruro di benzoile in presenza di zinco, sull' α-metilindolo.

Cloroacetil-3-metil-2-indolo (I) e *dimetilamminoacetil-3-metilindolo* (II):

$$C_6H_4 \langle C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot Cl,\ NH \rangle C \cdot CH_3 \qquad C_6H_4 \langle C[CO \cdot CH_2 \cdot N(CH_3)_2],\ NH \rangle C \cdot CH_3$$

La fisostigmina (eserina) $C_{15}H_{21}O_2N_2$, distillata con polvere di zinco, fornisce una miscela di metil-1 e di metil-2-indoli, per cui si era ritenuto di poter concludere che essa contiene un nucleo benzenico attaccato all'azoto e probabilmente un gruppo atomico $C_6H_4 \langle C,\ N \rangle C-$. Il suo prodotto d'idrolisi, l'eserolina $C_{13}H_{18}ON_2$ d'Ehrenberg (1892), è una base terziaria monoacida contenente un metile attaccato all'azoto.

Il suddetto prodotto pertanto fu preparato da A. H. Salway (2) allo scopo di confrontare le sue proprietà e quelle dell'α-dimetilamino-2-γ-ossipropilindolo,

$$C_6H_4 \langle CH,\ NH \rangle C \cdot CH[N(CH_3)_2] \cdot CH_2 \cdot CH_2OH,$$

con quelle dell'eserolina che deve contenere un complesso indolico.

Il dimetilamminoacetil.3. metil-2-indolo venne ottenuto preparando prima, per mezzo del magnesilmetilchetolo e cloruro di cloroacetile, il cloroacetil-3-metil-2-indolo (aghi incolori, p. f. 201°) e poi facendo agire su questo la dimetilammina.

E) ERIVATI ACILICI DEL CARBAZOLO.

Acetilcarbazolo: $\begin{matrix} C_6H_4 \\ | \\ C_6H_4 \end{matrix} \rangle N \cdot CO\,CH_3$. L'acetilcarbazolo era stato ottenuto per azione dell'anidride acetica sul composto potassico sopra 250° (3). L'ho ripreparato facilmente, e con rendimenti vicini al teorico, per azione del cloruro di acetile sul magnesil-

(1) *B. 20*, 817 (1887).
(2) *Soc. 103*, 351 (1913).
(3) *A. 63*, 351 (1872).

carbazolo in presenza di etere anidro. La reazione si completa dopo qualche ora di riscaldamento a b. m.; cristallizzato più volte dall'etere di petrolio, si ottiene sotto forma di polvere apparentemente amorfa, bianchissima, a p. fus. 70°.

Propionilcarbazolo : $\begin{matrix} C_6H_4 \\ | \\ C_6H_4 \end{matrix} \!\!>\! N \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3$ Questo nuovo prodotto si ottiene facilmente sostituendo nella predetta reazione il cloruro di acetile col suo omologo superiore; dall'etere di petrolio in presenza di poca ligroina si ottiene in piccoli aghi bianchi, che si depositano a ciuffetti sulle pareti del cristallizzatore, a p. di fus. 90°. Rendimento del 92%, sul carbazolo impiegato.

Si scioglie facilmente in benzolo; è solubile, specialmente a caldo in alcool, etere etilico, ligroina; poco in etere di petrolio. Bollito con una soluzione idroalcoolica di KOH al 25 % si scinde in carbazolo ed acido propionico. In acido solforico concentrato vi si discioglie impartendo colorazione giallla.

Picrato, $C_{15}H_{13}ON + C_6H_2(NO_2)_3 \cdot OH$. Aghi a base prismatica, riuniti a ciuffo e colorati in rosso aranciato, p. di fus. 140°. Sono poco solubili in etere di petrolio, di più in ligroina; facilmente solubili in alcool e in benzolo.

Nitropropionilcarbazolo : $\begin{matrix} C_6H_3\!-\!NO_2 \\ | \\ C_6H_3 \end{matrix} \!\!>\! N \cdot CO\,C_2H_5$. Si forma per azione dell'acido nitrico (d. l. 41) sul propionilcarbazolo, disciolto a debole calore in acido acetico glaciale. Cristallizzato più volte dal toluene, si ha una massa bianca, untuosa al tatto, a p. di fus. 233°; al microscopio si notano aghi prismatici.

È solubile in toluene, benzolo, ligroina, poco in alcool, molto poco in etere di petrolio.

Benzoilcarbazolo : $(C_6H_4)_2) = N \cdot CO \cdot C_6H_5$. Il benzoilcarbazolo non è stato preparato finora meno difficilmente del derivato acetilico. Il cloruro di benzoile infatti reagisce poco à pressione ordinaria col carbazolo anche riscaldando; risultati negativi dà il metodo di Baumann, così generalizzato oggi a corpi anche pochissimo solubili in acqua e di funzione chimica diversa. Bizzarri [1] l'ottenne riscaldando in tubo chiuso carbazolo con 4 volte il suo peso di anidride benzoica, al di sopra di 240°, per 7 ore.

Il magnesilcarbazolo in presenza di etere anidro reagisce invece, anche a temperatura ordinaria col cloruro di benzoile, per fornire abbondante separazione di un prodotto cristallino che è costituito essenzialmente da benzoilcarbazolo, come lo mostra il suo comportamento con la potassa alcoolica che dà, per ebollizione, carbazolo ed acido benzoico. Cristallizzato due volte dall'alcool, fonde a 98°.

F) Azione delle anidridi organiche sul magnesilpirrolo.

Le anidridi organiche, presentando lo stesso aggruppamento dei cloruri d'acidi

$$\begin{matrix} R\!-\!C\!=\!O \\ \cdots\cdots|\cdots\cdots \\ O\!-\!COR \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} R\!-\!C\!=\!O \\ \cdots\cdots|\cdots\cdots \\ Cl \end{matrix}$$

(1) Bizzarri, *G.* **20**, 413 (1880); Mazzara, *G.* **21**, 313 (1891).

lasciavano prevedere che potessero anch'esse condurre, agendo sul magnesilpirrolo, anzichè a degli alcooli terziarji, a dei chetoni, secondo un'equazione analoga :

$$\underset{NH}{\boxed{\ \ }}C\cdot MgX + \begin{matrix} O{=}C\cdot R \\ | \\ O\cdot COR_1 \end{matrix} = \underset{NH}{\boxed{\ \ }}C{-}\overset{OMgX}{\underset{R}{C}}{-}OCOR_1 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow R_1COOMgX + \underset{NH}{\boxed{\ \ }}C\cdot COR$$

Nel fatto, anche impiegando per una molecola di anidride due molecole di magnesilpirrolo, non si arriva al composto (I)

$$[R\cdot CO]_2O + 2C_4H_3(MgX){:}NH = R\cdot COOMgX + \begin{matrix} NH{:}C_4H_3 \\ NH{:}C_4H_3 \end{matrix}{>}C{<}\begin{matrix} R \\ OMgX \end{matrix} \qquad [I]$$

che per azione dell'acqua darebbe un carbinolo, ma sempre al chetone corrispondente e del pirrolo si riottiene inalterato.

A spiegare tuttavia la formazione di pirrolo, il composto (I) potrebbe rappresentare un prodotto intermedio, pur notando che del pirrolo si può ripristinare, con altrettanta probabilità, semplicemente in seguito ad uno stato di equilibrio, susseguente alla formazione del chetone

$$NH{:}C_4H_3\cdot COR + NH{:}C_4H_3MgX \rightleftarrows N[MgX]{:}C_4H_3\cdot COR + C_4H_4{:}NH$$

determinato dalla presenza dell'idrogeno immidico dei nuclei pirrolici. Degno di nota, per la parte pratica, è che, impiegando le anidridi acide, il rendimento in acilpirroli è ancora superiore a quello che si ottiene con i cloruri: con questi si è arrivati ad avere il 50-60 % con i cloruri alifatici, l'80 % con gli aromatici. Con l'anidride acetica si è ottenuto invece il 78 % e con l'anidride benzoica il 93 %, rendimenti che, assieme con la semplicità del processo, riescono veramente sorprendenti, se si pensa alla difficoltà ed ai rendimenti scarsi, che si erano ottenuti per i pochi termini di cui si era tentata la preparazione, facendo agire direttamente le anidridi acide o sul pirrolo o sul suo derivato potassico.

La possibilità di sostituzione delle anidridi ai cloruri acidi presenta inoltre il vantaggio di poter estendere la reazione a prodotti i cui rispetivi cloruri o si ottengono difficilmente o non sono stati ancora preparati, e lascia prevedere, impiegando anidridi cicliche sature e non sature, la formazione di acidi chetonici per semplice reazione di addizione :

$$\begin{matrix} CH{-}CO \\ \| \qquad {>}O \\ CH{-}CO \end{matrix} + C_4H_3(MgX){:}NH \longrightarrow \underset{NH}{\boxed{\ \ }}C\cdot CO\cdot CH{=}CH\cdot COOMgX$$

Facendo uso di anidride acetica e di anidride benzoica, ho intanto riprodotto il pirrilmetilchetone a p. di fus. 90°, p. di eb. 218°, e l'α-pirrilfenilchetone, p. di fus. 79°.

G) Azione degli esteri d'acidi organici e del fosgene sul magnesilpirrolo.

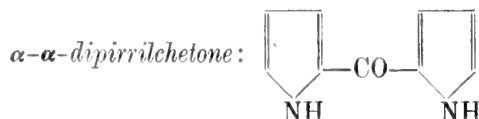
Queste reazioni sono state studiate rispettivamente da Tchelintsef e Térentief (1) e da Tchelintsef e Skvortsof (2).

Se si tratta il magnesilpirrolo con un etere d'acido grasso (acido acetico, propionico, butirrico, ecc.), si forma, anche in questo caso, un α-chetone pirrolico, formazione che si può rappresentare secondo l'equazione semplice

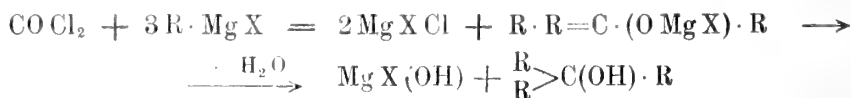
$$\underset{NH}{\square}C \cdot MgX + \begin{array}{c} R \cdot C{=}O \\ | \\ O \cdot R_1 \end{array} = \underset{NH}{\square}C \cdot COR + R_1OMgX$$

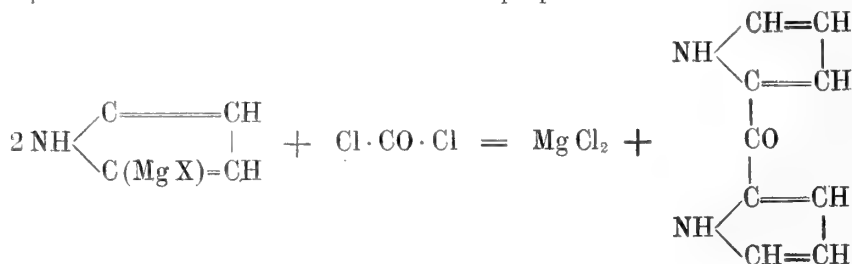
Alla soluzione del magnesilpirrolo in soluzione nell'etere, raffreddata con acqua ghiacciata, si versa, a poco a poco, la soluzione eterea dell'ester.

Dopo un riposo di quattordici ore a temperatura ordinaria, si riscalda per pochi minuti a b. m. ed infine si decompone con acqua ghiacciata e cloruro di ammonio. Dopo le solite estrazioni con etere, il chetone viene isolato distillandolo a vapor d'acqua. In questo modo sono stati riprodotti l'acetilpirrolo $C_4H_3(COCH_3):NH$, il propionilpirrolo $C_4H_3(CO \cdot CH_2 \cdot CH_3)$, ed il butirrilpirrolo $C_4H_3(CO \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_3)$. I rendimenti oscilano fra i 50 e 60 %.

α-α-dipirrilchetone: $\underset{NH}{\square}{-}CO{-}\underset{NH}{\square}$

Contrariamente a quanto avviene con gli ordinarii composti organomagnesiaci che, trattati con fosgene, conducono a degli alcooli terziarii simmetrici (3)

$$COCl_2 + 3R \cdot MgX = 2MgXCl + R \cdot R{=}C \cdot (OMgX) \cdot R \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_2O} MgX(OH) + {R \atop R}{>}C(OH) \cdot R$$

il cloruro di carbonile reagisce col magnesilpirrolo per fornire l'α-dipirrilchetone, con un processo quindi del tutto simile ai cloruri d'acidi propriamente detti:

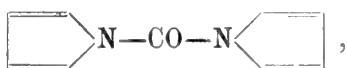
$$2NH\left\langle\begin{array}{l} C{=\!=}CH \\ \quad\quad | \\ C(MgX){=}CH \end{array}\right. + Cl \cdot CO \cdot Cl = MgCl_2 + \begin{array}{l} NH\left\langle\begin{array}{l} CH{=}CH \\ \quad | \\ C{=\!=}CH \end{array}\right. \\ \quad | \\ \quad CO \\ \quad | \\ NH\left\langle\begin{array}{l} C{=\!=}CH \\ \quad | \\ CH{=}CH \end{array}\right. \end{array}$$

(1) *Journ. Soc. phys. chim.*, R. *46*, 1399 (1914); *Bl. 18*, 621 (1915).

(2) *Journ. Soc. phys. chim.*, R. *47*, 170 (1915); *Bl. 19* (1919).

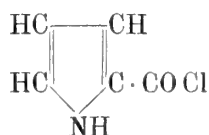
(3) Grignard, *C. R.* 1903, p. 136.

L'operazione può essere fatta convenientemente con la soluzione benzolica commerciale di fosgene.

L'α-α-dipirrilchetone, che è poi il prodotto corrispondente al benzofenone, è stato ottenuto molti anni addietro da Ciamician e Magnaghi (1) per azione del cloruro di carbonile sul composto potassico in una miscela di benzolo e di etere anidro; ma il rendimento con questo processo non è se non del 2 %. Ciò che si ottiene sopratutto, in questa reazione, con un rendimento del 12 %, è l'isomero all'azoto

$$C_4H_4N—CO—NC_4H_4 ,$$

che gli AA. chiamano *ditetrolurea*. Questa, riscaldata a 250° in tubi chiusi, s'isomerizza in α-α-dipirrilchetone; ma il rendimento in chetone non oltrepassa il 3,5 %, calcolato sul pirrolo impiegato.

Un altro metodo poi di preparazione del dipirrilchetone, e che entra nel caso generale dell'azione dei veri cloruri acidi sul magnesilpirrolo, è dato dall'impiego, da me fatto, del *cloruro dell'acido α-pirrolcarbonico* (cloruro di pirroile):

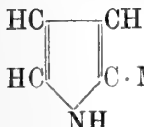
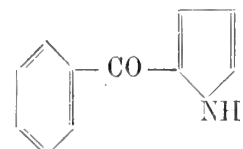
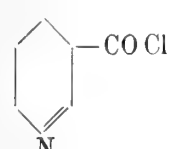
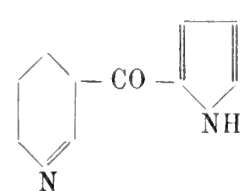
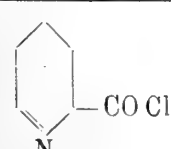
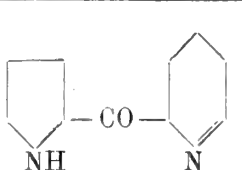
```
HC———CH
‖     ‖
HC    C·COCl
  \  /
   NH
```

E. Fischer (2), prendendo come punto di partenza l'acido α-pirrolcarbonico, che prepara vantaggiosamente col mio metodo, è riuscito ad ottenere il predetto cloruro acido facendo agire sull'acido α-pirrolcarbonico il pentacloruro di fosforo.

Allo stesso cloruro d'acido io ero arrivato precedentemente, per quanto la descrizione sia stata poi ritardata (3), facendo uso, come clorurante, del cloruro di tionile, processo che, come risulta dalle ricerche di H. Meyer, conduce subito, in alcuni casi, a prodotti puri, per il modo semplice con cui avviene la reazione:

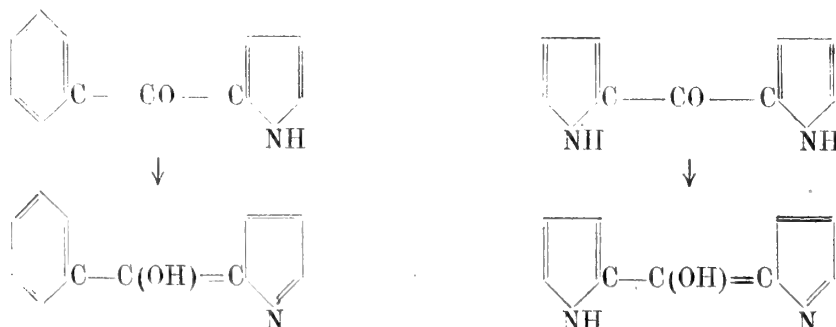
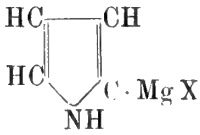
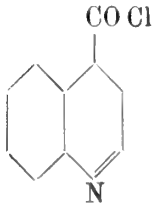
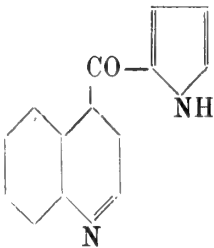
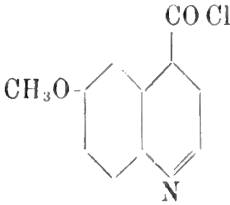
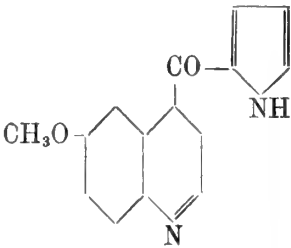
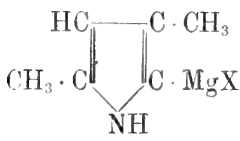
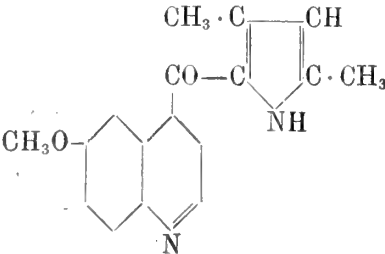
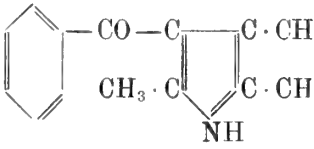
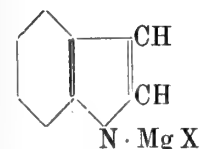
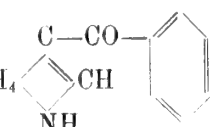
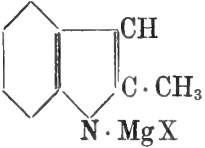
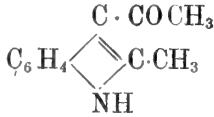
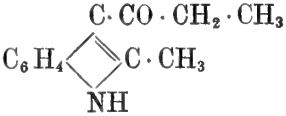
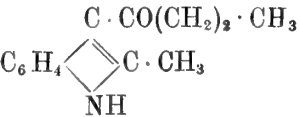
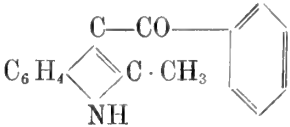
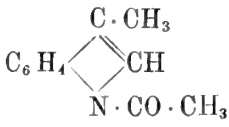
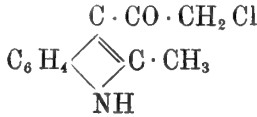
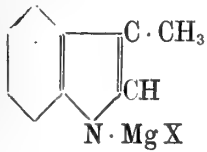
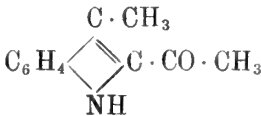
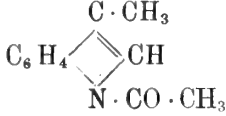
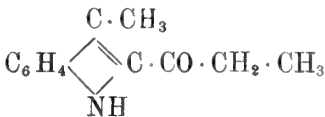
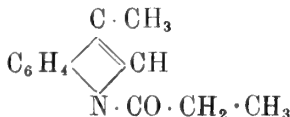
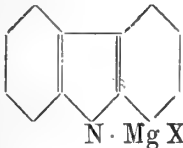
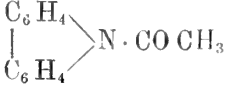
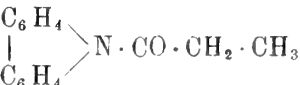
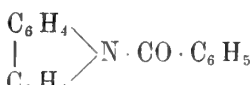
$$R\cdot COOH + SOCl_2 = R\cdot COCl_2 + SO_2 + HCl$$

Il cloruro dell'acido α-pirrolcarbonico si separa dalle sue soluzioni in ligroina (di basso p. di ebollizione), in aghi bianchi, lunghi parecchi cm., che, distaccati con sveltezza ed asciugati nel vuoto fondono a 90°.

Il dipirrilchetone sciolto in etere e decolorato con carbone animale, si ha in aghi fondenti a 160-161°. Resiste all'azione degli idrati alcalini, anche concentrati e caldi. La sua soluzione alcoolica, trattata prima con $AgNO_3$, poi con qualche goccia di ammoniaca fornisce un precipitato giallo, insolubile in acqua e nell'alcool, che è il derivato argentico $[AgN:C_4H_3]_2=CO$, secondo quanto richiede la formola per un dipirrilchetone, contrariamente a quella di una tetrolurea.

(1) *G.* *15*, 282 (1885.
(2) E. Fischer e D. D. von Slyke, *B.* *24*, 3166 (1911).
(3) Vedi al riguardo: B. Oddo e A. Moschini, *G.* *43*, II, 244 (1912).

Ho già ricordato che il pirrilfenilchetone non dà nè l'idrazone nè l'ossima. Comportamento analogo presenta il dipirrilchetone, per cui non è improbabile che detti prodotti abbiano tendenza a passare alla pseudoforma di carattere enolico

C_6H_5—CO—C (pirrolo, NH) $\rightarrow$ C_6H_5—C(OH)=C (N)

(pirrolo, NH) C—CO—C (pirrolo, NH) $\rightarrow$ (pirrolo, NH) C—C(OH)=C (N)

analogamente a quanto ho pure ammesso a spiegare l'inattività, almeno a bassa temperatura, dei magnesilderivati dei chetoni pirrolici a radicale alchilico, come anche di alcuni indolilalchilchetoni rispetto alla fenilidrazina ed all'idrossilammina.

Nella seguente tabella sono riuniti i diversi prodotti descritti in questo capitolo. Di essi la massima parte non erano conosciuti; oggi si preparano facilmente per azione dei seguenti agenti diversi sui magnesilderivati:

HC—CH, HC C·MgX, NH	Prodotti a radicali negativi
a) (pirrolo, NH) C·COCl *b)* $COCl_2$	*Dipirrilchetone* (pirrone) (pirrolo, NH)—CO—(pirrolo, NH) Piccoli aghi o prismi trimetrici: p. di fus. 260-261°.
a) $CH_3 \cdot COCl$ *b)* $(CH_3 \cdot CO)_2O$ *c)* $CH_3 \cdot COOC_2H_5$	*Pirrilmetilchetone* (α-acetilpirrolo) (pirrolo, NH)—CO—CH_3 Aghi a p. di fus. 90°; p. di eboll. 218°. Fenilidrazone, p. di fus. 146°.
a) $C_2H_5 \cdot COCl$ *b)* $C_2H_5 \cdot CO_2C_2H_5$	*Propionilpirrolo* (etil-α-pirrilchetone) $C_4H_3{:}NH$ | $CO \cdot CH_2 \cdot CH_3$ Aghi, p. di fus. 52°,5; p. di eboll. 225°. Fenilidrazone, p. di fus. 111-112°.

HC—CH / HC C · MgX / NH	PRODOTTI A RADICALI NEGATIVI
a) $CH_3 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot COCl$ *b*) $CH_3(CH_2)_2 \cdot CO_2C_2H_5$	*Propilpirrilchetone* (pirril-α-propilchetone) $C_4H_3(CO \cdot C_3H_7):NH$ Squamette bianche; p. di fus. 48°,5. Fenilidrazone; p. di fus. 80°,5.
a) $C_6H_5 \cdot COCl$ *b*) $(C_6H_5 \cdot CO)_2O$	*Benzoilpirrolo* (pirril α-fenilchetone) [benzene ring]—CO—[pyrrole ring] NH Aghi incolori; p. di fus. 78°; p. di eboll. 305°,7.
$C_6H_5CH_2 \cdot CO \cdot Cl$	α-*Toluilpirrilchetone* (benzilpirroile) $C_4H_3:NH$ | $CO \cdot CH_2 \cdot C_6H_5$ Scagliette a riflessi madreperlacei; p. fus. 95°; p. eb. 335-340°. Fenilidrazone; p. di fus. 133°.
[pyridine ring, N]—CO Cl	β-*Piridil-α chetopirrolo* [pyridine ring, N]—CO—[pyrrole ring] NH Aghi bianchi, tendenti al giallo; p. di fus. 132°. Cloroplatinato; cloroaurato; cloromercurato; picrato; derivato argentico; magnesilderivato.
[pyridine ring, N]—CO Cl	α *piridil-α-chetopirrolo* [pyrrole ring] NH —CO— [pyridine ring] N Lunghi aghi, giallo-canarino; p. di fus. 74°. Picrato; cloroplatinato; cloroaurato; derivato argentico.

HC—CH HC C·MgX NH	PRODOTTI A RADICALI NEGATIVI
CO Cl N	*α–Chinolilpirrilchetone* CO— NH N Aghi giallo pallidi; p. di fus. 153°. Per riduzione fornisce il carbinolo corrispondente.
CO Cl CH_3O- N	*Pirril-p-metossilchinolilchetone* CO— NH CH_3O- N Aghi bianchi; p. di fus. 139°. Per riduzione fornisce il carbinolo corrispondente.
HC—C·CH_3 CH_3·C C·MgX NH	
CO Cl CH_3O N	*Dimetil-3-5-pirril-p-metossichinolilchetone* CH_3·C—CH CO—C C·CH_3 NH CH_3O- N Cristalli; p. di fus. 165°.

Reagente	Prodotto	
$CH_3 \cdot C = C \cdot MgX$, $CH_3 \cdot C = C \cdot CH_3$, NH	Prodotti a radicali negativi	
$C_6H_5 \cdot COCl$	*α-α₁-β-trimetil-β₁-benzoilpirrolo* $C_6H_5-CO-C=C \cdot CH_3$, $CH_3 \cdot C = C \cdot CH_3$, NH. Minutissimi aghi, leggermente rosei; p. di fus. 172-173°.	
$C_6H_4 \langle CH = CH \rangle N \cdot MgX$		
$CH_3 \cdot CO \cdot Cl$	Pr. 3 *acetilindolo* (β-indolilmetilchetone) $C_6H_4 \langle C \cdot COCH_3 \rangle CH$, NH. Scaglie bianche, p. di fus 189°. Fenilidrazone, p. di fus. 118°. Picrato, p. di fus. 183°.	N-β-*diacetilindolo* $C_6H_4 \langle C \cdot COCH_3 \rangle CH$, $N \cdot COCH_3$. P. di fus. 146°. Gli idrati alcalini lo decompongono in Pr. 3-acetilindolo.
$C_2H_5 \cdot COCl$	Pr. 3-*propionilindolo* (β indolilchetone $C_6H_4 \langle C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3 \rangle CH$, NH. Cristalli, p. di fu. 157-158°. Ossima, p. di fus. 120-122°. Fenilidrazone, p. fus. 109-110°.	N-β-*propionilindolo* $C_6H_4 \langle C \cdot CO \cdot CH_2CH_3 \rangle CH$, $N \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3$. P. di fus. 128-130°. Con idrati alcalini dà il β-indoliletilchetone.
C_3H_7COCl	Pr. 3-*butirrilindolo* $C_6H_4 \langle C \cdot CO(CH_2)_2 \cdot CH_3 \rangle CH$, NH. Cristalli bianchi, p. di fus. 169°. Fenilidrazone, p. di fus. 107°.	
$C_6H_5 \cdot COCl$	Pr. 3-*benzoilindolo* $C_6H_4 \langle C-CO-C_6H_5 \rangle CH$, NH. Cristalli di colorito roseo, fondenti intorno a 227°. Fenilidrazone, p. di fus. 192-194°.	

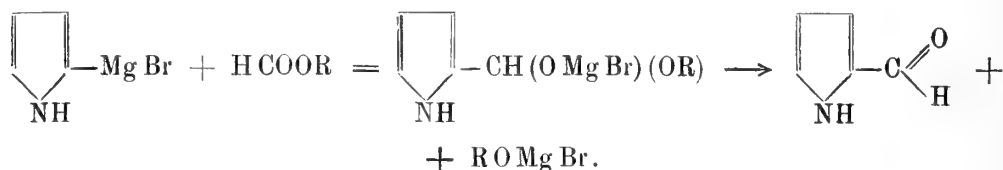
CH C · CH_3 N · MgX	PRODOTTI A RADICALI NEGATIVI
$CH_3 \cdot CO\,Cl$	*α-metil-β-acetilindolo* (C-acetilmetilchetolo) $C \cdot CO\,CH_3$ $C_6H_4 \langle \rangle C \cdot CH_3$ NH Aghi incolori, p. di fus. 196°. Cloridrato, cloroaurato, cloroplatinato.
$C_2 \cdot H_5 \cdot CO\,Cl$	$C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3$ *α-metil-β-propionilindolo* $C_6H_4 \langle \rangle C \cdot CH_3$ NH Cristalli bianchi, p. di fus. 194°.
$C_3 \cdot H_7 \cdot CO\,Cl$	$C \cdot CO(CH_2)_2 \cdot CH_3$ *α-metil-β-butirrilindolo* $C_6H_4 \langle \rangle C \cdot CH_3$ NH Cristalli bianchi, p. di fus. 157-158°.
$C_6H_5\,CO\,Cl$	*α-metil-β-benzoilindolo* C—CO—C_6H_5 $C_6H_4 \langle \rangle C \cdot CH_3$ NH Aghi bianchi, p. di fus. 181°. N *Benzoilmetilchetolo* $C \cdot CH_3$ $C_6H_4 \langle \rangle CH$ $N \cdot CO \cdot CH_3$ Cristalli bianchi, p. di fus. 81°.
$Cl \cdot CH_2 \cdot CO\,Cl$	*Cloroacetil-3-metil-2-indolo* $C \cdot CO \cdot CH_2\,Cl$ $C_6H_4 \langle \rangle C \cdot CH_3$ NH Aghi incolori, p. di fus. 201°. Con dimetilanilina fornisce il dimetilamminoacetil-3-metilindolo.

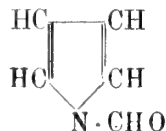
$C \cdot CH_3$ CH $N \cdot Mg X$	PRODOTTI A RADICALI NEGATIVI	
$CH_3 \cdot CO Cl$	*β-metil-α-acetilindolo* (C-acetilscatolo) $C \cdot CH_3$ C_6H_4 ⟨ ⟩ $C \cdot CO \cdot CH_3$ NH Fini aghi di aspetto di lanugine; p. di fus. 146°,5. Cloridrato, cloroaurato e cloroplatinato.	*β-metil-N-acetilindolo* $C \cdot CH_3$ C_6H_4 ⟨ ⟩ CH $N \cdot CO \cdot CH_3$ Aghi bianchi, p. di fus. 68°. Gli idrati alcalini lo decompongono in scatolo.
$C_2 \cdot H_5 \cdot CO Cl$	*α-propionil-β-metilindolo* $C \cdot CH_3$ C_6H_4 ⟨ ⟩ $C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3$ NH Cristalli, p. di fus. 161°.	*N-propionil-β-metilindolo* $C \cdot CH_3$ C_6H_4 ⟨ ⟩ CH $N \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3$ Cristalli, p. di fus. 45°.
$N \cdot Mg X$		
$CH_3 \cdot CO \cdot Cl$	*Acetilcarbazolo* $\begin{array}{l} C_6H_4 \\ \vert \\ C_6H_4 \end{array} \rangle N \cdot CO\,CH_3$ Polvere bianchissima, p. di fus. 70°. Bollita con KOH in soluzione alcoolica, dà carbazolo.	
$CH_3 \cdot CH_2 \cdot CO Cl$	*Propionilcarbazolo* $\begin{array}{l} C_6H_4 \\ \vert \\ C_6H_4 \end{array} \rangle N \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_3$ Piccoli aghi bianchi, p. di fus. 90°. Picrato, p. di fus. 140°. Nitropropionilcarbazolo, p. di fus. 233°.	
$C_6H_5 \cdot CO Cl$	*Benzoilcarbazolo* $\begin{array}{l} C_6H_4 \\ \vert \\ C_6H_4 \end{array} \rangle N \cdot CO \cdot C_6H_5$ Cristalli, p. di fus. 98°.	

VIII.

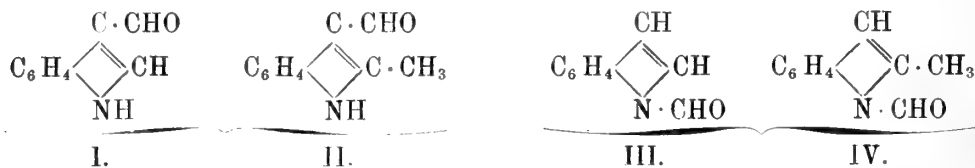
Sintesi di aldeidi pirroliche ed indoliche.

Gli eteri composti, reagendo col magnesilpirrolo, conducono a pirrilalchilchetoni. Cogli eteri formici era prevedibile che si potesse arrivare alla formazione dell'aldeide pirrolica:

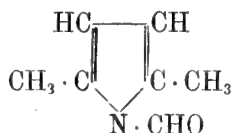
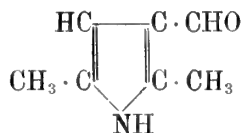
$$C_4H_3(NH)\text{—MgBr} + HCOOR = C_4H_3(NH)\text{—CH(OMgBr)(OR)} \longrightarrow C_4H_3(NH)\text{—C}{\overset{O}{\underset{H}{\lessgtr}}} + ROMgBr.$$

Questa reazione è stata studiata quasi contemporaneamente da Alessandri e Passerini [1] e da Tchélintsef e Terentief. Nelle migliori condizioni di esperienza si arriva ad ottenere sopra il 28 per cento in pirrolaldeide [2]. Il rendimento, invero non troppo elevato, specialmente se confrontato con quelli che si ottengono nelle reazioni che conducono ai chetoni pirrolici, pare debba attribuirsi o alla formazione contemporanea di N-formilpirrolo

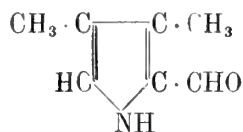
$$\begin{array}{c} HC\text{——}CH \\ HC\quad\;\; CH \\ N\cdot CHO \end{array}$$

o al fatto che il magnesilpirrolo, in tale caso, si sottrae in parte alla reazione, formando sostanze brune sino a nere e resinose.

Comunque, il predetto rendimento in aldeide pirrolica è sempre di molto superiore a quello ottenuto da Bamberger e Djierdjian [3] mediante la reazione di Reiner e Tiemann, facendo cioè agire il cloroformio sul pirrolo ed alcali. Alessandri e Passerini, estendendo poi il metodo agli indoli [4], come più accessibili e, consecutivamente, ad altri pirroli, sono riusciti a stabilire che, sia il magnesilindolo sia il magnesilmetilchetolo, trattati con etere formico, dànno le rispettive aldeidi (I e II), col gruppo sostituente in β; ma i prodotti principali della reazione sono i rispettivi N-formilderivati (III) e (IV):

$$\underset{\text{I.}}{C_6H_4\langle\begin{array}{c}C\cdot CHO\\ \\ NH\end{array}\rangle CH}\qquad \underset{\text{II.}}{C_6H_4\langle\begin{array}{c}C\cdot CHO\\ \\ NH\end{array}\rangle C\cdot CH_3}\qquad \underset{\text{III.}}{C_6H_4\langle\begin{array}{c}CH\\ \\ N\cdot CHO\end{array}\rangle CH}\qquad \underset{\text{IV.}}{C_6H_4\langle\begin{array}{c}CH\\ \\ N\cdot CHO\end{array}\rangle C\cdot CH_3}$$

(1) *R. A. L. 24*, II, 194, (1914).
(2) *Journ. Soc. phys. chim.*, R. *46*, 1405 (1914); *Bl. 18*, 622 (1915).
(3) *B. 33*, 536 (1900).
(4) *G. 51*, 262 (1921).

Scarso rendimento in aldeide hanno pure ottenuto col magnesil-α-α_1-dimetilpirrolo, essendo il prodotto principale il corrispondente derivato N-formilico

$$\begin{array}{ccc} HC & = & C \cdot CHO \\ CH_3 \cdot C & & C \cdot CH_3 \\ & NH & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} HC & = & CH \\ CH_3 \cdot C & & C \cdot CH_3 \\ & N \cdot CHO & \end{array}$$

mentre migliori rendimenti in aldeide si hanno col magnesil-α-β_1-dimetilpirrolo

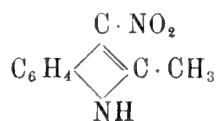
$$\begin{array}{ccc} CH_3 \cdot C & = & C \cdot CH_3 \\ HC & & C \cdot CHO \\ & NH & \end{array} ,$$

prodotto la cui costituzione rimane fissata dal fatto che, per ossidazione con permanganato di potassio in soluzione acetonica, fornisce α-β_1-dimetil-α-pirrolcarbonico.

Comportamento del nitrato di etile col magnesilmetilchetolo.

I nitrocomposti fin'ora conosciuti non sono stati ottenuti per via diretta, perchè l'acido nitrico distrugge completamente il pirrolo.

Esperienze in corso tendono a dimostrare che, partendo da cloridrine e da cloruri d'acidi inorganici, si può arrivare, con i magnesilpirroli, sia a nitro- e nitrosopirroli, sia ad acidi solfonici e solfinici, dei quali ultimi non è ancora noto alcun termine.

Per azione intanto del nitrato di etile sul magnesilmetilchetolo, Alessandri e Passerini (¹) sono riusciti a riprodurre il β-nitro-α-metilindolo:

$$\begin{array}{ccc} & C \cdot NO_2 & \\ C_6H_4 & & C \cdot CH_3 \\ & NH & \end{array}$$

I rendimenti però, come gli stessi AA. dicono, sono molto scarsi; ed assieme con la possibilità che si formi contemporaneamente un derivato N-sostituito, non è improbabile, io ritengo, che si debba pur tenere conto della formazione di aggruppamenti che verrebbero ad essere dati dalla rottura della doppia valenza di uno o di ambedue gli ossigeni del nitrogruppo: $=N{<}^{O\,Mg\,Br}_{O}$ e $=N=[O\,Mg\,Br]_2$.

(¹) loc. cit.

IX.

Sintesi di acidi pirrolici.

Acido α- e β-pirrolcarbonico. L'acido α-pirrolcarbonico fu scoperto e descritto per la prima volta da Schwanert [1] che l'ottenne dalla distillazione del mucato d'ammonio. Fu ottenuto poi anche da Weidel e Ciamician e da Ciamician e Silber [2] con metodi diversi, cioè o per ebolizzione della pirocolla con soluzione di potassa, o per ossidazione con potassa fusa dell' α-omopirrolo, o fissando l'acido carbonico sul pirrolato potassico, o riscaldando il pirrolo con una soluzione acquosa di carbonato d'ammonio.

Si forma anche allorchè si fa agire sul pirrolo il tetraclorometano in presenza di potassa in soluzione alcoolica.

Tutti questi metodi, certamente interessanti dal punto di vista teorico, non conducono però a buoni rendimenti e non tutti sono agevoli.

Così il metodo basato sull'azione dell'anidride carbonica sul pirrolato potassico, che è quello che si avvicina al metodo che verrò a descrivere, richiede una temperatura elevata; e l'altro, basato sull'azione del carbonato d'ammonio sul pirrolo, che fra tutti è il solo che dà rendimenti soddisfacenti e tali da poter servire praticamente a prepararlo, conduce a lavorare in tubi chiusi a 130-140°, da sei a dieci ore. Il metodo al magnesilpirrolo (vedi Note preliminari), oltre che richiedere poche manualità, fornisce ottimi rendimenti, così da farlo preferire agli altri noti finora.

Sciogliendo in acqua bollente il prodotto della reazione, si ha una soluzione gialla, e col raffreddamento un deposito cristallino che, purificato ulteriormente per cristallizzazione dall'alcool acquoso, fonde, in tubi chiusi, a 186°, e, in tubi aperti, a 192°, come era stato constatato da altri per quest'acido.

Per confermarne l'identità con l'acido α-carbopirrolo, ne ho preparato pure l'etere metilico: lunghi aghi con colorazione tendente al rosso e a punto di fusione 73-74° (p. di fus. dell'ester metilico dell'acido α-carbopirrolico 75°).

Seguendo le modalità di preparazione da me indicate la prima volta, il rendimento in acido α-pirrolcarbonico non supera il 25-30 % ed esso non venne migliorato da altri autori che ebbero successivamente occasione di occuparsene [3]. Facendo invece una piccola modificazione, sono riuscito poi ad ottenere [4] fino all'85 % in acido α-pirrolcarbonico, calcolando sul pirrolo impiegato.

Se si fa passare una corrente di CO_2 su del magnesilpirrolo, liberato precedentemente dall'etere che lo teneva in soluzione, e riscaldando a bagno di lega con una temperatura esterna di 250-270°, si ottiene prima una massa fusa, che poi nel periodo di due ore diventa solida, nerastra, spugnosa. Disgregando in seguito con acqua

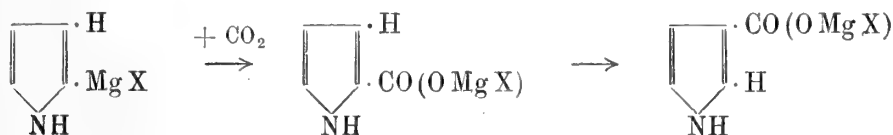
(1) A. *116*, 274.
(2) G. *11*, pag. 28, 226; *14* 268, 264.
(3) E. Fischer e D. D. von Skike, *B. 24*, 3166 (1911).
(4) B. Oddo e A. Moschini, *G. 42*, II, 244 (1912).

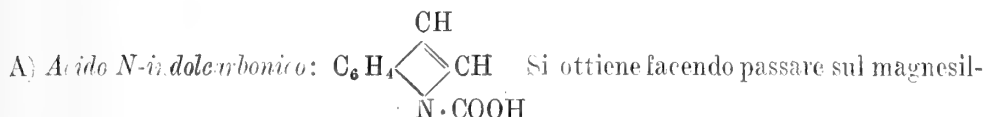
ghiacciata, l'estrazione con etere della soluzione filtrata ed acida per acido solforico dà un residuo di aspetto resinoso, che è solubile solo in parte, sia nell'acqua sia nei carbonati alcalini.

La parte solubile in acqua però precipita per aggiunta di acetato di piombo, e scomponendo il sale piombico formatosi, con una corrente di idrogeno solforato, l'estrazione ripetuta con etere, previa decolorazione con carbone animale, fornisce un residuo quasi bianco, microcristallino, a p. di fus. 161°; pesava gr. 1,2 e si era partiti da gr. 6 di pirrolo.

L'analisi dà valori corrispondenti per un acido pirrolcarbonico. Il p. di fus. però del prodotto, ed inoltre la proprietà di dare un sale di piombo insolubile, lo differenziano dall'acido α-pirrolcarbonico, mentre il comportamento coincide per l'acido β-carbonico, ottenuto come prodotto secondario, per la prima volta, or sono trentadue anni da Ciamician [1], nell'azione dell'anidride carbonica ad alta temperatura sul pirrolato potassico [2].

È quindi da ritenersi che, per opera dell'elevata temperatura, sia avvenuta una migrazione del gruppo - **COO Mg X** dalla posizione α alla β del nucleo pirrolico:

$$\begin{array}{c}\cdot H \\ \cdot MgX \\ NH\end{array} \xrightarrow{+CO_2} \begin{array}{c}\cdot H \\ \cdot CO(OMgX) \\ NH\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\cdot CO(OMgX) \\ \cdot H \\ NH\end{array}$$

La reazione si può così riferire anche a quella che si ottiene con i fenoli, i cui magnesilderivati sono capaci di fissare anidride carbonica per trasformarsi in ossiacidi [3].

Acidi del gruppo dell'indolo ed acidi carbazolici.

A) *Acido N-indolcarbonico*: $C_6H_4\langle{}^{CH}_{N \cdot COOH}\rangle CH$ Si ottiene facendo passare sul magnesilindolo, in soluzione nell'etere, una corrente di anidride carbonica, prima a freddo, poi riscaldando a b. m. Per purificarlo, si è disciolto in carbonato sodico, e poi, dopo filtrazione, si è riprecipitato con acido solforico diluito e freddo. Ripetendo questa operazione per alcune volte e lavando sempre con acqua, si ottiene un prodotto a p. f. 108°; in acqua bollente dà sviluppo di anidride carbonica e, col raffreddamento, si separano delle scagliette di indolo.

La soluzione acquosa e fredda dell'acido fornisce, con cloruro di bario ed acetato di piombo, dei precipitati bianchi. Si è tentato di ottenere qualcuno di questi sali in quantità tali da poterli analizzare, preparandone prima il sale d'ammonio per evapora-

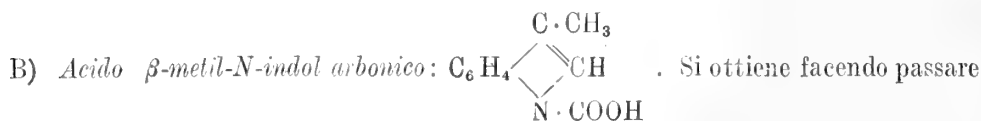
(1) *M. I.*, Bd. 494 (1880).

(2) La sua formazione venne osservata anche nel 1881, fondendo l'omopirrolo con potassa caustica (Ciamician, *G. 11*, 226, 1881). Sei anni dopo, nel 1887, Denstedt e Zimmermann (*B. 20*, 850, 1887) ritennero che si formi pure dell'acido β-pirrolcarbonico per fusione con potassa dell'isopropilpirrolo, e da quell'anno ad oggi nessun'altra notizia si riscontra in letteratura.

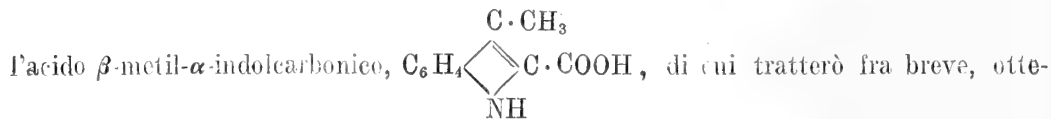
(3) B Oddo, *G. 41*, I, 255 (1911)

zione nel vuoto della soluzione dell'acido in ammoniaca. Questa però lo idrolizza, e quindi non si ottiene se non dell'indolo e del carbonato ammonico.

Questo comportamento pertanto non lascia dubbio che si tratti di un composto in cui il carbossile è attaccato all'azoto.

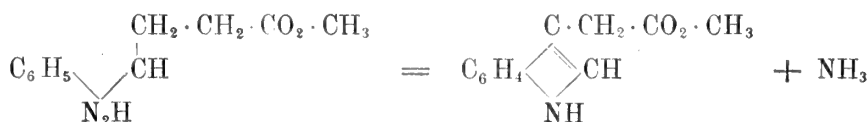
Quest'acido non era ancora conosciuto. Sono invece noti i due acidi α- e β-indolcarbonici; il primo è stato preparato per la prima volta da E. Fischer (¹), riscaldando a 195-200° con $ZnCl_2$, l'idrazone dell'etere piruvico o, meglio ancora, di uno dei suoi esteri; fonde a 203° e, riscaldato con acqua all'ebollizione, non ridà indolo; il secondo fu ottenuto da Ciamician e Zatti (²) fondendo lo scatolo con potassa caustica. È meno stabile dell'acido e si decompone già per ebollizione con acqua; fonde però, in tubetto chiuso, a 218°. Siccome quest'ulitimo acido è stato pure ottenuto da Zatti e Ferratini (³), facendo passare una corrente di CO_2 sul sodioindolo alla temperatura, prima di 230° e poi di 300°, si è voluto vedere se, anche col magnesilindolo, innalzando la temperatura, potesse avvenire la trasposizione del carbossile dall'azoto al carbonio. Lavorando sempre con non più di un gr. di indolo, in un primo tentativo, si è sostituito all'etere etilico il toluene anidro, ma il prodotto ottenuto è stato sempre l'acido N. indolcarbonico, assieme con dell'indolo ripristinatosi in maggiore quantità. In un altro tentativo, si sono adoperate, come solvente, le porzioni del petrolio che distillano fra 250 e 300°. Nella reazione si sviluppano abbondanti vapori bianchi e si ottiene una massa pastosa nerastra, nella quale non si riesce a separare alcun prodotto a proprietà acide. Nè migliori risultati si ottengono operando in assenza di solvente, cioè direttamente sul magnesilindolo riscaldato da 230° fino a 300°.

B) *Acido β-metil-N-indolcarbonico*: $C_6H_4\langle C\cdot CH_3 \rangle CH \langle N\cdot COOH \rangle$. Si ottiene facendo passare una lenta corrente di anidride carbonica pura e secca, prima a freddo per circa una mezza ora e poi ancora per un'altra ora, riscaldando a b. m. sul magnesilderivato dello scatolo.

Per purificarlo, conviene ridisciglierlo in soluzione raffreddata di carbonato sodico e precipitarlo, dopo filtrazione, con acido solforico diluito e freddo, accompagnando l'operazione con dei lavaggi all'acqua. Il prodotto asciutto, infine, lo si scioglie, a temperatura ordinaria, in etere acetico e la soluzione si agita per qualche tempo con nero animale. Dopo filtrazione, per evaporazione spontanea del solvente, si ottiene un deposito cristallino, che, raccolto su filtro e lavato ripetutamente con poche gocce di etere acetico, si presenta bianchissimo e fonde, con rapido sviluppo di anidride carbonica, a 129°.

L'acido β-metil-N-indolcarbonico, che non era ancora conosciuto, è isomero coll'acido β-metil-α-indolcarbonico, $C_6H_4\langle C\cdot CH_3 \rangle C\cdot COOH \langle NH \rangle$, di cui tratterò fra breve, otte-

(¹) *B*, *19*, 1563 (1886); *A*. *236*, p. 141 (1886)
(²) *B*. *21*, 1933 (1888),
(³) *G*. *20*, pag. 707 (1890).

nuto per la prima volta da W. Wislicenus ed Ed. Arnold (1) dall'idrazone dell'acido propionilformico, e poi da Ciamician e Magnanini (2), riscaldando fino a 310-315° un miscuglio equimolecolare di scatolo e di sodio metallico in una corrente di anidride carbonica.

Esso è pure isomero coll'acido scatolcarbonico di E. ed H. Salkowscki (3) che si forma dalle proteine nei processi di fermentazione naturale ed artificiale, identificato, pochi anni addietro (4), con l'acido che si ottiene per sottrazione di ammoniaca al fenilidrazone dell'etere metilico dell'acido β-aldeidopropionico : l'acido indol-Pr. 3-acetico

$$C_6H_5\diagdown\overset{CH_2\cdot CH_2\cdot CO_2\cdot CH_3}{\underset{N_2H}{\diagup CH}} = C_6H_4\langle\overset{C\cdot CH_2\cdot CO_2\cdot CH_3}{\underset{NH}{\rangle CH}} + NH_3$$

Analogamente all'acido sintetico di Wislicenus e Arnold, il mio acido differisce dall'acido di putrefazione perchè non dà le colorazioni con acido nitroso e con ipoclorito di calcio, descritte da Salkowsky ; dal primo si differenzia invece per una minore stabilità ; così, non solo non resiste all'ebollizione in soluzione ammoniacale, ma anche in presenza di sola acqua, ed ho notato anche, in un tentativo di purificazione dal benzolo bollente in presenza di carbone animale che è poi il processo di cristallizzazione dell'acido β-metil-α-indolcarbonico, che pure in queste condizioni si scinde in anidride carbonica e scatolo.

Le seguenti reazioni invece sono quasi identiche all'acido sintetico :

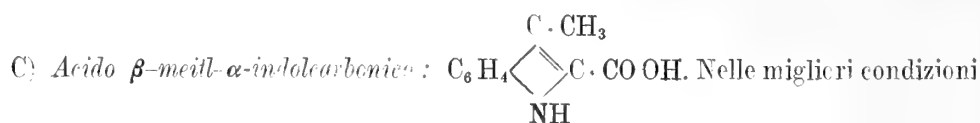
Con *acido solforico* a freddo si scioglie colorandosi in giallo, che ricorda quello dell'acido picrico ; a caldo si ottiene invece una intensa colorazione rosso-porpora.

La soluzione acquosa del sale ammoniacale, ottenuta sciogliendo l'acido in ammoniaca e facendo evaporare nel vuoto su acido solforico, dà : con *cloruro ferrico* un precipitato rosso-bruno ; con *acetato di piombo* un abbondante precipitato bianco-caseoso ; con *solfato di rame* un precipitato verde-chiaro ; con *nitrato d'argento* un precipitato bianco ; con *cloruro di bario* un precipitato bianco polverulento.

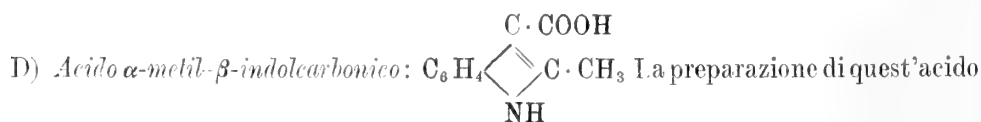
Nell'intento di passare dall'acido all'azoto a quello al carbonio, ho eseguito delle esperienze ad elevata temperatura, servendomi del clorocarbonato di etile. In un primo tentativo ho fatto agire il predetto composto sul derivato magnesiaco dello scatolo, in assenza di etere etilico, riscaldando a bagno di lega prima per un'ora a 110°, indi per tre ore a 130°–140° ; ma come prodotto di reazione si ha solo l'uretana (I), di cui verrà detto avanti, e nulla del corrispondente ester al carbonio (II):

$$\text{I.}\quad C_6H_4\langle\overset{C\cdot CH_3}{\underset{N\cdot CO_2C_2H_5}{\rangle CH}} \qquad \text{II.}\quad C_6H_4\langle\overset{C\cdot CH_3}{\underset{NH}{\rangle C\cdot CO_2C_2H_5}}$$

(1) *B. 20*, 3395.
(2) *G. 18*, 380 (1888).
(3) *B. 13*, 189, 2217 (1880).
(4) A. Ellinger ; *B. 27*, 1801 (1904).

Ripetendo la stessa esperienza, con una temperatura di 240–250°, il prodotto principale rimane ancora l'uretana, ma nello stesso tempo pare che si formino quantità, per quanto piccole, dell'ester etilico dell'acido β-metil-α-indolcarbonico, a p. di fus. 134°.

C) *Acido β-metil-α-indolcarbonico*: $C_6H_4 \langle {}^{C \cdot CH_3}_{NH} \rangle C \cdot COOH$. Nelle migliori condizioni si forma facendo passare sul magnesilscatolo, liberato dall'etere, una corrente di CO_2 pura e secca, riscaldando, nello stesso tempo a b. di lega, lentamente, fino a raggiungere una temperatura esterna di 315–320°. Per purificarlo, lo si scioglie in benzolo e poco etere di petrolio, e lo si fa bollire per circa un'ora in presenza di carbone animale, avendo cura di ripigliare con nuovo benzolo il carbone che è servito per la decolorazione.

Ripetendo per una seconda volta la cristallizzazione, si ottengono dei piccoli aghi bianchi a p. d. fus. 164–165°, solubili completamente nei carbonati alcalini. Da gr. 3,6 di scatolo impiegato si ottengono gr. 1,8 di acido puro, rendimento che è superiore agli altri due metodi conosciuti e di cui ho fatto già cenno.

Quest'acido, mentre si differenzia per la sua maggiore stabilità dall'acido β.metil-N.indolcarbonico, presenta in comune la reazione con l'acido solforico: a freddo si colora in giallo, ed a caldo in rosso-porpora molto intenso. Reazioni identiche presenta trattando la soluzione del suo sale ammoniacale con cloruro ferrico, acetato di piombo e solfato di rame. Il sale baritico $(C_{10}H_8O_2N)_2Ba$, si presenta in piccoli cristalli bianchi.

D) *Acido α-metil-β-indolcarbonico*: $C_6H_4 \langle {}^{C \cdot COOH}_{NH} \rangle C \cdot CH_3$ La preparazione di quest'acido richiama in molti punti quella dell'acido precedente; solo che essa avviene molto più facilmente, perchè a più bassa temperatura (in presenza di toluene), e fornisce migliori rendimenti. Dall'acqua bollente, in presenza di carbone animale, si ha in tavole rombiche, la maggior parte bianche, che vengono disciolte in soluzione di carbonato sodico fredda. Si filtra, si precipita con H_2SO_4 diluito e freddo, e si ricristallizza da cloroformio: cristalli bianchi, p. fus. 174° con decomposizione.

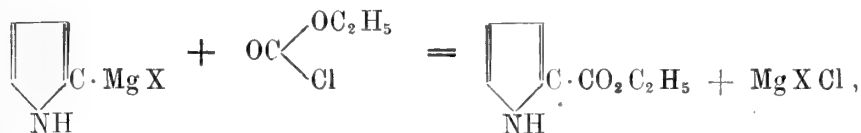
La sua soluzione acquosa dà le seguenti reazioni: con *cloruro ferrico* un precipitato bruno; con *acetato di piombo* in soluzione concentrata un precipitato bianco; con *nitrato d'argento* un precipitato cristallino; con *solfato di rame* un precipitato verde viola; con *cloruro mercurico* un precipitato bianco, con acido solforico non si alcuna colorazione. Tale comportamento corrisponde a quello dell'acido di Ciamician e Magnanini, preparato or sono 35 anni, riscaldando fra 310 e 315° un miscuglio equimolecolare di metilindolo e sodio metallico in una corrente di anidride carbonica. Con questo metodo, da 10 gr. di metilchetolo si ottengono 3 gr. di acido grezzo, cioè il 30 %, mentre col metodo che io propongo il rendimento è quasi teorico. Il suo sale baritico, $(C_{10}H_8O_2N)_2Ba$, forma piccoli cristalli, bianchi.

E) *Acido carbazolcarbonico*: $\begin{matrix} C_6H_3\cdot COOH \\ | \quad\quad >NH \\ C_6H_4 \end{matrix}$ (1). Si ottiene per azione di CO_2 sul magnesilcarbazolo libero e riscaldato a temperatura elevata: polvere quasi del tutto bianca, fondente, con leggiero annerimento, a 275–276°. Non fornisce la reazione del carbazolo coll'acido nitrico; sublima inalterato qualora non venga riscaldato bruscamente, in questo caso si scinde in carbazolo ed anidride carbonica. La soluzione acquosa del suo sale d'ammonio, ottenuta per evaporazione nel vuoto del soluto ammoniacale dell'acido, dà un precipitato bianco con nitrato d'argento, e delle pagliette bianche, poco solubili in acqua, con cloruro di bario.

X.

Sintesi di eteri dell'acido α-pirrolcarbonico.

Quando sulla soluzione eterea del magnesilpirrolo si fa agire l'etere etilico clorocarbonico, si ha in definitiva, anche in questo caso, l'eliminazione della parte minerale e l'unione dei due residui organici

$$C_4H_3(NH)C\cdot MgX + OC\begin{matrix} OC_2H_5 \\ Cl \end{matrix} = C_4H_3(NH)C\cdot CO_2C_2H_5 + MgXCl,$$

per cui si arriva all'etere etilico dell'acido pirrolcarbonico. Ora questo metodo sintetico, non è che un caso particolare di un metodo affatto generale di preparazione di eteri del predetto acido pirrolico. Lo dimostrano i non pochi altri termini ottenuti.

I rendimenti oscillano per tutti fra l'85–90 % del teorico, ed il processo è estensibile anche alla preparazione degli eteri degli acidi indolici e dell'acido N.carbazolcarbonico.

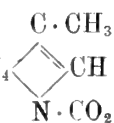
1) *Ester metilico dell'acido α.pirrolcarbonico* $NH:C_4H_3\cdot COOCH_3$. Ho riprodotto questo etere aggiungendo, a poco a poco, ed agitando dell'ester metilico dell'acido clorocarbonico, diluito con etere anidro sul magnesilpirrolo; piccoli cristalli, dall'etere, bianchi, a p. di fus. 73°. Riscaldato in tubi chiusi a 155–156°, per sei ore, con ammoniaca acquosa, dà α.pirrolammide, $NH:C_4H_3\cdot CONH_2$, fondente a 176°.

Nelle diverse preparazioni eseguite si è anche potuta isolare una piccola quantità di un altro prodotto cristallino bianco, a p. di fus. 141°, che probabilmente corrisponde all'1-2-diester dell'acido α.pirrolcarbonico, $C_4H_3(N\cdot COOCH_3)C\cdot COOCH_3$, in relazione a quanto si è già visto, in alcuni casi, col magnesilindolo, e con quanto successivamente è stato pure

(1) *G. 12*, 272 (1882).

osservato nell'azione del carbonato di etile sul magnesilpirrolo. Piccole porzioni di composti bisostituiti si formano anche nella preparazione degli omologhi superiori dell'etere metilico.

2) *Ester etilico*: $NH:C_4H_3\cdot COO\,C_2H_5$ Appena ottenuto, forma un liquido colorato debolmente in giallo, a p. di eboll. 235° a 758 mm. di pressione. Lasciato a sè, si solidifica in una sostanza microcristallina, solubile negli ordinarii solventi organici ed a p. di fusione 38°.

3) *Ester n-propilico*: $NH:C_4H_3\cdot COO\cdot CH_2\cdot CH_2\cdot CH_3$. Questo prodotto, che, come i due termini seguenti, non era ancora conosciuto, distilla a 164–167° a 5 cm. di pressione: liquido denso, incoloro, di odore grato. Il rendimento è, come quello degli esteri precedenti dell'85–90 %. Saponificato con una soluzione di KOH idroalcoolica, fornisce acido α.pirrolcarbonico in uno stato di purezza tale che si potrebbe consigliare di ricorrere a questo metodo per la preparazione dell'acido libero, qualora l'altro già esposto non fornisse anch'esso buoni risultati. Ciò potrebbe tentarsi per la preparazione dell'acido β.pirrolcarbonico, nel caso fosse possibile ottenere la trasposizione del gruppo –COOR dalla posizione α- in β-, per opera del calore.

4) *Ester isobutilico*: $C_4H_3[CO_2CH_2\cdot CH(CH_3)_2]NH$. Si forma per azione del corrispondente etere dell'acido clorocarbonico sul magnesilpirrolo: liquido piuttosto denso, colorato appena in giallo, bollente a 119–122° a 7 cm. di pressione. Come il precedente composto, dà facilmente, per saponificazione, l'acido pirrolcarbonico.

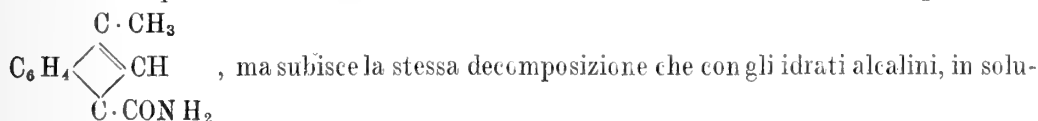
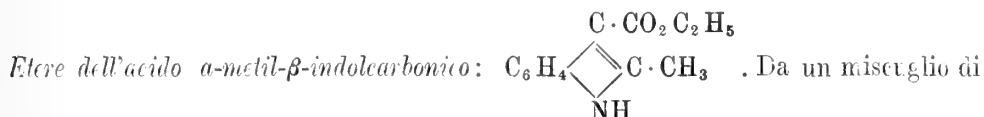
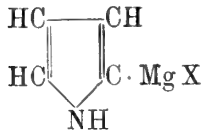
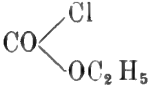
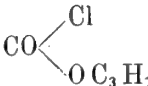
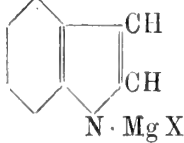
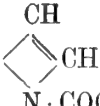
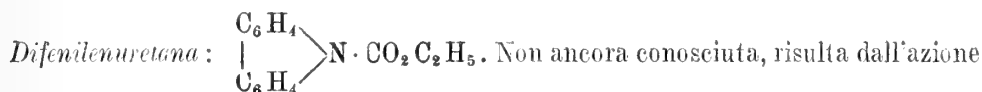
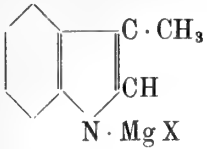
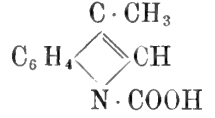
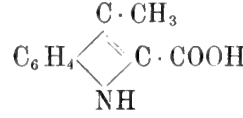
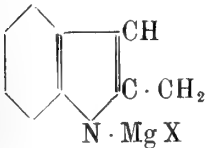
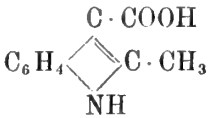
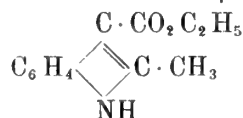
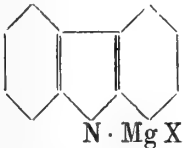
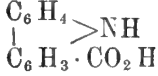
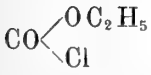
5) *Ester isoamilico*: $NH:C_4H_3\cdot CO_2(CH_2)_2\cdot CH(CH_3)_2$. È costituito dalla porzione bollente fra 186 e 190°, a 10 cm. di pressione, del prodotto di reazione fra l'ester isoamilico ed il magnesilpirrolo: liquido piuttosto denso, appena colorato in giallo.

Eteri degli acidi indolici.

Etere etilico dell'acido α-indolcarbonico: $C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CH\\ \\NH\end{matrix}\right\rangle C\cdot CO_2\cdot C_2H_5$. Questo nuovo corpo si ottiene per azione del clorocarbonato di etile sul magnesilindolo: cristalli aghiformi, bianchi, dall'alcool; p. di fus. 107°; solubili in etere, benzolo; meno in etere di petrolio e ligroina. Bolliti con potassa concentrata dànno acido α.indolcarbonico.

Etere dell'acido β-metil-N-indolcarbonico: $C_6H_4\left\langle\begin{matrix}C\cdot CH_3\\ \\N\cdot CO_2C_2H_5\end{matrix}\right\rangle CH$. Anche questo composto non era noto finora e si ottiene per azione, a temperatura ordinaria, dell'ester cloro-

carbonico sul magnesilscatolo. È volatile a vapor d'acqua; a pressione ordinaria distilla, decomponendosi solo in piccola parte, a 288°,5. Riscaldato in tubi chiusi con soluzione acquosa di ammoniaca, non si trasforma nella carbammina corrispondente,

$$C_6H_4\langle\begin{matrix} C\cdot CH_3 \\ CH \\ C\cdot CONH_2 \end{matrix}\rangle$$

, ma subisce la stessa decomposizione che con gli idrati alcalini, in soluzione alcoolica. A 100° questa decomposizione si inizia appena; diventa completa fra 150 e 160°.

Etere dell'acido α-metil-β-indolcarbonico: $C_6H_4\langle\begin{matrix} C\cdot CO_2C_2H_5 \\ C\cdot CH_3 \\ NH \end{matrix}\rangle$. Da un miscuglio di etere di petrolio e di benzolo, si deposita in piccoli aghi a p. d. fus. 135°. Rendimento dell'80 %. È solubile in alcool; poco, anche a caldo, in acqua; solubile in etere etilico, in benzolo; meno in etere di petrolio. Resiste all'azione degli alcali bollenti e corrisponde al prodotto ottenuto da Nef per trattamento con acido solforico dell'idrazide dell'acido acetomonocarbonico (¹).

Difenilenuretana: $\begin{matrix} C_6H_4 \\ | \\ C_6H_4 \end{matrix}\rangle N\cdot CO_2C_2H_5$. Non ancora conosciuta, risulta dall'azione fra etere clorocarbonico e magnesilcarbazolo; dall'etere di petrolio cristallizza in aghi, a p. di fus. 77°,5. Scaldata con potassa in soluzione alcoolica, non dà l'acido carbazolico, ma si decompone in carbazolo, alcool ed anidride carbonica. Con ammoniaca in tubi chiusi non dà la carbazolcarbammina ma subisce la stessa decomposizione che dà con la potassa alcoolica. A 100° questa decomposizione è appena incipiente, e diventa completa se si spinge la temperatura fino a 150° e per il periodo di circa 5 ore.

Nella seguente tabella, assieme coi diversi eteri testè descritti, sono riuniti gli acidi che hanno formato argomento del capitolo quarto del presente lavoro.

(¹) *A.* *226*, 73 (1891); Wolker, *B.* (Referate) *26*, 549 (1893).

HC——CH HC C · Mg X NH	ACIDI CARBOSSILICI ED ETERI
CO_2	*Acido α pirrolcarbonico* $C_4H_3(COOH):NH$ Cristalli incolori, p. fus. 19[illegible]°; in tubetti chiusi fonde a 186°. Dà un sale di Pb solubile. *Acido β-pirrolcarbonico* $C_4H_3(COOH):NH$ Microcristalli bianchi, p. fus. 161°. Fornirce un sale di Pb insolubile.
CH_3OCOCl	*Etere metilico dell'acido α-pirrolcarbonico* $NH:C_4H_3 \cdot CO_2CH_3$ Piccoli cristalli bianchi, p. di fus. 73°. Riscaldato in tubi chiusi con NH_3, dà l'α-pirrolammide.
$CO\langle{}^{Cl}_{OC_2H_5}$	*Etere etilico* $NH:C_4H_3 \cdot CO_2C_2H_5$ Microcristalli, p. di fus. 38°; p. di eboll. 235°.
$CO\langle{}^{Cl}_{OC_3H_7}$	*Etere propilico n.* $NH:C_4H_3 \cdot CO_2(CH_2)_3 \cdot CH_3$ Liquido denso, incoloro, di grato odore; p. di eb. 161-167° a 5 cm.
C_4H_9OCOCl	*Etere isobutilico* $NH:C_4H_3 \cdot CO_2 \cdot C_4H_9$ Liquido denso, appena giallo; p. di eb. 119-122° a 7 cm.
$C_5H_{11}O \cdot COCl$	*Etere isoamilico* $NH:C_4H_3 \cdot COO \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH(CH_3)_2$ Liquido denso, appena giallo; p. di eb 186-190° a 10 cm.
(anello benzenico)——CH CH N · Mg X	
CO_2	*Acido n. indolcarbonico* $C_6H_4\langle{}^{CH}_{N \cdot COOH}\rangle CH$ Cristallini appena giallastri; p. di fus. 108°. Bolliti con acqua, sviluppano CO_2 e separano indolo.
$C_2H_5O \cdot COCl$	*Etere etilico dell'acido α-indolcarbonico* $C_6H_4\langle{}^{CH}_{NH}\rangle C \cdot CO_2C_2H_5$ Aghi bianchi p. di fus. 107°.

Reagente	Prodotto
Magnesil-α-metilindolo: $C_6H_4\langle C\cdot CH_3 = CH \rangle N\cdot MgX$	Acidi carbossilici ed eteri
CO_2	*Acido β metil-N-indolcarbonico* $C_6H_4\langle C\cdot CH_3 = CH \rangle N\cdot COOH$ Cristallini bianchissimi; p. di fus. 129°. con decomposizione. — *Acido β-metil-α-indolcarbonico* $C_6H_4\langle C\cdot CH_3 = C\cdot COOH \rangle NH$ Piccoli aghi bianchi; p. di fus. 164-165°.
$C_2H_5O\cdot COCl$	*Etere etilico dell'acido β-metil-N-indolcarbonico* $C_6H_4\langle C\cdot CH_3 = CH \rangle N\cdot CO_2C_2H_5$ Liquido piuttosto denso; p. di eboll. 215° a 11 cm. di Hg.
$C_6H_4\langle CH = C\cdot CH_2 \rangle N\cdot MgX$	
CO_2	*Acido α-metil-β-indolcarbonico* $C_6H_4\langle C\cdot COOH = C\cdot CH_3 \rangle NH$ Cristalli bianchi; p. di fus. 174°, con decomposizione.
$C_2H_5O\cdot COCl$	*Etere etilico dell'acido α-metil-β-indolcarbonico* $C_6H_4\langle C\cdot CO_2C_2H_5 = C\cdot CH_3 \rangle NH$ Piccoli aghi, p. di fus. 135°
$(C_6H_4)_2 = N\cdot MgX$ (magnesilcarbazolo)	
CO_2	*Acido carbazolcarbonico* $C_6H_4 - C_6H_3\cdot CO_2H > NH$ Polvere bianca, p. di fus. 275-276°.
$CO\langle^{OC_2H_5}_{Cl}$	*Difenilenuretana* $(C_6H_4)_2{=}N\cdot CO_2C_2H_5$ Aghi, p. di fus. 77°,5. Riscaldata con KOH in soluzione alcoolica, si decompone in carbazolo, alcool ed an. carbonica.

XI.

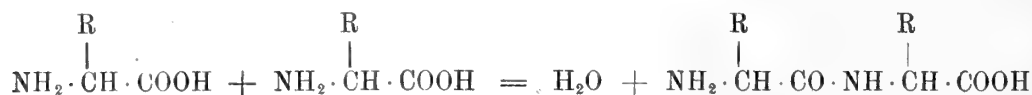
Sintesi di polipeptidi pirrolici ed alogeno e amminometilpirroili.

Nello studio della costituzione delle sostanze albuminoidi, dopo i risultati analitici ottenuti con la scomposizione di esse per mezzo degli alcali, degli acidi, dell'ossidazione, dei fermenti, si è da pochi anni incominciato a fare dei tentativi di sintesi, nell'intento di ricostruire gradualmente l'edificio molecolare dell'albumina.

È noto, in proposito, che tali sostanze forniscono come prodotto di scissione (insieme con ammoniaca) albumose, peptoni ed amminoacidi.

Solo di questi ultimi, che rappresentano i più semplici prodotti di scomposizione, si conosce in gran parte la struttura e si è fatta la sintesi, mentre ben poco sappiamo intorno ai peptoni ed alle albumose.

Fu allo scopo di determinare la costituzione di questi corpi più complessi, la cui conoscenza è indispensabile per arrivare a comprendere la complicata struttura della molecola albuminoidea, che E. Fischer, basandosi sul concetto che le albumine rappresentino dei prodotti di condensazione degli amminoacidi, è riuscito a concatenare tra loro un gran numero di questi composti, unendoli a modo di ammidi, con eliminazione di acqua, trasformandoli cioè nelle loro anidridi amiloidi:

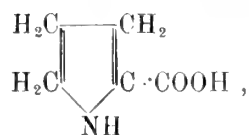
$$NH_2\cdot\underset{}{\overset{\overset{R}{|}}{C}}H\cdot COOH + NH_2\cdot\overset{\overset{R}{|}}{C}H\cdot COOH = H_2O + NH_2\cdot\overset{\overset{R}{|}}{C}H\cdot CO\cdot NH\cdot\overset{\overset{R}{|}}{C}H\cdot COOH$$

Ai prodotti ottenuti, per la grande somiglianza che presentano (e specialmente i termini più complessi) coi peptoni naturali, diede, come è noto, il nome di polipeptidi. Infatti questi ultimi, sia per le loro proprietà esteriori, sia per certe reazioni colorate, sia infine per il loro comportamento verso gli alcali, gli acidi ed i fermenti, debbono ritenersi chimicamente assai affini ai peptoni ed alle albumose naturali.

L'importanza di questa nuova serie di corpi venne notevolmente accresciuta quando Fischer ed Abderhalden riuscirono ad isolare, fra i prodotti di scissione delle sostanze albuminoidee, dei peptidi eguali a quelli ottenuti artificialmente, e quando Abderhalden potè dimostrare che i polipeptidi, somministrati per bocca o per via sottocutanea agli animali d'esperimento, dànno luogo agli stessi prodotti finali del ricambio che si ottengono con la somministrazione di albumine. L'accoglienza che si fece a questi risultati servì di stimolo a continuare in questi ordini di studii, ed oggi i polipeptidi preparati sono già molti e di varia natura.

Studiando intanto questi prodotti di disintegrazione delle sostanze albuminose, E. Fischer nel 1901 (¹), subito dopo cioè che Willstätter (²) descriveva per il primo

(¹) *Zeit. physiol. Chem.*, *33*, 151 (1901).
(²) *B. 33*, 1160 (1900).

l'acido α-pirrolidincarbonico,

$$\begin{array}{c} H_2C\text{——}CH_2 \\ H_2C\quad\;\; C\cdot COOH \\ NH \end{array},$$

riscontrava fra essi prodotti lo stesso acido e trovava che è pure uno dei pochi amminoacidi delle protammine. Si venne così ad aumentare l'importanza del pirrolo idrogenato come costituente di diversi prodotti naturali, nota specialmente per i lavori di Liebermann (1) sull'igrina delle foglie di coca, di Pinner (2) e Pictet (3) sulla nicotina e di Willstätter (4), il quale dimostrava che i più importanti alcaloidi della serie atropinica, e la cocaina, contengono dei sistemi anellari della pirrolidina e della piperidina.

A questi lavori altri ne sono succeduti, ma essi si riconnettono al nucleo pirrolico integrale, cioè non idrogenato, e sono di grande interesse dal punto di vista biologico, entrando in campo le due fucine naturali: l'emoglobina e la clorofilla.

Limitandomi, su questo soggetto, a far cenno soltanto di alcuni dei risultati che entrano nel campo puramente chimico, rammenterò che si ottiene pirrolo dalla distillazione secca dell'ematina (5). Nenchi e Zalesky, sottoponendo a distillazione prodotti di riduzione dell'emina (6), trovarono derivati del pirrolo che chiamarono emopirrolo. Pochi anni prima, veniva trovato che anche la clorofilla dà per distillazione un olio, che fornisce pure le reazioni del pirrolo (7), e successivamente si dimostrava (avendolo ottenuto per distillazione del prodotto di riduzione della fillocianina) che esso era costituito da emopirrolo (8), identico all'emopirrolo che si è poi ottenuto dall'ematoporfirina (9) [il prodotto esente da ferro, e a comportamento di un ammino-acido (10), che si ricava dall'ossiemoglobina per azione degli acidi energici].

Così l'emopirrolo veniva a costituire l'anello di congiunzione tra il pigmento del sangue di vertebrati e quello delle foglie.

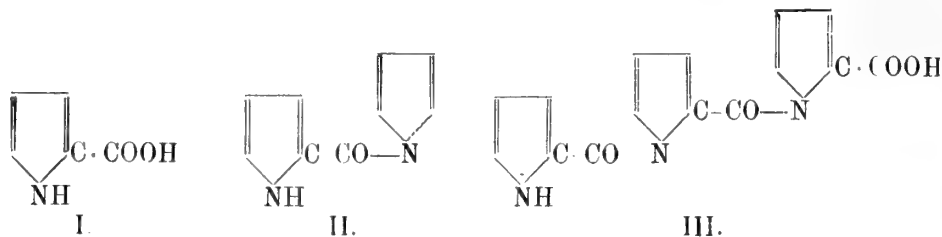
Altri derivati del pirrolo hanno ottenuto Kunster dall'emoglobina, Piloty dall'ematoporfirina, Willstätter dalla clorofilla, ecc., senza dire che pirrolo e sostanze affini si formano in processi violenti esercitati sulle sostanze albuminoidi, cioè per distillazione, per il riscaldamento con calce sodata ecc. (11). Le ricerche pertanto, che riporto in questo capitolo, sono state appunto dirette a preparare il materiale necessario per arrivare alla sintesi di polipeptidi pirrolici, nei quali il nucleo pirrolico si trovi come tale o idrogenato.

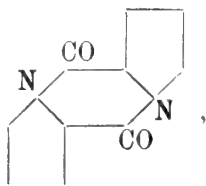
(1) *B. 22*, 675 (1889); *24*, 407; *26*, 851; *28*, 578; *29*, 2050; *30*, 1113
(2) *B. 25*, 2807 (1892); *26*, 292 e 765; *27*. 2861; *28*, 1932.
(3) Pictet e Crepieux, *B. 28*, 1904.
(4) *A. 317*, 204; 328, 1 e 42.
(5) Hoppe Seiler's, *Handbuch der phys. und. pathol. Chem. Analyse*, pag. 356 (1909).
(6) *B. 34*, 997 (1901).
(7) E. Schunck e Marchlewski, *A. 288*, 209 (1895).
(8) Marchlewski e Nencki, *B. 34*, 1687 (1901).
(9) Marchlewski, *Bioch. Zeitschr. 21*, 548 (1909); *Journ. prakt. Chem. 65*, 161 (1902).
(10) *Zeit, physiol. Chem. 30*, 384 (1900).
(11) Hoppe-Seyler, loc. cit. pag. 390.

Per quanto infatti, come ho già ricordato, fra i prodotti di disintegrazione delle sostanze albuminoidee si riscontri l'acido α-pirrolidincarbonico, non può trascurarsi l'acido α-pirrolcarbonico (I), potendosi considerare pur'esso come un ammino-acido sostituito, e quindi capace per sè stesso di fornire il peptide di- (II), tri- (III), ecc.,

C·COOH
NH
I.

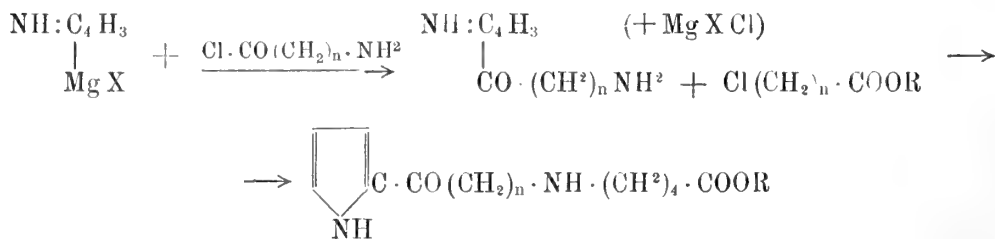
C CO—N
NH
II.

C·COOH
C–CO—N
C CO N
NH
III.

o le loro anidridi, di cui quella del termine (II) riesce singolarmente interessante,

CO
N
N ,
CO

ovvero loro prodotti di trasposizione. Non è anzi improbabile che all'attitudine a simili condensazioni possano attribuirsi alcuni processi, definiti, forse troppo affrettatamente, come processi di resinificazione (¹).

Mio obiettivo è stato anzitutto di ottenere dei prodotti di condensazione del magnesilpirrolo coi cloruri degli amminoacidi e da essi, per trattamento cogli eteri degli acidi alogenati e successiva saponificazione, passare a degli amminoacidi sostituiti,

$$\begin{matrix} NH:C_4H_3 \\ | \\ MgX \end{matrix} + \xrightarrow{Cl\cdot CO(CH_2)_n\cdot NH^2} \begin{matrix} NH:C_4H_3 \quad (+MgXCl) \\ | \\ CO\cdot(CH^2)_nNH^2 \end{matrix} + Cl(CH_2)_n\cdot COOR \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underset{NH}{\langle\rangle} C\cdot CO(CH_2)_n\cdot NH\cdot(CH^2)_4\cdot COOR$$

paragonabili al tipo più semplice delle glicine sostituite, come la sarcosina, $CH_3\cdot NH\cdot CH_2\cdot COOH$, in cui al gruppo metilico vengono sostituiti, residui, a nucleo pirrolico, diversi.

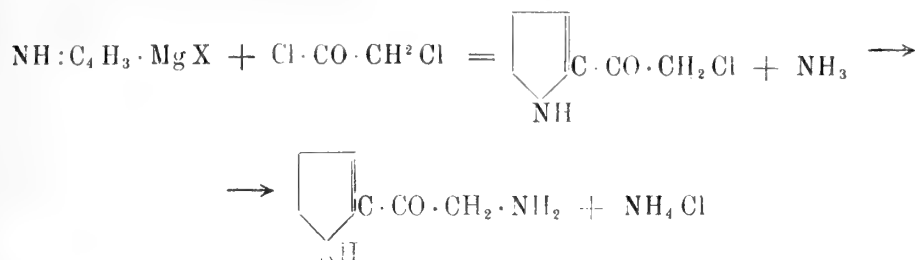
Però l'azione diretta dei cloruri degli amminoacidi sul magnesilpirrolo non conduce a risultati soddisfacenti, a causa dell'attività dei due atomi d'idrogeno del gruppo $-NH^2$ sul composto organo-magnesiaco.

Pensai allora di far agire prima il cloruro dell'acido monocloroacetico col magnesilpirrolo e poi, sul prodotto alogenato formatosi, l'ammoniaca, per arrivare all'am-

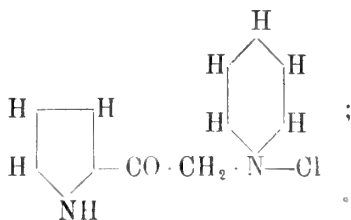
(¹) Vedi B. Oddo e A. Moschini, *G. 42*, II, 257 (1912).

minocomposto, che si sarebbe dovuto ottenere dall'azione diretta del cloruro dell'acido ammidoacetico sul magnesilpirrolo:

$$NH:C_4H_3\cdot MgX + Cl\cdot CO\cdot CH^2Cl = \underset{NH}{\boxed{}}C\cdot CO\cdot CH_2Cl + NH_3 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underset{NH}{\boxed{}}C\cdot CO\cdot CH_2\cdot NH_2 + NH_4Cl$$

Il processo si svolge fruttuosamente per questa via, e sono riuscito a preparare sia l'*α*-clorometilchetopirrolo (I), sia l'*α*-amminoacetilpirrolo (II), che corrispondono, nelle loro proprietà, alla costituzione assegnata.

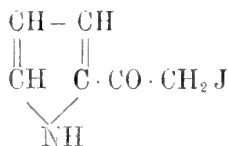
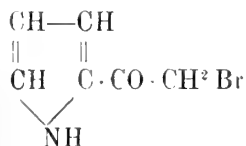
Difatti l'*α*-clorometilpirrilchetone, che fornisce un derivato argentico all'idrogeno immidico, dà pure un prodotto ben cristallizzato per semplice riscaldamento con la piridina, che corrisponde, nei suoi caratteri, alla seguente formola:

$$\text{(H)}_4\text{C}_4\text{NH}-CO\cdot CH_2\cdot N(C_5H_5)-Cl\ ;$$

cioè ad un sale di piridonio, contenendo in soluzione acquosa del cloro ionico, e fornendo, per azione degl'idrati alcalini, l'idrato di piridonio corrispondente. Esso inoltre è capace di subire per riscaldamento la trasposizione di Hoffmann, per dare origine ad un alcaloide piridico-pirrolico sintetico, analogo alle basi piridilpirroliche, delle quali ho già trattato.

Ossidando con permanganato potassico, il chetone libero si trasforma nell'acido *α*-pirrilgliossilico, $C_4H_3(CO\cdot COOH):NH$; il che dimostra ancora una volta l'attacco in *α*- della catena laterale.

L'*α*-amminoacetilpirrolo si scioglie nell'acido cloridrico diluito, e riprecipita con ammoniaca. Ha potere riduttore sul liquido di Fehling e sulla soluzione ammoniacale di nitrato d'argento. La sua soluzione cloridrica riduce subito la soluzione di cloruro d'oro e, dopo qualche tempo, quella di cloruro di platino e di cloruro di palladio.

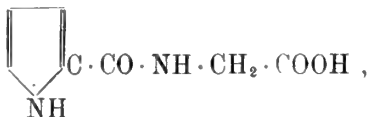
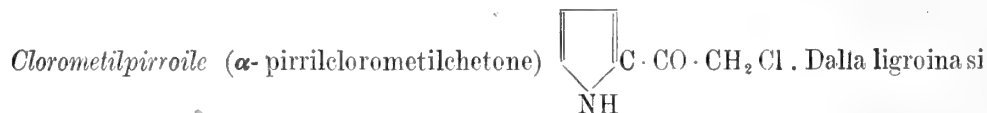
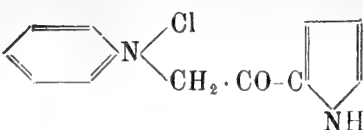
Ho preparato inoltre i seguenti altri due composti:

```
CH—CH                    CH—CH
||   ||                  ||   ||
CH   C·CO·CH²Br          CH   C·CO·CH₂J
 \  /                     \  /
  NH                       NH
```

rispettivamente per azione del cloruro dell'acido monobromoacetico e monoiodioacetico sul magnesilpirrolo; il metodo si presenta estensibile, potendosi sostituire, ai cloruri degli acidi alogeno-acetici, cloruri di costituzione analoga, fra i quali mi limito a citare

quelli degli acidi alogeno-propionici, che fanno riscontro coi cloruri delle alanine (acidi α- e β-amminopropionici.)

Notevole intanto è l'azione che questi composti pirrolici alogenati esercitano sulla cute e sulle mucose. Maneggiandoli, specialmente se sono in soluzione, la cute delle mani diventa vivamente arrossata, mentre si fa sentire un bruciore assai intenso. Molto spesso all'arrossamento della cute s'accompagna un'eruzione caratterizzata dalla produzione di piccole papule, simili a quelle che si osservano nell'orticaria, che scompaiono in un paio di giorni. Irritazione delle mucose congiuntivali si ha specialmente quando si cerca di sciogliere a caldo questi prodotti in solventi facilmente volatili, all'incontro la mucosa nasale è notevolmente irritata anche quando i prodotti sono allo stato solido, perchè bastano tracce di pulviscolo per determinare un'azione intensa. Il prodotto clorurato è quello che presenta in grado più spiccato questa proprietà ; in linea decrescente lo seguono il prodotto bromurato e poi quello iodurato. Per tutti e tre è tuttavia consigliabile di munirsi di guanti di gomma e di lavorare sotto la cappa.

Dirò, per ultimo, che, partendo pure dal magnesilpirrolo, E. Fischer e D. von Slyke [1] sono riusciti ad ottenere l'*α.pirroilglicina*

$$\text{(pirrolo, NH)}\;C\cdot CO\cdot NH\cdot CH_2\cdot COOH\ ,$$

che si può considerare come un dipeptide. Cristallizza dallacqua e fonde a 167° (corr.); è molto solubile in alcool ed acetone; meno solubile in etere, cloroformio, etere di petrolio; non dà reazione colorata nè col cloruro ferrico, nè con la scheggia di pino.

Clorometilpirroile (α- pirrilclorometilchetone) $\text{(pirrolo, NH)}\;C\cdot CO\cdot CH_2Cl$. Dalla ligroina si separa in aghi bianchi sottili, p. fus. 115°, solubili in alcool, etere etilico e benzolo ; poco, a freddo, nella ligroina ; meno ancora in etere di petrolio ; a caldo si sciolgono anche in acqua.

Trattando la soluzione acquosa calda del clorometilpirroile con soluzione concentrata di nitrato d'argento, non si ha dapprima nessun intorbidamento. Aggiungendo invece una goccia di ammoniaca, analogamente a quanto avviene con i pirrilalchilchetoni, si forma subito un precipitato bianco fiocceso, solubile in eccesso di ammoniaca. Raccolto su filtro, al riparo della luce, e lavato per bene, si presenta sotto forma di polvere fina bianco-sporca, ed è il derivato argentico del clorometilpirroile.

L'α- pirrilclorometilchetone, bollito con gli alcali anche diluiti, si resinifica, evidentemente per la trasformazione del chetone clorurato in chetoalcool [2]:

$$NH:C_4H_3\cdot CO\cdot CH_2Cl \longrightarrow NH:C_4H_3\cdot CO\,CH_2OH\ .$$

[1] loc. cit.

[2] Chetoalcooli a nucleo pirrolico si debbono ottenere impiegando i cloruri degli ossiacidi eterificati: ad es. il cloruro dell'acido glicolico : $Cl\cdot CO\cdot CH_2\cdot OC_2H_5$.

Il suo sale di piridonio, $C_5H_5 : N\begin{smallmatrix} Cl \\ CH_2 \cdot CO - C_4H_3 : NH \end{smallmatrix}$, forma piccoli aghi a p. fus. 135°, solubili facilmente nell'acqua, meno solubili, a freddo, in alcool, etere di petrolio, benzolo e ligroina. La soluzione acquosa contiene del cloro ionico, presenta reazione nettamente alcalina e dà un precipitato cristallino, giallo-arancio, quando viene trattata con $Pt\,Cl_4$; con $Au\,Cl_3$ si ottiene pure un precipitato cristallino giallo-bruno.

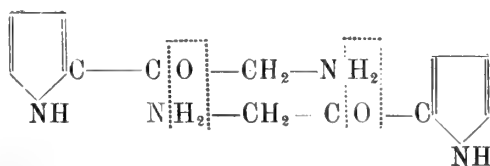
Trattando la soluzione acquosa concentrata del sale di piridonio con idrato potassico al 50 %, si forma un bel precipitato giallo, formato da cristallini lucenti, solubili in presenza di molta acqua. Raccolti ed asciugati sono colorati in giallo d'ocra, e, così allo stato grezzo, incominciano a contrarsi di volume e ad annerirsi a 140°; a 153° sono completamente fusi, con decomposizione. Il nuovo prodotto corrisponde con tutta probabilità all'idrato di piridonio $C_5H_5 : N\begin{smallmatrix} OH \\ CH_2 . CO \cdot C_4H_3 : NH \end{smallmatrix}$. Esso è solubile oltre che nell'acqua, in alcool; meno solubile in etere etilico, benzolo, ligroina; insolubile in etere di petrolio.

α-amminoacetilpirrolo (metilenchetopirrilammina), $NH : C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2 \cdot NH_2$. Si ottiene dal clorometil -α- pirrilchetone, riscaldandolo in tubo chiuso a 90-95°, con ammoniaca in soluzione acquosa concentrata: foglie a lucentezza madreperlacea, colorate in giallo oscuro, solubili in alcool, cloroformio, benzolo; molto poco in ligroina; insolubili in etere di petrolio; nell'acqua non si sciolgono a freddo, molto poco a caldo. Le soluzioni nei solventi organici sono gialle e con fluorescenza verde.

Il nuovo alcaloide non ha punto di fusione nè di decomposizione netto; a poco a poco, col riscaldamento, incomincia ad imbrunirsi, e a 290° sembra decomposto solo in parte, senza fondere. Come si è ricordato, riduce il liquido cupro-potassico e la soluzione ammoniacale di nitrato di argento; si scioglie nell'acido cloridrico diluito e riprecipita con ammoniaca; sulle soluzioni di cloruro d'oro, di platino e di palladio esercita pure azione riducente.

Aggiungendo alla soluzione cloridrica dell'ammino-acetilpirrolo un po' di soluzione di nitrito sodico, si ottiene un intorbidamento verde-bruno, che tende a disciogliersi per agitazione, acquistando la soluzione un colorito più chiaro.

Con processo analogo a quello delle altre chetoammine conosciute sarebbe interessante di passare col detto prodotto alla dipirrilpiperazina:

$$\begin{array}{l} C_4H_3NH{-}C{-}C\,\vdots\,O\,\vdots{-}CH_2{-}N\,\vdots\,H_2\,\vdots \\ \qquad\qquad\; N\,\vdots\,H_2\,\vdots{-}CH_2{-}\,C\,\vdots\,O\,\vdots{-}C{-}C_4H_3NH \end{array}$$

Bromometilpirroile (α-pirrilbromometilchetone), $NH : C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2\,Br$. Dalla ligroina, in presenza di carbone animale, si ottiene in aghi bianchi, p. di fus. 96°. È solubile in alcool, etere etilico; poco in etere di petrolio, solubile a caldo in acqua.

Sciolto a caldo in acqua, dà pure, per aggiunta di nitrato d'argento e di una goccia di ammoniaca, un precipitato fioccoso, bianco, che si annerisce facilmente alla luce, ed è solubile in eccesso di ammoniaca. All'ebollizione con acqua resiste meno del corrispondente composto clorurato, e, come questo, si osserva inalterato per lungo tempo se conservato in recipienti colorati.

Iodiometilpirroile (α-pirriliodometilchetone), $NH:C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2J$. Si forma come i due precedenti composti analoghi, impiegando nella reazione il cloruro dell'acido monoiodioacetico, $Cl \cdot CO \cdot CH_2J$. Dall'etere di petrolio, in presenza di carbone animale, si ottengono aghi bianchi con leggera tendenza al giallo, solubili in alcool, etere etilico, benzolo e ligroina: p. fus. 81°. Disciolti in acqua tiepida, per aggiunta di solo nitrato d'argento non forniscono nessun precipitato; aggiungendo invece successivamente una goccia di ammoniaca, si ottiene un precipitato bianco, tendente al giallo, che non tarda ad imbrunire. Nel seguente specchietto sono riuniti i prodotti nuovi descritti in questo capitolo.

	p. di fus.	
α-Pirroilglicina $NH:C_4H_3 \cdot CO \cdot NH \cdot CH_2 \cdot COOH$	167° (corr.)	Ottenuta dal cloruro di pirroile e glicocolla.
Clorometilpirroile $NH:C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2Cl$	115°	Dal magnesilpirrolo e cloruro di cloroacetile.
Sale di piridonio $NH:C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2Cl \cdot NC_5H_5$	135°	Dal clorometilpirroile e piridina.
Metilenchetopirrilammina $NH:C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2 \cdot NH_2$	intorno a 290°, con decompos.	Dal clorometilpirroile ed ammoniaca.
Bromometilpirroile $NH:C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2Br$	96°	Dal magnesilpirrolo e cloruro di bromoacetile.
Iodiometilpirroile $NH:C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2J$	81°	Dal magnesilpirrolo e cloruro di iodioacetile.

XII.

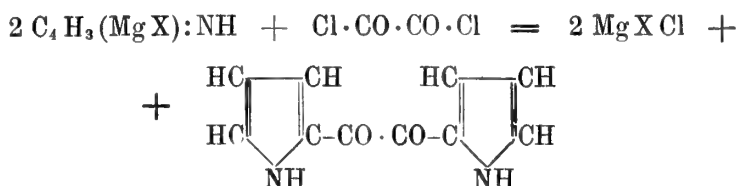
Sintesi di dichetoni pirrolici.

Malgrado il notevole interesse che presentano i dichetoni nella sintesi organica, pure nessun dichetone pirrolico è stato mai preparato.

Essi si formano facilmente per azione dei cloruri degli acidi bibasici sul magnesilpirrolo.

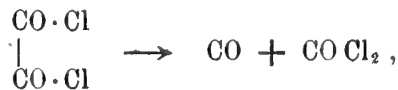
Col cloruro di ossalide ho ottenuto il dipirril-dichetone che chiamerò anche *dipirroile* per analogia col dibenzoile:

$$2\,C_4H_3(MgX):NH + Cl\cdot CO\cdot CO\cdot Cl = 2\,MgXCl +$$

$$+ \; (HC{=}CH{-}CH{=}C{-}NH){-}CO\cdot CO{-}(C{=}CH{-}CH{=}CH{-}NH)$$

Col cloruro di malonile e quello di succinile il corrispondente β- e γ- dichetone:

$$C_4H_3NH{-}CO\cdot CH_2\cdot CO{-}C_4H_3NH \qquad C_4H_3NH{-}CO{-}CH_2{-}CH_2{-}CO{-}C_4H_3NH\,.$$

La reazione è quindi di indole generale, mentre per azione del cloruro di malonile sui comuni composti di Grignard (lo ioduro di magnesio etile) non si è riuciti ad isolare alcun prodotto [1], nè chetonico nè a funzionalità alcoolica, com'era più facilmente da aspettarsi, dato il comportamento delle combinazioni organo-magnesiache con i cloruri di acidi monobasici, che conducono ad alcool terziarii. Inoltre non è stato possibile finora ottenere degli ortodichetoni aromatici, e rispettivamente i cloruri degli α-chetoacidi, impiegando il cloruro di ossalile e servendosi della reazione di Friedel e Craft, perchè questo cloruro acido viene decomposto quantitativamente, dal cloruro di alluminio, in ossido di carbonio e fosgene

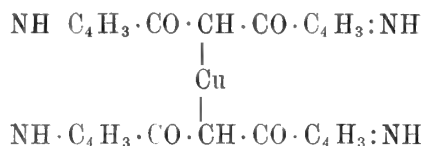
$$\begin{matrix} CO\cdot Cl \\ | \\ CO\cdot Cl \end{matrix} \longrightarrow CO + COCl_2\,,$$

per cui si ottengono derivati del cloruro di carbonile. Così, partendo dal benzolo, si forma benzofenone e cloruro di benzoile [2]. Una decomposizione analoga subisce poi, in buona parte, col $AlCl_3$ anche il cloruro di malonile.

[1] J. Lemaire, *R.* XXXIX (1910).
[2] *B.* *41*, 3553 (1908).

Del dipirroile descrivo alcuni suoi derivati, quali l'osazone, il derivato argentico, una dipirrilchinossalina, una monossima, che, assieme coi prodotti ottenuti dall'ossidazione, mi hanno confermata la costituzione assegnata.

Fra le più caratteristiche reazioni degli altri due dichetoni ho studiato l'azione degli alcali, dell'idrossilamina, della fenilidrazina e di alcuni sali metallici, che dimostrano quella costituzione.

Il dipirroilmetano è solubile negli idrati alcalini diluiti e freddi e riprecipita inalterato con gli acidi; con acetato di rame e cloruro ferrico dà delle belle colorazioni, in seguito alla sostituzione degli atomi d'idrogeno del gruppo metilenico compreso fra i due carbonili. Il derivato ramico della formola

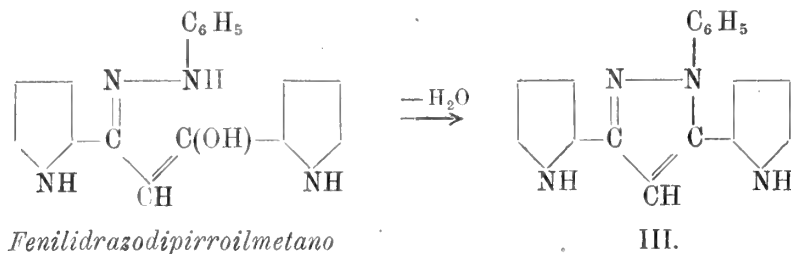
$$\begin{array}{c} NH\ C_4H_3 \cdot CO \cdot CH \cdot CO \cdot C_4H_3 : NH \\ | \\ Cu \\ | \\ NH \cdot C_4H_3 \cdot CO \cdot CH \cdot CO \cdot C_4H_3 : NH \end{array}$$

si separa dalla sua soluzione alcoolica, ed è colorato in giallo. Con nitrato di argento invece, in presenza di una piccola quantità di ammoniaca, si forma il derivato argentico agli idrogeni dei due gruppi immidici:«

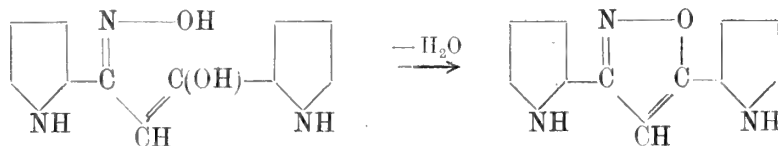
$$NAg : C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2\, CO \cdot C_4H_3 : NAg\ ,$$

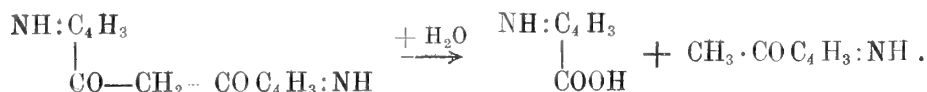
che conferma l'attacco della catena al carbonio dei due nuclei pirrolici.

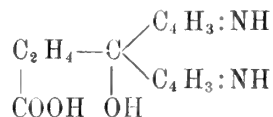
Reagisce facilmente con fenildrazina fornendo, non gli idrazoni, bensì il prodotto di disidratazione del monoidrazone o fenildipirrilpirazolo (III):

$$\begin{array}{c} C_6H_5 \\ | \\ N \text{---} NH \\ \| \\ (C_4H_3NH)\text{---}C \quad C(OH)\text{---}(C_4H_3NH) \\ \diagdown\ \diagup \\ CH \end{array} \xrightarrow{-H_2O} \begin{array}{c} C_6H_5 \\ | \\ N \text{---} N \\ \| \quad | \\ (C_4H_3NH)\text{---}C \quad C\text{---}(C_4H_3NH) \\ \diagdown\ \diagup \\ CH \end{array}$$

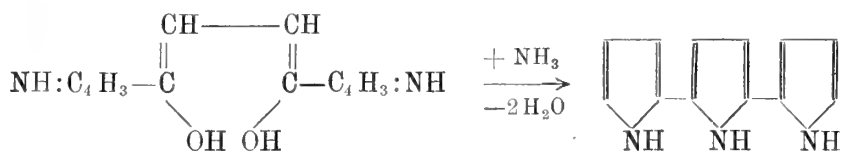
Fenilidrazodipirroilmetano III.

Analogamente con l'idrossilammina dà il dipirrilisosazolo (IV):

$$\begin{array}{c} N \text{---} OH \\ \| \\ (C_4H_3NH)\text{---}C \quad C(OH)\text{---}(C_4H_3NH) \\ \diagdown\ \diagup \\ CH \end{array} \xrightarrow{-H_2O} \begin{array}{c} N \text{---} O \\ \| \quad | \\ (C_4H_3NH)\text{---}C \quad C\text{---}(C_4H_3NH) \\ \diagdown\ \diagup \\ CH \end{array}$$

Una reazione infine molto dimostrativa della sua costituzione dà con gli idrati alcalini: addizionando una molecola d'acqua, si scinde in acido α-pirrolcarbonico ed in metilpirrilchetone:

$$\begin{array}{l} NH : C_4H_3 \\ | \\ CO\text{---}CH_2 \cdot CO\,C_4H_3 : NH \end{array} \xrightarrow{+H_2O} \begin{array}{l} NH : C_4H_3 \\ | \\ COOH \end{array} + CH_3 \cdot CO\,C_4H_3 : NH\ .$$

Il prodotto di reazione invece fra il cloruro di succinile e il magnesilpirrolo non è solubile negli alcali, e non dà, per idratazione con gl'idrati alcalini a caldo, l'ossiacido

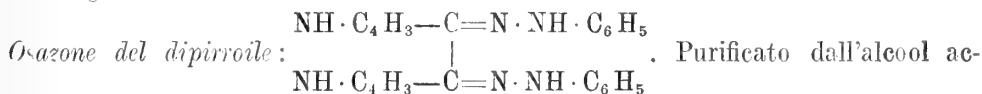
$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad C_4H_3:NH \\ C_2H_4-C \\ | \qquad\quad | \quad C_4H_3:NH \\ COOH \quad OH \end{array}$$

corrispondente alla formola lattoide; si combina, al contrario, con l'idrossilammina per fornire una diossima che definisce anche questo termine come un dichetone γ-γ.

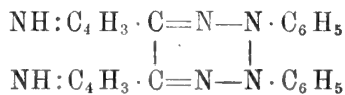
Vi ho fatto agire anche l'ammoniaca alcoolica in tubi chiusi, allo scopo di arrivare all' α-α_1-dipirrilpirrolo o tripirrile-α-α, non ancora conosciuto:

$$\begin{array}{c} CH \text{———} CH \\ \| \qquad\qquad \| \\ NH:C_4H_3-C \qquad C-C_4H_3:NH \\ \diagdown \quad \diagup \\ OH \;\; OH \end{array} \xrightarrow[-2H_2O]{+NH_3} \text{(tre nuclei pirrolici NH NH NH)}$$

Forma enolica del dipirroiletano

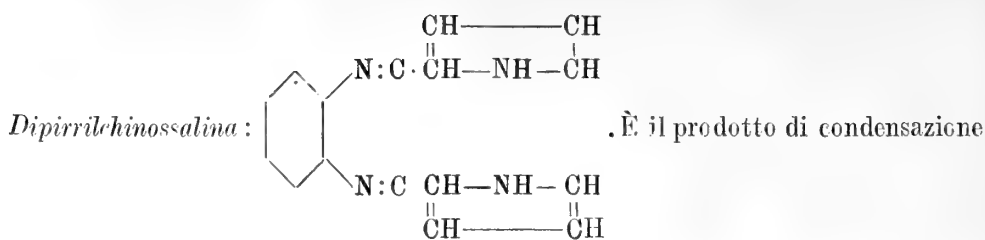
La costituzione del prodotto ottenuto richiede però ancora conferma.

Dipirroile (α-α- dipirriletandione): $NH:C_4H_3-CO \cdot CO-C_4H_3:NH$. Cristallizzato dall'acqua, si ha colorato in giallo, pallido; p. di fus. 199°,5-200°.

Il dipirroile non dà la reazione di Bamberger ([1]), secondo la quale gli α- dichetoni aromatici disciolti in alcool, per aggiunta di potassa, formano una colorazione che va dal rosso al nero violetto, che scompare agitando all'aria e ricompare riscaldando per aggiunta di nuovo alcali. Tuttavia, come lo stesso Bamberger fa osservare, un risultato negativo non può considerarsi sempre come dimostrativo contro la posizione orto dei due carbonili, potendo avvenire, ad es., che, per azione della potassa alcoolica, si decomponga con rottura del legame orto fra i carbonili.

Osazone del dipirroile: $\begin{array}{l} NH \cdot C_4H_3-C{=}N \cdot NH \cdot C_6H_5 \\ \qquad\qquad\;\; | \\ NH \cdot C_4H_3-C{=}N \cdot NH \cdot C_6H_5 \end{array}$. Purificato dall'alcool acquoso, si ha in bei cristalli riuniti a ciuffo, colorati in giallo rosso. È solubile in alcool, meno in benzolo ed etere di petrolio; cristallizzato da quest'ultimo solvente, si ottengono dei begli aghi, alcuni abbastanza lunghi, intrecciantisi tra di loro. Riscaldato con alcool e cloruro ferrico ed estraendo poi con etere, questo si colora appena in rosso-bruno, probabilmente in seguito alla formazione di prodotti d'ossidazione, gli azotetrazoni:

$$\begin{array}{l} NH:C_4H_3 \cdot C{=}N-N \cdot C_6H_5 \\ \qquad\qquad\quad | \qquad\;\; | \\ NH:C_4H_3 \cdot C{=}N-N \cdot C_6H_5 \end{array}.$$

Questa reazione degli osazoni viene data infatti ([2]) da dichetoni, o a radicali tutti e due alifatici, o a radicali misti e aromatici. Non viene data però dal benzilosazone, dalla tartrazina, dall'osazone dell'acido acetilgliossilico e dall'osazone dell'ac. diossitartarico.

([1]) *B. 18*, pag. 865 (1885). Sulla colorazione violetta che fornisce il dibenzoile quando si tratta con potassa alcoolica, vedi Laurent, *A. 17*, 21 (1896); Scholl, *B. 32*, 1809 (1899); Libermann e Homeyer, *B. 12*, 1975 (1879); Bamberger, *B. 17*, 45 (1844); Graele et Jouillard, *B. 21*, 2003 (1888); Hantzsch e Glover, *B 40*, 1519 (1907).

([2]) *B. 21*, 2752 (1888); *A. 297*, 110 (1897).

Dipirrilchinossalina : $C_6H_4 \left\langle \begin{matrix} N:C\cdot C = CH-NH-CH = CH \\ N:C\cdot C = CH-NH-CH = CH \end{matrix} \right.$. È il prodotto di condensazione del dipirroile con l'ortofenilendiamina. Purificato dall'alcool acquoso, in presenza di nero animale, dà dei bellissimi cristalli geminati, colorati in giallo cromo, fondenti a 158°. Fornisce le reazioni generali delle chinossaline. Infatti una minima quantità, per aggiunta di acido cloridrico concentrato, si colora intensamente in viola; questa reazione è di estrema sensibilità. Inoltre la soluzione, in acido cloridrico concentrato, della dipirrilchinossalina, trattata con cloruro di platino, si decolora prima, fornendo poi un precipitato rosso; analogamente si comporta con acido ossalico e cloruro mercurico; si ottiene rispettivamente un ossalato e un cloromercurato, colorati tutti e due in rosso.

Ossidazione del dipirroile. Secondo Holleman ([1]) l'acqua ossigenata al 30 % decompone gli α-dichetoni e gli 1–2–chinoni secondo lo schema

$$R\cdot CO-CO\cdot R_1 + H_2O_2 = R\cdot COOH + R_1\cdot COOH .$$

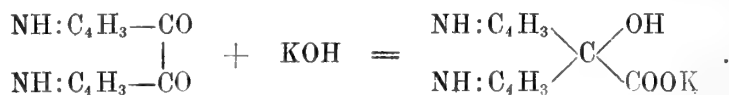
L'ossidazione, che avviene quantitativamente col diacetile più non lo è col benzile, il quale, sospeso in poco acido acetico, viene ossidato dall'acqua ossigenata al 30 % in ac. benzoico e in un olio giallo (Perkin).

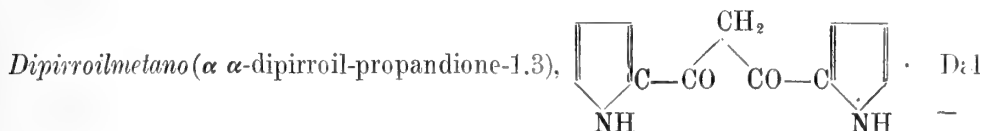
Non avendo a disposizione acqua ossigenata di tale concentrazione, ossidai il dipirroile con permanganato di potassio ed ottenni, analogamente all'α-acetilpirrolo ed all'α-butirrilpirrolo, l'acido chetocarbonico, a p. di fus. 115°,5.

Dipirroilmonossima : $NH:C_4H_3\cdot C(NOH)\cdot CO\cdot C_4H_3:NH$. L'azione dell'idrossilammina sul dipirroile presenta, come è evidente, un interesse speciale per i fenomeni di stereoisomeria dell'azoto che possono offrirsi, analogamente a quanto avviene col dibenzoile di costituzione analoga, e di cui si conoscono due monossime e tre modificazioni isomeriche della diossima.

Mi sono finora occupato di ottenere la monossima, e la ebbi in piccoli cristalli giallo pallidi che, cristallizzati dalla benzina, fondono a 147°. È solubile in alcool, meno in benzolo, facilmente in etere etilico ed in acetone; pochissimo solubile sia in ligroina sia in etere di petrolio. Bollita con acido cloridrico fumante, rigenera il dipirroile; in soluzione nell'acool assoluto rimane inalterata, anche riscaldando in tubo chiuso sino a 120°. L'α-monossima del dibenzoile invece, riscaldata in tubo chiuso, con alcool anidro si trasforma di già nell'isomero a 100°.

Fra le reazioni infine che ho voluto tentare col dipirroile, ricordo l'azione degli alcali la quale, con meccanismo analogo a quello che si ha per il benzoile, avrebbe dovuto condurre al seguente ossiacido:

$$\begin{matrix} NH:C_4H_3-CO \\ | \\ NH:C_4H_3-CO \end{matrix} + KOH = \begin{matrix} NH:C_4H_3 \\ NH:C_4H_3 \end{matrix} \Big> C \Big< \begin{matrix} OH \\ COOK \end{matrix} .$$

(1) *B.* *23*, 170 (1904).

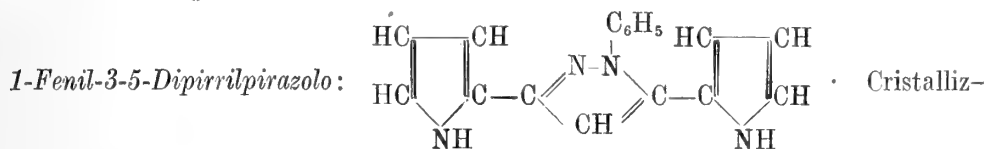
Da ripetute esperienze ho invece notato una grande resistenza del dipirroile verso gli alcali, anche concentrati ed in soluzione alcoolica. Esso resiste anche all'azione della potassa fondente, o in tubo chiuso alla temperatura di 140-150°. Non ho poi nemmeno trascurato l'idrogenazione del dipirroile, che aprirebbe una nuova serie di importanti prodotti che farebbero riscontro alla benzoina e alle idrobenzoine stereoisomere ; ma l'idrogenazione contemporanea dei due nuclei pirrolici richiede di poter lavorare su quantità più grandi di prodotto di quelle usate finora.

Dipirroilmetano ($\alpha\,\alpha$-dipirroil-propandione-1.3), $C_4H_3NH\text{—}CO\text{—}CH_2\text{—}CO\text{—}C_4H_3NH$. Dal benzolo si separa colorato in giallo citrino, più chiaro del dipirroile ; p. di fus. 158°. È solubile nella benzina, nell'acido acetico : meglio nell'etere etilico e nell'alcool. A caldo si scioglie nell'acqua, ed è poco solubile in ligroina : molto meno ancora in etere di petrolio.

Per le sue proprietà di dichetone-1-3, il dipirroilmetano si scioglie, come si è ricordato, negli idrati alcalini e riprecipita inalterato con gli acidi ; nei carbonati si scioglie un po' più difficilmente. La sua soluzione alcoolica satura, a freddo, dà poi le seguenti reazioni :

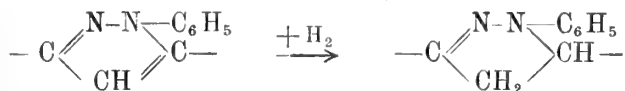
con *cloruro ferrico* : colorazione verde intensa, che si conserva come tale anche diluendo con molta acqua. Estraendo con cloroformio, questo assume una tinta rossa ;

con *acetato di rame :* si forma prima una colorazione gialla e poi un precipitato che aumenta di molto per aggiunta successiva di acqua. Questo derivato ramico è poco solubile in cloroformio, meno in alcool assoluto, meno ancora in benzolo. Nell'acqua, a freddo, è insolubile ; a caldo vi si discioglie sufficientemente ma si decompone in parte. La sua formola è :

$$\left[NH:C_4H_3\cdot CO\cdot \underset{|}{C}H\cdot CO\cdot C_4H_3:NH\right]_2 Cu\,.$$

Con nitrato d'argento, sia dalla soluzione alcoolica del chetone sia da quella in acqua bollente, non si ha nessun precipitato ; aggiungendo invece alla soluzione in acqua calda, dopo il nitrato di argento, una goccia di ammoniaca, si ottiene un abbondante precipitato, caseoso (colorato prima in giallo citrino, e dopo in rosso mattone), che è il derivato argentico solubile in eccesso di ammoniaca.

1-Fenil-3-5-Dipirrilpirazolo : $C_4H_3NH\text{—}C\overset{N\text{—}N(C_6H_5)}{\underset{CH}{\diagdown\!\diagup}}C\text{—}C_4H_3NH$. Cristallizzato da un miscuglio di benzolo e ligroina, si ha colorato in giallo ; fonde intorno a 166°, con decomposizione.

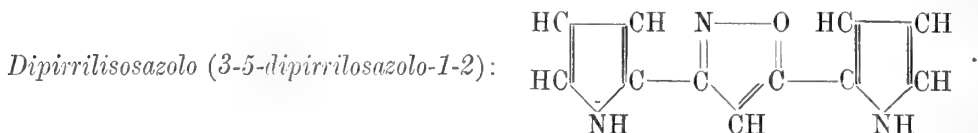
Per azione del sodio sulla soluzione alcoolica, si trasforma in un derivato pirazolinico

$$-C\overset{N-N-C_6H_5}{\underset{CH}{\lessgtr}}C- \xrightarrow{+H_2} -C\overset{N-N-C_6H_5}{\underset{CH_2}{\lessgtr}}CH-$$

ed è da ritenersi che nell'idrogenazione vengano attaccati anche i due nuclei pirrolici per trasformarsi in quelli della pirrolina e della pirrolidina. Facendo agire infatti il

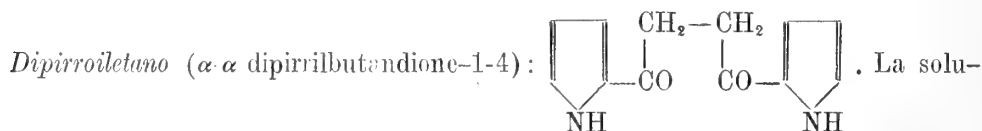
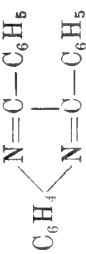
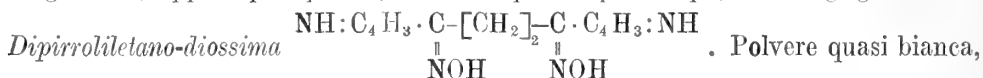
sodio per breve tempo sulla soluzione alcoolica, il prodotto di partenza, che pure ha subìto una modificazione, non dà la caratteristica reazione delle pirazoline (Knorr); insistendo invece a lungo nell'idrogenazione ed operando a caldo, anche il nucleo pirazolico si idrogena, e si ottiene allora in modo molto marcato la suddetta reazione. L'operazione può essere eseguita su pochi centigrammi di sostanza, e la soluzione solforica del prodotto di trasformazione acquista già dopo poco tempo, per semplice azione dell'ossigeno atmosferico, un bel colore rosso, granata. Per azione di altri ossidanti, si hanno le seguenti gradazioni:

con *nitrito sodico* in soluzione molto diluita, si colora in rosso pavonazzo;
con *bicromato sodico* si ha pure un rosso pavonazzo, ma tendente al bleu;
con *cloruro ferrico* il colorito rosso vira maggiormente al bleu.

Dipirrilisosazolo (3-5-dipirrilosazolo-1-2):

```
HC====CH  N——O  HC====CH
|     |   ‖   ‖   |     |
HC    C——C    C——C      CH
  \  /     \ //    \  /
   NH       CH      NH
```

Questo corpo, risultante dall'azione del dipirroilmetano sul cloridrato di idrossilammina, si presenta cristallino giallognolo ed a p. di fus. vicino a 167°. È solubile in alcool, etere etilico, meno in benzolo; molto poco solubile in ligroina ed etere di petrolio. Possiede proprietà debolmente basiche: in acido cloridrico diluito è molto poco solubile, un po' più nel concentrato. La soluzione cloridrica diluita s'intorbida per aggiunta di ammoniaca; con $Pt\,Cl_4$ e con $AuCl_3$ si produce appena un intorbidamento, solo dopo qualche tempo.

Dipirroiletano (α-α dipirrilbutandione-1-4):

```
       CH2—CH2
        |    |
[ ]——CO    CO——[ ]
 \/             \/
 NH             NH
```

. La soluzione benzenica di questo prodotto, concentrata per distillazione, lascia separare delle fogholine, di un bel bianco-argento, con lucentezza madreperlacea. Fonde a 234-235°, con decomposizione. Nei comuni solventi è poco solubile: etere etilico, benzolo, alcool; in ligroina ed in etere di petrolio è insolubile o quasi. Non si scioglie anche, come si è ricordato, negli idrati alcalini a freddo; a caldo vi si discioglie e riprecipita per raffreddamento inalterato. Analogamente ai suoi omologhi inferiori, fornisce un derivato argentico; appena precipitato, è bianco-sporco; poco dopo, diventa grigio-oscuro.

Dipirroliletano-diossima $NH:C_4H_3\cdot \underset{NOH}{\underset{\|}{C}}-[CH_2]_2-\underset{NOH}{\underset{\|}{C}}\cdot C_4H_3:NH$. Polvere quasi bianca, microcristallina, solubile in alcool, benzolo, meno in ligroina ed etere di petrolio. A caldo si scioglie facilmente nell'acqua e, purificata da questo solvente, si decompone verso i 175°.

I dichetoni pirrolici, per le ragioni ora descritte, corrispondono bene a quelli a nucleo benzolico. Il seguente specchietto, mentre pone maggiormente in rilievo l'analogia delle due serie di prodotti, lascia facilmente intravedere le numerose ricerche che si potranno ancora eseguire. Dal suo esame riesce degno di nota il basso p. di fus. del dipirroilmetano in confronto dei suoi due omologhi, quello successivamente inferiore, e quello successivamente superiore. Lo stesso fatto si osserva per il benzoilmetano, in rapporto al benzile ed al dibenzoiletano.

	P. di fus.		P. di fus.
Pirrile (α-α-dipirroile): C_4H_3NH—CO·CO—C_4H_3NH (NH, NH)	199-200°	*Benzile* (dibenzoile): C_6H_5—CO—CO—C_6H_5	95°
Dipirroilmetano (α-α-dipirrilpropandione 1-3): $NH \cdot C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2 CO \cdot C_4H_3 : NH$	158°	*Dibenzoilmetano* (difenilpropandione-1-3): $C_6H_5 \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CO \cdot C_6H_5$	81°
Dipirroiletano (α-α-dipirrilbutandione-1-4): $NH : C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CO \cdot C_4H_3 : NH$	234-235° con decomp.	*Dibenzoiletano* (difenilbutandione-1-4): $C_6H_5 \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CO \cdot C_6H_5$	144-145°
Pirrilosazone: $NH : C_4H_3 \, C$—$C \cdot C_4H_3 : NH$ $C_6H_5 NH \cdot N$ $N \cdot NH \cdot C_6H_5$	14[illegible]°	*Benzilosazone*: $C_6H_5 \cdot C$—$C \cdot C_6H_5$ $C_6H_5 \cdot NH \cdot N$ $N \cdot NH \cdot C_6H_5$	intorno a 225°
Dipirrilchinossalina (2-3-dipirril-1-4-benzdiazina): $C_6H_4 \langle$ $N{=}C \cdot C_4H_3 : NH$ $N{=}C \cdot C_4H_3 : NH$	158°	*Difenilchinossalina* (2-3-difenil-1-4-benzdiazina): $C_6H_4 \langle$ $N{=}C$—C_6H_5 $N{=}C$—C_6H_5	124°
Pirrilossima: $NH : C_4H_3 \, C(NOH) \, CO \cdot C_4H_3 \cdot NH$	147°	*Benzilossima*: $C_{14}H_{11}O_2N$ { α-isomero . . . . β-isomero	137-138° 113-114°
1-*Fenil*-3-5-*dipirrilpirazolo*: $C_6H_5 \cdot N \langle$ $C(C_4H_3 : NH)$ ⟩CH $N{=}C(C_4H_3 : NH)$	intorno a 166° con decomp.	1-3-5-*trifenilpirazolo*: $C_6H_5 \cdot N \langle$ $C(C_6H_5){=}$ ⟩CH $N{=}C(C_6H_5)$	137-138°
Dipirrilisosazolo (3-5-dipirrilosazolo-1-2): $NH : C_4H_3 \, C \langle$ CH—$C \cdot C_4H_3 : NH$ O—N	vicino a 167°	*Difenilisosazolo*: $C_6H_5 \cdot C \langle$ CH—$C \cdot C_6H_5$ O—N	141°
Dipirroiletanodiossima: $NH : C_4H_3 \cdot C(NOH) \cdot C_2H_4 \cdot C(NOH) \cdot C_4H_3 : NH$	vicino a 175° con decomp.	*Difenacildiossima*: $C_6H_5 \, C(NOH) \, C_2H_4 \cdot C(NOH) \cdot C_6H_5$	203-204°

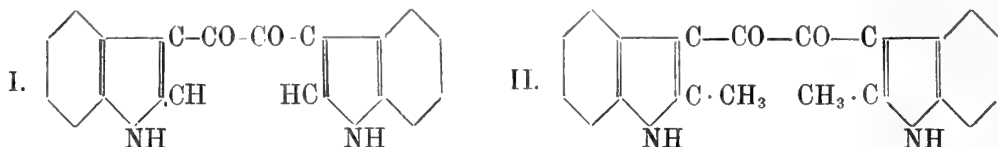
Dichetoni indolici.

Le predette reazioni dei cloruri di acidi bicarbossilici sono pure estensibili ai magnesilindoli (1).

Si è potuto ottenere così l'analogo del benzile anche per l'indolo e per il metilchetolo, per azione del cloruro di ossalile, rispettivamente, sul magnesiaco dell'indolo e del metilchetolo.

Ad essi spettano le costituzioni seguenti:

I. C–CO–CO–C / .CH HC / NH NH

II. C—CO—CO—C / $C\cdot CH_3$ $CH_3\cdot C$ / NH NH

Col cloruro di malonile e con quello di succinile si sono poi avuti i rispettivi α- e γ-dichetoni, prodotti tutti che, analogamente ai corrispondenti del pirrolo, non erano conosciuti.

Nella reazione coll'indolo, oltre al prodotto principale sostituito in β, si formano anche due altre sostanze, in assai piccola quantità, le quali tuttavia, come si vedrà fra breve, debbono ritenersi, una un derivato all'azoto, l'altra un derivato bisostituito all'azoto ed al carbonio in β.

In condizioni sperimentali, non facili a stabilire, si è riusciti ancora a separare altre due sostanze, di cui una è pure un derivato monosostituito, ma al carbonio α, e l'altra un bisostituito all'azoto ed al carbonio α.

Riferendomi all'ordinaria nomenclatura, adotterò (tenendo conto della posizione e del numero dei gruppi sostituenti) il nome di *diindoile* per i derivati dell'indolo e di *dimetilchetoile* per il corrispondente prodotto ottenuto dal metilchetolo. Per maggiore semplicità e per analogia col benzile (dibenzoile), farò pure uso, per i prodotti dell'indolo, del nome di *indile*; e chiamerò anche con *metilchetile* il prodotto II; per ovvia estensione l'analogo dipirroile potrà essere indicato col nome anche di *pirrile*. Con questa denominazione s'intende il residuo del pirrolo $—C_4H_3NH$ (2), ma il residuo dell'indolo $—C_8H_6NH$ non è indile, ma *indolile*, e per il metilchetolo è stato più semplice di avere considerato, per la nomenclatura, i prodotti finora ottenuti come derivati dell'indolo α-metilato. Il duplice significato non rimane, quindi, se non per il solo pirrile: duplicità che d'altronde trova riscontro in quella del benzile, intendendosi con questo nome, come è noto, anche il residuo toluico.

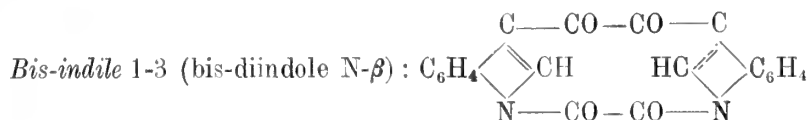
Il cloruro dell'acido ossalico reagisce con molta energia sul magnesilindolo. Distillando a vapore d'acqua il prodotto della reazione, passa un po' di indolo che non ha reagito, mentre dalle acque non distillate e filtrate, ancora calde, si separa, dopo raffred-

(1) B. Oddo e G. Sanna, *G*, *51*, II, 339 (1921).

(2) Ciamician e Dennsted, *G. 15*, 9 (1885)

damento, una polvere giallo-aranciata. Purificata, in presenza di nero animale, dall'alcool, in cui però è molto solubile, si ottiene quasi incolora, sotto forma di cristalli prismatici che fondono a 200°, incominciando a decomporsi qualche grado sopra. La sostanza che così si ottiene è in piccolissima quantità; corrisponde al

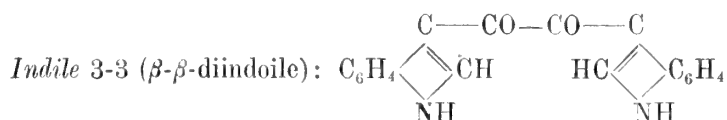
Bis-indile 1-3 (bis-diindole N-β) :

$$\begin{array}{ccccc} & C & —CO—CO— & C & \\ C_6H_4 \langle\ \rangle CH & & & & HC \langle\ \rangle C_6H_4 \\ & N & —CO—CO— & N & \end{array}$$

Messa infatti a ricadere con soluzione di idrato potassico, dopo raffreddamento ed acidificazione con acido solforico diluito, l'estrazione con etere fornisce un'altra sostanza colorata in giallo che non fonde completamente se non a 235°; punto di fusione, questo, che, come si vedrà tosto, è quello del composto monosostituito ed in posizione -β.

Il rimanente prodotto, non distillato a vapore e separato dalle acque madri ancora calde, costituisce la parte principale della reazione. È di aspetto bruno-pecioso, molto solubile nell'alcool caldo, pur rimanendo qualche piccola parte indisciolta, e le sue soluzioni alcooliche precipitano se versate in acqua. Cristallizzato ripetutamente da una miscela, a volumi quasi uguali, di alcool e di acqua, si ottiene in aghetti colorati in giallo, che a 200° circa incominciano a contrarsi e ad imbrunire e non fondono, con evidente decomposizione, se non intorno a 235°. Oltre che nell'alcool etilico, è solubile in alcool metilico; poco in etere ed in benzolo; meno ancora in ligroina ed etere di petrolio. È facilmente solubile in etere acetico; e, con l'evaporazione del solvente, solo quando questa avviene molto lentamente si ha cristallizzato, mentre il prodotto, di cui si dirà fra breve, cristallizza subito anche per rapida evaporazione dallo stesso solvente, in bellissime laminette prismatiche. In acido acetico è assai poco solubile e si discioglie a stento nell'acqua bollente.

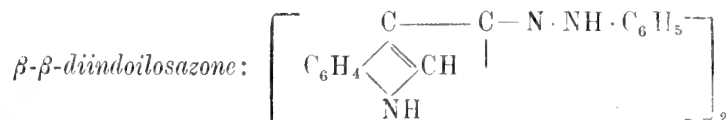
Le percentuali date dall'analisi corrispondono a quelle richieste dal

Indile 3-3 (β-β-diindoile):

$$\begin{array}{ccccc} & C & —CO—CO— & C & \\ C_6H_4 \langle\ \rangle CH & & & & HC \langle\ \rangle C_6H_4 \\ & NH & & NH & \end{array}$$

Come si è già detto, il prodotto resiste all'azione degli idrati alcalini; e mentre le sue soluzioni in acqua bollente forniscono un precipitato per aggiunta di nitrato di argento e di una goccia di ammoniaca, sottoposto all'ossidazione mediante potassa fusa, dà acido β-indolcarbonico, per cui non rimane dubbio sulla costituzione assegnatagli.

Derivati del β-β-diindoile [1].

β-β-*diindoilosazone*:

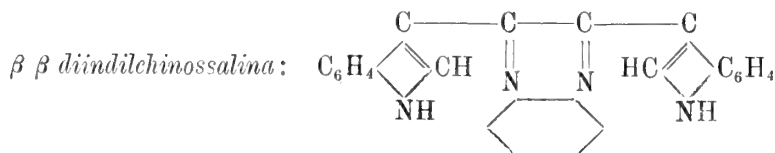
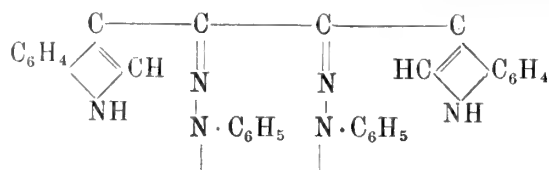
$$\left[\begin{array}{ccc} & C & —C—N\cdot NH\cdot C_6H_5 \\ C_6H_4 \langle\ \rangle CH & & | \\ & NH & \end{array}\right]_2$$

Dal benzolo si ha in bei prismi gialli, fondenti con decomposizione a 158°; solubili in alcool, acido acetico; meno solubile in benzolo, in etere ed etere di petrolio. Riscal-

[1] G. Sanna, *G. 52*, II, 163 (1922)

dato con poche gocce di cloruro ferrico, ed estraendo, dopo raffreddamento, con etere, questo si colora visibilmente in rosso, in seguito ad ossidazione in osotetrazone:

$$\begin{array}{cccc} C & C & C & C \\ C_6H_4\langle\;\rangle CH & \| & \| & HC\langle\;\rangle C_6H_4 \\ NH & N & N & NH \\ & N\cdot C_6H_5 & N\cdot C_6H_5 & \end{array}$$

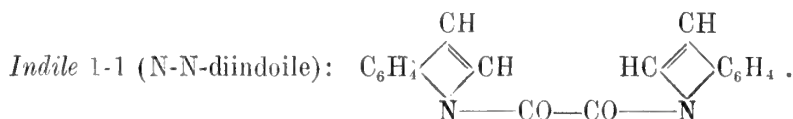
β β diindilchinossalina:

$$\begin{array}{cccc} C & C & C & C \\ C_6H_4\langle\;\rangle CH & \| & \| & HC\langle\;\rangle C_6H_4 \\ NH & N & N & NH \end{array}$$

Questo prodotto di condensazione con l'*o*-fenilendiammina si separa dal benzolo, in ammassi prismatici. Fonde a 163°, con decomposizione.

Fornisce le reazioni generali delle chinossaline; così con HCl concentrato dà una bella colorazione viola; la soluzione precipita, decolorandosi, per aggiunta di cloruro platinico. Con acido ossalico dà un ossalato colorato in rosso; con cloruro mercurico dà pure un precipitato rosso.

β-β-diindoile argentico: $C_{18}H_{10}O_2N_2Ag_2$. Precipita in grigiastro dalla soluzione in alcool acquoso del dichetone per aggiunta di una soluzione concentrata di $AgNO_3$ e qualche goccia di ammoniaca.

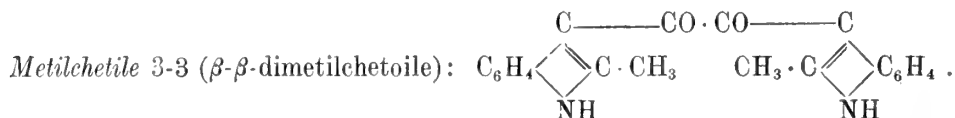
Indile 1-1 (N-N-diindoile):

$$\begin{array}{ccc} CH & & CH \\ C_6H_4\langle\;\rangle CH & & HC\langle\;\rangle C_6H_4 \\ N & -CO-CO- & N \end{array}$$

Non tutto il prodotto non distillato a vapor d'acqua è facilmente solubile in alcool; resta una porzione che stenta a disciogliersi. Purificata separatamente dall'alcool bollente, in presenza di nero animale, si riesce ad ottenerla ben cristallizzata in prismi incolori, brillanti, che fondono a 218-220°. Che sia un derivato all'N risulta dal fatto che, bollito per qualche istante con idrato potassico al 10 %, si sente subito marcatamente l'odore di indolo, prodotto che si riesce anche ad isolare ed identificare col suo p. di fusione.

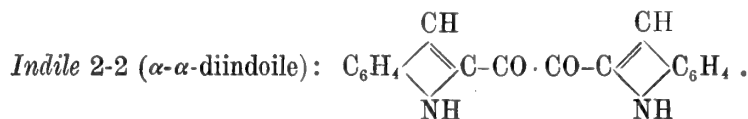
Il predetto composto non è quindi se non un derivato dell'acido N-indolcarbonico, di cui è stato detto nelle pagine precedenti; il che giustifica la comunanza di nome col corrispondente prodotto dell'acido *β*-indolcarbonico.

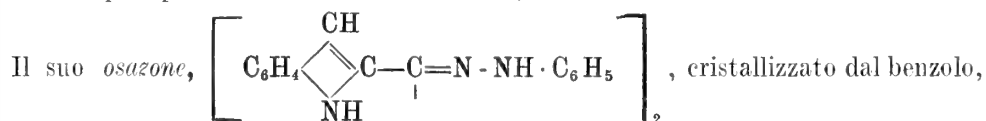
L'indile 1-1 è solubile in alcool metilico, poco in benzolo, quasi insolubile in ligroina ed etere di petrolio.

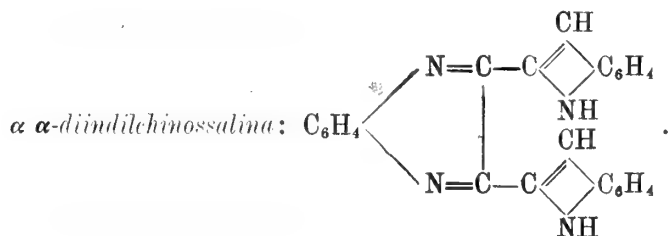
Metilchetile 3-3 (*β-β*-dimetilchetoile):

$$\begin{array}{ccc} C & -CO\cdot CO- & C \\ C_6H_4\langle\;\rangle C\cdot CH_3 & & CH_3\cdot C\langle\;\rangle C_6H_4 \\ NH & & NH \end{array}$$

Facendo agire del cloruro di ossalile su del magnesilmetilchetolo, si ha dapprima una sostanza polverulenta, inquinata da un'altra sostanza di aspetto resinoso. Si tratta con

piccole porzioni di etere che portano via quest'ultima, ed il residuo si cristallizza dall'alcool metilico in presenza di nero animale; si ottiene così il metilchetile-3-3 in prismi incolori, fondenti a 256-257°, poco solubili in etere, in benzolo ed in etere di petrolio.

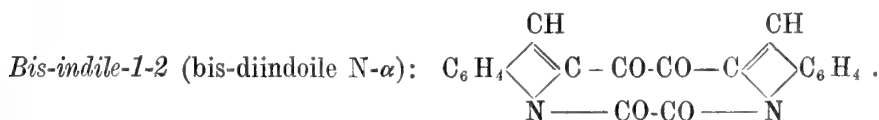
Indile 2-2 (α-α-diindoile): $C_6H_4\langle CH, NH \rangle C-CO\cdot CO-C\langle CH, NH \rangle C_6H_4$.

Le ricerche su questo dichetone e sui seguenti si devono al dott. Giuseppe Sanna (1), mio assistente e collaboratore durante il periodo di insegnamento nella R. Università di Cagliari.

Se il prodotto della reazione del cloruro di ossalile sul magnesilindolo si cristallizza, con molta accuratezza, frazionatamente, si riesce a separare, nelle frazioni meno solubili, una sostanza cristallina, costituita da prismi tabulari, leggermente colorati in giallo, fondente, dopo ripetute cristallizzazioni, a 273°, ed è l'indile 2-2.

Il suo *osazone*, $\left[C_6H_4\langle CH, NH \rangle C-C=N-NH\cdot C_6H_5 \right]_2$, cristallizzato dal benzolo, si ottiene in prismi tabulari colorati in giallo, fondenti, con decomposizione, a 170°. Riscaldato con poche gocce di alcool e un po' di cloruro ferrico, dà leggermente la reazione degli osotetrazoni, colorando in rosso l'estratto etereo.

α α-*diindilchinossalina*: $C_6H_4\langle N=C-C\langle CH, NH \rangle C_6H_4 \; / \; N=C-C\langle CH, NH \rangle C_6H_4$.

Dal benzolo forma prismi aghiformi, riuniti a ciuffi, che fondono, decomponendosi, a 154°. Fornisce le reazioni generali delle chinossaline.

L'*α-α-diindoile*, ossidato con acqua ossigenata al 30 %, conduce all'acido α-indolcarbonico, come si conviene per un indile 2-2.

Allo stesso acido si arriva anche per fusione con potassa.

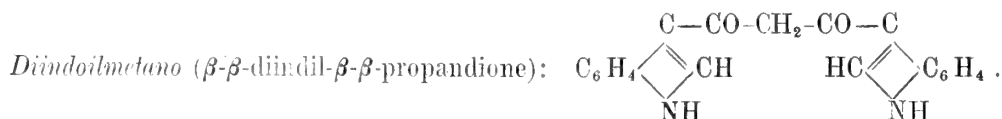
Bis-indile-1-2 (bis-diindoile N-α): $C_6H_4\langle CH, N \rangle C-CO\text{-}CO-C\langle CH, N \rangle C_6H_4$ (N——CO-CO——N).

Non tutto il prodotto della reazione fra cloruro di ossalile e magnesilindolo può essere disciolto facilmente nell'alcool: rimane in tutte le preparazioni uno scarso residuo, che fonde a temperatura molto elevata e che si scioglie solo nell'alcool assoluto e bol-

(1) *G.* *52*, II, 166 (1922) e *53*, I (1923)

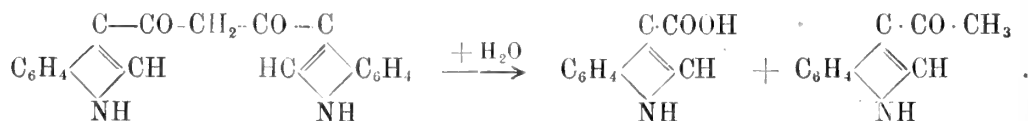
lente. Da questo si riesce, dopo parecchie cristallizzazioni, ad ottenerlo abbastanza puro e cristallizzato in scaglie giallastre che fondono solo a 320°. È costituito da bis-indile 1-2.

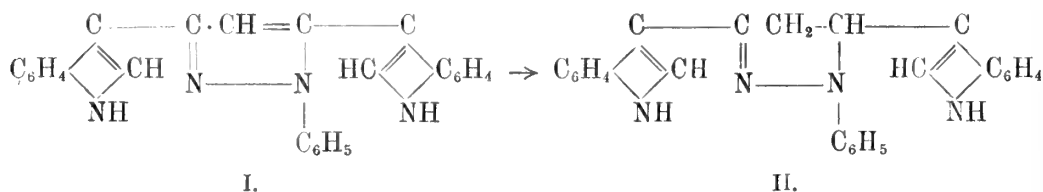
Dal trattamento infatti con potassa concentrata si ottiene un prodotto cristallino che fonde a 273°, che è quello dell'α-α-diindoile. Fuso invece con potassa, dà l'acido α-indolcarbonico.

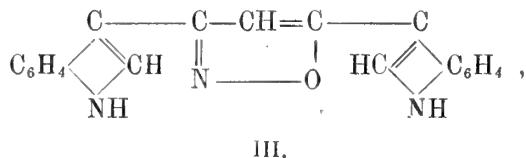
Diindoilmetano (β-β-diindil-β-β-propandione):

```
              C—CO-CH₂-CO—C
C₆H₄<  >CH              HC<  >C₆H₄ .
      NH                      NH
```

La costituzione di questo composto è stata dimostrata dallo studio di numerose reazioni che sono riferibili a quelle di cui si è detto per il dipirroilmetano. Sebbene stentatamente, si scioglie negli alcali a freddo, dai quali riprecipita inalterato per aggiunta di acido solforico diluito. Con cloruro ferrico la sua soluzione alcoolica si colora subito in verde-smeraldo; questa colorazione tende, col tempo, a diventare sempre più cupa ed acquista dei riflessi violacei. Con acetato di rame, in soluzione alcoolica, dà una colorazione giallo-verdastra, e per raffreddamento lascia separare un precipitato bruno che va aumentando col riposo ed è costituito dal derivato ramico. Con nitrato d'argento, in presenza di poca ammoniaca, precipita il derivato argentico.

Con gli idrati alcalini bollenti addiziona una molecola di acqua e si scinde in acido β-indolcarbonico e β-indolilmetilchetone:

```
    C—CO-CH₂-CO—C                          C·COOH              C·CO·CH₃
C₆H₄<  >CH        HC<  >C₆H₄   +H₂O→   C₆H₄<  >CH    +   C₆H₄<  >CH    .
     NH               NH                     NH                 NH
```

Reagisce facilmente con la fenilidrazina per dare il prodotto di disidratazione del monofenilidrazone, il fenil-diindilpirazolo (I), come lo dimostra la sua trasformazione nella corrispondente pirazolina (II)

```
    C——————C·CH=C——————C                        C——————C  CH₂-CH——————C
C₆H₄<  >CH  ‖       |  HC<  >C₆H₄  →  C₆H₄<  >CH  ‖       |     HC<  >C₆H₄
     NH     N———————N      NH               NH    N———————N         NH
                    |                                     |
                   C₆H₅                                  C₆H₅
              I.                                      II.
```

Con meccanismo analogo, per condensazione coll'idrossilamina, si ottiene il diindilisosazolo (III):

```
    C——————C—CH=C——————C
C₆H₄<  >CH  ‖      |   HC<  >C₆H₄ ,
     NH     N——————O       NH
              III.
```

e ad un altro composto ciclico si arriva per condensazione colla semicarbazide, la diindil-

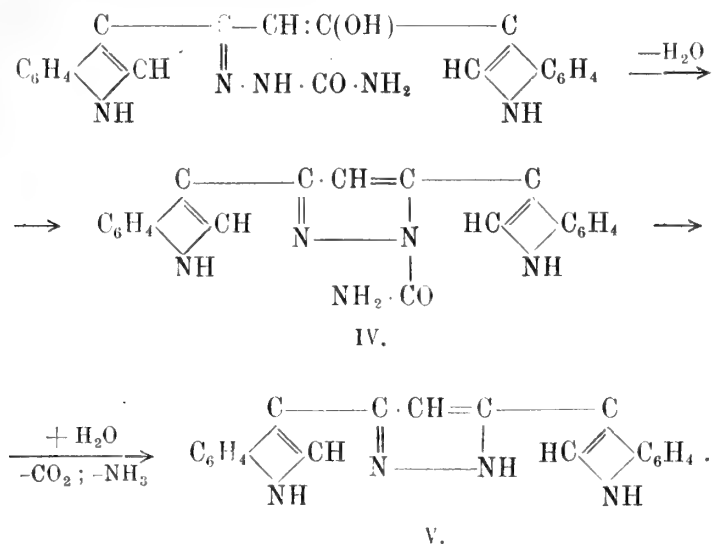
pirazolcarbonammide (IV), che, addizionando 1 mol. H_2O, perde CO_2 e NH_3 per trasformarsi nel diindilpirazolo (V):

$$
\begin{array}{ccccc}
 & C\text{———} & C\text{—}CH:C(OH)\text{———} & C & \\
C_6H_4\langle\rangle CH & & \overset{\|}{N}\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2 & HC\langle\rangle C_6H_4 & \xrightarrow{-H_2O} \\
 & NH & & NH &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & C\text{———} & C\cdot CH{=}C\text{———} & C & & \\
\longrightarrow & C_6H_4\langle\rangle CH & \overset{\|}{N}\text{———}\overset{|}{N} & HC\langle\rangle C_6H_4 & \longrightarrow & \\
 & NH & \underset{NH_2\cdot CO}{|} & NH & &
\end{array}
$$

IV.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & C\text{———} & C\cdot CH{=}C\text{———} & C & \\
\xrightarrow[-CO_2\,;\,-NH_3]{+H_2O} & C_6H_4\langle\rangle CH & \overset{\|}{N}\text{———}\overset{|}{N}H & HC\langle\rangle C_6H_4\,. & \\
 & NH & & NH &
\end{array}
$$

V.

In tutte le reazioni sopradescritte il diindoilmetano si comporta, al pari di tutti i β-dichetoni, come un ossichetone, secondo la forma enolica. È tuttavia da rilevare la difficoltà con la quale si scioglie negli alcali, la debole colorazione che assume col cloruro ferrico, la stentata precipitazione del sale ramico anche per diluizione con acqua, per cui non è improbabile che esso, sia in soluzione, sia allo stato solido, debba prevalentemente esistere nella forma normale di dichetone, e che solo lentamente, e più rapidamente per azione del calore, si trasformi nella varietà chetoenolica. Questa supposizione è stata confermata, sia dalla difficoltà colla quale il composto viene eterificato dall'isocianato di fenile, sia dalla lentezza colla quale vengono decolorate le soluzioni di permanganato, anche diluite in presenza di alcali; questi reattivi infatti dovrebbero agire molto più energicamente se fosse presente il doppio legame della forma chetoenolica: -CO·CH=C(OH)-. D'altra parte, si è avuta occasione di notare che la colorazione che assume il cloruro ferrico diviene molto più intensa portando il liquido all'ebollizione e che col riscaldamento avviene assai più rapidamente la decolorazione del permanganato; questi fatti dimostrano che, per effetto del calore, la trasformazione del dichetone nella forma tautomera è notevolmente facilitata, e spiegano perchè nelle condensazioni del composto con fenilidrazina, idrossilamina e semicarbazide, che avvengono tutte per riscaldamento prolungato, il prodotto dia origine a composti ciclici che derivano dalla forma cheto-enolica.

Le ricerche, eseguite da G. Sanna nell'intento di arrivare alla separazione delle due forme tautomere, parlano in favore di una grande stabilità della forma normale. È stata cura dello stesso A. di vedere se nell'azione del cloruro di malonile sul magnesilindolo, si formino assieme col derivato β-β altri derivati, sia al C in α, sia al C e all'N, confrontabili con quelli ottenuti per azione del cloruro di ossalile; ma in tutte le preparazioni è arrivato sempre al solo derivato in α. La maggior lunghezza della catena sembra quindi

influisca notevolmente sulla tendenza all'attacco nella posizione più distante dell'immino-gruppo.

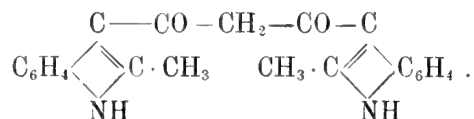
Il diindolilmetano cristallizza dall'alcool in minutissimi aghi, ammassati, che dànno alla sostanza l'aspetto di bioccoli di cotone greggio. Riscaldato in tubetto chiuso, comincia ad annerire verso i 230°; ma non fonde completamente se non a 287°, decomponendosi.

1-*fenil*-3-5-*diindilpirazolo*, $C_{25}H_{19}ON_4$. Dal benzolo si ha in prismi gialli a forma di lama di coltello, che fondono a 236° con decomposizione.

3-5-*diindilisosazolo*, $C_{19}H_{13}ON_3$. Cristallizzato dall'alcool bollente, fornisce bei prismi giallognoli che fondono, decomponendosi, a 219°. È solubile in alcool, acido acetico; meno in benzolo; insolubile in etere di petrolio. Ha proprietà basiche assai deboli, sciogliendosi appena con acido cloridrico concentrato. Se l'azione dell'idrossilammina si interrompe solo dopo poche ore, assieme con una grande quantità di prodotto inalterato si ritrova un po' di prodotto cristallino costituito da aghetti finissimi, colorati in rosso, che fondono, decomponendosi, a 170° circa. Questo prodotto, di cui non è stato possibile eseguire nessuna determinazione perchè se ne forma assai poco, costituisce probabilmente la monossima del dichetone; infatti presenta proprietà riducenti e, per ebollizione con acido cloridrico diluito, ridà il prodotto di partenza: il diindoilmetano.

3-5-*diindoilpirazolo*, $C_{19}H_{14}N_4$: polvere cristallina, gialla (purificata dall'alcool), fondente a 229° con decomposizione.

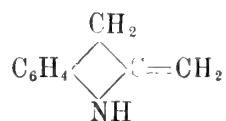
Dimetilchetoilmetano (-β-β-dimetilchetil β-β-propandione):

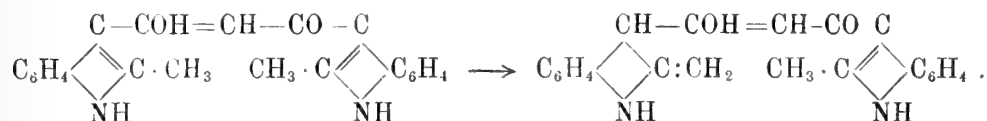
$$\begin{array}{ccc} C\!-\!\!-\!CO-CH_2\!-\!CO-C & & \\ C_6H_4\langle\;\rangle C\cdot CH_3 & & CH_3\cdot C\langle\;\rangle C_6H_4\,. \\ NH & & NH \end{array}$$

Ottenuto per azione del cloruro di malonile sul magnesilmetilchetolo, presenta, come il suo omologo inferiore, le reazioni caratteristiche dei β-dichetoni. Fornisce infatti dei derivati metallici, dà dei prodotti di condensazione colla fenilidrazina, coll'idrossilammina e colla semicarbazide, e si decompone cogli alcali a caldo, in acido α-metil-β-indolcarbonico ed α-metil-β-indolilmetilchetone.

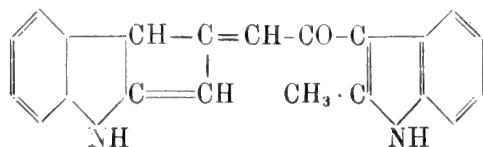
Dalle soluzioni alcaline, fatte a freddo, riprecipita inalterato per aggiunta di acido solforico diluito. Col cloruro ferrico la sua soluzione alcoolica assume una bella colorazione verde-smeraldo intensa che, in breve tempo, vira a viola. Oltre al composto di cui si è detto e che, per il suo comportamento, può considerarsi non come il normale dimetilchetoilmetano, ma come il tautomero ossichetone, –C(OH)═CH—CO–, si è potuto isolare un altro prodotto che, pur avendo lo stesso punto di fusione, presenta diversa forma cristallina e differisce dal precedente perchè non è solubile negli alcali, non dà nessuna colorazione col cloruro ferrico, non precipita coll'acetato di rame e non si eterifica coll'isocianato di fenile. Dà invece gli stessi prodotti di condensazione colla fenil-

idrazina e coll'idrossilammina, e presenta all'analisi la stessa composizione centesimale. Questa notevole constatazione ha condotto alla conclusione che la sostanza in parola non è che una varietà tautomera del β-β-dimetilchetil -β-β-propandione e che debba spettare ad essa la formola normale del β-dichetone dell'α-metilindolo : $-CO-CH_2-CO-$.

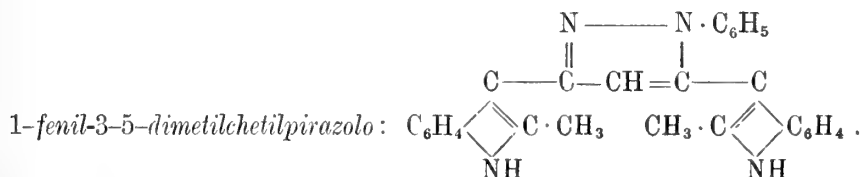
G. Sanna accenna anche alla formazione di un altro composto cristallino che si ritrova, in piccola quantità, accanto agli altri due già ricordati. Questo prodotto, che ha un p. di fus. superiore di pochi gradi a quello degli altri, possiede pure struttura cristallina differente e diversa solubilità, e all'analisi ha dato dei valori corrispondenti a quelli del dimetilchetoilmetano, meno una molecola di acqua. Ricerche in corso tendono a stabilire se si tratti realmente di un prodotto di disidratazione della forma cheto-enolica. In questo caso sembra necessario ammettere che il metilindolo reagisca secondo la formola tautomera

$$C_6H_4\langle{}^{CH_2}_{NH}\rangle C=CH_2$$

o che in questa forma si tautomerizzi l'ossichetone già formatosi :

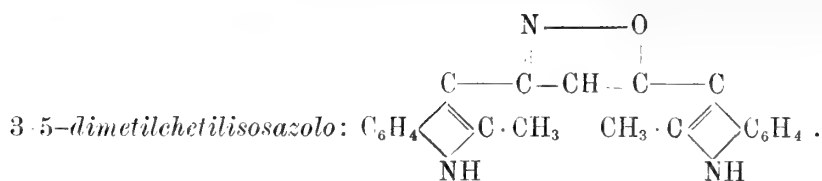
$$\underset{NH}{C_6H_4\langle\rangle}\overset{C-COH=CH-CO-C}{C\cdot CH_3\quad CH_3\cdot C}\underset{NH}{\langle\rangle C_6H_4} \longrightarrow \underset{NH}{C_6H_4\langle\rangle}\overset{CH-COH=CH-CO\ C}{C:CH_2\quad CH_3\cdot C}\underset{NH}{\langle\rangle C_6H_4}.$$

È facile allora supporre che tra il gruppo alcoolico ed il gruppo metilenico (che si trova, rispetto al primo, in posizione γ) si produca l'eliminazione di una molecola di acqua e venga a costituirsi, saldato sul nucleo pirrolico, un anello tetrametilenico :

$$C_6H_4\langle{}^{CH-C=CH-CO-C}_{NH\ \ C=CH}\rangle \quad CH_3\cdot C\langle NH\rangle C_6H_4 .$$

Il dimetilchetoilmetano cristallizza dall'alcool bollente, in belle tavolette romboedriche gialle, fondenti a 219°. Il derivato ramico dell'ossichetone, $[-CO-\underset{|}{C}H-CO-]_2Cu$; si ha dall'alcool in begli ottaedri con dei riflessi violacei, che fondono, decomponendosi, a 220°. La polvere invece si presenta giallognola.

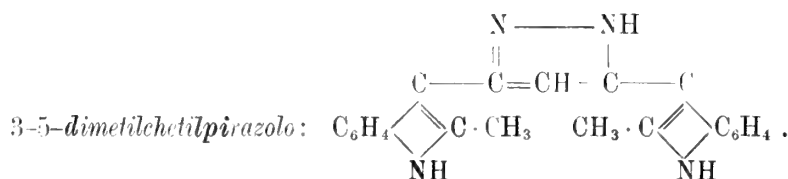
1-*fenil*-3-5-*dimetilchetilpirazolo* :

$$\begin{array}{c} N \text{———} N\cdot C_6H_5 \\ \| \qquad\quad | \\ C\text{——}C-CH=C\text{——}C \\ C_6H_4\langle\rangle C\cdot CH_3 \qquad CH_3\cdot C\langle\rangle C_6H_4 . \\ NH \qquad\qquad\qquad NH \end{array}$$

Prismi riuniti a foggia di sega (dal benzolo), leggermente gialli, che fondono a 192° con decomposizione.

3-5-*dimetilchetilisosazolo*:

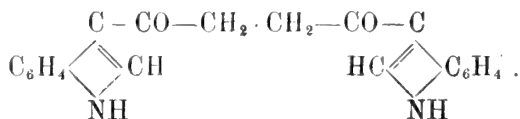
$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad N\text{———}O \\
\qquad\qquad \vdots \qquad | \\
C\text{——}C-CH-C\text{——}C \\
C_6H_4\langle\rangle C\cdot CH_3 \qquad CH_3\cdot C\langle\rangle C_6H_4\ . \\
NH \qquad\qquad\qquad NH
\end{array}
$$

Dall'alcool si ottiene cristallizzato in prismi giallognoli, che fondono, decomponendosi, a 174°; solubili in alcool, acido acetico, poco in benzolo; insolubili negli altri solventi. Possiede proprietà basiche più spiccate del corrispondente derivato dell'indolo. La soluzione cloridrica diluita s'intorbida per aggiunta di ammoniaca; s'intorbida anche sensibilmente con $Pt\,Cl_4$ e con $AuCl_3$.

3-5-*dimetilchetilpirazolo*:

$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad N\text{———}NH \\
\qquad\qquad \| \qquad | \\
C\text{——}C{=}CH-C\text{——}C \\
C_6H_4\langle\rangle C\cdot CH_3 \qquad CH_3\cdot C\langle\rangle C_6H_4\ . \\
NH \qquad\qquad\qquad NH
\end{array}
$$

Polvere gialla, solubile in alcool, dal quale cristallizza in forma di aghetti minutissimi che fondono a 247°, con decomposizione. È solubile anche in acido acetico; insolubile quasi in benzolo e negli altri solventi.

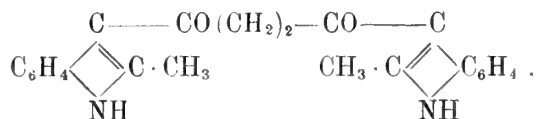
Anidro-dimetilchetoilmetano. Si separa dalle acque madri alcooliche della cristallizzazione del dimetilchetoilmetano, dopo molto tempo, per lenta evaporazione, sotto forma di un ammasso duro, cristallino, colorato in giallo, che stenta a ridisciogliersi nell'alcool anche bollente. Da questo ricristallizza in grossi e corti prismi esagonali, giallognoli, che fondono a 224° con decomposizione.

Diindoiletano (β-β-diindilbutandione 1-4):

$$
\begin{array}{c}
C-CO-CH_2\cdot CH_2-CO-C \\
C_6H_4\langle\rangle CH \qquad\qquad HC\langle\rangle C_6H_4\ . \\
NH \qquad\qquad\qquad NH
\end{array}
$$

È il prodotto di reazione del cloruro di succinile col magnesilpirrolo: prismi minutissimi, incolori, dall'alcool, fondenti a 287°; insolubili negli alcali, anche se concentrati, solubili a caldo, per quanto stentatamente; per raffreddamento riprecipitano inalterati.

Dà un derivato argentico ed una diossima $NH{:}C_8H_5\cdot \underset{\displaystyle NOH}{\overset{\|}{C}}\cdot CH_2\cdot CH_2\cdot \underset{\displaystyle NOH}{\overset{\|}{C}}\cdot C_8H_5{:}NH$; prismi incolori a foggia di lama di coltello, dal benzolo, fondenti, con decomposizione, a 305°.

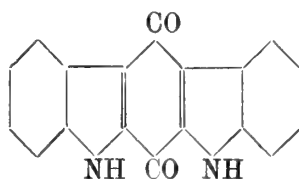
Dimetilchetoilmetano (β β di-α metilindoli butandione 1 4):

$$\begin{array}{ccc} C\text{———}CO(CH_2)_2\text{—}CO\text{———}C \\ C_6H_4\langle\!\!\rangle C \cdot CH_3 \qquad CH_3 \cdot C\langle\!\!\rangle C_6H_4 \, . \\ NH \qquad\qquad\qquad NH \end{array}$$

Si forma per azione, sul magnesilmetilchetolo, del cloruro di succinile: prismi molto minuti, dall'alcool; fondenti, con decomposizione, a 297°.

Il dimetilchetoiletano è pur'esso insolubile negli alcali, anche se concentrati; a caldo vi si discioglie assai poco e, per raffreddamento, precipita inalterato. Si scioglie in acido solforico concentrato, con colorazione rosso-sangue, che, per riscaldamento, prima passa al viola e poi al rosso-porpora. La diossima corrispondente, cristallizzata dall'alcool, fonde a 267°.

Dal comportamento dei cloruri di acidi bibasici con i magnesilindoli finora studiati, risulta particolarmente degno di nota quello del cloruro di ossalile col magnesilindolo. Si è potuto infatti arrivare non solo ai tre possibili *indili*, ma anche a due, fra i tre possibili *bis-indili*. Allo stesso modo il cloruro di carbonile dovrebbe condurre ad anelli esagonali, come il seguente (analogo dell'antrachinone) e simili:

CO

NH CO NH

La tavola riportata qui appresso, nel mettere in rilievo la varietà dei prodotti già descritti, lascia anche prevedere gli altri nuovi interessanti nuclei ai quali si potrebbe pervenire.

Indolo-N·MgX (C_8H_6N·MgX)	Prodotti ottenuti dai magnesilindoli con i cloruri d'acidi bibasici
Cl·CO·CO·Cl	Indile 1-1 (N-N-diindoile): N—CO—CO—N. Prismi incolori, brillanti; p. di fus. 218-220°.
	Indile 2-2 (α-α-diindoile): —CO·CO—C, NH NH. Prismi tabulari, leggerm. colorati in giallo; p. di fus. 273°. a) *Osazone*: $[C_6H_4(CH)(NH)C—C=N·NH·C_6H_5]_2$. Prismi tabulari, colorati in giallo; p. di fus. 170°, con decomposizione. b) *α-α diindilchinossalina*: C_6H_4(N=C)(N=C)… Prismi aghiformi: p. di fus. 15[illegible]
	Indile 3-3 (β-β-diindoile): —CO—CO—C, NH NH. Aghetti colorati in giallo; p. di fus. intorno a 235°, con decomposizione. a) *Osazone*: $[C_6H_4(CH)(NH)C—C=N·NH·C_6H_5]_2$. Prismi gialli; p. di fus. 158°, con decomposizione. b) *Diindilchinossalina*: C—C—C—C, C_6H_4 CH N N HC C_6H_4, NH NH

N—CO—CO—N

Scagliette giallastre; p. di fus. 320°.

N—CO—CO—N

Prismi; p. di fus. 200°.

CO·Cl
|
CH_2
|
CO·Cl

Diindoilmetano (β-β-diindil-β-β-propandione): —CO—CH_2—CO—

Minutissimi aghi, ammassati; p. di fus. in tub. chiuso 287°, con decomposizione.

a) 1-*fenil* 3-5-*diindilpirazolo*:

C_6H_4, CH, NH; N—N·C_6H_5; HC, C_6H_4, NH

Prismi gialli; p. di fus. 236°, con decomposizione.

c) 3-5-*diindilpirazolo*:

C_6H_4, CH, NH; N—NH; HC, C_6H_4, NH

Cristalli gialli; p. di fus. 229°, con decomposiz.

b) 3-5-*diindilisosazolo*:

C—C—CH=C—C; C_6H_4, CH, NH; N—O; HC, C_6H_4, NH

Prismi giallognoli; p. di fus. 219°, con decompos.

Cl
|
CO
|
$(CH_2)_2$
|
CO
|
Cl

Diindoiletano (β-β-diindil-butandione 1-4): CO—CH_2—CH_2—CO

Prismi incolori; p. di fus. 287°.

CH
CH
N · MgX

Prodotti ottenuti dai magnesilindoli con i cloruri d'acidi bibasici

Cl · CO · CO · Cl

Indile 1-1 (N-N-diindoile):

H- H-
-H H-
N——CO – CO——N

Prismi incolori, brillanti; p. di fus. 218-220°.

Indile 2-2 (α-α-diindoile):

H H
–CO · CO—C
NH NH

Prismi tabulari, leggerm. colorati in giallo; p. di fus. 273°.

a) *Osazone*: $\left[C_6H_4 \langle CH, NH \rangle C—C{=}N · NH · C_6H_5 \right]_2$

Prismi tabulari, colorati in giallo; p. di fus. 170°, con decomposizione.

b) α-α *diindilchinossalina*:

CH
C ⟨ ⟩ C_6H_4
N=C NH
C_6H_4 ⟨ | CH
N=C
C ⟨ ⟩ C_6H_4
NH

Prismi aghiformi; p. di fus. 154°.

Indile 3-3 (β-β-diindoile):

—CO—CO—C
-H H-
NH NH

Aghetti colorati in giallo; p. di fus. intorno a 235°, con decomposizione.

a) *Osazone*: $\left[C—C{=}N · NH · C_6H_5 ;\ C_6H_4 \langle NH \rangle CH \right]_2$

Prismi gialli; p. di fus. 158°, con decomposizione.

b) *Diindilchinossalina*:

C——C—C——C
C_6H_4 ⟨ ⟩ CH ‖N ‖N HC ⟨ ⟩ C_6H_4
NH NH

Prismi; p. di fus. 163°, con decomposizione.

Cl · CO · CO · Cl

Bis-indile 1-2 (bis-diindoile N-α):

-H H-
-CO-CO-
N—CO—CO—N

Scagliette giallastre; p. di fus. 320°.

Bis-indile 1-3 (bis-diindoile N-β):

-CO-CO-
-H H-
N—CO—CO—N

Prismi; p. di fus. 200°.

CO · Cl | CH_2 | CO · Cl

Diindoilmetano (β-β-diindil-β-β-propandione):

—CO – CH_2 — CO—
-H H-
NH NH

Minutissimi aghi, ammassati; p. di fus. in tub. chiuso 287°, con decomposizione.

a) 1-*fenil* 3-5-*diindilpirazolo*:

CH
C——C ⟨ ⟩ C——C
C_6H_4 ⟨ ⟩ CH ‖ | HC ⟨ ⟩ C_6H_4
NH N——N·C_6H_5 NH

Prismi gialli; p. di fus. 236°, con decomposizione.

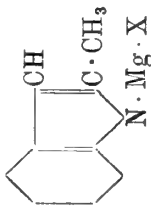
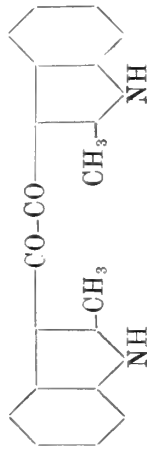
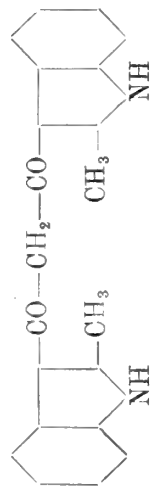
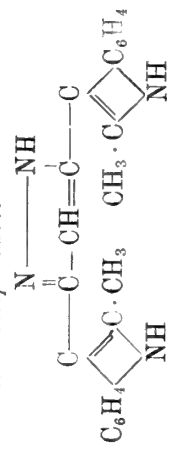
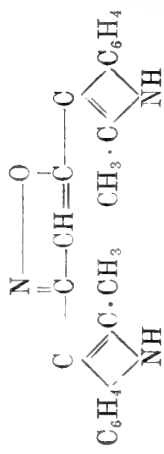
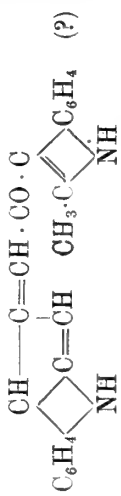
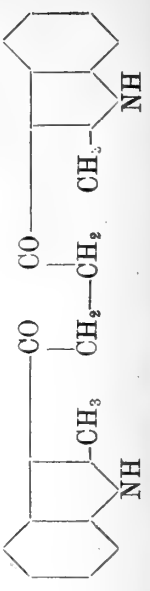
c) 3-5-*diindilpirazolo*:

CH
C——C ⟨ ⟩ C——C
C_6H_4 ⟨ ⟩ CH ‖ | HC ⟨ ⟩ C_6H_4
NH N——NH NH

Cristalli gialli p. di fus. 229°, con decomposiz.

b) 3-5-*diindilisosazolo*:

C——C – CH = C——C
C_6H_4 ⟨ ⟩ CH ‖N——O| HC ⟨ ⟩ C_6H_4
NH NH

Prismi giallognoli; p. di fus. 219°, con decompos.

Cl | CO | $(CH_2)_2$ | CO | Cl

Diindoiletano (β-β-diindil-butandione 1-4):

CO CO
-H CH_2—CH_2 H-
NH NH

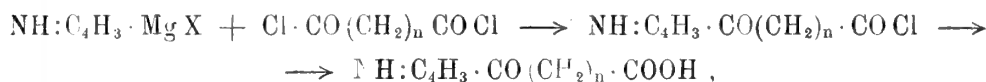
Prismi incolori; p. di fus. 287°.

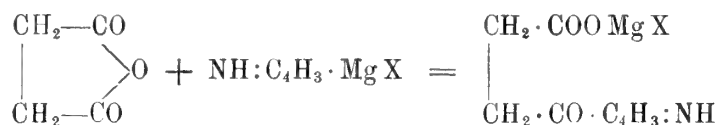
C_6H_4(CH)(C·CH_3)N·Mg·X	PRODOTTI OTTENUTI DAI MAGNESILINDOLI CON CLORURI D'ACIDI BIBASICI
Cl·CO·CO·Cl	METILCHETILE 3-3 (β β-dimetilchetoile): [structural formula: two 2-methylindol-3-yl groups joined by CO–CO] Prismi incolori; p. di fus. 256-257°, con decomp. Reazione con la fenilidrazina e con l'*o*-fenilendiammina.
Cl·CO·CH_2·CO Cl	DIMETILCHETOILMETANO (β-β-dimetilchetil-β-β propandione): [structural formula: two 2-methylindol-3-yl groups joined by —CO—CH_2—CO—] Tavolette romboedriche gialle; p. di fus. 219°. *a*) 1-*fenil*-3-5-*dimetilchetilpirazolo*: C–C–CH:C–C; C_6H_4(NH)C·CH_3; N—N·C_6H_5; CH_3·C(NH)C_6H_4 Prismi leggermente gialli: p. di fus. 192°. *b*) 3-5-*dimetilchetilisosazolo*: N—O; C —C—CH=C—C; C_6H_4(NH)C·CH_3 CH_3·C(NH)C_6H_4 Prismi giallognoli: p. di fus. 174°, con decomp. *c*) 3-5-*dimetilchetilpirazolo*: N—NH; C—C–CH=C—C; C_6H_4(NH)C·CH_3 CH_3·C(NH)C_6H_4 Piccoli aghi; p. di fus. 247°, con decomp. *d*) *Anidro-dimetilchetoilmetano*: CH—C=CH·CO·C; C_6H_4(NH)C=CH CH_3·C(NH)C_6H_4 (?) Prismi esagonali, giallognoli; p. di fus. 224°, con dec.
Cl·CO(CH_2)$_2$·CO·Cl	DIMETILCHETOILETANO (β-β-di-α-metilindolilbutandione 1-4): [structural formula: two 2-methylindol-3-yl groups joined by CO–CH_2—CH_2–CO] Minuti prismi; p. di fus. 297°, con decomposizione. Diossima; p. di fus. 267°.

XIII.

Acidi chetonici pirrolici.

Per potere arrivare agli acidi α-β- e γ-chetonici a nucleo pirrolico, mi ero proposto o di cambiare opportunamente i rapporti stechiometrici fra un cloruro di acido bibasico e il magnesilpirrolo, così da evitare la formazione degli α-β- e γ- dichetoni che ho già descritto,

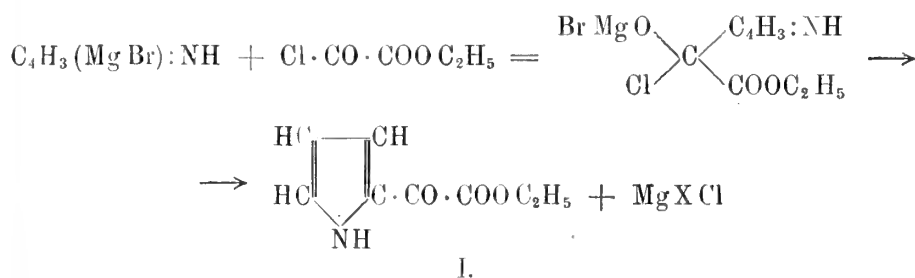
$$NH:C_4H_3 \cdot MgX + Cl \cdot CO(CH_2)_n COCl \longrightarrow NH:C_4H_3 \cdot CO(CH_2)_n \cdot COCl \longrightarrow$$
$$\longrightarrow NH:C_4H_3 \cdot CO(CH_2)_n \cdot COOH ,$$

ovvero di provocare un'addizione del magnesilpirrolo su una molecola di anidride ciclica [1]:

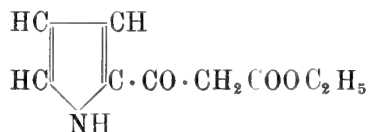
$$\begin{matrix} CH_2—CO \\ | \quad \rangle O \\ CH_2—CO \end{matrix} + NH:C_4H_3 \cdot MgX = \begin{matrix} CH_2 \cdot COO\,MgX \\ | \\ CH_2 \cdot CO \cdot C_4H_3:NH \end{matrix}$$

Al risultato desiderato sono invece pervenuto per una via molto più semplice e che fornisce rendimenti teorici.

Facendo agire il cloruro di etilossalile o di etilmalonile sul magnesilpirrolo, si ha, come con gli altri cloruri acidi, formazione prima di un prodotto di addizione, e poi, per eliminazione della parte minerale, l'ester dell'acido chetonico corrispondente:

$$C_4H_3(MgBr):NH + Cl \cdot CO \cdot COOC_2H_5 = \begin{matrix} BrMgO \\ Cl \end{matrix} \rangle C \langle \begin{matrix} C_4H_3:NH \\ COOC_2H_5 \end{matrix} \longrightarrow$$

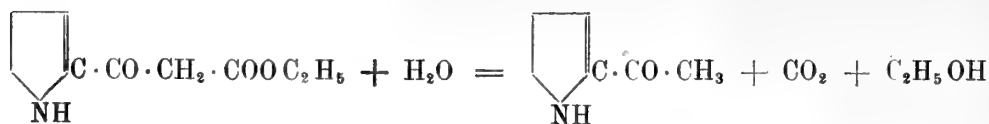
$$\longrightarrow \begin{matrix} HC——CH \\ HC \quad C \cdot CO \cdot COOC_2H_5 \\ NH \end{matrix} + MgXCl$$

I.

In questo modo ho ottenuto l'ester etilico dell'acido pirrilgliossilico (I) e l'ester del β-chetopropanoico od acido pirroilacetico:

$$\begin{matrix} HC——CH \\ HC \quad C \cdot CO \cdot CH_2COOC_2H_5 \\ NH \end{matrix}$$

Fra le reazioni atte a dimostrare la costituzione di quest'ultimo, ricordo l'azione degli alcali diluiti. Trattato a caldo, si scinde nettamente in α-pirrilmetilchetone, alcool

[1] B. Oddo, *Rend. del R. Istit. Lombardo di sc. e lett.*, II, vol. 44°, pag. 84 (1911); B. Oddo e C. Dainotti, *G.* *42*, I, 716 (1912).

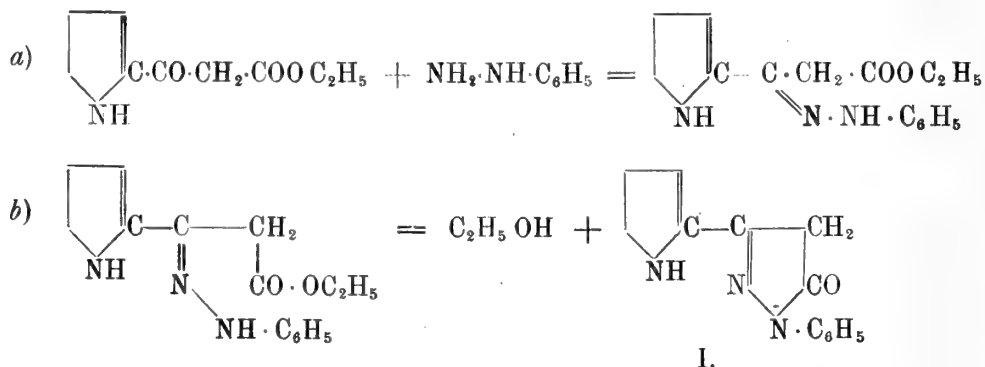
ed anidride carbonica:

$$C_4H_3NH \cdot C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot COOC_2H_5 + H_2O = C_4H_3NH \cdot C \cdot CO \cdot CH_3 + CO_2 + C_2H_5OH$$

Analoga e completa decomposizione subisce l'acido pirroilacetico libero, quando è portato al p. di fus. che è di 95°; messo a bollire invece con solventi a basso p. di eboll., non si decompone se non molto lentamente. Se si tratta poi la soluzione acquosa dell'etere con nitrato di argento e successivamente con una goccia d'ammoniaca, si ottiene un precipitato bianco solubile in eccesso di ammoniaca, ciò che conferma l'attacco della catena al carbonio del nucleo pirrolico, $C_4H_3(CO \cdot CH_2 \cdot COOC_2H_5):NAg$, mentre come acido β-chetonico, capace di assumere la forma enolica, dà, in soluzione alcoolica, con cloruro ferrico, colorazione verde.

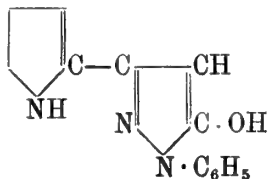
In soluzione alcoolica reagisce con la fenilidrazina: si ottiene il pirrilfenilpirazolone, in seguito alla reazione che, analogamente a quanto si ammette con gli altri eteri β-chetonici, si può esprimere nei seguenti due tempi:

a) $$C_4H_3NH \cdot C \cdot CO \cdot CH_2 \cdot COOC_2H_5 + NH_2 \cdot NH \cdot C_6H_5 = C_4H_3NH \cdot C - C(=N \cdot NH \cdot C_6H_5) \cdot CH_2 \cdot COOC_2H_5$$

b) $$C_4H_3NH \cdot C - C(=N \cdot NH \cdot C_6H_5) - CH_2 - CO \cdot OC_2H_5 = C_2H_5OH + C_4H_3NH \cdot C - C{<}\genfrac{}{}{0pt}{}{CH_2 - CO}{N - N \cdot C_6H_5}$$

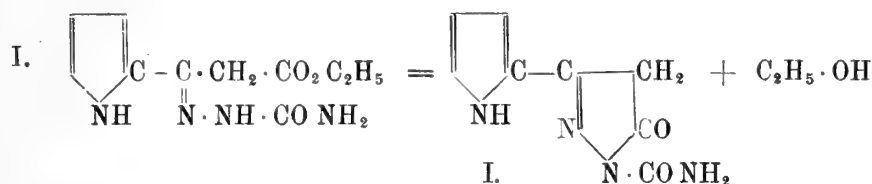
I.

Avviene cioè prima la formazione del fenilidrazone, che poi dà la chiusura pirazolonica per eliminazione di una molecola di alcool.

La soluzione alcoolica del pirrilfenilpirazolone, per aggiunta di un cristallino di nitrito sodico e poi di qualche goccia di acido cloridrico diluito, acquista una colorazione rosso-granata, che con gli alcali diventa gialla, e ritorna rossa per acidificazione. È noto che questa reazione serve a caratterizzare i pirazoloni. In tali condizioni si formano dei derivati nitrosati, diversamente colorati, per quanto il più delle volte colorati in bleu. Con cloruro ferrico la soluzione alcoolica dà pure una colorazione rossa, ma con viraggio al giallo. Il pirrilfenilpirazolone può quindi assumere la forma enolica tautomera della (I):

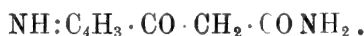
$$C_4H_3NH \cdot C - C{<}\genfrac{}{}{0pt}{}{CH = C \cdot OH}{N - N \cdot C_6H_5}$$

Eseguendo la reazione della pirazolima, la soluzione solforica del prodotto di reazione dà: con *nitrito sodico*, in soluz. molto diluita, colorazione rosso-viola; con ***bicromato potassico***, colorazione rosso-caffè; con *cloruro ferrico*, colorazione rosso-sangue chiaro.

L'etere dell'acido pirroilacetico reagisce meno facilmente con la semicarbazide; la reazione, in questo caso, si limita soltanto al primo tempo, cioè alla formazione del semicarbazone (I). Ho ottenuto però assieme una piccola quantità di un altro prodotto e non è improbabile che sia costituito dal corrispondente composto pirazolonico, il 3-pirrilpirazolone-1-carbammide (II):

$$\text{I.}\quad \underset{NH}{C_4H_3}>C-\underset{\|}{C}\cdot CH_2\cdot CO_2C_2H_5 \;(\underset{N\cdot NH\cdot CONH_2}{}) = \underset{NH}{C_4H_3}>C-C\overset{CH_2}{\frown}\underset{N\cdot CONH_2}{N\;\;CO} + C_2H_5\cdot OH$$

I.

È degno di nota il fatto che, fra gli eteri degli acidi β-chetonici, l'etere acetilacetico con la semicarbazide si comporta allo stesso modo.

Con ammoniaca, in soluzione nell'alcool assoluto, operando in tubi chiusi, l'etere dell'acido pirroilacetico si trasforma nell'ammide corrispondente, la pirriletanammide:

$$NH:C_4H_3\cdot CO\cdot CH_2\cdot CONH_2 .$$

In quanto al primo termine (l'acido pirrilgliossilico), è da ricordare che fu ottenuto la prima volta da Ciamician e Dennstedt [1] (il suo etere etilico non era ancora noto) ossidando con permanganato di potassio lo pseudoacetilpirrolo. In seguito io ebbi a constatare, come si è visto nelle pagine precedenti, che si forma nell'ossidazione di tutti gli alchilpirrilchetoni, come pure in quella del dipirroile. I rendimenti però con tali processi sono molto scarsi. Con l'uso del magnesilpirrolo si ottiene fino al 91 % di etere, calcolato sul pirrolo impiegato.

Etere etilico dell'acido pirrilgliossilico: $C_4H_3(CO\cdot CO_2\cdot C_2H_5):NH$.

L'etere, purificandolo dall'acqua bollente, forma cristalli tabulari fondenti a 44°,5. I cristalli appartengono, con ogni probabilità, al sistema rombico e sono costituiti da un pinacoide (010), un prisma (100) ed una bipiramide. L'estensione ottica sulle facce pinacoidali è parallela; dalle stesse facce esce normalmente la bisettrice acuta. Doppia rifrazione estremamente energica e negativa; sfaldatura perfetta secondo le facce pinacoidali [2].

Con acido cloridrico concentrato l'etere predetto dà, a freddo, una soluzione giallo-paglierina; col riscaldamento si forma subito una bella colorazione rosso-carminio.

L'acido libero, purificato dal benzolo, si deposita in aggregati cristallini di aghi sottili o lamelle, appartenenti con ogni probabilità al sistema monoclino, colorati in giallo, che fondono, con decomposizione, a 113°. Riscaldandolo con acido cloridrico concentrato, si scioglie, con colorazione rosso-carminio intensa. Alcalinizzando con idrato alcalino, la colorazione passa al giallo-verdastro e ridiventa rossa per nuova acidificazione.

La soluzione acquosa dell'acido, trattata con una soluzione di nitrato di Ag, fornisce un precipitato bianco che, purificato dall'acqua bollente, cristallizza in aghi incolori; è il sale di argento.

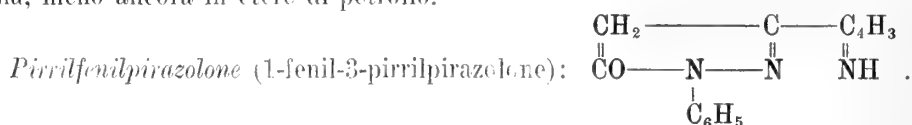
(1) *G. 13*, 458 (1883).

(2) Devo le suddette notizie alla cortesia della signorina dott. Piera Marangoni.

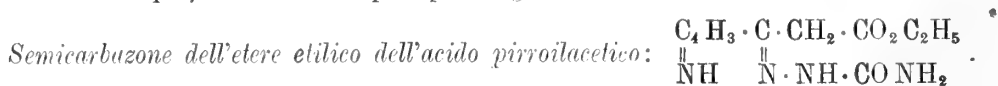
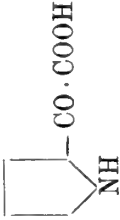
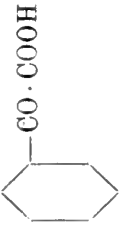
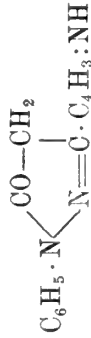
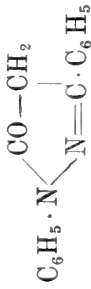
Etere etilico dell'acido pirroilacetico: $C_4H_3(CO \cdot CH_2 \cdot CO_2C_2H_5):NH$.

Cristallizzato dalla ligroina, riscaldando a b. m., si ottiene in lunghi fili aggruppati fra di loro, che ricordano la lana di vetro. Sono colorati in giallo canarino e fondono a 71°. L'etere etilico dell'acido pirroilacetico è anche abbastanza solubile, a freddo, nell'acqua. La sua soluzione acquosa, trattata con nitrato d'argento e poi con ammoniaca dà un precipitato bianco, solubile in eccesso di reattivo; la soluzione alcoolica con cloruro ferrico si colora in verde. Trattato a caldo anche con gli alcali diluiti, si scinde nettamente in metilpirrilchetone, alcool ed anidride carbonica, secondo l'equazione già riportata. L'acido libero si ottiene puro, nelle migliori condizioni, sciogliendolo ad una temperatura di circa 45°, in poco benzolo; alla soluzione benzenica filtrata si aggiunge dell'etere di petrolio sino ad intorbidamento, e poi si riscalda di nuovo; in questo modo si separano, già a caldo, dei begli aghi bianchi, sottili, alcuni molto lunghi, che, lasciati all'aria, diventano un po' giallognoli: fondono a 95°, con rapido sviluppo di anidride carbonica; sono solubili nell'alcool, nel benzolo e nell'etere etilico, meno in ligroina, meno ancora in etere di petrolio.

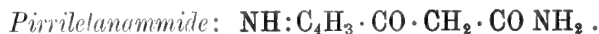
Pirrilfenilpirazolone (1-fenil-3-pirrilpirazolone):

$$\begin{array}{llll} CH_2 & \text{———} & C & \text{—} C_4H_3 \\ \| & & \| & \quad \| \\ CO & \text{—} N \text{—} & N & \quad NH \\ & \;| & & \\ & C_6H_5 & & \end{array}.$$

Sciolto in etere acetico, agitato per qualche tempo con carbone animale e poi versato, previa filtrazione, su ligroina, o, meglio, etere di petrolio, si presenta bianco, leggermente roseo, a p. di fus. 193°. È solubile, oltre che in alcool, anche in benzolo ed etere etilico, poco in ligroina, meno ancora in etere di petrolio; si scioglie a freddo in acido solforico concentrato, impartendo alla soluzione colore rosso-granata. Con acido nitrico concentrato reagisce vivamente, ed il liquido si colora in rosso-sangue; diluendo con acqua, si ottiene un precipitato gelatinoso colorato in rosso-scuro.

Semicarbazone dell'etere etilico dell'acido pirroilacetico:

$$\begin{array}{lll} C_4H_3 \cdot & C \cdot CH_2 \cdot CO_2C_2H_5 \\ \| & \| \\ NH & N \cdot NH \cdot CONH_2 \end{array}.$$

Cristallizzato da ligroina, riscaldando a b. m., si ottiene in aghi colorati in giallo, a p. di fusione di 90°.

Che sia un semicarbazone invece di un derivato ammidato, oltre che dai dati di analisi, risulta dal comportamento seguente: Aggiungendo alla soluzione alcoolica del prodotto qualche cristallo di nitrito sodico e poi acido cloridrico diluito, non si ottiene colorazione degna di nota. La soluzione acquista solo una tinta leggermente più marcata di prima. Anche con cloruro ferrico la soluzione alcoolica non dà reazione sensibile. Con ac. nitrico concentrato, il prodotto secco fornisce soluzione colorata in rosso-bruno; diluendo con acqua, non si ha precipitato e la soluzione presenta una tinta appena giallognola.

Pirriletanammide: $NH:C_4H_3 \cdot CO \cdot CH_2 \cdot CONH_2$.

Purificata dall'alcool acquoso in presenza di carbone animale, si presenta come polvere microcristallina, bianco-madreperlacea, p. di fus. 184°, facilmente solubile nell'alcool; poco in etere etilico, benzolo, ligroina; meno in etere di petrolio.

A mostrare meglio, per ultimo, come, anche in questo campo degli acidi chetonici, il magnesilderivato riesca ad accomunare la serie pirrolica con quella benzenica, riporto nel seguente specchietto i rispettivi prodotti analoghi:

	P. di fus.		P. di fus.
Acido pirroilformico (pirrilgliossilico): (anello pirrolico) — CO · COOH NH	113° con decomp.	*Acido benzoilformico* (fenilgliossilioo): (anello benzenico) — CO · COOH	65-66°
Etere etilico: $NH:C_4H_3\cdot CO\cdot CO_2\,C_2H_5$	44°,5	*Etere etilico:* $C_6H_5\cdot CO\cdot CO_2\,C_2H_5$	(p. e.) 256-257°
Acido pirroilacetico: $NH:C_4H_3\cdot CO\cdot CH_2\cdot COOH$	95° con svil. di CO_2	*Acido benzoilacetico:* $C_6H_5\cdot CO\cdot CH_2\cdot COOH$	103-104° con svil. di CO_2
Etere etilico: $NH:C_4H_3\cdot CO\cdot CH_2\cdot CO_2\,C_2H_5$	71°	*Etere etilico:* $C_6H_5\cdot CO\cdot CH_2\cdot CO_2\,C_2H_5$	147-149° a 11 mm.
Pirriletanammide: $NH:C_4H_3\cdot CO\cdot CH_2\cdot CO\,NH_2$	184°	*Feniletanammide:* $C_6H_5\cdot CO\cdot CH_2\cdot CO\cdot NH_2$	111-113°
1-*fenil*-3-*pirrilpirazolone* (5): $C_6H_5\cdot N\langle$ $CO-CH_2$ / $N=C\cdot C_4H_3:NH$	193°	1-3-*difenilpirazolone* (5): $C_6H_5\cdot N\langle$ $CO-CH_2$ / $N=C\cdot C_6H_5$	137°
Semicarbazone: $C_4H_3\cdot C\cdot CH_2\cdot CO_2\,C_2H_5$ $\Vert$ (NH) $\Vert$ ($N\cdot NH\cdot CO\,NH_2$)	90°	*Semicarbazone:* $C_6H_5\cdot C\cdot CH_2\cdot CO_2\,C_2H_5$ $\Vert$ $N\cdot NH\cdot CO\,NH_2$	—

XIV.

Conclusione

Riferendoci alla serie di sintesi che il magnesilpirrolo (assieme coi magnesilderivati dei suoi omologhi e degli indoli) ha finora permesso di ottenere, non si può disconoscere l'interesse che esso composto ha già acquistato.

Sono reazioni di sostituzione e di addizione al carbonio, alle quali dà per lo più luogo, che gli conferiscono una incontestata superiorità non solo sul pirrolato di potassio, che fornisce derivati all'azoto, ma anche su altre forme che dirò ambienti, finora escogitate, in via di rendere sempre più conveniente la messa in opera di una molecola tanto semplice quanto sensibile, com'è quella del pirrolo.

L'impulso della scienza alla pratica si ripercuote sempre come per naturale riflesso da questa a quella; e corpi, dapprima ritenuti inutilizzabili, non hanno tardato a valorizzarsi; come pure sostanze, dapprima rare o molto costose, sono diventate poi comuni ed abbondanti.

Ma per i composti pirrolici v'ha ancora di più: essi li troviamo anche in natura, e la loro importanza biochimica, incominciata a mostrarsi con le classiche ricerche di Baeyer sul bleu d'indaco (1866-1870), essendosi trovato che la sostanza madre di questo colore naturale era costituita da due anelli condensati, uno pirrolico e l'altro benzenico, solo in questi ultimi anni ha assunto una nota veramente superiore. E fu anche merito di Giacomo Ciamician, e di alcuni suoi allievi, perchè, essendosi potuto chiarire, nel frattempo, il caratteristico comportamento dei corpi pirrolici, venivano a conoscersi le modalità di studio e di riconoscimento di quelli provenienti, ora dalla separazione di prodotti specifici di certe piante (come l'igrina delle foglie di coca, la nicotina ed i più importanti alcaloidi della serie dell'atropina), ora dalla disintegrazione delle sostanze albuminoidee, come l'acido α.pirrolidincarbonico, ovvero ancora dalla disintegrazione delle due fucine naturali: l'emoglobina e la clorofilla.

La chimica del pirrolo non manca quindi di larghi orizzonti; essa, basata ancora oggi, nei riguardi di questi ultimi argomenti, principalmente su demolizioni, dovrà pure mettersi anch'essa sulla via delle ricostruzioni. Il magnesilpirrolo, anche in questo senso, ha cominciato a portare il suo contributo. Lo affermano le ricerche già eseguite per arrivare alla sintesi dell'igrina, quelle sulla sintesi degli emopirroli, la facile formazione dei neri di pirrolo. Lo affermano le analogie che si sono volute riscontrare fra l'azione sintetizzante del magnesilpirrolo e quella della clorofilla [1], poi ancora le ricerche dirette alla preparazione dei ferropirroli [2], e quelle sull'influenza che il nucleo pirrolico esercita sulla formazione del pigmento clorofilliano [3], i cui risultati, mentre si accordano con

[1] Willstätter e Forsen, *A. 396*, 180 (1913).

[2] B. Oddo, *G. 44*, II, 268 (1914).

[3] G. Pollacci e B. Oddo, *R. A. L. 24*, I, 37, (1915); *G. 45*, II, 197 (1915); B. Oddo e G. Pollacci, *G. 50*, I, 54 (1920).

quelli ottenuti successivamente [1] nella somministrazione alle piante di acido dimetilpirroldicarbonico simmetrico e di acido α.pirrolcarbonico, inducono a credere che l'azione definita come catalizzante del ferro e del magnesio, rispettivamente nel ciclo di trasformazione del sangue venoso in arterioso, e nella trasformazione dell'acido carbonico in sostanze amidacee, debba considerarsi in stretto rapporto col pirrolo, prodotto non estraneo alla vita e di cui è nota la caratteristica mobilità dei suoi idrogeni metinici ed immidici, che ora gli conferiscono un carattere nettamente fenolico, ora lo rendono tale da formare sali come la pirrolidina.

(1) Ciamician e Ravenna, *G.* *51*, I, 220 (1921).

RIEPILOGO

DELLE PUBBLICAZIONI RIGUARDANTI IL MAGNESILINDOLO

In « Gazzetta chimica italiana ».

B. Oddo, *39*, I, 649 (1909).
B. Oddo, 40, II, 353 (1910).
B. Oddo, *41*, I, 221, 248 e 255 (1911).
B. Oddo e L. Sessa, *41*, I. 234 (1911).
B. Oddo, *42*, I, 346 e 361 (1912).
B. Oddo e C. Dainotti, *42*. I, 716 e 727 (1912).
B. Oddo ed A. Moschini, *42*, II, 244, 257 e 267 (1912)
B. Oddo, *43*, I, 385 (1913).
B. Oddo, *43*, II, 190 (1913).
B. Oddo e R. Mameli, *43*, II, 504 (1913).
B. Oddo, *44*, I. 482 e 706 (1914).
B. Oddo e R. Mameli, *44*, II, 162 (1914).
B. Oddo, *44*, II, 268 (1914).
G. Pollacci e B. Oddo, *45*, II, 197 (1915).
A. Angeli e A. Pieroni, *49*, I. 154 (1919).
B. Oddo e G. Pollacci, *50*, I, 54 (1920).
M. Giua e F. Cherchi, *50*, I, 362 (1920).
B. Oddo, *50*, II, 258 e 268 (1920).
L. Alessandri e G. Passerini, *51*, I, 262 (1921).
B. Oddo e R. Binaghi, *51*, II, 330 (1921).
B. Oddo e G. Sanna, *41*, II. 337 (1921).
G. Sanna, *52*, II, 165, 170 e 178 (1922).
G. Sanna, *53*, I, 189 (1923).

In « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei ».

N. Colacicchi e C. Bertoni, *21*, I, 653 (1912).
G. Plancher e T. Zambonini, *22*, II. 708 (1913).
L. Alessandri, *23*, II, 65 (1914).
G. Plancher e B. Tanzi, *23*, II, 412 (1914).
G Pollacci e B. Oddo, *24*, I, 37 (1915)
L. Alessandri, *24*, II, 194 (1915).

In « Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere »

B. Oddo, *44*, 84 e 210 (1911).

In « Archivio di farmacologia e scienze affini »

B. Oddo e A. Moschini, *14*, 245, 263 e 277 (1912).

In « Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft ».

B. Oddo, *43*, 1012 (1910).
E. Fischer e D. von Slyke, *42*, 3169 (1911).
L. Knorr e K. Hess, *45*, 263 (1912).
J. Zaleschi, *46*, 1687 (1913).
K. Hess, *46*, 3113 e 3125 (1913).
K. Hess e J. Wissing, *47*, 1416 (1914).

B. Oddo, *47*, 2427 (1914).
W. Tschelintsef e A Terentieff, *47*, 2647 e 2652 (1914).
W. Madelung e M. Tencer, *48*, 949 (1915).
K Hess, J. Wissing e A. Sucnier, *48*, 1865 (1915).
K. Hess e J. Wissing, *48*, 1884 (1915).
K. Hess, F. Merch e Cl. Mibrig, *48*, 1886 (1915).
P Karrer, *50*, 1499 (1917).

In « Liebig's Annalen der Chemie ».

R. Willstätter e L Forsen, *396*, 180 (1913).

In « Chemischen Zentrallblatt » (brevetti).

Farbenfabrik vorm. Friedr. Bayer e Co. Leverkusen c. Coln, a Rh. II, 1136 (1914).

In « Journal of the Chemical Society » (London)

A. H. Salway, DCV, 351 (1913).

In « Journal Soc. phys. chim. R. «

W. Tschelintsef ed A Terentieff, *46*, 1399 e 1405 (1914).
W. Tschelintsef e S. G. Karmanoff, *47*, 161 (1915).
W. Tschelintsef e D. K. Skvortsof, *47*, 170 (1915).
W. Tschelintsef, B. V. Tronof e A. C. Terentieff, *47*, 1211 (1915).
W. Tschelintsef, B. V. Tronof e B. I. Voskressensky, *47*, 1224 (1915).
W. Tschelintsef e B. V. Tronof, *47*, 1876 (1915.)

In « Bulletin de la Société chimique de France ».

V. Grignard, *13*, 9 (1913).

ALCUNI LIBRI DI TESTO E MONOGRAFIE

CHE TRATTANO DEL MAGNESILPIRROLO.

V. Richter's. — *Chemie der Kohlenstoffverbindungen oder organische Chemie*: elfte Auflage- « Neue bearbeitet von R. Anschutz und G. Schroetter» (Band 2°: *Carbocyclische und heterocyclische Verbindungen*). F. Cohen, Bonn (1913).

Ch. Moureu. — *Notions fondamentales de chimie organique.* Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, Paris (1913).

V. Meyer e P. Jacobson. — *Lehrbuch der organische Chemie* (zweiter Band: « Ciclische Verbindungen-Naturstoffe-Dritte teill. Eterociclische Verbindungen »). Verlag von Veit e C. Leipzig (1915).

G. Errera. — *Trattato di chimica organica*, vol. 2° (*Composti ciclici*). Remo Sandron, editore, Palermo (1922).

J. Schmidt. — *Jahrbuch der organischen Chemie.* Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft M. B. H. Stuttgart (1922).

R. Wolffenstein. — *Die Pflanzenalkaloide.* Verlag von J. Springer. Berlin (1922).

J. Schmidt. — *Jahrbuch der organischen Chemie* (« Die Forschungsergebnisse und Forstschritte in Jahren 1911, 1912, 1913 e 1914 »); J. Warner, Leipzig.

R. Willstätter ed A. Stoll. — *Untersuchungen über Chlorophill-Methoden und Ergebnisse*; Verlag von J. Springer, Berlin (1913).

Grignard. — *Les prix Nobel en 1912.* Stockolm, imprimerie royale P. A. Nordstedt e Soner (1913).

INDICE

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume I-XXXIII. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII.
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI.

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti delle Adunanze Solenni. Vol. I-III.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. Vol. I-IV.
» » » » » Boll. 1°-3°
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.

Annuario 1882-1924.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXIX.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-III.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia.
Indici degli Atti Accademici (in preparazione).

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1924

Notizie degli Scavi. Vol. XXI, in fascicoli trimestrali (1)	L.	120,00
Rendiconti scienze morali. Vol. XXXIII, idem (1, 2, 3)	»	54,00
Memorie, » » Vol. XVII, in fascicoli vari (1, 2, 3)		prezzi varî
Monumenti antichi. Vol. XXIX, puntata 1ª (1)	»	280,00
Rendiconti scienze fisiche, Vol. XXXIII, in fascicoli bimensili (1, 2, 3)	»	108,00
Memorie, » » Vol XIV, in fascicoli varî (1, 2, 3)		prezzi varî
Rendiconto adunanza solenne. Vol. III (fascicolo 10°) (1, 2, 3)	»	8,00
Annuario (1, 2, 3)	»	4,00

(1) In vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (4).
(2) » » » » » Maglione e Strini, Via Due Macelli 88, Roma (7).
(3) » » » l'Amministrazione dell'Accademia, Via della Lungara 10, Roma (29).

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXX 1923)

Serie quinta — Volume XIV — Fascicolo XII.

ANGELO ANGELI

LE ANALOGIE DI COMPORTAMENTO

FRA

ALCUNI DERIVATI DEL BENZOLO

ED I CORRISPONDENTI DERIVATI DELLA SERIE ALIFATICA

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Le analogie di comportamento fra alcuni derivati del benzolo ed i corrispondenti derivati della serie alifatica [1].

Memoria del Socio ANGELO ANGELI

presentata nella seduta del 13 aprile 1924.

Nella presente Memoria ho cercato di riassumere e coordinare le considerazioni ed i dati sperimentali, in gran parte dovuti ad altri autori, che in questi ultimi anni ho comunicato in diverse Note presentate a questa Accademia e che riguardano le notevoli analogie di comportamento che presentano alcuni derivati orto– e para–sostituiti del benzolo

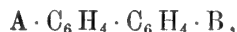
$$A \cdot C_6H_4 \cdot B$$

con quelli dei corrispondenti derivati della serie alifatica, nei quali cioè gli stessi sostituenti sono riuniti fra di loro:

$$A — B.$$

Come si vedrà negli esempî che seguono, *i due residui* A *e* B, *nei composti aromatici, possono reagire fra di loro ovvero con altre sostanze come se l'anello benzolico non esistesse.*

Lo stesso comportamento viene presentato anche da quei composti che contengono due differenti anelli aromatici direttamente riuniti fra di loro,

$$A \cdot C_6H_4 \cdot C_6H_4 \cdot B,$$

ovvero anche separati da determinate catene non sature, p. es.

$$A \cdot C_6H_4 \cdot CH:CH \cdot C_6H_4 \cdot B.$$

In alcuni casi la catena intermedia di atomi di carbonio può venire sostituita da due atomi di azoto, congiunti per doppio legame:

$$A \cdot C_6H_4 \cdot N:N \cdot C_6H_4 \cdot B.$$

Le catene sature di atomi di carbonio invece, come p. es. quelle contenute nei termini

$$A \cdot C_6H_4 \cdot CH_2 \cdot C_6H_4 \cdot B \qquad A \cdot C_6H_4 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot C_6H_4 \cdot B$$

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di studî superiori in Firenze.

da quanto finora ho potuto rilevare, interrompono ogni relazione fra i due sostituenti A e B.

Tali analogie non si limitano al comportamento chimico, ma si possono estendere anche ad alcune proprietà fisiche, come p. es. il colore: sembra che talune analogie sussistano anche nelle proprietà farmacologiche, ma in questo caso i dati sono troppo scarsi perchè manca una serie di ricerche sistematiche eseguite in questo senso.

Tutti questi fatti dimostrano che alcuni sistemi di catene di atomi di carbonio, costituite da anelli aromatici soltanto, ovvero da anelli aromatici e residui non saturi, si comportano come se possedessero una forma di conducibilità rispetto ai sostituenti situati in determinate posizioni, i quali in tal modo reagiscono come se fossero congiunti direttamente fra di loro; i residui saturi interposti agirebbero invece come isolatori. In questo senso si potrebbe forse intendere anche il fatto interessante, sul quale sopratutto il compianto I. Thiele ha richiamato l'attenzione, che i sistemi contenenti doppî legami coniugati,

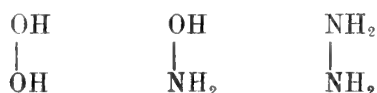
$$-CH=CH-CH=CH-$$

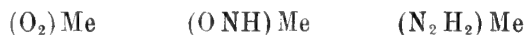
possono addizionare p. es. due atomi di idrogeno ovvero di alogeno ai carboni estremi.

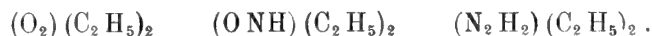
Queste considerazioni hanno avuto origine da alcune analogie che anni or sono [1] io ho posto in rilievo circa il comportamento chimico e le proprietà fisiche dei tre composti che si ottengono riunendo due a due i residui

$$-OH \qquad -NH_2 ,$$

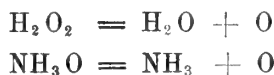
vale a dire acqua ossigenata, idrossilammina ed idrazina:

$$\begin{array}{ccc} OH & OH & NH_2 \\ | & | & | \\ OH & NH_2 & NH_2 \end{array}$$

Tutte e tre queste sostanze possono dare sali della forma (dove Me rappresenta un metallo bivalente)

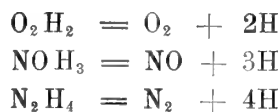
$$(O_2)Me \qquad (O\,NH)Me \qquad (N_2H_2)Me$$

e forniscono derivati alchilici:

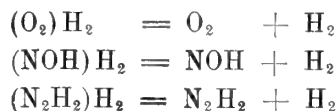
$$(O_2)(C_2H_5)_2 \qquad (O\,NH)(C_2H_5)_2 \qquad (N_2H_2)(C_2H_5)_2 .$$

Tutte e tre vengono decomposte dal nero di platino.

Acqua ossigenata ed idrossilammina possono cedere facilmente anche un atomo di ossigeno per determinare processi di ossidazione:

$$H_2O_2 = H_2O + O$$
$$NH_3O = NH_3 + O$$

[1] Rend. Lincei, *19* (1910), 2° sem., 94.

Nelle opportune condizioni, tutte e tre, per azione degli ossidanti, possono anche perdere tutto il loro idrogeno:

$$O_2H_2 = O_2 + 2H$$
$$NOH_3 = NO + 3H$$
$$N_2H_4 = N_2 + 4H$$

Di maggiore interesse sono però i prodotti che queste sostanze possono fornire quando si limiti l'ossidazione in modo che ciascheduna perda solamente due atomi di idrogeno:

$$(O_2)H_2 = O_2 + H_2$$
$$(NOH)H_2 = NOH + H_2$$
$$(N_2H_2)H_2 = N_2H_2 + H_2$$

Per l'acqua ossigenata, che contiene due soli atomi di idrogeno, evidentemente si cade nel caso prima considerato: si stabilisce un doppio legame fra i due atomi di ossigeno, che si pone in libertà.

Nel caso dell'idrossilammina invece si perviene al termine

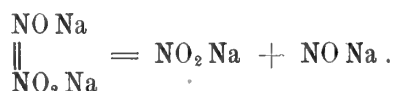
$$O{=}NH$$

che io ho chiamato nitrossile e che O. Baudisch chiama anche « Stickstoffsäure » (1) e che difficilmente si può tradurre in italiano, dato che il nome di acido azotico è sinonimo di acido nitrico.

Per ossidazione diretta dell'idrossilammina, nella maggior parte dei casi, si perviene ad un miscuglio di azoto, protossido e biossido di azoto, e vedremo dopo per quale ragione: ma giovandomi di un artificio ho potuto egualmente raggiungere lo scopo, come già a suo tempo ho avuto occasione di dimostrare. Facendo reagire infatti il nitrato di etile sopra l'idrossilammina in presenza di etilato sodico, sono pervenuto al sale sodico dell'acido nitroidrossilamminico

$$Na_2N_2O_3\,,$$

il quale può scindersi facilmente secondo l'eguaglianza

$$\begin{matrix} NONa \\ \| \\ NO_2Na \end{matrix} = NO_2Na + NONa\,.$$

Il nitrossile è instabilissimo e perciò finora non è stato possibile di isolarlo: tuttavia ne ho egualmente studiato il comportamento e le svariate reazioni che può subire; tali reazioni procedono, nella maggior parte dei casi, in modo quantitativo ed alcune hanno avuto importanti applicazioni.

Così trasforma le aldeidi negli acidi idrossammici; nel caso particolare dell'aldeide formica si ottiene acido formidrossammico:

$$H\cdot COH + NOH = H\cdot C(NOH)\cdot OH\,.$$

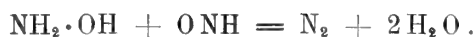
(1) Berichte, *54* (1921), 410.

Questa reazione è stata ingegnosamente applicata da O. Baudisch (1) per spiegare l'assimilazione dell'azoto dei nitrati da parte delle piante sotto l'influenza dei raggi luminosi; le esperienze di Baudisch sono state in seguito confermate da E. C. C. Baly (2) il quale ha concluso: *non vi ha dubbio che l'acido formidrossammico rappresenta la prima tappa nella fotosintesi dei composti azotati nelle piante.*

Il nitrossile può inoltre polimerizzarsi per dare acido iponitroso e successivamente protossido di azoto,

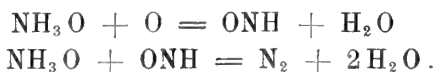
$$2NOH \longrightarrow HON{:}NOH \longrightarrow N{\vdots}N{:}O\,,$$

e decompone l'idrossilammina anche in soluzione acquosa diluitissima, con sviluppo quantitativo di azoto:

$$NH_2\cdot OH + ONH = N_2 + 2H_2O\,.$$

Ciò spiega come, sottoponendo l'idrossilammina all'azione dei soliti ossidanti, si pervenga ad un miscuglio di prodotti che variano col mezzo di ossidazione impiegato; e dimostra anche come la reazione che viene riferita in alcuni trattati (3),

$$2NH_3O + O = N_2 + 3H_2O\,,$$

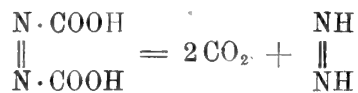
si debba invece considerare come la somma delle altre due:

$$NH_3O + O = ONH + H_2O$$
$$NH_3O + ONH = N_2 + 2H_2O\,.$$

Guidato da queste analogie, sono passato a considerare i prodotti di ossidazione dell'idrazina.

Il termine che dovrebbe formarsi in una prima fase, la diimmide, che corrisponderebbe al nitrossile

$$HN{=}NH \qquad O{=}NH\,,$$

non è stato possibile di isolarlo, perchè del pari instabilissimo; almeno finora non sono riuscito a trovare le necessarie condizioni di esperienza (4). Per questa ragione io ho preso in esame l'acido azodicarbonico; come ha trovato Thiele, esso perde subito anidride carbonica ma non dà origine alla diimmide,

$$\begin{matrix} N\cdot COOH \\ \| \\ N\cdot COOH \end{matrix} = 2CO_2 + \begin{matrix} NH \\ \| \\ NH \end{matrix}$$

(1) Berichte, *46* (1913), 115 e seg.; *Science* (New York), vol. *57* (1923), n. 1477, pag. 452.

(2) Journal Chem. Society (1922), pag. 1078.

(3) W. Ostwald, Grundlinien d. An. Chemie, 2a ed., pag. 358.

(4) È molto probabile, invece, che sia stabile sotto forma di sali, paragonabili in questo caso a quelli che forniscono acqua ossigenata ed acetilene:

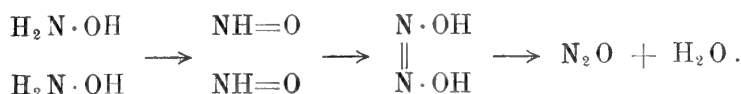
$$\begin{matrix} OH \\ | \\ OH \end{matrix} \qquad \begin{matrix} NH \\ \| \\ NH \end{matrix} \qquad \begin{matrix} CH \\ \| \! | \\ CH \end{matrix}$$

perchè questa subito si decompone in idrazina ed azoto:

$$2\,N_2H_2 = N_2H_4 + N_2\,.$$

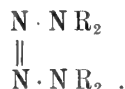
Ma io ho trovato che, effettuando la decomposizione del sale per mezzo di acido solforico diluito, assieme coi prodotti di scissione riscontrati da Thiele nel caso da lui studiato, si forma anche acido azotidrico.

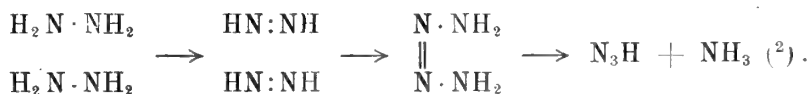
Questi fatti, a mio modo di vedere, non si possono spiegare se non ammettendo che l'ossidazione dell'idrazina proceda in modo analogo a quello dell'idrossilammina prima considerata:

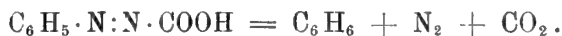
$$\begin{matrix} H_2N\cdot OH \\ H_2N\cdot OH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} NH{=}O \\ NH{=}O \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N\cdot OH \\ \| \\ N\cdot OH \end{matrix} \longrightarrow N_2O + H_2O\,.$$

Nel caso dell'idrazina, la diimmide, formatasi in una prima fase, si polimerizzerà per dare il prodotto

$$\begin{matrix} N\cdot NH_2 \\ \| \\ N\cdot NH_2 \end{matrix}$$

che corrisponde all'acido iponitroso, e dal quale derivano i tetrazoni di Emilio Fischer (¹):

$$\begin{matrix} N\cdot NR_2 \\ \| \\ N\cdot NR_2 \end{matrix}\,.$$

Il polimero, a sua volta, darà origine ad acido azotidrico:

$$\begin{matrix} H_2N\cdot NH_2 \\ H_2N\cdot NH_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} HN{:}NH \\ HN{:}NH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N\cdot NH_2 \\ \| \\ N\cdot NH_2 \end{matrix} \longrightarrow N_3H + NH_3 \;(^2)\,.$$

Come io ho trovato, in modo analogo si comportano i sali dell'acido fenilazocarbonico di Oscar Widman (³): anche in questo caso l'acido libero si decompone in gran parte secondo lo schema

$$C_6H_5\cdot N{:}N\cdot COOH = C_6H_6 + N_2 + CO_2\,.$$

(¹) Questa ipotesi è stata subito accettata dal prof. Otto Diels [Berichte, *46* (1913), 2002] il quale se ne è giovato per spiegare alcune interessanti reazioni da lui scoperte.

(²) Coordinando le esperienze eseguite da altri chimici, alcuni anni or sono [Rend. Lincei, *20* (1911), 1° sem., pag. 625] ho dimostrato che, sostituendo successivamente nell'ozono un atomo di ossigeno con un atomo di azoto, si perviene all'acido azotidrico. Questa trasformazione, nel modo più semplice, si può esprimere con gli schemi:

$$O_3 \longrightarrow NO_2 \longrightarrow N_2O \longrightarrow N_3H\,.$$

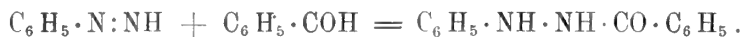
Fra ozono ed acido azotidrico sussistono pure rassomiglianze di comportamento: basti rammentare che, agendo sui composti contenenti legami multipli, il primo dà origine agli *ozonidi* ed il secondo ai *triazoli*.

(³) Berichte, *28* (1895), pag. 1927.

Se però i suoi sali si fanno reagire con una aldeide, la fenildiimmide che in una prima fase si libera,

$$C_6H_5 \cdot N:NH ,$$

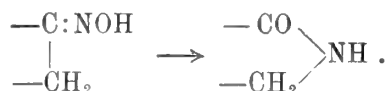
in modo analogo a quanto fa il nitrossile, si addiziona a quella con formazione di una idrazide, che corrisponde a sua volta all'acido idrossammico [1]:

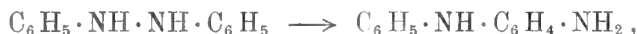
$$C_6H_5 \cdot N:NH + C_6H_5 \cdot COH = C_6H_5 \cdot NH \cdot NH \cdot CO \cdot C_6H_5 .$$

Accennerò infine ad un altro gruppo di reazioni che del pari stabiliscono una analogia di comportamento fra le tre sostanze in parola.

Baeyer ha trovato chè i chetoni, per azione dell'acido di Caro, forniscono perossidi; altri invece dànno lattoni che egli ammette derivino da perossidi formatisi in una prima fase:

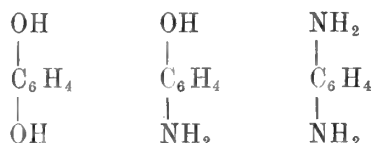
$$\begin{matrix} -CO \\ | \\ -CH_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -CO \\ -CH_2 \end{matrix}\!\!>O .$$

In questo caso, come si vede, *l'ossigeno si stacca dall'ossigeno* e la reazione corrisponde alla trasposizione di Beckmann che presentano le ossime, nella quale *l'ossigeno si stacca dall'azoto*:

$$\begin{matrix} -C:NOH \\ | \\ -CH_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -CO \\ -CH_2 \end{matrix}\!\!>NH .$$

I composti dell'idrazina non vennero ancora studiati in questo senso; mi limiterò quindi ad accennare alla trasformazione dell'idrazobenzolo in semidina,

$$C_6H_5 \cdot NH \cdot NH \cdot C_6H_5 \longrightarrow C_6H_5 \cdot NH \cdot C_6H_4 \cdot NH_2 ,$$

nella quale *l'azoto si stacca dall'azoto.*

Stabilite queste analogie, mi si è affacciato alla mente un altro gruppo di sostanze, della serie aromatica, nelle quali gli stessi residui $-OH$ ed $-NH_2$, invece di essere direttamente riuniti fra di loro, sono situati nelle posizioni orto e para dell'anello benzolico

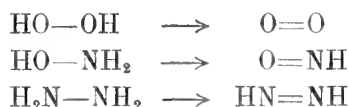
$$\begin{matrix} OH \\ | \\ C_6H_4 \\ | \\ OH \end{matrix} \qquad \begin{matrix} OH \\ | \\ C_6H_4 \\ | \\ NH_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} NH_2 \\ | \\ C_6H_4 \\ | \\ NH_2 \end{matrix}$$

e, prendendo in esame le reazioni che queste presentano, mi hanno subito colpito alcune somiglianze di comportamento che esse presentano con quelle prima considerate (acqua ossigenata, idrossilammina ed idrazina).

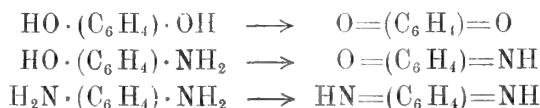
Nel caso dei derivati ortosostituiti, talora la rassomiglianza si estende anche ai caratteri fisici; così per i punti di fusione:

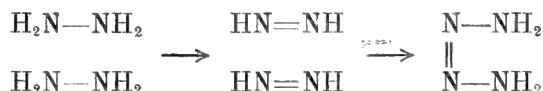
acqua ossigenata . . .	p. fus. 1°.4		pirocatechina . . .	p. fus. 104°
idrossilammina	» 33°		ortoamminofenolo	» 170°
idrazina	» —2°		ortofenilendiammina	» 102°

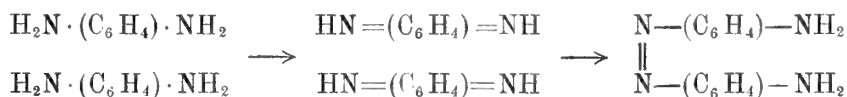
[1] Rend. Lincei, *26* (1917), 1° sem., pag. 95.

Le analogie chimiche più notevoli si riscontrano nei processi di ossidazione; come prima si è visto,

$$HO-OH \longrightarrow O=O$$
$$HO-NH_2 \longrightarrow O=NH$$
$$H_2N-NH_2 \longrightarrow HN=NH$$

e nello stesso modo i derivati aromatici dànno

$$HO\cdot(C_6H_4)\cdot OH \longrightarrow O=(C_6H_4)=O$$
$$HO\cdot(C_6H_4)\cdot NH_2 \longrightarrow O=(C_6H_4)=NH$$
$$H_2N\cdot(C_6H_4)\cdot NH_2 \longrightarrow HN=(C_6H_4)=NH$$

composti nei quali gli stessi residui od elementi sono separati dall'anello benzolico. La somiglianza di comportamento va più avanti ancora: prima ho fatto vedere come sia necessario ammettere che la formazione dell'acido azotidrico nella ossidazione dell'idrazina sia preceduta dalla formazione di un termine instabile

$$\begin{matrix} H_2N-NH_2 \\ H_2N-NH_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} HN=NH \\ HN=NH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N-NH_2 \\ \| \\ N-NH_2 \end{matrix}$$

e le belle ricerche di R. Willstätter e A. Pfannenstiel [1] hanno dimostrato che nella ossidazione della o-fenilendiammina si forma o-azoanilina

$$\begin{matrix} H_2N\cdot(C_6H_4)\cdot NH_2 \\ H_2N\cdot(C_6H_4)\cdot NH_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} HN=(C_6H_4)=NH \\ HN=(C_6H_4)=NH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N-(C_6H_4)-NH_2 \\ \| \\ N-(C_6H_4)-NH_2 \end{matrix}$$

nella quale gli stessi gruppi sono ancora separati dall'anello aromatico.

Accennerò ancora che i chinoni addizionano acido benzolsolfinico [2], e d'altra parte i composti

$$C_6H_5\cdot SO_2\cdot NH\cdot OH \qquad C_6H_5\cdot SO_2\cdot NH\cdot NH_2$$

si possono a loro volta considerare come prodotti di addizione dell'acido benzolsolfinico ai termini

$$HN=O \qquad HN=NH\,.$$

Premessi questi fatti e tenendo presenti altre reazioni che già conoscevo, ho subito compreso che si tratta di una regolarità di carattere molto generale, e perciò non mi è stato difficile desumere dalla letteratura una serie di altri esempî: nel fare questo, naturalmente, io non ho potuto sempre limitarmi a prendere in considerazione i dati da altri stabiliti; nella maggior parte dei casi, questi non rappresentano che fatti isolati e perciò mancanti di nesso fra di loro, e quindi spesso ho dovuto sottoporli ad attento esame per poterne ricavare le conseguenze che a me interessavano.

Le reazioni, che riporto nelle pagine seguenti, riguardano principalmente i composti azotati; in questo campo gli esempî sono più numerosi, le trasformazioni procedono in modo più netto e d'altra parte riesce anche più agevole fare i confronti con quelle che eventualmente presentano i corrispondenti derivati della serie alifatica.

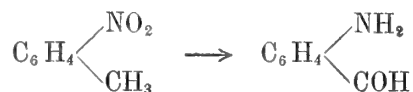
[1] Berichte, *38* (1905), 2350.

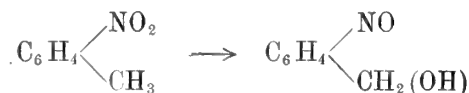
[2] O. Hinsberg, Berichte, *27* (1894), 3259 e seg.

Migrazione di atomi di ossigeno dall'azoto al carbonio.

a) *Nitroderivati aromatici.* — Un gruppo di trasformazioni, le quali pongono bene in evidenza il nesso che esiste fra due sostituenti in orto ovvero in para, è costituito da quelle reazioni, in seguito alle quali uno, ovvero entrambi gli atomi di ossigeno del gruppo nitrico migrano ad un atomo di carbonio esterno all'anello benzolico. Nella maggior parte dei casi si tratta di processi correlativi di ossidazione e riduzione che molto rassomigliano a quelli che si compiono nelle cosiddette trasposizioni pinacoliniche [1].

Io mi limiterò qui ad accennare alla formazione della paramminobenzaldeide per azione dei solfuri sopra il paranitrotoluolo:

$$C_6H_4\begin{cases}NO_2\\CH_3\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}NH_2\\COH\end{cases}$$

quella dell'alcool nitrosobenzilico dall'ortonitrotoluolo [2]:

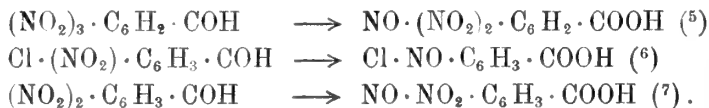
$$C_6H_4\begin{cases}NO_2\\CH_3\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}NO\\CH_2(OH)\end{cases}$$

e quella dell'acido antranilico dall'ortonitrotoluolo, per mezzo degli alcali, descritta da Preuss e Binz [3]

$$C_6H_4\begin{cases}NO_2\\CH_3\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}NH_2\\COOH\end{cases}$$

Vi sono inoltre quelle più numerose effettuate per mezzo della luce, quali la trasformazione dell'ortonitrobenzaldeide in acido nitrosobenzoico,

$$C_6H_4\begin{cases}NO_2\\COH\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}NO\\COOH\end{cases}$$

scoperta da Ciamician e Silber, e le altre analoghe studiate in seguito [4]:

$$(NO_2)_3\cdot C_6H_2\cdot COH \longrightarrow NO\cdot(NO_2)_2\cdot C_6H_2\cdot COOH \ [5]$$
$$Cl\cdot(NO_2)\cdot C_6H_3\cdot COH \longrightarrow Cl\cdot NO\cdot C_6H_3\cdot COOH \ [6]$$
$$(NO_2)_2\cdot C_6H_3\cdot COH \longrightarrow NO\cdot NO_2\cdot C_6H_3\cdot COOH \ [7].$$

(1) Ancora parecchi anni or sono (Rend. Lincei (1908), *17*, 1° sem., pag. 311) io ho dimostrato che si possono fare rientrare in questo gruppo di reazioni le trasposizioni di Hofmann (ammidi), di Beckmann (ossime), di Lossen (acidi idrossammici), di Curtius (azidi), di Wallach (azossicomposti), quella dell'idrazobenzolo in semidina ecc., nonchè molte di quelle che si compiono nei processi fermentativi.

(2) Chem. Centralblatt (1908), II, 210.

(3) Zeit. angew. Chemie (1900), 385.

(4) Questa isomerizzazione si può effettuare anche *per via chimica*, impiegando piccolissime quantità di cianuro ammonico [G. Heller, Journ. für prak. Chemie, *106* (1923), pag. 1].

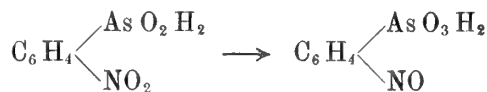
(5) F. Sachs e E. Sichel, Berichte, *36* (1903), 962.

(6) » » » *36* (1903), 3302.

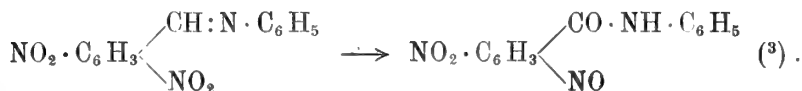
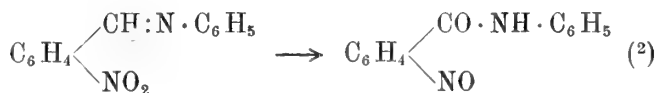
(7) P. Cohn e P. Friedländer, Berichte, *35* (1902), 1265.

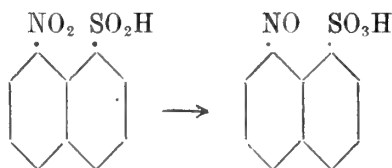
Senza dubbio, l'imbrunimento che subisce il trinitrotoluolo per azione della luce è in parte dovuto a trasformazioni di questo genere.

Lo stesso fanno alcuni composti arsenicali ortosostituiti, come p. es. ha trovato Karrer ([1]):

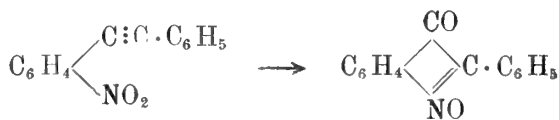
$$C_6H_4\begin{cases}AsO_2H_2\\NO_2\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}AsO_3H_2\\NO\end{cases}$$

e nell'identico modo si comportano i derivati anilici delle aldeidi ortonitrobenzoiche:

$$C_6H_4\begin{cases}CH:N\cdot C_6H_5\\NO_2\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}CO\cdot NH\cdot C_6H_5\\NO\end{cases} \quad ([2])$$

$$NO_2\cdot C_6H_3\begin{cases}CH:N\cdot C_6H_5\\NO_2\end{cases} \longrightarrow NO_2\cdot C_6H_3\begin{cases}CO\cdot NH\cdot C_6H_5\\NO\end{cases} \quad ([3]).$$

Anche due sostituenti in posizione « peri » della naftalina, che in molte reazioni si comportano come se fossero situati in posizione orto, possono subire una analoga trasposizione ([4]):

NO_2 SO_2H (naftalina) → NO SO_3H (naftalina)

Nello stesso modo sono senza dubbio da intendersi anche le reazioni ([5])

$$C_6H_4\begin{cases}C:C\cdot C_6H_5\\NO_2\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}CO\\NO\end{cases}C\cdot C_6H_5$$

$$CN\cdot C_6H_3\begin{cases}CH:CH\cdot C_6H_5\\NO_2\end{cases} \longrightarrow CN\cdot C_6H_3\begin{cases}CO\\NO\end{cases}C\cdot C_6H_5 \quad ([6]).$$

A questi esempî aggiungerò i seguenti, i quali sono caratterizzati per la facilità con cui si compiono.

([1]) Berichte, *47* (1914), 1783

([2]) F. Sachs e R. Kempf, Berichte, *37* (1904), 2704.

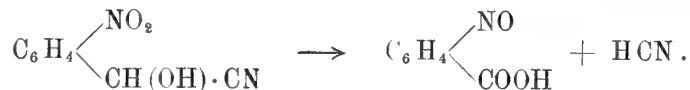
([3]) F. Sachs, Berichte, *36* (1903), 4373.

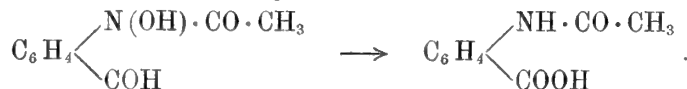
([4]) A. Reissert, Berichte, *55* (1922), 863.

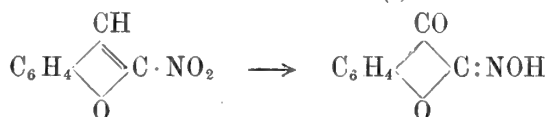
([5]) P. Pfeiffer, Berichte, *45* (1912), 1819. A questo proposito deve rammentarsi che la struttura di questi isatogeni, scoperti da A. von Baeyer, venne stabilita da me ancora nell'anno 1907 (Rend. Lincei, *15*, 2° sem., pag. 761) e non trovo perciò giusto quanto asseriscono G. Heller e W. Boessneck [Berichte, *55* (1922), 474] che queste sostanze sono state scoperte da P. Pfeiffer [Annalen, *411* (1916), 72) il quale avrebbe altresì fissata la loro struttura, da me invece proposta per il primo.

([6]) S. Stoermer e H. Oehlert, Berichte, *55* (1922), 1236.

G. Heller [1] ha trovato che basta sciogliere in ammoniaca l'orto-nitrile perchè si compia la reazione:

$$C_6H_4\langle{}^{NO_2}_{CH(OH)\cdot CN} \longrightarrow C_6H_4\langle{}^{NO}_{COOH} + HCN.$$

D'altra parte E. Bamberger [2] ha osservato che è sufficiente un lieve riscaldamento perchè l'ortoderivato subisca la trasposizione:

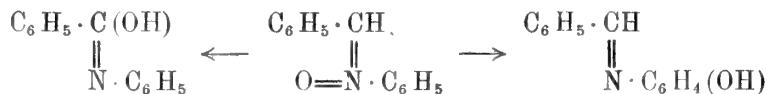
$$C_6H_4\langle{}^{N(OH)\cdot CO\cdot CH_3}_{COH} \longrightarrow C_6H_4\langle{}^{NH\cdot CO\cdot CH_3}_{COOH}.$$

Il nitrocumarone si trasforma in una ossima [3]

$$C_6H_4\langle{}^{CH}_{O}\rangle C\cdot NO_2 \longrightarrow C_6H_4\langle{}^{CO}_{O}\rangle C:NOH$$

e l'ortoazide fornisce una ammide [4]

$$C_6H_4\langle{}^{CH:NOH}_{N_3} \longrightarrow C_6H_4\langle{}^{CO\cdot NH_2}_{N_3}.$$

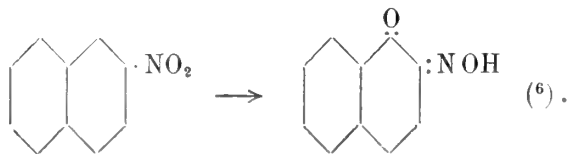
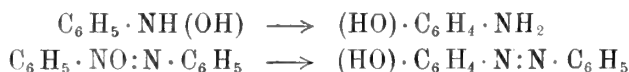
Quest'ultima reazione, secondo E. Bamberger che l'ha scoperta, rappresenta il solo esempio di una tale trasposizione che si compia in mezzo alcalino; rassomiglia perciò alle analoghe che subiscono i nitrotoluoli, alle quali prima ho accennato.

Oltre a quelle che vengono presentate dal nitrometano, ed alle quali accennerò quanto prima, queste migrazioni dell'atomo di ossigeno ricordano, come si vede, anche le seguenti:

$$\begin{matrix} C_6H_5\cdot C(OH) \\ \| \\ N\cdot C_6H_5 \end{matrix} \longleftarrow \begin{matrix} C_6H_5\cdot CH \\ \| \\ O{=}N\cdot C_6H_5 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_6H_5\cdot CH \\ \| \\ N\cdot C_6H_4(OH) \end{matrix}$$

Vi hanno infine reazioni, in seguito alle quali un atomo di ossigeno può migrare dall'azoto al carbonio di un anello aromatico; mi limiterò ad accennare alle seguenti che vengono presentate dalle idrossilammine, azossicomposti [5] e nitrofenoli:

$$C_6H_5\cdot NH(OH) \longrightarrow (HO)\cdot C_6H_4\cdot NH_2$$

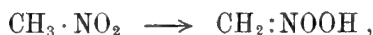
$$C_6H_5\cdot NO:N\cdot C_6H_5 \longrightarrow (HO)\cdot C_6H_4\cdot N:N\cdot C_6H_5$$

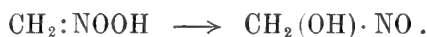
$$C_{10}H_7\cdot NO_2 \longrightarrow C_{10}H_6(:O)(:NOH) \quad [6].$$

(1) Berichte, *39* (1906), 2355.
(2) Berichte, *51* (1918), 615.
(3) R. Stoermer e B. Kahlert, Berichte, *35* (1902), 1640.
(4) Berichte, *35* (1902), 1887.
(5) Questa trasformazione degli azossicomposti in ossiazoderivati si compie per mezzo degli acidi ovvero anche sotto l'azione della luce. A questo riguardo, nel caso di azossicomposti contenenti ossidrili, carbossili e residui solfonici, e perciò capaci di fornire sali, io ho osservato che passa una grande differenza di comportamento fra gli azossicomposti liberi e quello dei loro sali: nel mentre infatti i primi vengono facilmente alterati dalla luce, con formazione di ossiazoderivati, i secondi, a parità di condizioni, rimangono per lungo tempo inalterati.
(6) Berichte, *36* (1903), 4164.

Senza dubbio è da intendersi nello stesso modo anche la trasformazione del nitrobenzolo in o–nitrofenolo effettuata da A. Wohl ([1]) per mezzo della potassa a caldo: in una prima fase si formerà o–nitrosofenolo, che successivamente viene ossidato a nitroderivato.

b) *Nitroderivati alifatici.* — Data la grande alterabilità delle idrossilammine aromatiche e il differente modo di comportarsi delle aldeidi e dei nitroderivati alifatici, non sempre si possono realizzare tutte le analoghe trasformazioni nelle due serie, e ciò anche senza tenere conto del fatto che i nitroderivati aromatici sono tutti terziarii. Anche nel caso però del nitrometano, si riesce a pervenire a sostanze che si possono considerare come corrispondenti a quelle che si ottengono dai nitroderivati aromatici.

È noto infatti che i nitroderivati alifatici possono fornire sali che derivano dagli acidi nitronici isomeri

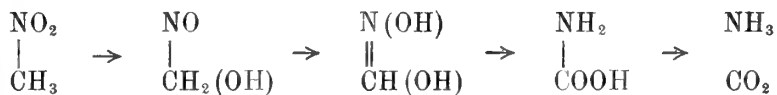
$$CH_3 \cdot NO_2 \longrightarrow CH_2{:}NOOH\,,$$

e che, quando si cerca di riottenere il nitrocomposto di partenza acidificando la soluzione acquosa dell'acido nitronico, il liquido si colora in verde azzurro; tale colorazione, secondo E. Bamberger, è dovuta alla formazione di un nuovo isomero, un nitrosoalcool ([2]):

$$CH_2{:}NOOH \longrightarrow CH_2(OH) \cdot NO\,.$$

Questo termine a sua volta è poco stabile ed il colore azzurro lentamente scomparisce perchè si forma un terzo isomero, l'acido formidrossammico:

$$\begin{array}{c} NO \\ | \\ CH_2(OH) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} NOH \\ \| \\ CH(OH) \end{array}.$$

Gli acidi idrossammici infine, come tali oppure sotto forma di alcuni derivati, hanno, a loro volta, grande tendenza a fornire acidi carbammici e, rispettivamente, i loro prodotti di decomposizione.

Il seguente schema illustra bene queste successive migrazioni di un atomo di ossigeno dall'azoto al carbonio:

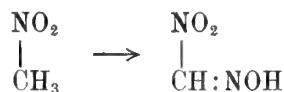
$$\begin{array}{c} NO_2 \\ | \\ CH_3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} NO \\ | \\ CH_2(OH) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} N(OH) \\ \| \\ CH(OH) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} NH_2 \\ | \\ COOH \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} NH_3 \\ \\ CO_2 \end{array}$$

([1]) Berichte, *32* (1899), 3486.

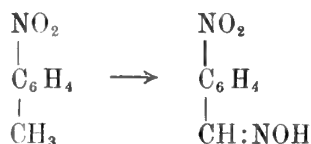
([2]) Siccome questa reazione è di solito accompagnata da sviluppo di protossido di azoto, è molto probabile che in una prima fase l'acido nitronico si scinda in aldeide e nitrossile, i quali successivamente si sommano, con formazione del nitrosoalcool che poi passa ad acido idrossammico.

O. Baudisch e J. H. Coert hanno trovato infatti [Berichte, *45* (1912), 1775] che anche nell'azione dell'acido nitroidrossilamminico sopra le aldeidi, la formazione degli idrossammici è preceduta da una colorazione verde azzurra dovuta al nitrosoalcool.

Azione dell'acido nitroso.

Le classiche ricerche di Victor Meyer hanno dimostrato che i nitroderivati primarii, per azione dell'acido nitroso, forniscono gli acidi nitrolici

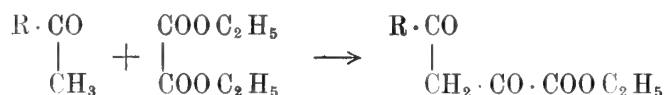
$$\begin{array}{l} NO_2 \\ | \\ CH_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} NO_2 \\ | \\ CH:NOH \end{array}$$

ed ancora molti anni or sono io ho trovato [1] che la stessa reazione si può estendere al p-nitrotoluolo, nel quale gli stessi gruppi, nitrico e metilico, sono separati dall'anello aromatico:

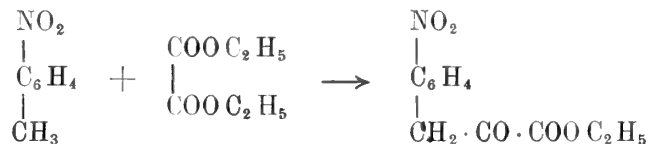
$$\begin{array}{l} NO_2 \\ | \\ C_6H_4 \\ | \\ CH_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} NO_2 \\ | \\ C_6H_4 \\ | \\ CH:NOH \end{array}$$

Processi di condensazione con gli eteri carbossilici.

Come è noto, i composti

$$R \cdot CH_3 ,$$

dove R rappresenta un residuo negativo, ovvero anche non saturo come l'etere crotonico [2], si condensano facilmente con gli eteri degli acidi carbossilici; così da un chetone ed etere ossalico si ha il prodotto

$$\begin{array}{l} R \cdot CO \\ | \\ CH_3 \end{array} + \begin{array}{l} COOC_2H_5 \\ | \\ COOC_2H_5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} R \cdot CO \\ | \\ CH_2 \cdot CO \cdot COOC_2H_5 \end{array}$$

Dalle belle ricerche di A. Reissert [3] risulta che una reazione perfettamente analoga si compie con l'orto- ovvero con il para-nitrotoluolo:

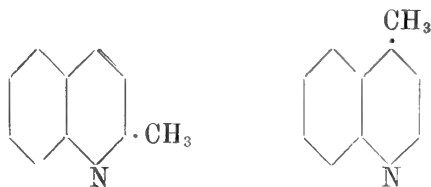
$$\begin{array}{l} NO_2 \\ | \\ C_6H_4 \\ | \\ CH_3 \end{array} + \begin{array}{l} COOC_2H_5 \\ | \\ COOC_2H_5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} NO_2 \\ | \\ C_6H_4 \\ | \\ CH_2 \cdot CO \cdot COOC_2H_5 \end{array}$$

(1) Rend. Lincei, *8* (1899), 2° sem., 32.
(2) Lawport, Centr. Blatt (1900), II, 173.
(3) Berichte, *30* (1897), 1030.

Nel caso prima considerato dei composti alifatici è il gruppo negativo (residuo carbonilico, cianico, ecc.) che imprime una maggiore mobilità agli atomi di idrogeno del radicale metilico cui è direttamente unito; nei derivati aromatici invece è il residuo nitrico che impartisce lo stesso carattere al metile, che per conto suo è molto stabile ed ha contegno tanto indifferente che per attaccarlo è necessario ricorrere all'impiego dei reattivi più energici.

In questo caso si potrebbe osservare che il gruppo nitrico presente accresce il carattere negativo di tutto il resto aromatico e che perciò impartisce una maggiore mobilità anche ai metili, in qualunque posizione questi si trovino. Ma questo può essere vero sino ad un certo punto, come lo dimostrano p. es. i valori delle costanti di affinità dei tre acidi nitrobenzoici, rispetto a quella dell'acido benzoico da cui derivano; ne risulta che l'acido ortonitrobenzolo è molto più forte del benzoico, mentre invece le costanti degli isomeri meta e para hanno ad un di presso il medesimo valore, pur essendo più elevate di quelle dell'acido benzoico stesso.

Ma anche prescindendo da considerazioni di questo genere, lo stesso Reissert fa notare espressamente che la reazione da lui scoperta si compie solamente con i nitrotoluoli orto e para, tanto che essa fornisce un mezzo per riconoscere se questi prodotti contengono l'isomero meta e, in ogni caso, per ottenere quest'ultimo allo stato puro, giacchè esso si mantiene perfettamente inalterato rispetto all'etere ossalico.

Da questo punto di vista sono molto interessanti le reazioni perfettamente analoghe che W. Wislicenus e E. Kleisinger [1] hanno potuto realizzare anche partendo dalle metilchinoline. Questi chimici infatti hanno trovato che anche i metili situati nelle posizioni α e γ della chinolina, vale a dire della chinaldina e della lepidina, che corrisponderebbero, rispetto all'atomo di azoto, ai derivati orto e para

$\cdot CH_3$ N CH_3 N

possono reagire nell'identico modo con l'etere ossalico in presenza di etilato potassico; la β-metilchinolina invece, che corrisponderebbe al derivato meta, come hanno espressamente posto in evidenza W. Wislicenus e H. Elvert [2], rimane del tutto indifferente all'azione dell'etere ossalico. Trova così una nuova conferma la regola stabilita da W. Koenigs [3], secondo la quale nelle condensazioni aldeidiche i metili situati in α e γ della chinolina hanno una facoltà di reazione che non si riscontra negli isomeri β-derivati.

Qualunque sia la struttura che si voglia attribuire alla chinolina, e quindi anche alla piridina, queste reazioni mostrano che nella molecola di tali sostanze devono

(1) Berichte, *42* (1909), 1140.
(2) Berichte, *42* (1909), 1144.
(3) Berichte, *34* (1901), 4326.

essere contenuti legami carbonio azoto che equivalgono a quelli presenti nei nitrili ovvero a quello contenuto nella forma tautomera dell'indolo [1].

Le due metilchinoline rispetto all'etere ossalico si comportano in modo identico a quello riscontrato da A. Reissert per l'orto- e paranitrotoluolo, ed anche in questo caso il derivato meta rimane completamente inerte.

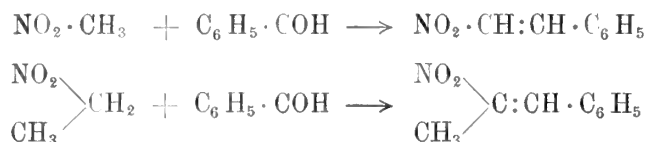
Processi di condensazione con i composti carbonilici.

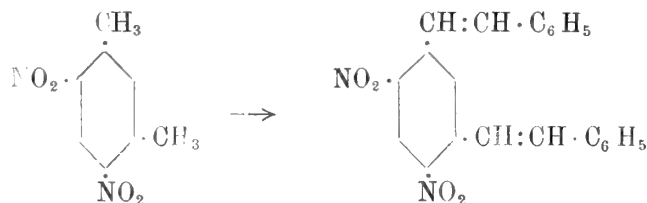
È noto che i gruppi metilici, etilici ecc., uniti all'anello benzolico, hanno, in generale, il comportamento delle paraffine, vale a dire si mostrano molto indifferenti all'azione dei varî reattivi. Anche in questo caso però, quando nella posizione orto ovvero para del residuo benzolico si trova un gruppo negativo ($-NO_2$, $-CN$, $-CO_2 \cdot CH_3$, $-SO_2 \cdot NH_2$), tali residui acquistano una grande facilità di reagire, come lo mostra il seguente esempio:

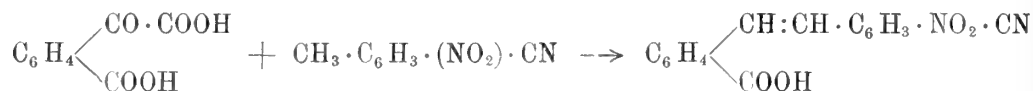
$$(NO_2)_2 \cdot C_6H_3 \cdot CH_3 + C_6H_5 \cdot COH \longrightarrow (NO_2)_2 \cdot C_6H_3 \cdot CH{:}CH \cdot C_6H_5 \quad [2]$$

che è perfettamente analogo a quello dei corrispondenti derivati della serie alifatica, nei quali gruppo nitrico e residuo alifatico sono congiunti direttamente fra di loro [3]:

$$NO_2 \cdot CH_3 + C_6H_5 \cdot COH \longrightarrow NO_2 \cdot CH{:}CH \cdot C_6H_5$$

$$\begin{matrix} NO_2 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>CH_2 + C_6H_5 \cdot COH \longrightarrow \begin{matrix} NO_2 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>C{:}CH \cdot C_6H_5$$

Nei derivati aromatici polisostituiti, ogni gruppo nitrico determina la reazione di un metile contiguo [4]:

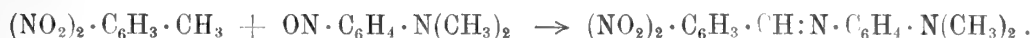
$$C_6H_2(CH_3)(NO_2)(CH_3)(NO_2) \longrightarrow C_6H_2(CH{:}CH \cdot C_6H_5)(NO_2)(CH{:}CH \cdot C_6H_5)(NO_2)$$

Invece delle aldeidi, si possono anche impiegare gli acidi chetonici, quale p. es. l'acido ftalonico [5]

$$C_6H_4\!\!<\!\begin{matrix} CO \cdot COOH \\ COOH \end{matrix} + CH_3 \cdot C_6H_3 \cdot (NO_2) \cdot CN \longrightarrow C_6H_4\!\!<\!\begin{matrix} CH{:}CH \cdot C_6H_3 \cdot NO_2 \cdot CN \\ COOH \end{matrix}$$

[1] Angeli, Memorie Lincei (1911), 437.
[2] J. Thiele e R. Escales, Berichte, *34* (1901), 2842.
[3] Berichte, *32* (1899), 1293.
[4] W. Borsche, Berichte, *56* (1923), 2357.
[5] P. Pfeiffer e K. Matton, Berichte, *44* (1911), 1113.

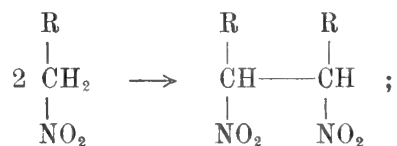
oppure l'acido fenilgliossilico

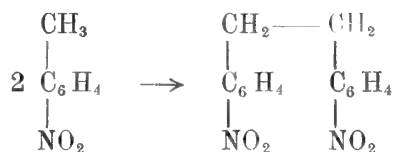
$$C_6H_5 \cdot CO \cdot COOH + CH_3 \cdot C_6H_3 \cdot NO_2 \cdot CN \longrightarrow C_6H_5 \cdot CH{:}CH \cdot C_6H_3 \cdot NO_2 \cdot CN\,.$$

I nitrosoderivati, come era da aspettarsi, si comportano esattamente come le aldeidi [1]:

$$(NO_2)_2 \cdot C_6H_3 \cdot CH_3 + ON \cdot C_6H_4 \cdot N(CH_3)_2 \longrightarrow (NO_2)_2 \cdot C_6H_3 \cdot CH{:}N \cdot C_6H_4 \cdot N(CH_3)_2\,.$$

Ossidazione dei nitroderivati.

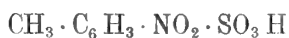
Alcuni anni or sono, Angeli ed Alessandri [2] hanno effettuato l'ossidazione dei nitroderivati alifatici; così dal nitroetano hanno avuto un binitrobutano ecc.; in generale,

$$2\begin{array}{c} R \\ | \\ CH_2 \\ | \\ NO_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} R & & R \\ | & & | \\ CH & - & CH \\ | & & | \\ NO_2 & & NO_2 \end{array} ;$$

e si vede subito che questa reazione corrisponde all'altra che si può effettuare partendo dall'orto ovvero dal paranitrotoluolo, nei quali il metile e il gruppo nitrico sono separati dall'anello aromatico:

$$2\begin{array}{c} CH_3 \\ | \\ C_6H_4 \\ | \\ NO_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} CH_2 & - & CH_2 \\ | & & | \\ C_6H_4 & & C_6H_4 \\ | & & | \\ NO_2 & & NO_2 \end{array}$$

In quest'ultimo caso il processo si può compiere anche senza impiego di ossidanti, giacchè l'ossidazione può venire effettuata da una parte del nitroderivato stesso; col nitrometano, nello stesso modo, si può ottenere anche un prodotto che contiene un atomo di ossigeno in meno, quello appunto che ha determinato l'unione delle due molecole del nitrocomposto:

$$2\,CH_3 \cdot NO_2 \longrightarrow NO_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot NO \longrightarrow NO_2 \cdot CH_2 \cdot CH{:}NOH\,.$$

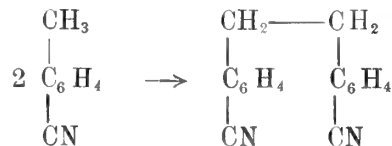
Al pari dei nitrotoluoli si comportano anche i loro acidi solfonici

$$CH_3 \cdot C_6H_3 \cdot NO_2 \cdot SO_3H$$

i quali, per azione degli ossidanti, forniscono derivati del difeniletano e, successivamente, dello stilbene [3].

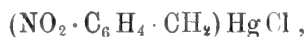
Lo stesso comportamento, oltre al nitrogruppo, viene impartito, come era da aspettarsi, anche dal residuo cianico; infatti, come hanno trovato P. Kattwinkel

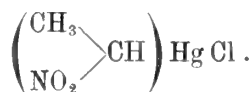
(1) Sachs e Kempf, Berichte, *35* (1902), 1224.
(2) Rend. Lincei, *19* (1910), 1° sem., pag. 784.
(3) Berichte, *40* (1907), 2618 e 3097.

e R. Wolffenstein [1], il paraderivato, per trattamento con persolfato, acqua ossigenata ecc., fornisce subito il prodotto analogo a quello ottenuto dai nitrocomposti:

$$2\ \begin{matrix} CH_3 \\ | \\ C_6H_4 \\ | \\ CN \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} CH_2 & — & CH_2 \\ | & & | \\ C_6H_4 & & C_6H_4 \\ | & & | \\ CN & & CN \end{matrix}$$

Composti col mercurio.

Le ricerche di A. Reissert [2] hanno pure posto in rilievo che l'orto ed il paranitrotoluolo sono in grado di fornire dei complessi per azione del cloruro mercurico. Così da da o-nitrotoluolo ottenne il composto

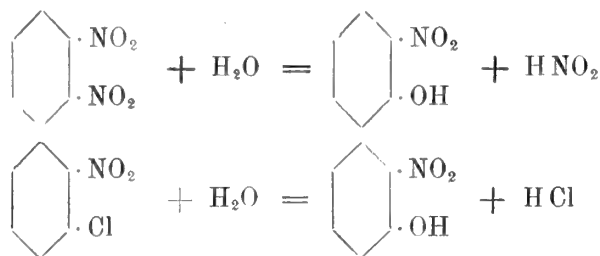
$$(NO_2 \cdot C_6H_4 \cdot CH_2)\,HgCl\,,$$

e, in seguito alle esperienze di I. U. Nef, è noto da molto tempo [3] che il nitroetano è in grado di fornire un composto analogo:

$$\left(\begin{matrix} CH_3 \\ NO_2 \end{matrix} \!\!>\! CH \right) HgCl\,.$$

Il sale che fornisce il nitrometano non venne studiato perchè troppo esplosivo; perciò venne esaminato solamente un sale basico.

Le scissioni di alcuni nitroderivati.

Sono ben note le scissioni che possono subire alcuni nitroderivati orto e parasostituiti, quali per es.

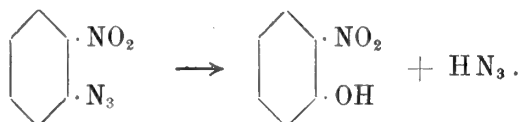
$$C_6H_4(NO_2)\cdot NO_2 + H_2O = C_6H_4(NO_2)\cdot OH + HNO_2$$

$$C_6H_4(NO_2)\cdot Cl + H_2O = C_6H_4(NO_2)\cdot OH + HCl$$

che corrispondono a quelle che presentano l'ipoazotide ed il cloruro di nitrile

$$\begin{matrix} NO_2 \\ | \\ NO_2 \end{matrix} + H_2O = \begin{matrix} NO_2 \\ | \\ OH \end{matrix} + HNO_2 \qquad \begin{matrix} NO_2 \\ | \\ Cl \end{matrix} + H_2O = \begin{matrix} NO_2 \\ | \\ OH \end{matrix} + HCl\,.$$

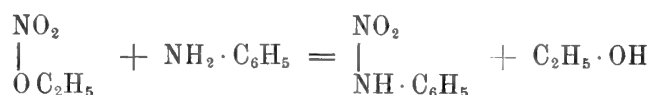
(1) Berichte, *37* (1904), 3221.
(2) Berichte, *40* (1907), 4209.
(3) Annalen, *280* (1894), 263.

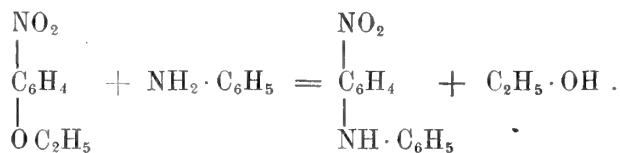
Nell'identico modo procedono anche le scissioni delle azidi aromatiche studiate da Noelting, Grandmougin e Michel (1); in tal guisa, per azione della potassa alcoolica, si forma subito il sale dell'acido azotidrico assieme al fenolo sostituito

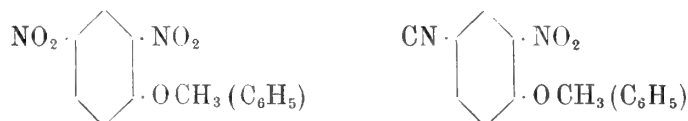
$$C_6H_4(NO_2)\cdot N_3 \longrightarrow C_6H_4(NO_2)\cdot OH + HN_3 .$$

Anche in questo caso, come ha dimostrato Michel (2), questa scissione viene presentata dalle sole azidi aromatiche che contengono i residui nitrici nelle posizioni orto ovvero para, mentre invece i derivati meta non reagiscono nello stesso modo.

Accennerò qui ad un'altra reazione da me studiata molti anni or sono (3) per il caso del nitrato di etile, la quale trova un perfetto riscontro con quella che si può effettuare partendo dall'etere etilico del p–nitrofenolo.

Come ho dimostrato a suo tempo, il nitrato di etile, nel quale gruppo nitrico ed ossietilico sono direttamente uniti fra di loro, reagiscono con l'anilina per dare la fenilnitrammina (acido diazobenzolico)

$$NO_2-OC_2H_5 + NH_2\cdot C_6H_5 = NO_2-NH\cdot C_6H_5 + C_2H_5\cdot OH$$

e si comprende subito che questa reazione è del tutto analoga a quella che si può effettuare con il p–nitrofenetolo, nel quale gruppo nitrico ed ossietilico sono separati dall'anello aromatico

$$NO_2-C_6H_4-OC_2H_5 + NH_2\cdot C_6H_5 = NO_2-C_6H_4-NH\cdot C_6H_5 + C_2H_5\cdot OH .$$

Altri esempî dell'influenza che esercitano i gruppi nitrici ed i residui negativi in genere sopra i gruppi ossialchilici, vennero dati recentemente fra altri da W. Borsche (4) e M. Giua (5). Così, per es., i derivati

$$NO_2\cdot C_6H_3(NO_2)\cdot OCH_3\,(C_6H_5) \qquad CN\cdot C_6H_3(NO_2)\cdot OCH_3\,(C_6H_5)$$

reagiscono con ammoniaca, anilina, idrazina, fenilidrazina, idrossilammina, etere sodioacetacetico, scambiando i residui $-(OCH_3)$ e $-(OC_6H_5)$ coi varî gruppi. Il gruppo ossifenilico viene eliminato ancora più facilmente che non l'ossimetile.

(1) Berichte, *25* (1892), 3328.
(2) Mon. scientif. (4), *7*, II, 749.
(3) Rend. Lincei, *14* (1905), 2° sem., pag. 127.
(4) Berichte, *56* (1923), 2356, 1488, 1494.
(5) Gazzetta, *53* (1923), 657.

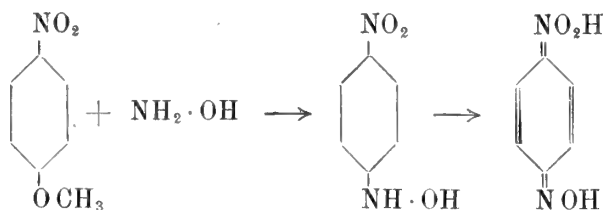
Anche in questo caso, dunque, i nitroderivati (orto e para)

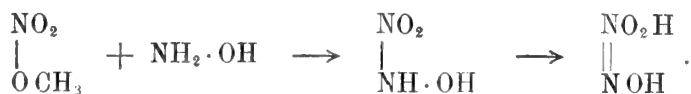
$$NO_2 \cdot C_6H_4 \cdot OCH_3$$

si comportano esattamente come un nitrato alcoolico

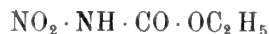
$$NO_2 \cdot OCH_3$$

nel quale cioè i due residui sono riuniti direttamente fra di loro, e perciò anche la formazione, per es., dei derivati dell'idrossilammina

$$NO_2-C_6H_4-OCH_3 + NH_2 \cdot OH \longrightarrow NO_2-C_6H_4-NH \cdot OH \longrightarrow NO_2H=C_6H_4=NOH$$

rassomiglia in tutto anche alla sintesi dell'acido nitroidrossilamminico da me realizzato molti anni or sono:

$$\begin{matrix} NO_2 \\ | \\ OCH_3 \end{matrix} + NH_2 \cdot OH \longrightarrow \begin{matrix} NO_2 \\ | \\ NH \cdot OH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} NO_2H \\ \| \\ NOH \end{matrix} .$$

Mobilità di alcuni atomi di idrogeno o residui alchilici.

Come è noto, il nitrouretano

$$NO_2 \cdot NH \cdot CO \cdot OC_2H_5$$

è in grado di fornire un sale sodico. e lo stesso vale per le ammidi orto e para della forma

$$NO_2 \cdot C_6H_4 \cdot NH \cdot CO \cdot CH_3$$

nelle quali il gruppo nitrico ed il residuo ammidico sono separati dall'anello benzolico.

Inoltre, alcune interessanti esperienze eseguite recentemente da E. Kleucker [1]

[1] Berichte, 55 (1922), 1635 e 2941. Nel suo bel lavoro, Kleucker dice che considerazioni analoghe a quelle che io ho pubblicato sopra il comportamento reciproco di due gruppi situati nelle posizioni orto e para di un anello aromatico, gli vennero esposte privatamente dal suo maestro, il compianto prof. J. Thiele, e che alle stesse considerazioni è accennato anche nella dissertazione di laurea del dott. Hans Wappes, pubblicata a Strasburgo nel 1918.

A questo riguardo io mi limiterò ad osservare che non posso tenere conto di comunicazioni private, e che perciò sconosco, e che in ogni caso la mia prima Nota sopra questo argomento è comparsa nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei nel 1917, vale a dire un anno prima della dissertazione del dott. H. Wappes.

hanno dimostrato che il cloruro di p–nitrobenzile, per azione della potassa, è in grado di fornire un sale

$$Cl \cdot CH_2 \cdot C_6H_4 \cdot NO_2 \longrightarrow Cl \cdot CH{=}C_6H_4{=}NOOK$$

che corrisponde a quello che può fornire il nitrometano, nel quale metile e nitrogruppo sono direttamente uniti fra di loro.

W. Borsche (¹) pone inoltre in rilievo la grande facilità di reagire che il gruppo nitrico, nelle posizioni orto e para, impartisce al gruppo metilenico, per es. in

$$NO_2 \cdot C_6H_4 \cdot CH_2 \cdot CO_2 \cdot C_2H_5 ,$$

ciò che non si verifica quando l'anello aromatico è sprovvisto di tale residuo negativo.

Anche le belle esperienze di R. Ciusa (²) hanno dimostrato che il comportamento della p-nitrofenilidrazina

$$NO_2 \cdot C_6H_4 \cdot NH \cdot NH_2$$

e del suo sale potassico

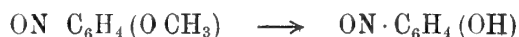
$$KO_2N : C_6H_4 : N \cdot NH_2$$

si spiegano nel modo migliore giovandosi delle considerazioni esposte nella presente Memoria.

Come hanno trovato W. Borsche e J. Exss (³), anche l'azogruppo può imprimere mobilità agli atomi di idrogeno situati in orto ovvero in para, sebbene in grado minore dei residui nitrico, cianico ecc.

Azogruppo e nitrosogruppo, come hanno osservato E. Bamberger (⁴) e A. von Baeyer (⁵), imprimono mobilità anche al metossile, situato in posizione orto, che in tal modo può perdere il residuo metilico, con formazione dei rispettivi fenoli

$$C_6H_5 \cdot N_2 \cdot C_6H_4(O\,CH_3) \longrightarrow C_6H_5 \cdot N_2 \cdot C_6H_4(OH)$$

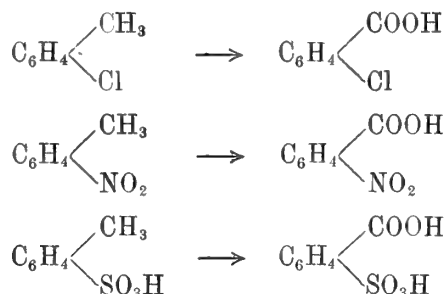
$$ON\ C_6H_4(O\,CH_3) \longrightarrow ON \cdot C_6H_4(OH)$$

Se mancano questi residui azotati, il gruppo alcoolico, come è noto, può venire eliminato solamente ricorrendo all'azione direattivi energici, quale, per es., l'acido iodidrico ed operando a temperatura elevata.

(¹) Berichte, *42* (1909), 1310 e 3596.
(²) Gazzetta, *54* (1924), 72.
(³) Berichte, *56* (1923), 2356.
(⁴) Berichte, *33* (1900), 3191.
(⁵) Berichte, *35* (1902), 3037.

Anche rispetto agli ossidanti, gli elementi o gruppi negativi possono favorire l'ossidazione dei metili situati in posizione orto [1]:

$$C_6H_4\left<\begin{matrix}CH_3\\Cl\end{matrix}\right. \longrightarrow C_6H_4\left<\begin{matrix}COOH\\Cl\end{matrix}\right.$$

$$C_6H_4\left<\begin{matrix}CH_3\\NO_2\end{matrix}\right. \longrightarrow C_6H_4\left<\begin{matrix}COOH\\NO_2\end{matrix}\right.$$

$$C_6H_4\left<\begin{matrix}CH_3\\SO_3H\end{matrix}\right. \longrightarrow C_6H_4\left<\begin{matrix}COOH\\SO_3H\end{matrix}\right.$$

Il clorotoluolo ecc. reagiscono più facilmente del toluolo nello stesso modo, per es., che il cloruro di metile reagisce in modo più facile del metano.

Accennerò infine che anche la formazione dei nitroderivati per azione dell'acido nitroso sopra la dimetilammina e dimetilanilina

$$(CH_3)_2)\,NH \longrightarrow (CH_3)_2\,N\cdot NO$$
$$(CH_3)\,N\cdot(C_6H_4)\cdot H \longrightarrow (CH_3)_2\,N\cdot(C_6H_4)\cdot NO$$

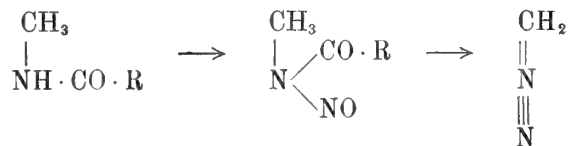
come pure la formazione di acido formico e rispettivamente di ossialdeidi per azione del cloroformio sopra gli alcali ed i fenoli

$$HO\;H \longrightarrow HO\cdot COH$$
$$HO\cdot(C_6H_4)\cdot H \longrightarrow HO\cdot(C_6H_4)\cdot COH$$

sono senza dubbio dovute all' influenza che il residuo azotato oppure l'ossidrile esercitano sopra gli atomi d' idrogeno situati nelle posizioni para ovvero orto dell'anello benzolico.

Scissioni di alcune nitrosammine.

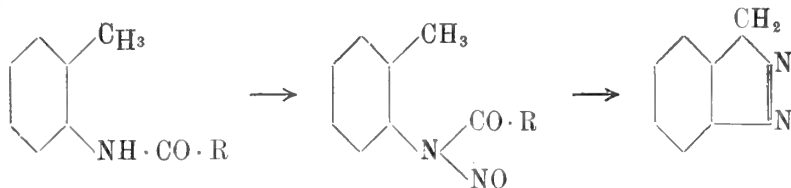
Le classiche ricerche di H. von Pechmann [2] hanno dimostrato che i nitrosocomposti di alcuni derivati della metilammina vengono facilmente saponificati, e che in tal modo si perviene al diazometano [3]

$$\begin{matrix}CH_3\\|\\NH\cdot CO\cdot R\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}CH_3\\|\\N\end{matrix}\left<\begin{matrix}CO\cdot R\\NO\end{matrix}\right. \longrightarrow \begin{matrix}CH_2\\\|\\N\\|||\\N\end{matrix}$$

(1) Bischoff e Rach, Berichte, *17* (1884), 2788; Ullmann, Annalen, *355* (1907), 313.

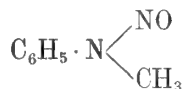
(2) Berichte, *28* (1895), 855.

(3) Le formole di struttura da me proposte per il diazometano e l'acido azotidrico, sono state già adottate anche dai più autorevoli trattatisti (Bernthsen–Darapsky, *Organische Chemie*, 14ª ed., 1919; Hofmann, *Anorganische Chemie*, 4ª ed. 1922). Confr. anche Wallace H. Carothers, Journ. Americ. Chem. Soc., *45* (1923), 1734.

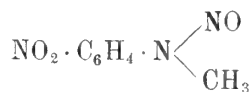
Un comportamento perfettamente simile è stato riscontrato da E. Noelting [1] e da P. Jacobson [2] nel caso dei derivati dell'ortoamminotoluolo: anche questi perdono facilmente il residuo acido ed il nitrosogruppo reagisce col metile per dare indazolo, la formazione del quale corrisponde perfettamente a quella del diazometano

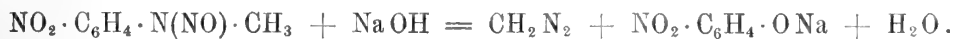
$$C_6H_4(CH_3)(NH\cdot CO\cdot R) \longrightarrow C_6H_4(CH_3)\cdot N\begin{smallmatrix}CO\cdot R\\ NO\end{smallmatrix} \longrightarrow C_6H_4\begin{smallmatrix}CH_2\\ \end{smallmatrix}\!\!>N{=}N$$

Un comportamento analogo, dovuto alla presenza di gruppi negativi, situati in questo caso nell'anello aromatico, è presentato da alcune nitrosammine di altra forma.

È noto che molti gruppi, uniti all'anello benzolico, presentano una grande stabilità all'azione dei varî reattivi; così la nitrosammina

$$C_6H_5\cdot N\begin{smallmatrix}NO\\ CH_3\end{smallmatrix}$$

ha un contegno indifferente e con grande difficoltà cede il residuo nitrosilico.

Le cose mutano invece completamente quando, rispetto a tale gruppo, nell'anello aromatico, si trovi un residuo nitrico in posizione para. Come riferiscono infatti E. Bamberger e J. Müller [3], in seguito ad una comunicazione privata avuta dal prof. E. Noelting, il composto parasostituito

$$NO_2\cdot C_6H_4\cdot N\begin{smallmatrix}NO\\ CH_3\end{smallmatrix}$$

per azione dell'idrato sodico a freddo fornisce immediatamente diazometano

$$NO_2\cdot C_6H_4\cdot N(NO)\cdot CH_3 + NaOH = CH_2N_2 + NO_2\cdot C_6H_4\cdot ONa + H_2O .$$

Come si vede, il comportamento è del tutto analogo a quello prima considerato del nitrosometiluretano, nel quale il gruppo negativo carbonile è direttamente unito all'atomo di azoto che porta il nitrosile.

Sempre a proposito di queste sostanze, aggiungerò che delle arilnitrosammine benzilate, come hanno trovato Bamberger e Müller [4], solamente i derivati orto e para vengono saponificati dagli alcali con formazione di isodiazotati

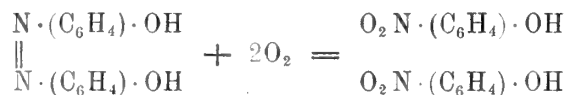
$$Ar\cdot N(NO)\cdot CH_2\cdot C_6H_4(OH) + KOH = Ar\cdot N_2\cdot OK + HO\cdot CH_2\cdot C_6H_4(OH) .$$

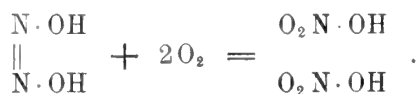
(1) Berichte, *37* (1904), 2556.
(2) Berichte, *41* (1908), 660.
(3) Berichte, *33* (1900), 101.
(4) Annalen, *313* (1900), 102.

Comportamento rispetto agli ossidanti.

Anche i processi di ossidazione che possono subire determinate sostanze, nelle quali alcuni gruppi sono riuniti fra di loro, ovvero rispettivamente separati dagli anelli aromatici, presentano delle analogie degne di menzione.

Recentemente D. Bigiavi, G. Carrara ed io ([1]), studiando l'azione degli ossidanti e dell'acido nitroso sopra gli azossifenoli, abbiamo trovato che il p–p–diossiazofenolo può fornire il p–nitrofenolo

$$\begin{matrix} N\cdot(C_6H_4)\cdot OH \\ \| \\ N\cdot(C_6H_4)\cdot OH \end{matrix} + 2O_2 = \begin{matrix} O_2N\cdot(C_6H_4)\cdot OH \\ \\ O_2N\cdot(C_6H_4)\cdot OH \end{matrix}$$

e che in modo perfettamente analogo, come ci siamo espressamente assicurati, procede l'ossidazione dell'acido iponitroso, quando si operi prima in soluzione alcalina (per evitare altre decomposizioni) e successivamente in mezzo acido:

$$\begin{matrix} N\cdot OH \\ \| \\ N\cdot OH \end{matrix} + 2O_2 = \begin{matrix} O_2N\cdot OH \\ \\ O_2N\cdot OH \end{matrix} .$$

Come io ho osservato ancora molti anni or sono, i nitriti alcalini, che sono stabili al permanganato, vengono invece ossidati dal ferricianuro di potassio

$$ON\cdot OH \longrightarrow O_2N\cdot OH .$$

E sempre per mezzo del ferricianuro di potassio questa ossidazione si può effettuare nel caso del p–nitrosofenolo, nel quale gli stessi gruppi sono separati dall'anello aromatico

$$ON\cdot(C_6H_4)\cdot OH \longrightarrow O_2N\cdot(C_6H_4)\cdot OH .$$

È noto d'altra parte che la fenilnitrammina (acido diazobenzolico), in soluzione alcalina, presenta una grande stabilità al permanganato, e lo stesso comportamento io l'ho riscontrato ([2]) nel caso del β–para–azossifenolo da me ottenuto ([3]). Invece la nitrosofenilidrossilammina e l'α–para–azossifenolo di Bamberger (due sostanze alle quali io ho assegnata l'esatta formola di costituzione), riducono immediatamente il permanganato.

Queste analogie e differenze di comportamento risaltano subito confrontando le rispettive formole di struttura (dove $R=C_6H_5$) le quali mostrano che i due azos-

([1]) Rend. Lincei, *31* (1922), 1° sem., pag. 439.
([2]) Gazzetta, *51* (1921), 35.
([3]) Rend. Lincei, *23* (1914), 1° sem., pag 557.

sifenoli differiscono dalle altre due sostanze per inserzione di un anello aromatico fra un atomo di azoto e l'ossidrile:

BIOSSIBENZOLI, CHINONI ED ANALOGHI.

Ho già posto in rilievo le analogie di comportamento che acqua ossigenata, idrossilammina ed idrazina

$$HO \cdot OH \qquad HO \cdot NH_2 \qquad H_2N \cdot NH_2$$

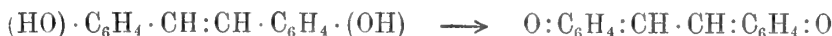
presentano non solo fra di loro, ma anche rispetto a quei derivati aromatici nei quali gli stessi gruppi sono separati dall'anello benzolico (posizioni orto o para) [1]:

$$HO \cdot (C_6H_4) \cdot OH \qquad HO \cdot (C_6H_4) \cdot NH_2 \qquad H_2N \cdot (C_6H_4) \cdot NH_2$$

Ricorderò qui che le trasformazioni in prodotti chinonici possono venire presentate anche da composti aromatici che contengono i due ossidrili in anelli benzolici diversi riuniti direttamente fra di loro, come hanno trovato Willstätter e Kalb [2] per il caso del p-p-diossidifenile

$$(HO) \cdot C_6H_4 \cdot C_6H_4 \cdot (OH) \longrightarrow O:C_6H_4:C_6H_4:O\,.$$

Anche il p-p-biossistilbene può fornire il corrispondente chinone

$$(HO) \cdot C_6H_4 \cdot CH:CH \cdot C_6H_4 \cdot (OH) \longrightarrow O:C_6H_4:CH \cdot CH:C_6H_4:O$$

come è stato dimostrato dagli interessanti studî di Zincke [3].

Questa facoltà viene invece a mancare quando i due anelli benzolici sono riuniti da un residuo saturo, per es. il metilene

$$(HO) \cdot C_6H_4 \cdot CH_2 \cdot C_6H_4 \cdot (OH)\,.$$

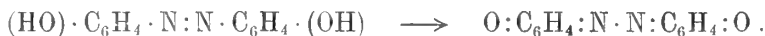
[1] Queste sostanze agiscono da rivelatori fotografici, e da rivelatori si comportano anche acqua ossigenata, idrossilammina ed idrazina, ma non trovano impiego a questo scopo, perchè il processo di riduzione è accompagnato da sviluppo di gas che deforma lo strato sensibile e quindi l'immagine.

[2] Berichte, *38* (1905), 1232.

[3] Annalen, *335* (1904), 157.

Al pari degli ordinarî chinoni, anche queste sostanze, per trattamento con i corrispondenti derivati ossidrilati di partenza, forniscono i rispettivi chinidroni.

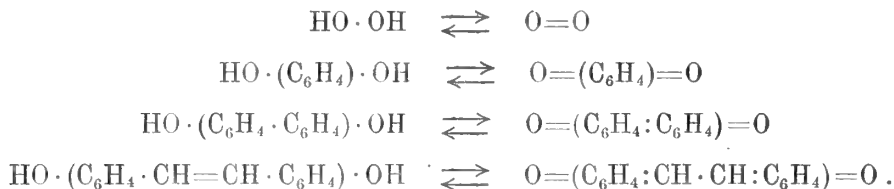
Non è necessario che la catena che riunisce i residui aromatici sia costituita da atomi di carbonio, giacchè anche il p–p-biossiazofenolo può subire un processo di ossidazione che corrisponde a quello ora accennato, come trovarono R. Willstätter e Benz (¹):

$$(HO)\cdot C_6H_4\cdot N:N\cdot C_6H_4\cdot(OH) \longrightarrow O:C_6H_4:N\cdot N:C_6H_4:O\,.$$

Riassumendo le trasformazioni descritte, avremo quindi;

$$HO\cdot OH \rightleftarrows O{=}O$$

$$HO\cdot(C_6H_4)\cdot OH \rightleftarrows O{=}(C_6H_4){=}O$$

$$HO\cdot(C_6H_4\cdot C_6H_4)\cdot OH \rightleftarrows O{=}(C_6H_4:C_6H_4){=}O$$

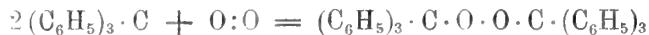
$$HO\cdot(C_6H_4\cdot CH{=}CH\cdot C_6H_4)\cdot OH \rightleftarrows O{=}(C_6H_4:CH\cdot CH:C_6H_4){=}O\,.$$

Come ho già accennato, nella formazione dell'acido azotidrico per ossidazione dell'idrazina, è necessario ammettere che la diimide, che in una prima fase si forma, si polimerizzi per dare il tetrazone

$$H_2N\cdot N:N\cdot NH_2\,.$$

Nello stesso modo, come ho già detto, si comporta l'o–chinondiimmina, nella quale gli stessi gruppi sono separati dall'anello aromatico; ed anche ossidando la benzidina, nelle opportune condizioni, si ottiene un prodotto analogamente costituito (²):

$$2\,HN:C_6H_4\cdot C_6H_4:NH = H_2N\cdot C_6H_4\cdot C_6H_4\cdot N:N\cdot C_6H_4\cdot C_6H_4\cdot NH_2\,.$$

Sempre nel caso dell'ossigeno e del chinone è stato possibile realizzare una reazione perfettamente analoga quando, invece dell'idrogeno, si impieghi il trifenilmetile. Infatti J. Schmidlin, J. Wohl e H. Thommen (³), facendo reagire questa sostanza con l'ossigeno, hanno ottenuto un perossido

$$2\,(C_6H_5)_3\cdot C + O:O = (C_6H_5)_3\cdot C\cdot O\cdot O\cdot C\cdot(C_6H_5)_3$$

nello stesso modo che impiegando il chinone sono pervenuti non già a composti labili, come fanno altri chetoni, ma bensì all'etere trifenilmetilico dell'idrochinone

$$2\,(C_6H_5)_3\,C + O:(C_6H_4):O = (C_6H_5)_3\cdot C\cdot O\cdot(C_6H_4)\cdot O\cdot C\,(C_6H_5)_3$$

che corrisponde al perossido avuto dall'ossigeno.

Accennerò infine che la formazione dell'idrochinone durante i processi di ossidazione determinati dal chinone

$$O:C_6H_4:O + H_2O + R = (HO)\cdot C_6H_4\cdot(OH) + RO$$

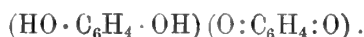
(¹) Berichte, *39* (1906), 3484.
(²) Berichte, *39* (1906), 3474.
(³) Berichte, *43* (1910), 1298.

corrisponde a sua volta a quella dell'acqua ossigenata che si forma durante le ossidazioni che si compiono in presenza di ossigeno

$$O:O + H_2O + R = (HO)(OH) + RO$$

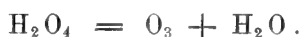
e, come ha dimostrato W. Manchot [1], in molti casi la reazione procede così netta che il rendimento in acqua ossigenata è quantitativo.

È noto inoltre che i chinoni con gli idrochinoni forniscono quei complessi caratteristici dei quali, in questi ultimi anni, si sono occupati principalmente R. Willstätter [2] e P. Pfeiffer [3]; così chinone ed idrochinone dànno il chinidrone

$$(HO \cdot C_6H_4 \cdot OH)(O:C_6H_4:O).$$

Si comprende subito che se acqua ossigenata ed ossigeno, nelle opportune condizioni, fossero in grado di fornire un prodotto analogo

$$(HO \cdot OH)(O:O),$$

si potrebbe anche intendere la formazione dell'ozono per eliminazione di una molecola di acqua dal complesso formatosi in una prima fase:

$$H_2O_4 = O_3 + H_2O.$$

Da quanto finora si conosce, pare infatti che per la formazione dell'ozono sia necessaria la presenza di acqua, sia pure in piccolissima quantità.

Ma se ancora non si conosce tale complesso, è interessante notare il fatto che il potassio può fornire l'ossido:

$$K_2O_4$$

al quale W. Traube, in base ad una serie di esperienze eseguite con la valentìa che distingue questo chimico, ha assegnato la struttura

$$(KO \cdot OK)(O:O)$$

che corrisponderebbe al sale di potassio di tale complesso; al pari dei chinidroni anche questo ossido è *intensamente colorato*. I chinidroni, come è noto, si possono scindere facilmente nei loro componenti

$$(HO \cdot C_6H_4 \cdot OH)(O:C_6H_4:O) = HO \cdot C_6H_4:OH + O:C_6H_4:O$$

nello stesso modo che l'ossido studiato da Traube fornisce esattamente una molecola di acqua ossigenata ed una di ossigeno:

$$(HO \cdot OH)(O:O) = HO \cdot OH + O:O$$

che perciò corrispondono rispettivamente all'idrochinone ed al chinone.

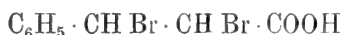
Anche i sali sodici dei fenoli possono fornire chinidroni con i corrispondenti chinoni [4].

[1] Berichte, *39* (1906), 3510.
[2] Berichte, *41* (1908), 1458.
[3] Annalen, *404* (1914), 1; *412* (1916), 253.
[4] S. Goldschmidt e F. Christmann, Berichte, *57* (1924), 711.

L'analogia si può dunque estendere anche a tali composti che a prima vista si presentano così disparati fra di loro [1].

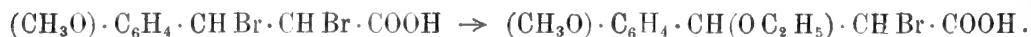
Mobilità di alcuni atomi di alogeno.

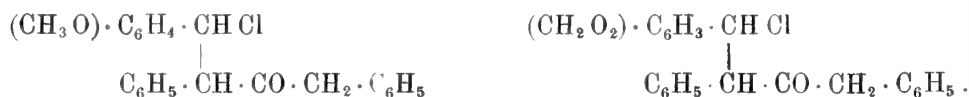
Come è noto, un grande numero di composti alogenati possono venire ricristallizzati dall'alcool bollente senza subire nessuna decomposizione; così, per es., l'acido bibromocinnamico

$$C_6H_5 \cdot CH\,Br \cdot CH\,Br \cdot COOH$$

si mostra perfettamente indifferente all'azione di questo solvente anche a caldo.

Parecchi anni or sono il compianto Alfredo Werner [2] ha fatto l'osservazione interessante che quegli acidi bibromocinnamici, che in posizione orto ovvero para rispetto alla catena laterale contengono, nell'anello aromatico, un atomo di idrogeno sostituito con un metossile ecc., mostrano un contegno del tutto diverso.

Infatti, l'acido p-metossibibromocinnamico, per semplice riscaldamento con alcool, perde subito il solo atomo di bromo situato in posizione α, rispetto all'anello aromatico, ed in suo luogo si porta il residuo etossilico

$$(CH_3O) \cdot C_6H_4 \cdot CH\,Br \cdot CH\,Br \cdot COOH \rightarrow (CH_3O) \cdot C_6H_4 \cdot CH(O\,C_2\,H_5) \cdot CH\,Br \cdot COOH .$$

Un comportamento analogo è stato osservato quasi contemporaneamente da G. Goldschmiedt [3] per il caso di alcuni derivati clorurati, che in posizione para contengono un gruppo metassilico ovvero biossimetilenico

$$\begin{array}{l} (CH_3\,O) \cdot C_6H_4 \cdot CH\,Cl \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \\ \qquad\quad C_6H_5 \cdot CH \cdot CO \cdot CH_2 \cdot C_6H_5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (CH_2\,O_2) \cdot C_6H_3 \cdot CH\,Cl \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \\ \qquad\quad C_6H_5 \cdot CH \cdot CO \cdot CH_2 \cdot C_6H_5 . \end{array}$$

Anche queste sostanze, per semplice ebollizione con alcool, scambiano l'alogeno con l'etossile. Invece i derivati alogenati, analogamente costituiti ma privi di alcossile, cristallizzano inalterati dall'alcool bollente. Il caso, come si vede, corrisponde perfettamente a quello descritto da Werner.

Guidato dal mio concetto, non mi è stato difficile trovare, nella letteratura, dei dati sopra il comportamento dei corrispondenti termini della serie alifatica, nei quali cioè il gruppo alcossilico è direttamente congiunto all'atomo di carbonio che porta l'alogeno.

Infatti Litterscheid e Thimme [4], per semplice riscaldamento con alcool dell'etere clorometilico, hanno realizzata la trasformazione

$$(CH_3\,O) \cdot CH_2 \cdot Cl + C_2H_5 \cdot OH \longrightarrow (CH_3\,O) \cdot CH_2 \cdot O\,C_2H_5 ,$$

(1) Angeli, Rend. Lincei, *31* (1922), 1° sem., pag. 488.
(2) Berichte, *39* (1906), 27.
(2) Berichte, *39* (1906), 651.
(4) Annalen, *334* (1904), 8

ed Henry l'altra, impiegando alcool metilico (1)

$$(CH_3O)\cdot CH_2\cdot Cl + CH_3\cdot OH \longrightarrow (CH_3O)\cdot CH_2\cdot OCH_3 .$$

Anche in questi casi dunque l'atomo di alogeno viene sostituito dai residui degli alcool, e perciò essi corrispondono esattamente a quelli descritti da Werner e Goldschmiedt per i derivati aromatici alogenati contenenti l'alcossile in posizione orto ovvero para (2)

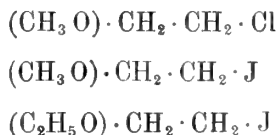
$$CH_3O\cdot(C_6H_4)\cdot CH_2\cdot Cl \qquad\qquad CH_3O\cdot CH_2\cdot Cl$$

In questo modo si intende anche come i prodotti

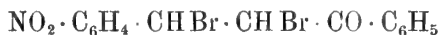
$$O\begin{cases} CH_2\cdot Cl \\ CH_2\cdot Cl \end{cases} \qquad\qquad O\begin{cases} CH_2\cdot Br \\ CH_2\cdot Br \end{cases}$$

sieno molto instabili; il primo, di odore soffocante, all'aria umida viene subito decomposto in acido cloridrico e formaldeide, tanto che in guerra venne impiegato come asfissiante; il secondo è un forte lagrimogeno che in modo analogo, per azione dell'acqua, dà acido bromidrico e formaldeide, e con alcool metilico fornisce prontamente metilal.

Anche nel caso dei composti alifatici, questo comportamento è limitato al solo atomo di alogeno che si trova unito al carbonio congiunto all'alcossile; infatti, per citarne qualcuno, i composti

$$(CH_3O)\cdot CH_2\cdot CH_2\cdot Cl$$
$$(CH_3O)\cdot CH_2\cdot CH_2\cdot J$$
$$(C_2H_5O)\cdot CH_2\cdot CH_2\cdot J$$

sono stabilissimi, tanto che alcuni resistono anche all'azione del sodio, zinco, acetato sodico ed acetato d'argento.

Questo comportamento è dovuto ai soli alcossili; invece i gruppi negativi, che si trovano nelle identiche posizioni, non imprimono nessuna mobilità all'atomo di alogeno; così, per es., Wieland ha trovato che il paranitroderivato (3)

$$NO_2\cdot C_6H_4\cdot CHBr\cdot CHBr\cdot CO\cdot C_6H_5$$

(1) Berichte, *26* (1893), Ref. 933.

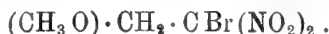
(2) In lavori precedenti ho pure accennato al fatto interessante che nitrile anisico e nitrile piperonilico, a differenza del benzonitrile, a parità di condizioni, non reagiscono col bromuro di fenilmagnesio; del pari è notevole che il bromuro di piperonile [P. Karrer, Helvetica Chimica Acta, *6* (1923), 915]

$$(CH_2O_2)\cdot C_6H_3\cdot CH_2Br$$

in soluzione eterea, non reagisce col magnesio nemmeno dopo un giorno di ebollizione. Ciò dimostra che in questi derivati aromatici parasostituiti, fra tali gruppi devono sussistere relazioni che le attuali formole di struttura non riescono a porre in rilievo.

(3) Berichte, *37* (1904), 1148.

ricristallizza inalterato dall'alcool bollente, e del pari stabilissimo è il composto

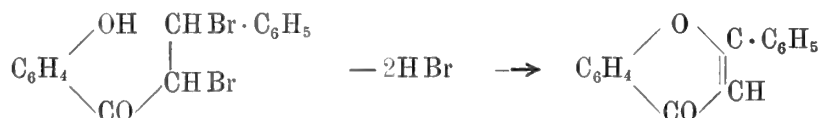
$$(CH_3O) \cdot CH_2 \cdot CBr(NO_2)_2 \,.$$

Questo vario comportamento degli atomi di alogeno, a seconda della posizione che occupano nella molecola, permette anche di spiegare il contegno di alcuni prodotti e l'andamento di varie reazioni.

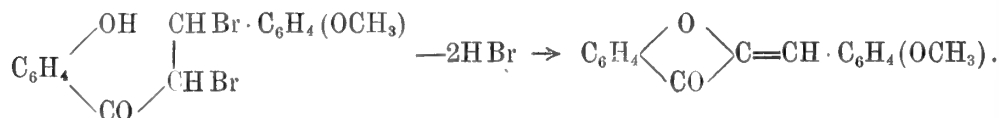
Così L. Claisen ha dimostrato che il bibromuro di acroleina (1) con acido cloridrico alcoolico fornisce nettamente il prodotto

$$CH_2Br \cdot CHBr \cdot COH + C_2H_5 \cdot OH \longrightarrow CH_2Br \cdot CH(OC_2H_5) \cdot CH(OC_2H_5)_2$$

ed anche in questo caso viene eliminato il solo atomo di alogeno in posizione α; ciò dimostra che in una prima fase si forma l'acetale bibromurato.

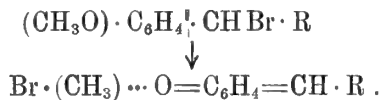
D'altra parte le esperienze di S. Kostanecki e T. Emilevicz (2) e di S. Kostanecki e F. Herstein (3) hanno posto in rilievo il diverso contegno di alcuni bibromoderivati rispetto all'azione della potassa alcoolica; infatti il composto

$$C_6H_4\begin{cases} OH & CHBr \cdot C_6H_5 \\ & | \\ CO & —CHBr \end{cases} \quad -2HBr \longrightarrow C_6H_4\begin{cases} O & —C \cdot C_6H_5 \\ & \| \\ CO & —CH \end{cases}$$

perde acido bromidrico per dare un *derivato del flavone*; mentre invece l'analogo, contenente un metossile ovvero un biossimetilene, per lo stesso trattamento fornisce un *derivato del cumaranone*

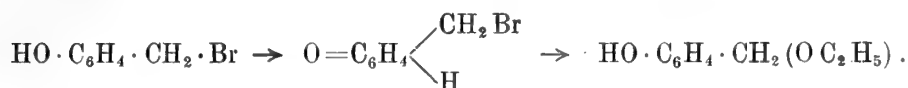
$$C_6H_4\begin{cases} OH & CHBr \cdot C_6H_4(OCH_3) \\ & | \\ CO & —CHBr \end{cases} \quad -2HBr \rightarrow C_6H_4\begin{cases} O \\ CO \end{cases}C{=}CH \cdot C_6H_4(OCH_3)\,.$$

Ciò dipende dal fatto che il metossile determina l'eliminazione di un atomo di alogeno prima che questo reagisca con l'ossidrile.

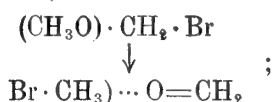
Ciò dimostra dunque che si tratta di una influenza esercitata dagli alcossili situati nelle posizioni orto ovvero para e con tutta probabilità è dovuta alle proprietà basiche di questi aggruppamenti, proprietà che è stata posta in rilievo per la prima volta da Adolfo von Baeyer e successivamente da altri sperimentatori, quali H. Kauffmann e F. Kieser (4) e B. Flürscheim (5).

Th. Zincke e A. Werner ammettono che la facile eliminazione dell'alogeno in questi casi sia dovuta alla formazione intermedia di composti di ossonio, per es.

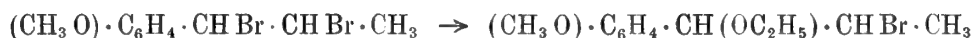
$$\begin{gathered} (CH_3O) \cdot C_6H_4 \,\vdots\, CHBr \cdot R \\ \downarrow \\ Br \cdot (CH_3) \cdots O{=}C_6H_4{=}CH \cdot R\,. \end{gathered}$$

(1) Berichte, *31* (1898), 1015.
(2) Berichte. *32* (1899), 309.
(3) Berichte. *32* (1899), 319.
(4) Berichte, *46* (1913), 3788.
(5) Berichte, *47* (1914), 590.

Nel caso invece dei derivati ossidrilati si formerebbero composti chinolici

$$HO \cdot C_6H_4 \cdot CH_2 \cdot Br \rightarrow O{=}C_6H_4{<}^{CH_2Br}_{H} \rightarrow HO \cdot C_6H_4 \cdot CH_2(OC_2H_5) .$$

I derivati alifatici da me presi in considerazione dovrebbero perciò fornire un termine intermedio del pari ossonico

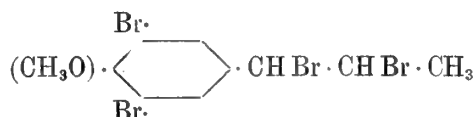
$$\begin{array}{c}(CH_3O) \cdot CH_2 \cdot Br \\ \downarrow \\ Br \cdot CH_3) \cdots O{=}CH_2\end{array} \quad ;$$

che le reazioni procedano realmente così, a mio modo di vedere, viene dimostrato da alcune esperienze eseguite ancora molti anni or sono da P. Hoering [1].

Questo chimico ha trovato che il bibromuro di anetolo per azione dell'alcool fornisce subito il prodotto

$$(CH_3O) \cdot C_6H_4 \cdot CHBr \cdot CHBr \cdot CH_3 \rightarrow (CH_3O) \cdot C_6H_4 \cdot CH(OC_2H_5) \cdot CHBr \cdot CH_3$$

e che nello stesso modo si comporta anche il tribromuro, nel quale un atomo di bromo è situato nell'anello aromatico, in posizione orto rispetto al metossile

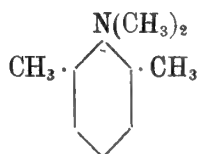
$$(CH_3O) \cdot C_6H_3Br \cdot CHBr \cdot CHBr \cdot CH_3 .$$

Quando invece due atomi di bromo si trovano in posizione orto rispetto al metossile

$$(CH_3O) \cdot \langle C_6H_2Br_2 \rangle \cdot CHBr \cdot CHBr \cdot CH_3$$

allora il composto rimane inalterato anche dopo 24 ore di ebollizione con alcool.

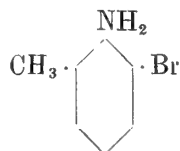
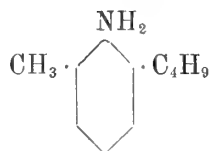
Secondo me ciò è dovuto all'impedimento sterico, determinato dai due atomi di bromo situati in posizione orto rispetto al metossile, che non permettono che si formi un derivato di ossonio intermedio.

Sebbene si tratti di sostanze molto diverse, questo comportamento trova una analogia nei risultati di alcune esperienze eseguite da Emilio Fischer ed A. Windhaus [2]; questi autori hanno infatti trovato che l'anilina ortobisostituita

$$CH_3 \cdot C_6H_3(N(CH_3)_2) \cdot CH_3$$

non è in grado di addizionare ioduro di metile per dare il corrispondente composto

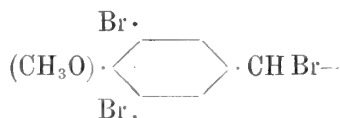
[1] Berichte, *37* (1904), 1542.
[2] Berichte, *33* (1900), 345 e 1967.

ammonico quaternario, nello stesso modo che le aniline ortobisostituite

$$CH_3 \cdot C_6H_3(NH_2) \cdot C_4H_9 \qquad\qquad CH_3 \cdot C_6H_3(NH_2) \cdot Br$$

non reagiscono con l'ioduro di metile.

Si tratta di impedimenti sterici che corrispondono perfettamente a quelli che prima ho considerati per il caso dei derivati alogenati di ossonio.

In questo caso però la differenza, che a prima vista sembra un paradosso, risiede nel fatto che il metossile ortobisostituito non permette l'eliminazione dell'alogeno situato nella catena laterale in posizione para

$$(CH_3O) \cdot C_6H_2(Br)_2 \cdot CHBr-$$

Analogie con il colore.

Gli esempî che finora ho riferiti riguardano il comportamento chimico; ma anche per quel che si riferisce alle proprietà fisiche, e precisamente al colore, si sono potute notare alcune analogie che sono molto interessanti.

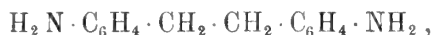
P. Friedländer e F. Risse [1] hanno posto in rilievo che i colori della cianina che differiscono per inserzione di $-CH{=}CH-$ fra i gruppi cromofori si rassomigliano fra di loro. I colori azoici che fornisce la benzidina

$$H_2N \cdot C_6H_4 \cdot C_6H_4 \cdot NH_2$$

si rassomigliano a quelli che derivano dal p–diamminostilbene

$$H_2N \cdot C_6H_4 \cdot CH{=}CH \cdot C_6H_4 \cdot NH_2$$

mentre invece ciò non si verifica più nel caso dei derivati del p-diamminodifenilmetano

$$H_2N \cdot C_6H_4 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot C_6H_4 \cdot NH_2 ,$$

nel quale i due residui aromatici sono riuniti dalla catena satura

$$-CH_2-CH_2-$$

Anche i derivati

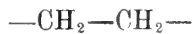
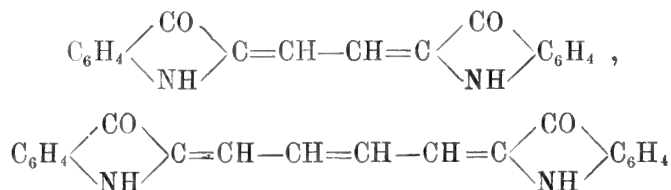
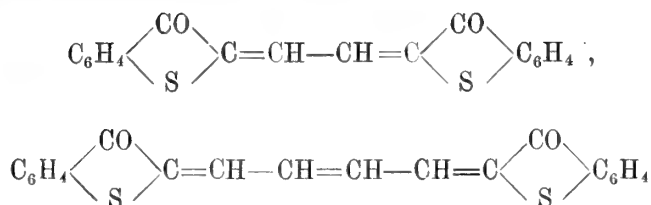
$$C_6H_4\left<{CO \atop NH}\right>C{=}CH-CH{=}C\left<{CO \atop NH}\right>C_6H_4 ,$$

$$C_6H_4\left<{CO \atop NH}\right>C{=}CH-CH{=}CH-CH{=}C\left<{CO \atop NH}\right>C_6H_4$$

[1] Berichte, *47* (1914), 1919.

e

$$C_6H_4\langle{}^{CO}_{S}\rangle C{=}CH{-}CH{=}C\langle{}^{CO}_{S}\rangle C_6H_4\ ,$$

$$C_6H_4\langle{}^{CO}_{S}\rangle C{=}CH{-}CH{=}CH{-}CH{=}C\langle{}^{CO}_{S}\rangle C_6H_4$$

nei loro caratteri rassomigliano rispettivamente all'indaco ed al tioindaco.

Si vede subito che in tutti questi casi i varî anelli sono congiunti fra loro direttamente, ovvero sono uniti per mezzo di catene non sature caratteristiche; da quanto finora si conosce sembra invece che le analogie di proprietà più non sussistano quando gli anelli sono congiunti da catene sature.

Le stesse considerazioni si possono estendere ai derivati del trifenilmetano.

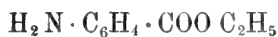
Azione fisiologica.

Sebbene l'azione fisiologica implichi manifestazioni di gran lunga più complesse di quelle che finora vennero considerate, tuttavia da quel poco che finora si conosce sembra che qualche analogia di comportamento sussista anche in questo senso.

Così, per es., l'etiluretano

$$H_2N \cdot COO\ C_2H_5$$

ha azione *ipnotica*, mentre d'altra parte l'etere etilico dell'acido p–amminobenzoico

$$H_2N \cdot C_6H_4 \cdot COO\ C_2H_5$$

nel quale gli stessi residui sono separati dall'anello aromatico, agisce da *anestetico*.

L'azione anestetica, come è noto, in alcuni casi è determinata dal residuo $C_6H_5 \cdot CO$— dell'acido benzoico; ma a tale riguardo bisogna anche ricordare che se questo residuo presenta analogie con quello dell'acido p–amminobenzoico, in altre reazioni invece esso si comporta in modo molto diverso da quest'ultimo.

L'idrazina

$$H_2N \cdot NH_2$$

nella quale i due atomi di azoto sono congiunti direttamente fra di loro, è velenosa.

Le diammine alifatiche invece, quali la tetrametilendiammina (putrescina), e la pentametilendiammina (cadaverina)

$$H_2N \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot NH_2$$

$$H_2N \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot NH_2$$

sono fisiologicamente inerti [1]. I caratteri tossici compariscono di nuovo nella parafenilendiammina

$$H_2N \cdot C_6H_4 \cdot NH_2$$

nella quale i due residui azotati sono separati dall'anello aromatico.

Sopra la cicloesandiammina

$$H_2N \cdot C_6H_{10} \cdot NH_2$$

non ho trovato dati nella letteratura; invece la tetraidrofenilendiammina

$$H_2N \cdot C_6H_8 \cdot NH_2$$

causa innalzamento di temperatura.

PUBBLICAZIONI DA CUI VENNE DESUNTA LA PRESENTE MEMORIA

A. Angeli. *Analogie fra derivati dell'ossigeno e dell'azoto.* Rend. Lincei, *19* (1910), 2° sem., 94.
» *Relazioni fra derivati dell'ossigeno e dell'azoto.* » *20* (1911), 1° sem., 635.
» *Analogie fra derivati dell'ossigeno e dell'azoto.* » *26* (1917), 1° sem., 480.
» *Sopra il comportamento di alcuni derivati del benzolo.* » *29* (1920), 1° sem., 376.
» *Sopra il comportamento di alcuni derivati aromatici.* » *30* (1921), 2° sem., 341.
» *Sopra le reazioni di alcuni derivati aromatici.* » *31* (1922), 1° sem., 481.
» » » » » » » *32* (1923), 1° sem., 443.
» » » » » » » *33* (1924), 1° sem., 109.

---

[1] Questo si spiega forse quando si pensi alle strette relazioni che le due sostanze hanno con l'ornitina e la lisina, che si ottengono nella demolizione delle sostanze proteiche, e che nei processi fermentativi, per eliminazione di anidride carbonica, si trasformano nelle diammine rispettive.

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume I-XXXIII. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª), Vol. XIV-XVII.
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI.

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti delle Adunanze Solenni. Vol. I-III.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. Vol. I-IV.
» » » » Boll. 1°-3°
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.
Annuario 1882-1924.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXIX.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-III.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia.
Indici degli Atti Accademici (in preparazione).

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1924

Notizie degli Scavi. Vol. XXI, in fascicoli trimestrali (1) . . .	L. 120,00
Rendiconti scienze morali. Vol. XXXIII, idem (1, 2, 3) . . .	» 54,00
Memorie, » » Vol. XVII, in fascicoli vari (1, 2, 3) . . .	prezzi vari
Monumenti antichi. Vol. XXIX, puntata 1ª (1) . . .	» 280,00
Rendiconti scienze fisiche, Vol. XXXIII, in fascicoli bimensili (1, 2, 3) . .	» 108,00
Memorie, » » Vol. XIV, in fascicoli vari (1, 2, 3) . . .	prezzi vari
Rendiconto adunanza solenne. Vol. III (fascicolo 10°) (1, 2, 3) . . .	» 8,00
Annuario (1, 2, 3) . . .	» 4,00

(1) In vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (4).
(2) » » » » » Maglione e Strini, Via Due Macelli 88, Roma (7).
(3) » » » l'Amministrazione dell'Accademia, Via della Lungara 10, Roma (29).

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO XIII.

Dott. RICCARDO SAPUPPO

SUL FENOMENO DELL'ASSORBIMENTO GRAVITAZIONALE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RELAZIONE

letta dal Corrisp. ARMELLINI, relatore, a nome anche del Socio LEVI-CIVITA, nella seduta del 4 maggio 1924, sulla Memoria del dott. RICCARDO SAPUPPO, intitolata: *Sul fenomeno dell'assorbimento gravitazionale.*

La Memoria del sig. Riccardo Sapuppo esamina il problema dell'attrazione nell'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale. Il lavoro si compone di una breve introduzione, dove l'A. ricorda le delicate esperienze del prof. Majorana, e di tre paragrafi successivi, nei quali vengono trattati i seguenti problemi:

I) Attrazione tra due punti, tra i quali sia interposta della materia assorbente

II) Attrazione fra una sfera omogenea ed un punto materiale esterno.

III) Attrazione tra due sfere omogenee.

La soluzione di ciascuna di tali questioni, serve di base all'esame della questione successiva, e l'A. giunge così alla conclusione precipua che se i raggi di due sfere sono molto piccoli rispetto alla loro distanza, esse si attireranno ancora con la legge di Newton, con la sola sostituzione delle loro masse reali con altre quantità che l'A. chiama masse apparenti.

La Commissione, giudicando che questo risultato non sia privo di merito, propone che la Memoria del sig. Sapuppo, nei paragrafi ora indicati, sia pubblicata negli Atti Accademici.

Sul fenomeno dello assorbimento gravitazionale.

Memoria di RICCARDO SAPUPPO

1. — Scopo della ricerca.

La presente ricerca trae la sua origine da una importantissima Nota pubblicata dal prof. Majorana nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », dove venivano esposti i risultati di nuove delicatissime indagini teoriche e sperimentali sulla natura intima del fenomeno della gravitazione.

A parte le speculazioni teoriche, un fatto nuovo veniva acquisito dall'esperienza, e cioè che la gravitazione universale si affievolisce nel propagarsi attraverso un mezzo ponderabile. Una sfera di piombo di gr. 1274, simmetricamente circondata da 104 kg. di mercurio, appariva perdere mgr. 0,00098 del suo peso.

Nell'intento di confermare con congegni più grandiosi l'esistenza di questo fenomeno, il Majorana ha eseguito una nuova serie di esperienze, sostituendo questa volta il piombo al mercurio come massa schermante, determinando la diminuzione di peso della sfera di piombo di gr. 1274 quando venga posta nel centro di una massa cubica di piombo di 9603 kg.

Questa diminuzione di peso è risultata di mgr. 0,002 circa; il valore della costante di smorzamento gravitazionale, per unità di spessore di materia traversato, e per unità di densità, risulta corrispondentemente

$$h = 2{,}8 \cdot 10^{-12} ,$$

ossia minore del valore che risultava in base alle prime esperienze, $h = 6{,}66{,}10^{-12}$; ma sempre, come vedesi, dello stesso ordine di grandezza [1].

Data la estrema sensibilità dei dispositivi sperimentali adottati, si può ritenere che la ipotesi dell'assorbimento gravitazionale ha il valido appoggio della conferma sperimentale.

Verranno peraltro eseguite, nell' Osservatorio solare del monte Wilson, nuove esperienze al riguardo e, date le condizioni eccezionalmente favorevoli di estrema

[1] Vedi Rendiconti, vol. XXX, anno 1921, 2° semestre, pp. 75-79.

quiete meccanica di cui si potrà usufruire, gli attesi risultati saranno addirittura decisivi.

Ma, precedendo il responso dell'esperienza, può essere còmpito della teoria quello di valutare quali conseguenze avrebbe nel campo dei fenomeni astronomici la considerazione dell'assorbimento gravitazionale, e cioè quale modificazione questo fenomeno introduce nella legge di Newton, base di tutte le teorie della meccanica celeste.

Questo appunto è lo scopo della presente Memoria.

2. — Legge dell'attrazione fra due punti, tra cui sia interposta della materia assorbente.

Consideriamo due punti P e P′ di masse m ed m'. Supponiamo che il punto P sia circondato da materia assorbente rispetto al flusso di energia che emana da P, secondo il concetto di Majorana. Sia r la lunghezza del segmento PP′ (cioè la distanza fra i due punti), λ la lunghezza di esso intercetta dalla materia cincondante il punto P. Ci proponiamo di trovare l'espressione della forza attrattiva che il punto P esercita sul punto P′.

Osserveremo anzitutto che il punto P, circondato da materia ponderabile, determina, nello spazio circostante, un campo di forza radiale centripeto, con centro nel punto P. Analogamente a quanto si fa in altre questioni di fisica, noi considereremo allora un elemento di superficie $d\Omega$ contenente il punto P′, normale alla congiungente PP′. Sia $d\Phi$ il flusso di energia attraverso tale elemento di superficie; il rapporto $\frac{d\Phi}{d\Omega}$ ci dà il valore del campo nel punto P′, ossia l'attrazione che il punto P esercita sull'unità di massa posta in P′. Cerchiamo dunque l'espressione di $d\Phi$. Considerando la massa m posta in P, noi possiamo supporre, secondo il concetto che informa questa ricerca [1], che essa emetta continuamente un certo flusso di energia complessivo Φ, uniformemente irradiato in tutte le direzioni. Consideriamo il cono che dal punto P proietta l'elemento di superficie $d\Omega$; e sia $d\sigma$ l'elemento di superficie sferica, di centro P e raggio 1, intercettato da questo cono. Se la massa m si trovasse nel vuoto, questo cono elementare sarebbe traversato dal flusso

$$\varphi = \Phi \frac{d\sigma}{4\pi} . \tag{1}$$

Ma se, come abbiamo supposto, il mezzo traversato dal flusso abbia, per una certa lunghezza λ, densità diversa da zero, si dovrà tener conto del fenomeno dell'assorbimento, e ciò potrà farsi nel seguente modo: Si consideri uno strato di spesse dx normale all'asse del cono anzidetto e distante x da P. Il flusso, che, nel caso di densità del mezzo nulla, era costante da strato a strato, ora invece è variabile, e, nello strato dx, subisce una variazione negativa in conseguenza dell'assorbimento.

[1] Cfr. Rendiconti, XXVIII, anno 1919 (Nota IV), pag. 416 e seg.

Si può, come in altri fenomeni fisici, supporre che tale assorbimento sia proporzionale allo spessore dx dello strato, alla densità del mezzo assorbente ϑ_v ed al valore totale del flusso alla distanza x. Si ha dunque

$$d\varphi = - h \varphi \vartheta_v dx ,$$

dove h è una costante di proporzionalità. Essa rappresenta il fattore di smorzamento gravitazionale, per unità di densità e di lunghezza. Separando le variabili nella precedente equazione differenziale, si ha

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = - h \vartheta_v dx,$$

che integrata, supponendo il mezzo a densità costante, dà

$$\log \varphi = - h \vartheta_v x + \log C ,$$

avendo indicata con log C la costante di integrazione.

Posto $h\vartheta_v = H$ e passando dai logaritmi ai numeri, avremo allora

$$\varphi = C e^{-Hx} .$$

Il valore della costante C può determinarsi osservando che, per $x = 0$, poichè l'assorbimento nell' interno della massa puntiforme m può evidentemente ritenersi nullo, deve essere verificata la (1), e quindi sarà

$$C = \Phi \frac{d\sigma}{4\pi} ,$$

per cui avremo

$$\varphi = \Phi \frac{d\sigma}{4\pi} e^{-Hx} .$$

Per ottenere, da questa, l'espressione di $d\Phi$, basterà porre nel secondo membro $x = \lambda$, poichè nel tratto compreso fra $x = \lambda$ ed $x = r$ non si ha materia ponderabile e quindi nemmeno assorbimento, e perciò il flusso che attraversa il cono alla distanza r è uguale a quello che lo attraversa alla distanza λ. Si ha dunque

$$d\Phi = \frac{\Phi}{4\pi} \frac{d\Omega}{r^2} e^{-H\lambda} ,$$

avendo posto, come è noto,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{r^2} .$$

L'azione attrattiva, che il punto P esercita sull'unità di massa in P', vale, come si è detto, $\frac{d\Phi}{d\Omega}$: e quindi l'azione sulla massa m', posta in P', varrà

$$F = \frac{\Phi}{4\pi} m' \frac{e^{-H\lambda}}{r^2} . \tag{2}$$

Posto in questa $H = 0$, cioè supponendo nullo l'assorbimento, risulta

$$F = \frac{\Phi}{4\pi} m' \frac{1}{r^2} ; \tag{2'}$$

la legge d'attrazione diventa perciò una legge di proporzionalità al quadrato inverso della distanza, ossia la legge newtoniana.

Per effetto invece dell'assorbimento, dovuto al fatto che il punto P non è isolato ma circondato da materia, questa legge va modificata tenendo conto di un certo fattore esponenziale. Così, con altre parole, noi possiamo esprimere questo risultato dicendo che la considerazione del fenomeno dell'assorbimento gravitazionale non infirma l'esattezza della legge di Newton, ma solo ne precisa il carattere di legge della meccanica limite del punto materiale isolato (non circondato, cioè, da altra materia ponderabile). A questo concetto potremo informare la presente ricerca.

Il flusso totale Φ che emana dal punto P, nell'ordine delle considerazioni svolte dal Majorana, è proporzionale alla massa m del punto P e perciò esprimibile con Km. La (2)' diviene perciò

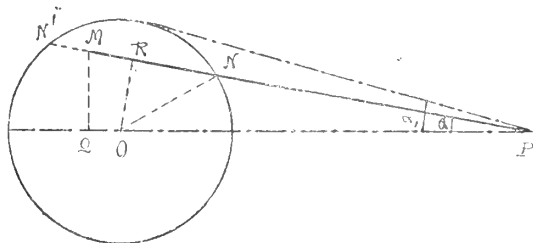
$$F = \frac{K}{4\pi} m\, m' \frac{1}{r^2}$$

e da questa, posto $m = m' = 1$, $r = 1$, risulta che la costante $\frac{K}{4\pi}$ rappresenta la forza attrattiva fra due masse unitarie *poste nel vuoto* all'unità di distanza, ossia la costante f di gravitazione. La (2) può quindi scriversi anche

$$F = f m\, m' \frac{1}{r^2} e^{-H\lambda} . \tag{3}$$

3. — Ricerca dell'attrazione esercitata da una sfera assorbente omogenea su di un punto materiale esterno.

Pervenuti così alla legge espressa dalla (3), passiamo a determinare con essa l'attrazione esercitata da una sfera assorbente omogenea, di raggio R e densità ϑ_v, su di un punto P esterno ad essa, di massa m, posto alla distanza r dal centro della sfera.

Consideriamo un elemento della sfera di massa dm posto in un punto generico M.

Sia ϱ la sua distanza dal punto P, e sia λ la lunghezza del segmento di ϱ compreso tra l'elemento dm e la superficie della sfera, ossia MN.

L'attrazione dell'elemento di massa dm in M, su P, sarà espressa da

$$fm\,dm\,\frac{e^{-H\lambda}}{\varrho^2}\,.$$

La componente di questa attrazione secondo PO, essendo O il centro della sfera, sarà dato da

$$fm\,dm\,\frac{e^{-H\lambda}}{\varrho^2}\cos\alpha\,,$$

essendo α l'angolo formato dalla PM con PO. Per ragioni di simmetria, l'attrazione della sfera intera sul punto P sarà diretta secondo PO, e perciò la sua grandezza sarà data da

$$\text{(4)}\qquad F = fm\iiint dm\,\frac{1}{\varrho^2}\,e^{-H\lambda}\cos\alpha\,,$$

l'integrale triplo essendo esteso a tutta la sfera. Si tratta dunque di calcolare questo integrale.

A tale scopo osserviamo anzitutto che ϱ può esprimersi in funzione di λ e di α. Si ha infatti

$$\text{(5)}\qquad \varrho = l + \lambda\,,$$

essendo

$$\text{(6)}\qquad l = r\cos\alpha - \sqrt{R^2 - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}\,.$$

Così dunque la posizione del punto M può determinarsi per mezzo delle tre variabili λ, α, $\tilde{\omega}$, essendo $\tilde{\omega}$ l'angolo che il piano determinato dai tre punti O, P, M forma con un piano fisso di riferimento passante per la retta OP. L'elemento di massa dm potrà allora così esprimersi:

$$dm = \vartheta_v\,(l+\lambda)\,d\alpha\cdot d\lambda\cdot(l+\lambda)\,\mathrm{sen}\,\alpha\,d\tilde{\omega}\,,$$

ossia

$$\text{(7)}\qquad dm = \vartheta_v\cdot(l+\lambda)^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,d\alpha\,d\lambda\,d\tilde{\omega}\,.$$

Sostituendo nella (4), risulta

$$F = fm\,\vartheta_v\int_0^{\alpha_1}\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,d\alpha\int_0^{2\sqrt{R^2-r^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}}e^{-H\lambda}\,d\lambda\int_0^{2\pi}d\tilde{\omega}\,,$$

essendo

$$\alpha_1 = \mathrm{arc\,sen}\,\frac{R}{r}$$

ed essendo $2\sqrt{R^2 - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}$ il massimo valore di λ che corrisponde ad un valore determinato di α, ossia la lunghezza del segmento NN', uguale a due volte quella del segmento NR.

La integrazione rispetto a $\tilde{\omega}$ è immediata e dà come risultato 2π; pure immediata è la integrazione rispetto a λ, e si ottiene

$$\int_0^{2\sqrt{R^2-r^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}}e^{-H\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{H}\left(1 - e^{-2H\sqrt{R^2-r^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}}\right).$$

Pertanto

$$(9)\quad F = 2\pi\, fm\, \vartheta_v \frac{1}{H}\left(\int_0^{\alpha_1} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, d\alpha - \int_0^{\alpha_1} e^{-2H\sqrt{R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\alpha}} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, d\alpha\right).$$

Ora

$$\int_0^{\alpha_1} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha_1$$

ossia, per la (8),

$$(10)\qquad \int_0^{\alpha_1} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}.$$

Osserviamo, poi, che

$$J = -\int e^{-2H\sqrt{R^2 - r^2\operatorname{sen}^2\alpha}} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, d\alpha = \int e^{-2H\sqrt{R^2 - r^2 + r^2\cos^2\alpha}} \cos\alpha \cdot d(\cos\alpha)$$

e, ponendo

$$4H^2(r^2 - R^2) = a^2\ ,\ 4H^2 r^2 = b^2\ ,\ \cos\alpha = x\ ,$$

può anche scriversi

$$J = \int e^{-\sqrt{b^2x^2 - a^2}}\, x\, dx\,.$$

Si ponga

$$\sqrt{b^2x^2 - a^2} = z\ ,\ x = \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{b}\ ,\ dx = \frac{z\, dz}{b\sqrt{z^2 + a^2}}\ ,$$

da cui

$$x\, dx = \frac{z\, dz}{b^2}\ ,$$

ed allora avremo

$$J = \frac{1}{b^2}\int e^{-z} z\, dz = -\frac{1}{b^2} e^{-z}(1 + z)\,.$$

Vediamo ora quali sono i limiti di z che corrispondono ai limiti 0 ed α_1 di α. Per $\alpha = 0$, si ha $\cos\alpha = 1$ e quindi

$$z = \sqrt{b^2 - a^2} = 2HR\,.$$

Per $\alpha = \alpha_1$, si ha $\cos\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r}$ e quindi

$$z = \sqrt{b^2\frac{r^2 - R^2}{r^2} - a^2} = 0\,.$$

L'integrazione rispetto a z va pertanto estesa da $z = 2HR$ a $z = 0$, e si ottiene

$$(11)\qquad [J]_{z=2HR}^{z=0} = \frac{1}{b^2}\left[-1 + e^{-2RH}(1 + 2RH)\right].$$

Sostituendo (10) ed (11) nella (9), risulta

$$F = 2\pi\, fm\, \vartheta_v \frac{1}{H}\left[\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2} + \frac{1}{4H^2r^2}\left\{-1 + e^{-2RH}(1 + 2RH)\right\}\right].$$

Questa espressione può anche scriversi così:

$$F = \pi f m \vartheta_v \frac{1}{r^2}\left[\frac{R^3}{HR} + \frac{1}{2}\frac{R^3}{H^3 R^3}\{-1 + e^{-2RH}(1 + 2RH)\}\right].$$

Posto $p = RH = hR\vartheta_v$, si ottiene

$$F = fm \cdot \pi\vartheta_v R^3\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^3} + e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^3}\right)\right]\cdot\frac{1}{r^2}. \tag{12}$$

Ora

$$\pi\vartheta_v R^3\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^3} + e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^3}\right)\right]$$

è l'espressione della massa apparente di una sfera assorbente omogenea di raggio R, densità vera ϑ_v ed avente un coefficiente di smorzamento h [1]. Pertanto, indicando con M_a la massa apparente della sfera attraente il punto P, avremo

$$F = f\frac{M_a m}{r^2}. \tag{13}$$

4. — Ricerca dell'attrazione che si esercita tra due sfere assorbenti omogenee.

In base al risultato ottenuto nel num. prec., proponiamoci di determinare l'attrazione che la sfera assorbente omogenea di raggio R e densità vera ϑ_v, precedentemente considerata, esercita su di un'altra sfera assorbente omogenea di raggio R' e densità vera ϑ'_v, il cui centro si trovi alla distanza r dal centro della prima sfera.

Sia M_a la massa apparente della prima sfera; la sua massa vera sarà

$$M_v = \frac{M_a}{\psi_s}$$

se con ψ_s si indica il rapporto tra la massa apparente e la massa vera della sfera considerata, conformemente alle notazioni del Majorana.

Siano M'_a ed

$$M'_v = \frac{M'_a}{\psi_p}$$

le analoghe quantità per la seconda sfera, ψ_p indicando l'analogo rapporto tra massa apparente e massa vera.

(1) Cfr. Majorana, loc. cit., pag. 420, formula (15).

Se la massa M'_v fosse puntiforme e concentrata nel centro della seconda sfera, l'attrazione, che su di essa eserciterebbe la prima sfera, sarebbe eguale, conformemente al risultato del num. prec., a

$$\Phi = f\frac{M_a M'_v}{r^2} = f M_a \frac{M'_a}{\psi_p}\frac{1}{r^2}\,.$$

Ma questa massa M'_v si trova invece distribuita omogeneamente in una sfera di raggio R′, e perciò l'attrazione che su di essa esercita la prima sfera, che è l'attrazione cercata F, sarà minore di Φ, in conseguenza dello smorzamento dovuto alla materia ponderabile distribuita nella sfera R′ [1].

Pertanto, indicando con ε un fattore minore dell'unità, possiamo scrivere

$$F = f M_a \frac{M'_a}{\psi_p}\frac{1}{r^2}\varepsilon = \varepsilon\Phi\,. \tag{14}$$

Supponiamo, ora, che la massa M_v sia puntiforme e concentrata nel centro della prima sfera; l'attrazione, che su di essa eserciterebbe la seconda sfera, sarebbe allora uguale a

$$\Phi' = f\frac{M'_a M_v}{r^2} = f M'_a \frac{M_a}{\psi_s}\frac{1}{r^2}\,.$$

Ma questa massa M_v si trova invece distribuita omogeneamente in una sfera di raggio R; e perciò l'attrazione, che su di essa esercita la seconda sfera, sarà, per la stessa ragione esposta prima, minore di Φ' e la si può porre uguale ad

$$F' = f M'_a \frac{M_a}{\psi_s}\frac{1}{r^2}\varepsilon' = \varepsilon'\Phi'\,, \tag{15}$$

essendo ε' minore dell'unità.

Ma, per il principio dell'azione e reazione, $F = F'$, ossia

$$f M_a \frac{M'_a}{\psi_p}\frac{1}{r^2}\varepsilon = f M'_a \frac{M_a}{\psi_s}\frac{1}{r^2}\varepsilon'\,,$$

cioè

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\psi_p}{\psi_s}\,.$$

Se con K si indica una costante di proporzionalità, sarà allora

$$\varepsilon = K\psi_p\,,$$
$$\varepsilon' = K\psi_s\,,$$

e quindi la (14) o la (15) forniscono

$$F = \mu\frac{M_a M'_a}{r^2}\,, \tag{16}$$

avendo posto $Kf = \mu$.

È facile vedere che questa costante μ, che figura nella (16), è proprio la costante della gravitazione f, ossia che $K = 1$. Infatti, la (16) mostra che l'attrazione fra due sfere assorbenti omogenee dipende dalle loro masse apparenti, ma non dai loro raggi. Se allora noi supponiamo che le due sfere siano di raggi sempre più piccoli,

[1] Se lo smorzamento non avesse luogo, l'attrazione sarebbe la stessa di prima, per un ben noto teorema.

avendo sempre però le stesse masse apparenti, l'attrazione che fra di esse si esercita (per la stessa distanza r) sarà sempre la stessa. Al limite, le due masse saranno di raggi infinitamente piccoli, ossia puntiformi, e quindi l'attrazione, ancor sempre eguale a $\mu \frac{M_a M'_a}{r^2}$, potrà porsi eguale, conformemente a quanto si disse nel numero 2, ad $f \frac{M_a M'_a}{r^2}$ (al limite, le masse vere e le masse apparenti sono uguali fra di loro). Se ne conclude $\mu = f$.

Pertanto la (16) potrà scriversi così:

$$F = f \frac{M_a M'_a}{r^2} . \tag{17}$$

Si viene dunque alla seguente conclusione:

Due sfere assorbenti omogenee si attraggono proporzionalmente alle loro masse *apparenti* ed in ragione inversa del quadrato della loro distanza. La costante di proporzionalità è ancora la nota costante f della gravitazione.

Se il fenomeno dell'assorbimento gravitazionale non avesse luogo, le due sfere si attrarrebbero, come è noto, come se le loro masse (vere) fossero raccolte nei loro centri, e sarebbe quindi

$$F = f \frac{M_v M'_v}{r^2} . \tag{18}$$

Per effetto dunque del fenomeno dell'assorbimento gravitazionale, l'attrazione fra due sfere omogenee è ancor sempre newtoniana, ma essa si esercita tra le loro masse apparenti e non tra le loro masse vere.

Il risultato precedentemente ottenuto, si può applicare al caso dell'attrazione che il Sole esercita sui pianeti, quando si riguardino, in prima approssimazione, l'uno e gli altri come corpi sferici omogenei nei quali si verifichi il fenomeno dell'assorbimento gravitazionale.

È noto come in Astronomia si effettua la misura delle masse dei varî corpi componenti il nostro sistema, deducendole dalle perturbazioni dei loro movimenti dovute alla loro reciproca attrazione. Ora, la teoria delle perturbazioni dei movimenti celesti si fonda, com'è noto, sulla legge di Newton; ed allora, se noi ammettiamo l'esistenza del fenomeno dell'assorbimento gravitazionale, dovremo concludere, in base al risultato precedente, che le masse, quali vengono misurate in Astronomia, sono le masse apparenti. Ma poichè per queste, come si è visto, l'attrazione si esercita allo stesso modo di quello che si ammette nello schema newtoniano per le masse vere (non tenendo conto del fenomeno dell'assorbimento gravitazionale), così possiamo concludere che: *Nell'ordine di approssimazione in cui si riguardano i corpi celesti come corpi sferici omogenei, la considerazione del fenomeno dello assorbimento gravitazionale porta soltanto a precisare nella legge di Newton il concetto di massa con quello di massa apparente.*

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume I-XXXIII. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII.
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI.

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti delle Adunanze Solenni. Vol. I-III.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. Vol. I-IV.
» » » » Boll. 1°-3°
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.
Annuario 1882-1924.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXIX.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-III.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia.
Indici degli Atti Accademici (in preparazione).

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1924

Notizie degli Scavi. Vol. XXI, in fascicoli trimestrali (1)	L.	**120,00**
Rendiconti scienze morali. Vol. XXXIII, idem (1, 2, 3)	»	**54,00**
Memorie, » » Vol. XVII, in fascicoli varî (1, 2, 3)		prezzi varî
Monumenti antichi. Vol. XXIX, puntata 1ª (1)	»	**280,00**
Rendiconti scienze fisiche, Vol. XXXIII, in fascicoli bimensili (1, 2, 3)	»	**108,00**
Memorie, » » Vol. XIV, in fascicoli varî (1, 2, 3)		prezzi varî
Rendiconto adunanza solenne. Vol. III (fascicolo 10°) (1, 2, 3)	»	**8,00**
Annuario (1, 2, 3)	»	**4,00**

(1) In vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (4).
(2) » » » » » Maglione e Strini, Via Due Macelli 88, Roma (7).
(3) » » » l'Amministrazione dell'Accademia, Via della Lungara 10, Roma (29).

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO XIV.

RICCARDO VERSARI

LA MORFOGENESI DEI VASI SANGUIFERI

DELLA MEMBRANA PUPILLARE E DELLA ZONA DEI PROCESSI CILIARI NELL'OCCHIO DI *SUS SCROPHA*

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

La morfogenesi dei vasi sanguiferi della membrana pupillare e della zona dei processi ciliari nell'occhio di Sus Scropha.

Memoria del Corrispondente R. VERSARI

presentata nella seduta del 6 maggio 1923

Mi sono proposto di mettere in evidenza nell'occhio embrionale di *Sus scropha* le vie di afflusso e di scarico del sangue nella membrana pupillare e nella zona dei processi ciliari per potere confermare alcuni dei fatti fondamentali che ho già scoperto a proposito della morfogenesi dei vasi sanguiferi dell'occhio degli embrioni e dei feti umani.

Le nozioni bibliografiche necessarie per chiarire lo scopo di queste ricerche sono le stesse esposte in un mio precedente lavoro (¹); ed anche la tecnica seguita nella iniezione con gelatina al bleu di Prussia degli occhi di *Sus scropha*, nella loro depigmentazione e nella confezione dei preparati, è la stessa usata per gli occhi degli embrioni umani.

Occhi di embrioni lunghi mm. 19. — Il vaso anulare (che non deve assolutamente essere indicato, come fanno alcuni autori, col nome di arteria anulare, poichè quest'ultima denominazione ne svisa la sua vera natura) appare ben sviluppato e come vaso di chiusura, ossia come il vaso più distale della primordiale coriocapillare, della quale contribuisce a delimitare uno dei lati della fila di maglie vascolari più vicine al margine della cornea embrionale. Con esso sono in connessione vasi sanguiferi che si trovano nel tessuto situato a ridosso della faccia anteriore del cristallino. Il campo corrispondente all'area del parenchima corneale appare adunque, con la diafanizzazione, occupato in parte da vasi sanguiferi; ma non si riesce bene a distinguere la loro distribuzione, a causa di macchie di gelatina colorata prodottesi in conseguenza di rottura di vasi.

Invece la rete vascolare della coriocapillare è riuscita molto bene iniettata e si possono scorgere nettamente i vasi sanguiferi che delimitano le maglie ed anche la forma di queste ultime che è delle più svariate, poichè alcune sono, specialmente nell'emisfero

(¹) R. Versari, *Le fasi di sviluppo e di regresso della « tunica vasculosa lentis » e la morfogenesi dei vasi sanguiferi nei processi ciliari e nell'iride dell'occhio dell'uomo* (in « Ricerche di Morfologia », vol. III, fasc. II, 1923).

posteriore dell'occhio, piccolissime, rotondeggianti o poligonali e delimitate da vasi sanguiferi grossi; altre sono molto più grandi ed anch'esse di forma rotondeggiante, ovalare od anche poligonale. Nell'emisfero anteriore invece predominano le maglie di forma poligonale, ed alcune tendono a divenire di forma rettangolare, col maggior diametro disposto nel senso dei meridiani.

Le arterie ciliari lunghe posteriori sono presenti, ma hanno, specialmente nell'emisfero anteriore, un calibro esilissimo. Si vedono staccarsi da esse, durante il loro percorso, rami anche abbastanza grossi per la coriocapillare, ma malauguratamente non si riesce a scoprire nettamente il modo col quale terminano anteriormente, poichè in qualche occhio l'iniezione cessa bruscamente, non essendo più oltre penetrata la gelatina, ed in qualche altro si riesce solamente a vedere che ciascuna arteria si biforca e si dispone parallelamente all'embrionale cerchio corneale. Si vede anche qualche ramoscello staccarsi dai rami di divisione e portarsi nel tessuto situato innanzi al cristallino, ma non si riesce a scoprire come si comporti. Lungo il loro percorso nell'occhio i tronchi delle arterie ciliari posteriori lunghe possono talora formare come degli occhielli di forma allungata, ma spesso rotondeggiante, dai quali si irradiano a guisa di raggi di una stella numerosi rami per la coriocapillare. Al di là dall'occhiello il tronco arterioso riprende il suo cammino, ma ne può ancora formare qualche altro prima di raggiungere la sua biforcazione. Poichè non è stato possibile mettere nettamente in evidenza il comportamento dei rami terminali delle arterie ciliari lunghe posteriori, e l'origine di vasellini che sono in connessione col vaso anulare, nulla si può ancora dire di preciso sulla disposizione dei vasi sanguiferi della membrana pupillare, ed è questa la ragione per la quale non viene riportata alcuna figura di questo stadio.

Un fatto fondamentale risalta fin da questo stadio dello sviluppo, ossia che le intime e numerose connessioni fra il vaso anulare e la coriocapillare primordiale dimostrano che il vaso forma parte integrante di quest'ultima, costituendone la chiusa distale, e fanno escludere che il vaso anulare stesso possa essere considerato come l'inizio del futuro grande cerchio arterioso dell'iride, come asseriscono alcuni autori. E poichè si vedono dei ramoscelli delle arterie ciliari lunghe posteriori penetrare nel territorio della membrana pupillare, vien subito fatto di pensare che anche negli occhi embrionali di *Sus scropha* la membrana riceva fin da principio il sangue da tali arterie, e che i vasellini che sono in connessione col vaso anulare rappresentino i vasi reflui dalla membrana pupillare.

Occhi di embrioni, lunghezza vert. coccig. mm. 25. — Le arterie ciliari posteriori lunghe sono riuscite iniettate fino ai loro rami terminali. Esse spiccano per il loro piccolissimo calibro. L'una di esse (fig. 1) giunge indivisa fino ad una certa distanza dal margine corneale e qui si biforca, ma non già con le caratteristiche osservate nell'occhio embrionale umano. Essa infatti non si allarga subito a forchetta coi suoi due rami di divisione, ma tali rami procedono ancora verso l'innanzi, allontanandosi di poco l'uno dall'altro e scambiandosi delle anastomosi. Non molto lontano dal margine del tessuto corneale i due rami divergono scorrendo abbastanza vicino e parallelamente, ma in un piano più superficiale, ad un altro vaso che si riconosce subito appartenere alla primitiva coriocapillare, della quale costituisce la chiusa, non già come arteria, ma come vaso anulare (fig. 1, *Va.*).

L'altra arteria ciliare posteriore lunga (fig. 1) si divide in due rami terminali molto prima dell'altra. Questi ultimi, decorrendo parallelamente nello spessore del mesoderma che forma la sclerotica fino non molto lontano dal punto nel quale incomincia il tessuto corneale e fin quasi a raggiungere il livello dell'istmo del bulbo, quasi improvvisamente si divaricano e scorrono a poca distanza e parallelamente, ma in un piano più superficiale, al vaso anulare che è situato fra l'orlo della vescicola ottica ed il cristallino e che è in connessione intima colla coriocapillare della quale forma, come già si è detto, il vaso più distale o di chiusura. Tale vaso anulare, che continua ancora ad avere un calibro più ragguardevole degli altri vasi che delimitano le maglie della coriocapillare, prende però parte alla formazione di uno dei lati del primo rango delle maglie della coriocapillare stessa. Osservando i rami di divisione delle arterie ciliari posteriori lunghe, si vede che esse forniscono anzitutto qualche ramo che, tenendo su per giù lo stesso comportamento dei rami che si dipartono dai due rami di divisione delle arterie ciliari posteriori lunghe dell'occhio embrionale umano, si portano ad irrorare la membrana pupillare. Anche la estremità di ciascun ramo terminale si ricurva alla stessa guisa di quella dell'occhio umano e non riesce a formare coi rami terminali dell'altra arteria ciliare posteriore lunga un anello completo, cosicchè non si può ancora parlare di un cerchio arterioso completo, ma bensì di due semicerchi anch'essi incompleti.

Le manualità che ho dovuto eseguire per ottenere un preparato bene iniettato di emisfero anteriore di un occhio così piccolo, e specialmente quelle della depigmentazione, sono state laboriosissime. Il cristallino si è distaccato, ma sono fortunatamente rimasti in posto i vasi accollati alla sua faccia anteriore. Si può così vedere nettamente (fig. 1) che ciascuno dei ramoscelli collaterali dei rami principali di biforcazione delle arterie ciliari posteriori lunghe, penetrando nella membrana pupillare, si sfiocca in una rete fatta da vasi sottili delimitanti maglie abbastanza ampie e di forma irregolare, dalle quali si originano dei vasellini che, dirigendosi, con cammino inverso a quello dei ramoscelli arteriosi, verso la periferia della membrana, vanno ad imboccare nel vaso anulare. Alcuni di essi però non mettono foce direttamente nel vaso anulare, ma in vasi che provengono dall'interno dell'occhio ed appartengono alla porzione media o capsulo-pupillare della *tunica vasculosa lentis*. Tali vasi si vedono nella figura 1 formare un piccolo arco prima di imboccare nel vaso anulare, e si sono spezzati quasi tutti allo stesso livello quando si è staccato il cristallino durante le manualità della preparazione.

Tenendo presente quanto io ho riscontrato in un occhio di embrione umano di 32 mm. di lunghezza vert. coccig. a proposito del comportamento dei vasi della membrana pupillare, e che è riportato nella fig. 6 della tavola I del precedente lavoro, non resta alcun dubbio che i vasi della membrana pupillare, che si vedono sboccare nel vaso anulare appartenente alla corio-capillare, sono dei vasi che portano via il sangue fornito alla membrana pupillare stessa dai rami delle arterie ciliari posteriori lunghe. Come si può constatare nella fig. 1, il vaso anulare ed i due semicerchi incompleti formati dai rami terminali delle arterie ciliari posteriori lunghe si trovano a brevissima distanza fra loro. I rami di divisione delle due arterie sono però situati in un piano più superficiale del vaso anulare ed un poco più prossimalmente; ma, considerata la difficoltà di ottenere delle iniezioni complete dei vasi in epoche così iniziali e specialmente delle arterie ciliari posteriori lunghe, e quella di riuscire a depigmentare perfettamente gli

occhi per ottenere una completa diafanizzazione, si comprende come i rami delle arterie ed il vaso anulare possano non essere stati veduti separati ed indipendenti gli uni dagli altri da precedenti ricercatori, e come si sia potuto quindi prendere abbaglio sulla vera origine e sul modo di terminazione dei vasi sanguiferi che vanno alla membrana pupillare o che ne sortono, giungendo fino al punto di credere che i rami delle arterie ciliari posteriori lunghe si inosculino nel vaso anulare per formare, assieme ad esso, il grande cerchio arterioso dell'iride (H. Fuchs), oppure che dal vaso anulare si originino rami arteriosi destinati ad irrorare la membrana pupillare, indicando il vaso anulare stesso come «il vaso madre della membrana pupillare» (Seefelder).

Occhi di embrione, lunghezza vert. coccig. mm. 37. — In confronto del precedente stadio dello sviluppo, le arterie ciliari posteriori lunghe forniscono in modo più complicato i loro rami alla membrana pupillare. Oltre ai primitivi rami di divisione di ciascuna arteria ciliare posteriore lunga, i rami collaterali delle quali si originano con curve più o meno accentuate assumendo poi subito un percorso quasi rettilineo per formare in fine ciascuno una curva terminale e sfioccarsi in un reticolo più complicato (fig. 2) che non quello degli occhi degli embrioni di mm. 25, si è sviluppato da entrambe le arterie, ed in vicinanza del punto della loro primitiva divisione nei due rami terminali, un altro ramo, e talora anche due (fig. 2) che, dopo essersi diretti, per un percorso non molto lungo, parallelamente al margine della zona ciliare, si ripiegano verso il centro della faccia anteriore del cristallino alla stessa guisa dei rami terminali delle due arterie ciliari posteriori lunghe e, con lo stesso andamento, vanno a prendere parte alla costituzione della rete vascolare capillare della membrana pupillare. Da questa rete, che giunge fino al centro della membrana, ossia fino in corrispondenza del polo anteriore del cristallino, si originano numerosi rami i quali, con percorso ondulato, si portano verso la zona ciliare, sul limite della quale non si riesce però più a rinvenire il vaso anulare. Quest'ultimo è scomparso completamente come entità anatomica, ed al suo posto si trova una elegante rete capillare che occupa la zona dei futuri processi ciliari (fig. 2 *Rcc*) e che spicca per i caratteri delle sue maglie in confronto della rete vascolare della restante corio-capillare. È dessa che riceve lo sbocco dei vasi che provengono dalla porzione media o capsulo-pupillare della *tunica vasculosa lentis* e che nella figura 2 si vedono spezzati nel punto nel quale formano la curva che anche nella figura degli occhi degli embrioni lunghi mm. 25 si vede precedere il loro imbocco nel vaso anulare. Questi vasi, che con l'andata fuori di posto del cristallino durante le manualità della tecnica usata, sono stati spezzati, quando noi osserviamo i preparati dalla faccia interna dell'emisgfero anteriore dell'occhio, appaiono recisi nettamente e si riesce a vedere le loro boccucce recise ripiene di gelatina; nei preparati osservati dalla superficie esterna delle tuniche dell'occhio appaiono invece come degli uncini ricurvi spezzati, come si è detto, nel punto nel quale, provenendo dall'interno dell'occhio e dalla porzione media della *tunica vasculosa*, formano una curva molto manifesta per andare a sboccare nel reticolo capillare ciliare.

I vasi reflui dalla membrana pupillare, in parte sboccano nei tronchicini (che nella fig. 2 appaiono spezzati) dei vasi della *tunica vasculosa lentis* poco prima che essi immettano nella rete capillare sopra menzionata e che occupa la futura zona dei processi ciliari, ed in parte sboccano direttamente nella rete capillare stessa. Essi

hanno, in quest'epoca dello sviluppo, assunto un percorso molto più ondulato che non negli embrioni dello stadio precedente, e sono anche divenuti più robusti e più numerosi.

Mi preme richiamare l'attenzione del lettore sulla scomparsa del vaso anulare, in quanto che è accaduto negli occhi di embrioni di *Sus scropha* di 37 mm. di lunghezza vert. coccig. ciò che ho riscontrato accadere anche negli occhi di embrioni umani di sei cm. di lunghezza vert. coccig., nei quali il vaso anulare è stato talmente scompaginato nella sua integrità, da non essere più riconoscibile come tale, e si rinviene invece una rete vascolare che io ho indicato col nome di *rete ciliare* e che anche negli occhi di *Sus scropha*, dello stadio che descrivo, indico con questo nome (fig. 2 *Rcc*). Questa particolarità, che viene pienamente a confermare quanto ho osservato negli occhi di embrioni umani, a proposito del vaso anulare, mette sempre più in luce l'errore di quegli osservatori che hanno creduto che il vaso anulare potesse divenire il grande cerchio arterioso dell'iride, mentre invece esso non ha, come confermano anche le osservazioni da me fatte in *Sus scropha*, che una esistenza transitoria.

Il reticolo capillare della futura zona dei processi ciliari si arresta al confine distale di tale zona, mentre nel suo confine prossimale si confonde e si continua nella coriocapillare; in questo stadio dello sviluppo noi lo vediamo disposto in un sol piano e formato da maglie molto più piccole che non quelle della restante coriocapillare e di forma prevalentemente rotondeggiante od anche poligonale. Le maglie della rete della coriocapillare hanno, in confronto dello stadio precedente, subito delle modificazioni di forma, in quanto che verso l'equatore dell'occhio si sono molto allungate nella direzione dei meridiani. Si vedono molto bene le zone nelle quali si originano le vene vorticose (fig. 2 *Vv*).

Occhi di feto con sette cm. di lunghezza vert. coccig. — Le arterie ciliari posteriori lunghe, che già negli occhi di embrioni lunghi mm. 37 avevano assunto un calibro superiore a quello degli occhi di embrioni lunghi mm. 25, hanno ancora aumentato il loro calibro. Durante il loro percorso continuano a fornire rami alla coroide e qualcuno di tali rami è anche di calibro cospicuo e decorre per un lungo tratto parallelamente e molto vicino al tronco generatore, fornendo di tratto in tratto grossi rami alla coroide. Il tronco di ciascuna arteria, dopo aver formato frequentemente un occhiello di forma allungata, si biforca abbastanza lontano dalla zona ciliare e prosegue coi due rami di divisione quasi paralleli (fig. 3) il suo percorso sino in vicinanza della zona ciliare dove tali rami si allontanano l'uno dall'altro e decorrono in corrispondenza della zona ciliare stessa ma in un piano più superficiale del reticolo capillare ciliare, fornendo due od anche tre rami collaterali che con una curva alquanto brusca penetrano, tenendo un percorso quasi rettilineo e rigido, entro la membrana pupillare. I rami collaterali però non si originano da ciascun ramo principale di divisione dell'arteria ciliare nella stessa guisa dell'occhio umano, ossia dal punto nel quale il ramo principale di divisione di ciascuna arteria s'incurva per penetrare nella membrana pupillare, ma invece ad una discreta distanza da tal punto e dalla superficie del vaso rivolta prossimalmente (fig. 3). dopo di che camminano parallelamente al tronco generatore dando così l'impressione della formazione di una forchetta la cui asta prossimale passa oltre all'asta distale che s'incurva per penetrare nella membrana pupillare. Dopo un percorso, che può variare di estensione a seconda dei casi, si ripiega anch'essa bruscamente per penetrare entro la membrana pupillare.

Esiste anche qualche ramo che, originatosi da uno dei due tronchi di divisione di un'arteria ciliare posteriore lunga, forma dapprima con esso una specie di forchetta ed a sua volta dividendosi a forchetta, mentre con un ramo raggiunge la membrana pupillare, coll'altro, abbastanza lungo ed esile, va a sfioccarsi nella rete capillare della zona ciliare (fig. 3). Si deve inoltre notare che talora (come si può vedere nella stessa fig. 3) da uno dei due rami terminali di un'arteria ciliare posteriore lunga, quando trovasi in corrispondenza della zona ciliare e prima di decorrere parallelamente ai margini distale e prossimale della zona stessa, si stacca un cospicuo ramo che, dopo breve percorso, si divide a forchetta e contribuisce ad irrorare la zona della membrana pupillare compresa fra i due primi rami collaterali di ciascun tronco principale di divisione di una delle due arterie ciliari posteriori lunghe. Dai lati che si guardano fra loro dei rami arteriosi che decorrono nella membrana pupillare nascono parecchi rami che, con percorso ondulato od anche a zig-zag, formano una rete che riempie lo spazio compreso fra i detti rami arteriosi, rete che si estende verso la periferia della membrana pupillare e si scarica nei vasi delimitanti la parte più distale della rete capillare ciliare. Alcuni di questi vasi reflui dalla membrana pupillare, e che hanno un aspetto che spicca nettamente in confronto dell'andamento rigido dei vasi arteriosi, imboccano nei vasi ancora pervii che dalla porzione media o capsulopupillare della *tunica vasculosa lentis* vanno anch'essi a scaricarsi nella rete capillare della zona ciliare.

I rami terminali di ciascuna arteria ciliare posteriore lunga non giungono ad anastomizzarsi con quelli dell'arteria ciliare posteriore lunga del lato opposto, e quindi non si può ancora parlare di un grande cerchio arterioso dell'iride, il quale sarà completato, come avviene negli occhi dei feti umani ed in uno stadio più avanzato dello sviluppo, dalle arterie ciliari anteriori.

I rami arteriosi che penetrano nella membrana pupillare, dopo aver fornito rami collaterali, si sfioccano e completano il reticolo vascolare della membrana pupillare che ne occupa anche il centro ; e la zona della membrana pupillare, che non riceve ancora rami dalle arterie ciliari anteriori, viene fornita di rete capillare dai rami collaterali più laterali di ciascun ramo di divisione di un'arteria ciliare posteriore lunga, e, come si può vedere nella fig. 3, questi rami dànno luogo a delle arcate abbastanza lunghe che formano la rete che occupa lo spazio nel quale non giungono ancora rami arteriosi.

Osservando la zona ciliare, si constata, che in un piano più profondo della rete capillare che abbiamo veduto occupare questa regione, ed a distanza disuguale gli uni dagli altri, sono apparsi dei vasi che non esistevano nella stessa regione in occhi di embrioni lunghi mm. 37. Questi vasi, disposti nella direzione dei meridiani dell'occhio, sono connessi lungo il loro tragitto, per mezzo di rami anastomotici, alla rete capillare ciliare, ma presentano connessioni più numerose colla rete stessa specialmente al loro estremo prossimale. L'aspetto ed il comportamento di questi vasi si avvicina a quello dei vasi simili che abbiamo visto formarsi, sollevandosi dal piano della rete ciliare, negli occhi dei feti umani con 10 cm. di lunghezza vert. coccigea (vedi fig. 3 e 4, tavola III del mio lavoro già citato). Vi è solamente una differenza nel comportamento dell'estremo prossimale di tali vasi: ed è che nei feti umani si continuano nell'inizio delle vene della coroide propriamente detta, mentre negli occhi di feto di *Sus scropha* di questo stadio tali vasellini prendono ancora connessione con la porzione più prossimale della rete

ciliare. Però, sia per i loro caratteri morfologici sia per la regione nella quale si trovano, si riconosce subito che ciascuno di tali vasi rappresenta il vasellino che per primo appare lungo il margine libero del sollevamento iniziale di ciascun processo ciliare, ed il modo col quale si sviluppano uguale a quello osservato nell'occhio del feto umano. Anche il diverso volume e la diversa lunghezza di tali vasellini si spiegano col fatto che fin dal principio dello sviluppo è varia anche la lunghezza ed il volume di ciascun processo ciliare.

Conclusioni.

Come mi ero proposto, sono riuscito, coi risultati delle ricerche eseguite, a confermare pienamente alcuni fatti fondamentali da me già posti in evidenza a proposito della morfogenesi dei vasi sanguiferi dell'occhio dell'uomo, ed a fornire una seconda prova di alcuni gravi errori che si trovano nei trattati e nelle monografie degli autori che si sono occupati dello speciale argomento.

Il vaso anulare, che molti autori indicano col nome di arteria anulare, non è se non il vaso più distale della primordiale coriocapillare e quindi non può essere considerato come un'arteria, nè può, come asserisce H. Fuchs, « rappresentare la introduzione alla formazione del circolo maggiore dell'iride e costituire in seguito, colla sua fusione con le due arterie ciliari posteriori lunghe, un vero circolo maggiore dell'iride » nè divenire, come si esprime Seefelder, il grande cerchio arterioso dell'iride e quindi essere, sempre secondo Seefelder, « il vaso-madre della membrana pupillare » nè infine essere addirittura, come sostengono altri autori, il grande cerchio arterioso dell'iride che, spostandosi lateralmente, fornisce i primi ramoscelli arteriosi alla membrana pupillare.

Il vaso anulare invece riceve, già in epoca abbastanza precoce, lo scarico del sangue apportato nella vescicola oculare secondaria dalla arteria jaloidea che non fornisce ancora rami nè alla vescicola cristallinica nè al vitreo. Infatti l'arteria jaloidea proveniente dalla carotide interna, e che porta sangue arterioso nell'interno dell'occhio, ha bisogno di una via di scarico e questa via gli è fornita, tanto nell'occhio di *Sus scropha* quanto in quello umano, dalle comunicazioni che essa prende colla primordiale coriocapillare attraverso alla fessura del calice o cupolare ampiamente aperta, e non solamente nella estremità anteriore o distale, ma anche nel tratto compreso fra il suo inizio e la sua terminazione. Quando avviene la chiusura della fessura, spariscono le comunicazioni esistenti lungo il tragitto di essa e resta solamente la più anteriore, ossia quella in corrispondenza dell'istmo del bulbo. Questa però non sarebbe più sufficiente a scaricare il sangue refluo, anche per il successivo sviluppo dei vasi della *tunica vasculosa lentis* e di quelli del vitreo, ed allora incominciano ad apparire le altre vie di scarico, ossia le laterali e quelle superiori, sempre però attraverso l'istmo, e che sboccano anch'esse nel vaso anulare.

Ciascuna delle due arterie ciliari posteriori lunghe viene intanto, coi suoi due rami primitivi di divisione, a raggiungere quasi il livello del vaso anulare. Tali rami decorrono parallelamente al vaso anulare stesso, mantenendosi però in un piano più superficiale (vedi fig. 1) e forniscono gettoni vasali alla membrana pupillare la quale resta priva di vasi fino a che non vi si addentrano i rami collaterali dei due primitivi tronchi di divisione di ciascuna arteria ciliare posteriore lunga. Nessun'altro vaso fornisce rami

arteriosi alla membrana e quindi il vaso anulare non solo non fornisce un'arteria primitiva nè rami arteriosi alla membrana pupillare, ma riceve da principio, per mezzo di alcuni tronchicini, solamente lo scarico del sangue della porzione media e posteriore della *tunica vasculosa lentis*. Successivamente riceve, per mezzo dei vasi della porzione capsulo-pupillare, il sangue refluo dal vitreo, e, quando i ramoscelli arteriosi delle due arterie ciliari posteriori lunghe sono penetrati nella membrana pupillare dando luogo ad un reticolo vascolare dal quale originano rami che, portandosi verso la periferia della membrana, conducono fuori da essa il sangue, allora il vaso anulare riceve contemporaneamente e lo scarico del sangue proveniente dalla porzione posteriore e media della *tunica vasculosa lentis*, ossia dalla sua porzione capsulare e capsulopupillare, e quello del vitreo e quello dei vasi che conducono fuori il sangue dalla membrana pupillare, ossia dalla porzione anteriore della *tunica vasculosa lentis*.

Però, come accade nell'occhio embrionale umano, una parte dei vasi reflui dalla membrana pupillare non sbocca direttamente nel vaso anulare ma imbocca nei vasi reflui dalla porzione media della *tunica vasculosa lentis* nel punto nel quale essi si piegano ad arco per sboccare, fuoriuscendo dall' istmo del bulbo, nel vaso anulare, mentre una altra parte sbocca direttamente nel vaso stesso (vedi fig. 1). I punti, nei quali i vasi che portano fuori il sangue dalla membrana pupillare sboccano in quelli che escono dalla porzione media o capsulo-pupillare della tunica vascolare della lente per formare i piccoli e corti tronchicini ad arco i quali poi immettono nel vaso anulare, sono stati scambiati dalla maggioranza degli autori, come dei punti di origine primitiva dei vasi nutritizi della membrana stessa, e quindi di natura arteriosa, ed ecco perchè essi autori hanno erroneamente sostenuto che una parte dei vasi della porzione media o capsulo-pupillare della *tunica vasculosa lentis* si prolunga sulla porzione anteriore del cristallino per fornire i rami nutritizi alla membrana pupillare. E così pure i vasi reflui dalla membrana pupillare, che sboccano nel vaso anulare, sono stati scambiati per ramoscelli arteriosi che si originano dal vaso anulare, mentre invece vi terminano.

La vicinanza poi dei rami di divisione delle arterie ciliari posteriori lunghe al vaso anulare nel tratto nel quale essi decorrono quasi parallelamente all'orlo della cornea e sino al punto nel quale, cambiando direzione, si ripiegano col loro ramo terminale dirigendosi verso il centro della cornea per fornire il loro ultimo ramo, che è anche il più laterale, alla membrana pupillare, si presta a farli scambiare fra loro, ed è stata anche questa una delle cause che hanno creato le opinioni errate poste innanzi sulla natura e sull' ufficio del vaso anulare, tanto più che fino ad una determinata epoca non si trova a questo livello che il solo vaso anulare, poichè le arterie ciliari posteriori non hanno ancora raggiunto coi loro rami di divisione il livello della futura zona ciliare.

Nell'occhio embrionale di *Sus scropha* il vaso anulare è transitorio, come ho riscontrato anche nell'occhio embrionale umano, poichè dapprima esso non solo incomincia a formare una corona vascolare irregolare, ma, col crescere di numero dei vasi reflui dalla membrana pupillare che in esso mettono foce, perde addirittura la sua individualità e viene anche in *Sus scropha* sostituito dalla parte più distale del reticolo capillare della futura zona dei processi ciliari, che io ho messo in evidenza per primo nell'occhio umano. Mentre ciò si vede chiaramente nell'occhio di embr. umano di 6 cm. di lunghezza vert. cocc. (fig. 1, tav. III del mio lavoro già citato), è ugualmente bene evidente negli occhi di embr. di *Sus scropha* lunghi 37 mm. (vedi fig. 2).

Anche nell'occhio di *Sus scropha* i rami terminali delle due arterie ciliari posteriori lunghe non formano da principio un cerchio arterioso completo. Resta da un lato e dall'altro una zona che va man mano, col progredire dello sviluppo, diminuendo di ampiezza e nella quale il cerchio è interrotto (fig. 1 e fig. 2 e 3). Nei feti umani il grande cerchio arterioso dell'iride è completato dalle arterie ciliari anteriori nei feti con 18 cm. di lunghezza vert. cocc., e negli occhi di feto di porco esso sarà completato in feti di lunghezza superiore a quella di 7 cm. (vedi fig. 3). Negli occhi di embrioni di *Sus scropha* lunghi mm. 25 esiste ancora immutata, fino in vicinanza del vaso anulare che ne forma la chiusa, la rete della primordiale coriocapillare (fig. 1), nella quale è solamente diminuito il calibro dei vasi che ne delimitano le maglie.

Mentre negli occhi di *Sus scropha* di 37 mm. di lunghezza la parte più distale della primordiale coriocapillare insieme col vaso anulare è stata sostituita dal reticolo capillare che occupa la futura zona dei processi ciliari (fig. 2), ed il reticolo della primordiale coriocapillare, avvicinandosi all'equatore dell'occhio, tende ad essere fatto da maglie di forma allungata nel senso dei meridiani, negli occhi di feti con sette cm. di lunghezza vert. cocc. invece sono comparsi, nella zona del reticolo capillare ciliare, dei vasellini di vario calibro e lunghezza che si assomigliano perfettamente ai vasellini descritti in questa zona negli occhi di embrioni umani con 10–11 cm. di lunghezza vert. coccig. Ciascuno di essi rappresenta il primo vasellino che si viene a trovare nello spessore di un processo ciliare in via di sviluppo (fig. 3), e la sua morfogenesi si può considerare quella stessa che ho descritto nell'occhio fetale umano. La lunghezza ed il calibro differente di tali vasellini deve essere imputata al fatto che, fin dalle prime fasi, variano la lunghezza e lo spessore dei singoli processi ciliari.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA

FIG. 1. Emisfero anteriore di occhio di embr. di *Sus scropha*, lunghezza vert. cocc. mm. 25 (*Koristka binoculare, – oculari 4, obbiettivi 28 mm.*): vasi sanguiferi della membrana pupillare e della primordiale coriocapillare, veduti dalla superficie esterna dell'occhio.

Va. Va. Va.: vaso anulare nel quale mettono foce sia i vasi della porzione media o capsulo-pupillare della *tunica vasculosa lentis*, che sono stati recisi durante le manualità della preparazione nel punto nel quale si apprestano a formare il piccolo arco che precede lo sbocco, e sia i vasi reflui dalla membrana pupillare, dei quali alcuni sboccano direttamente nel vaso anulare, ed altri invece imboccano nei vasi della porzione media della *tunica vasculosa* poco prima che essi si scarichino nel vaso anulare. (Il vaso anulare è stato riprodotto con tinta bleu più forte degli altri vasi coi quali esso comunica per renderlo più facilmente riconoscibile).

Acpl. Acpl.: arterie ciliari posteriori lunghe, delle quali una è già divisa precocemente in due rami fuori della zona disegnata.

Rt. Rt.: due rami terminali delle arterie ciliari posteriori lunghe.

Tvl.: un vaso della porzione capsulo-pupillare della *tunica vasculosa lentis* che, dopo aver ricevuto la confluenza di un vaso refluo dalla membrana pupillare, mette foce nel vaso anulare.

Fig. 2. Emisfero anteriore di occhio di embrione di *Sus scropha*, lunghezza vert. cocc. mm. 37 (*Koristka binoculare, - ocutari 4, obbiettivi 35 mm.*), veduto dalla superficie esterna.

Acpl. Acpl.: arterie ciliari posteriori lunghe, delle quali una si è divisa in due rami fuori del campo disegnato e che forniscono i rami nutritizi vascolari alla membrana pupillare.

Rcc. Rcc.: reticolo capillare della zona ciliare che si è sostituito al vaso anulare ed alla porzione più distale della primordiale corio-capillare, e che riceve lo scarico sia dei vasi della porzione media della *tunica vasculosa lentis*, recisi nel preparato, nel punto nel quale stanno per incurvarsi in fuori, e sia dei vasi reflui dalla membrana pupillare.

Vv. Vv. Vv.: radici di tre vene vorticose.

Trl.: come nella fig. 1.

m: uno dei vasi reflui dalla membrana pupillare che sbocca direttamente nella rete capillare della futura zona dei processi ciliari.

Fig. 3. Segmento di emisfero anteriore di occhio di feto di *Sus scropha*, lunghezza vert. cocc. cm. 7, veduto dalla superficie interna dell'occhio (*Voigtlander, oc. comp. Br, N. Y., obb. Zeiss aa.* .

Acpl.: arteria ciliare posteriore lunga che fornisce rami alla membrana pupillare ed un piccolo ramo alla rete capillare ciliare.

Rc.: rete capillare ciliare, dal piano della quale si sono sollevati dei vasellini che rappresentano il primo vaso contenuto in ciascun processo ciliare in via di sviluppo, e che riceve lo scarico dei vasi reflui dalla membrana pupillare e di quelli della porzione media della *tunica vasculosa lentis.*

Trl.: uno dei vasi della porzione media o capsulopupillare della *tunica vasculosa lentis* reciso nel punto nel quale imbocca nella rete della zona ciliare e riceve uno dei vasi reflui dalla membrana pupillare. Di tali vasi recisi se ne vedono altri lungo il margine distale della zona ciliare.

Vv.: una vena vorticosa nel punto nel quale esce dall'occhio.

m.: vaso refluo dalla membrana pupillare, che sbocca direttamente nel reticolo della zona dei processi ciliari.

Va
Va
Rt
Rt
Acpl
Acpl
Trl
Va

Fig. 1

Acpl
Vr
Rcc
m
Rcc
Trl
Vr
Vr
Acpl

Fig. 2

Fig. 3

Lit. Cucchi, Pellegrini, Pieroni & C. Pavia

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume I-XXXIII. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII.
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI.

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti delle Adunanze Solenni. Vol. I-III.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. Vol. I-IV
» » » » » Boll. 1°-3°
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.

Annuario 1882-1924.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXIX.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-III.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia.
Indici degli Atti Accademici (in preparazione).

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1924

Notizie degli Scavi. Vol. XXI, in fascicoli trimestrali (¹)	L. **120,00**
Rendiconti scienze morali. Vol. XXXIII, idem (1, 2, 3)	» **54,00**
Memorie, » » Vol. XVII, in fascicoli vari (1, 2, 3)	prezzi vari
Monumenti antichi. Vol. XXIX, puntata 1ª (1)	» **280,00**
Rendiconti scienze fisiche, Vol. XXXIII, in fascicoli bimensili (1, 2, 3) . .	» **108,00**
Memorie, » » Vol. XIV, in fascicoli vari (1, 2, 3)	prezzi vari
Rendiconto adunanza solenne. Vol. III (fascicolo 10°) (1, 2, 3)	» **8,00**
Annuario (1, 2, 3)	» **4,00**

(1) In vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (4).
(2) » » » » » Maglione e Strini, Via Due Macelli 88, Roma (7).
(3) » » » l'Amministrazione dell'Accademia, Via della Lungara 10, Roma (29).

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO XV.

COMMEMORAZIONE

DI

ARTURO ISSEL

LETTA

DAL SOCIO

Prof. MARIO CANAVARI

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Commemorazione di Arturo Issel
letta dal Socio prof. MARIO CANAVARI

nella seduta del 4 novembre 1923

ARTURO ISSEL nacque in Genova il dì 11 aprile 1842. Si laureò in scienze naturali a Pisa il 2 luglio 1863 e fu proclamato dottore con *pieni voti e plauso*, secondo la formula di quei tempi, lo stesso giorno, dal rettore professore emerito Silvestro Centofanti (1).

Nel 1865 fu incaricato dell'assistenza alla cattedra di storia naturale dell'ateneo di Genova, tenuta allora dal prof. Salvatore Trinchese, il quale era succeduto al professore Michele Lessona trasferito a Bologna.

Nel 13 novembre 1866 ebbe l'incarico dell'insegnamento di mineralogia e di geologia, che gli fu confermato successivamente sino a quando fu nominato professore straordinario delle stesse materie con decorrenza dal 1° dicembre 1869.

Nel 1876 il museo di mineralogia e di geologia di quella Università ebbe esistenza autonoma, essendo stato separato da quello di zoologia e anatomia comparata. Il professore A. Issel ne ebbe la direzione e nello stesso tempo fu promosso al grado di ordinario.

Alla fine del 1891 i due insegnamenti di mineralogia e di geologia furono separati (2).

Alla cattedra di mineralogia fu nominato il prof. G. B. Negri, e a quella di geologia A. Issel che vi rimase sino al 1917, nel quale anno fu messo a riposo per avere raggiunto il limite di età stabilito dalla legge, sebbene egli fosse sempre sano di corpo, e di mente tuttora limpida e, quasi direi, giovanile.

(1) La Commissione esaminatrice, come resulta dall'archivio speciale della Segreteria universitaria di Pisa, era composta dei seguenti professori: Pietro Cuppari, di agraria e pastorizia; Riccardo Felici, di fisica; Paolo Savi, di zoologia e anatomia comparata; Pietro Savi, di botanica; Giuseppe Meneghini, di mineralogia, geologia e geografia fisica; Melchiorre Felice Tonelli, di zooiatria e clinica zooiatrica; Luigi Lombardini, di anatomia e fisiologia degli animali domestici; Paolo Tassinari, di chimica.

(2) A. Issel, *Cenni intorno al museo geologico della R. Università di Genova*. Boll. Soc. geol. ital., vol. XII, 1893, pag. 692. Roma, 1893.

Successe al Capellini quale presidente del r. Comitato geologico, nell'anno 1913 (con R. D. 22 maggio 1913), e fu confermato in tale onorifico ufficio sino a tutto il 1917.

Fu presidente della Società geologica italiana per l'anno 1893.

Nominato socio corrispondente dei Lincei nel 18 luglio 1909; socio nazionale effettivo il 30 gennaio 1919 nella classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (categoria quarta: geologia, paleontologia, mineralogia e applicazioni).

Morì a Genova il 27 novembre 1922, accompagnato dal compianto universale de' suoi concittadini, de' suoi colleghi dell'Università e dei naturalisti italiani e stranieri.

Nella lunga carriera d'insegnante e nella vita di cittadino, due doti principali dominarono in Arturo Issel e gli procacciarono affetto e devota ammirazione da quanti ebbero la fortuna di conoscerlo personalmente o di apprezzarne la vasta e profonda coltura mercè le sue numerose pubblicazioni: l'amore per la scienza, cioè, sempre vivo anche durante gli ultimi anni della vita, e la grande bontà dell'animo che per le apparenze mosaiche del suo viso calmo e sereno si manifestava anche attraverso la dolcezza degli occhi neri pensosi.

L'amore per gli studi scientifici egli attinse e sviluppò a Pisa dove si recò nel 1860 come studente universitario, attrattovi forse dalla fama di maestri sommi in scienze fisiche matematiche e naturali e che con la parola, con gli scritti e con bontà ed affetto paterno incitavano allo studio preparando una generazione di scienziati, matematici e naturalisti, che doveva diffondersi poi per quasi tutta Italia.

In una lettera infatti in data 15 luglio 1864, scritta cioè un anno dopo conseguita la laurea, e indirizzata al suo venerato maestro Giuseppe Meneghini, egli comincia con queste parole: « Ho sempre in mente gli ottimi consigli e i saggi ammaestramenti che m'ebbi spesse volte da lei mentre io ero studente e che contribuirono grandemente a suscitare in me l'amore degli studii scientifici » (¹).

Dal Meneghini egli ottenne tutto quello che anche altri avevano ottenuto, consigli cioè ed incitamenti continui ed amichevoli per i primi suoi lavori scientifici, e con esso egli rimase in affettuosa corrispondenza epistolare per tutta la vita.

Fu primo studio prediletto di Arturo Issel quello delle faune malacologiche viventi e subfossili, insieme con quello dei resti antropologici delle grotte e particolarmente della caverna ossifera presso Finale in Liguria (²).

Si stava in quel tempo — nel 1864 — preparando la spedizione della « Magenta » che doveva partire in sulla fine del mese di ottobre, comandata dall'Acton, per compiere un viaggio intorno alla Terra. « Invidio coloro », scriveva al Meneghini nel 4 agosto di quell'anno, « che formeranno parte della spedizione; ma, in quanto a me, ragioni di famiglia mi obbligano a non allontanarmi di qui » (³).

Questo vivo desiderio di compiere qualche viaggio scientifico, egli potè in parte esaudire quando, intorno alla primavera del 1865, ebbe occasione di visitare i lavori dell'istmo di Suez ed il mar Rosso, raccogliendo nella rada di Suez circa 200 specie di mol-

(¹) Carteggio Meneghini, conservato nell'archivio dell'Istituto geologico dell'Università di Pisa.

(²) Si vedano i primi numeri dell'« Elenco cronologico delle pubblicazioni del prof. Arturo Issel ».

(³) Carteggio Meneghini, arch. Ist. geol. pisano.

luschi viventi, e nelle spiagge emerse di quel mare parecchie specie di conchiglie fossili postplioceniche.

Arturo Issel descrisse queste specie con grande cura, insieme con altre raccolte dal suo compagno di viaggio marchese G. M. Arconati nel golfo di Akaba e, in piccola parte, anche a Suez, e aggiungendovi il materiale subfossile appartenente ai musei di storia naturale di Torino, di Pisa e di Firenze, nell'importante libro dal titolo « Malacologia del mar Rosso » che fa parte della « Biblioteca malacologica » vol. I, 1869, edita a Pisa e che egli, memore del venerato maestro, dedicò appunto al prof. G. Meneghini quale « omaggio dell'affezionatissimo discepolo ».

Questa opera, di 380 pagine in-8°, corredata di 5 tavole, comprende l'elenco ragionato di 572 specie viventi (di cui 59 nuove per la scienza), 232 specie fossili (di cui 26 nuove), ed inoltre contiene la interessante spiegazione delle tavole di molluschi e di conchiglie eseguite sotto la direzione di G. C. Savigny, comprese nell'opera intitolata « Déscription de l'Égypte » e che furono lasciate incomplete.

Questa opera — che doveva poi essere utilizzata per due note successive e di data molto posteriore (1), condotta con ogni criterio scientifico sopra un materiale copioso ed importante, tenendo conto, con grande esattezza, dei lavori precedenti, della ubicazione delle specie raccolte e catalogate o descritte — pose ben presto l'Issel tra i più apprezzati cultori di faune malacologiche viventi e terziarie, delle quali aveva iniziato gli studii appena dopo conseguita la laurea.

Non so se durante l'andata o il ritorno da questo viaggio (2), ma certo nel 1865, egli visitò l'isola di Malta e quella di Gozzo, raccogliendo parecchi fossili miocenici, pesci squaloidi, echinodermi, conchiglie, che sin dall' 8 febbraio 1866 diceva di voler spedire a Pisa e lo furono poi di fatto nel mese di maggio successivo (3), e in questo museo sono tuttora conservati. Data poi dal 5 dicembre 1865 la sua « Note sur une caverne à osséments de l'île de Malte » in « Matériaux pour l'histoire de l'homme (Bull. mensuel illustré, Paris, 1866).

Sin dall'agosto 1864 egli attendeva poi alla compilazione del catalogo delle conchiglie raccolte nel golfo Persico, nella Persia settentrionale, in Armenia e al Caspio, da alcuni componenti la Missione italiana in Persia, e cioè dal Doria, dal De Filippi e dal Lessona; talchè il Meneghini, al quale partecipava la notizia (4), lo incitava a intraprendere lo studio sistematico dei molluschi pliocenici che più tardi doveva essere iniziato, ma, purtroppo, non condotto a termine, da altro valente scolaro di Pisa, addottoratosi in scienze naturali sino dal 1853 (5).

(1) *Morfologia e genesi del mar Rosso.* Atti del 3° Congresso geografico italiano. Firenze, 1898; *Essai sur l'origine et la formation de la mer Rouge.* « Bulletin Soc. Belge de géol. etc. », tom. XIII, Bruxelles, 1900.

(2) *Dei molluschi terrestri e d'acqua dolce raccolti nell'arcipelago di Malta.* Boll. malac. ital., anno I, n. 1. Pisa, genn.-febbr. 1868.

In questa nota l'Issel scrisse che le specie di molluschi descritte furono da lui trovate « durante un breve soggiorno fatto in quelle isole nella primavera del 1865 ».

(3) Lettere in data 8 febbr. e 5 marzo 1866 (carteggio Meneghini cit.).

(4) Lettera in data 5 agosto 1864 (carteggio Meneghini cit.).

(5) Cesare D'Ancona, *Malacologia pliocenica italiana.* Mem. R. Comit. geol. d'Italia, vol. I e II. Firenze, 1871-73.

Desideroso sempre di tornare a rivedere i suoi professori ed i suoi compagni di scuola, e di riprendere per qualche mese la vita dello studente a Pisa, di cui serbava memoria dolcissima, più non era in grado ormai di pensare ai viaggi, ma doveva cercare di ottenere nell'insegnamento un posto qualsiasi che gli permettesse di continuare gli studii scientifici e di avere così occasione di applicare utilmente le sue cognizioni. Questo suo intento, sebbene modesto, credeva assai difficile poter conseguire; ma la fortuna gli fu propizia, e il suo desiderio, espresso nel 1866 ([1]), doveva, nel novembre dello stesso anno, vedere compiuto, quando appunto gli fu affidato l'incarico della mineralogia e della geologia nella Università di Genova.

Egli, naturalista nel senso largo della parola, aveva seguìto a Pisa non soltanto i corsi di geologia, mineralogia e geografia fisica, di zoologia e anatomia comparata, di botanica, di chimica generale, di fisica tecnologica e di anatomia umana, ma anche quelli di elettrofisiologia e di fisiologia, il primo dei quali dettato dal Matteucci e il secondo dallo Studiati. Frequentò pure con piacere e con profitto, come egli stesso asserì ([2]), il corso di filosofia del diritto svolto da un giovane professore lombardo che doveva poi assurgere alle più alte vette delle scienze giuridiche ([3]).

Con tale corredo di studi, si comprende come egli fosse in grado di trattare con vera competenza svariati rami della storia naturale, apportando in tutti l'impronta personale delle sue osservazioni, con metodo sempre rigorosamente scientifico.

Assicurato ormai il suo avvenire con la nomina di professore straordinario di geologia e di mineralogia a Genova, a datare, come ho già avvertito, fin dal dicembre 1869, egli rivolse ancora il pensiero a viaggi scientifici. Partì di nuovo per il mar Rosso il

([1]) Lettera in data 8 febbr. 1866 (carteggio Meneghini cit.).

([2]) Discorso del prof. Issel in « Onoranze al prof. A. Issel in occasione del suo 40° anno d'insegnamento nell'Ateneo genovese, il 9 dicembre 1906 », pag. 27. Genova, tip. Fr. Carlini, 1907.

([3]) Carlo Francesco Gabba: fu professore all'Università di Pisa dal 1861 al 1917, anno in cui si ritirò dall'insegnamento. Morì il 18 febbraio 1920; era nato a Lodi il 14 aprile 1835.

Nella via S. Maria, sulla facciata della casa già Papanti, accanto all'Istituto di chimica generale e di faccia al museo di geologia, fu messa, su marmo, la seguente epigrafe:

IN QUESTA CASA
ABITÒ PER XXX ANNI
CARLO FRANCESCO GABBA
CHE DAL 1861 AL 1917
PROFESSORE NEL NOSTRO ATENEO
ILLUMINÒ CON LA FILOSOFIA
ED ELEVÒ A DIGNITÀ DI SCIENZA
LO STUDIO DELLE LEGGI
APRENDO AI CULTORI DEL DIRITTO
NUOVE VIE
OGGI UNIVERSALMENTE SEGUÌTE

IL COMUNE DI PISA
Q. M. P.
1922

14 febbraio 1870 insieme con Beccari [1], sul piroscafo « Africa » della società Rubattino, comandato dal capitano Buzzolino [2].

La relazione di questo « Viaggio nel mar Rosso e tra i Bogos » fu pubblicata prima nella « Nuova Antologia » e poi nel « Giro del mondo »; da ultimo la stessa relazione, migliorata ed ampliata, apparve in un volume a sè nella « Biblioteca di viaggi » [3]. Giustamente l'editore E. Treves scriveva nel preambolo: « I viaggiatori italiani sono rari, e più rari ancora quelli che narrano le loro peregrinazioni, con esattezza scientifica e di scrittori. L'Issel è fra questi: naturalista, viaggiatore e letterato distinto... ».

Io ricordo in modo speciale questo libro a titolo di grande benemerenza. Egli visitò con Beccarí e Antinori l'altipiano etiopico, e tutti insieme si trovarono anche a Keren [4] in sulla prima decade di giugno 1870.

Arturo Issel deve quindi additarsi come uno degli iniziatori delle nostre imprese coloniali, ed egli fu presente al contratto di cessione del paese di Assab per parte dei Danachil alla ditta Rubattino, e che avvenne mercè la paziente e sagace mediazione del prof. Sapeto [5].

« Il 13 marzo 1870, esaurita ogni formalità e compiuto l'acquisto, echeggiò nella baia il tuono delle artiglierie per festeggiare il lieto avvenimento e per salutare la bandiera tricolore che per la prima volta sventolava sulla nuova terra italica. Possa all'ombra di quella bandiera », soggiungeva l'Issel con animo di scienziato e di italiano, « popolarsi il deserto lido e diventare un rifugio al navigante, un campo fruttifero alle imprese del commercio, una oasi libera e prospera in mezzo alla schiavitù e alla miseria che lo circonda! » [6].

Il vaticinio, poco più di di mezzo secolo dopo e col succedersi di avvenimenti or tristi or lieti, finalmente oggi si afferma solidamente mercè l'opera e il risveglio della nuova generazione che ha posta l'Italia tra i grandi fattori della civiltà e del progresso.

[1] Il noto viaggiatore Antinori, che fu poi compagno dell'Issel, si trovava già in Egitto.

[2] Il viaggio fu eseguito sotto gli auspicii della Società geografica italiana. Il marchese Orazio Antinori, distinto ornitologo e noto pel suo memorabile viaggio nell'Africa centrale, e il dott. Odoardo Beccari, botanico, ebbero l'incarico di studiare il paese dei Bogos nell'interesse della scienza e di esaminare la possibilità e la convenienza di fondarvi uno stabilimento nazionale. L'Issel fu invitato a far parte della spedizione l'8 febbr. 1870. Si veda: *Viaggio nel mar Rosso e tra i Bogos*, in « Nuova Antologia », anno VI, vol. XVI, fasc. 2°, febbr. 1871, pag. 416.

[3] Milano, 1872; E. Treves edit.

[4] Vedi nel giornale « Il secolo XIX », di Genova, in data 9 dic. 1906, l'articolo di G. R. (Gaetano Rovereto, oggi successore a Genova nella cattedra tenuta dal suo maestro Issel), in occasione delle Onoranze al prof. A. Issel nel 40° anno di insegnamento universitario.

Nella prima puntata del « Viaggio nel mar Rosso e tra i Bogos », inserita nella « Nuova Antologia », vol. XVI, fasc. 2°, febbr. 1871, è scritto: « Alcuni nostri connazionali residenti a Keren avevano più volte richiamata l'attenzione del Governo e del paese sul territorio dei Bogos, provincia di Abissinia nella quale pareva si offrissero propizie condizioni per l'impianto di una colonia italiana ». Quindi, in precedenza di Issel e de' suoi compagni, altri italiani avevano abitato Keren. Issel ripartì da Keren il 10 giugno 1870, dopo tre soli giorni di permanenza.

[5] Nell'acquisto della baia di Assab, la Società Rubattino ebbe lo scopo di fondare, in un prossimo avvenire, una stazione marittima in servizio dei bastimenti italiani ed esteri naviganti nell'Eritreo. Si veda Issel, *Viaggio* ecc., loc. cit., pag. 425.

[6] *Viaggio nel mar Rosso* ecc., pag. 30. Milano, E. Treves ed., 1872.

Nel luglio 1870, dopo cinque mesi di escursioni faticose, egli tornò felicemente in patria per continuare nella calma del laboratorio i severi studi della geologia, della paleontologia e della paleoetnologia specialmente.

Compiuta e pubblicata l'applaudita relazione del viaggio, e dopo aver preso parte alla crociera del *cutter* « Violante », invitato dall'amico Enrico D'Albertis proprietario della nave stessa, nel Mediterraneo (1), visitando l'isola Galita e la Tunisia, si occupò, per molti anni successivi, dello studio geologico dell'Appennino ligure, pubblicando una ricca serie di note e di memorie e rilevando poi, unitamente con lo Zaccagna e con il Mazzuoli, la « Carta geologica della Liguria » edita nel 1887.

Si deve poi ricordare in modo speciale l'importantissima pubblicazione dal titolo « Le oscillazioni lente del suolo o bradisismi » edita nel 1883 ed inserita negli « Atti della r. Università di Genova » per decreto ed a spese del municipio di Genova (vol. V). Il volume, in-8° grande, di pagine 422, con numerose figure intercalate e con una carta generale dei bradisismi ed una particolare di quelli d'Italia, oltre a riassumere ed a coordinare tutte o quasi tutte le lente oscillazioni della crosta terrestre notate dagli autori, si diffonde su quelle delle coste italiane, in parte da lui stesso avvertite. Termina con un importante capitolo intorno a considerazioni teoriche sul fenomeno dei bradisismi. Questa opera è ricordata nei trattati di geologia ed in memorie particolari che si occupano dello stesso argomento.

Le numerose ed accurate osservazioni scientifiche fatte in Liguria nel campo della geologia, della paleontologia e della paleoetnologia, continuate per oltre un quarto di secolo, furono poi riassunte nell'importante pubblicazione « Liguria geologica e preistorica », edita nel 1892 in due volumi con atlante, in occasione delle feste colombiane per il 4° centenario della scoperta d'America (2).

Questa monografia di una importantissima regione italiana può essere additata come un esempio lodevole ed oltremodo utile di geologia e di paleoetnologia regionale, così per la distribuzione della materia, per la ricchezza di dati e di osservazioni personali, come per le numerose tavole di paesaggi, di fossili, di manufatti litici, di vertebrati delle caverne, e per la carta ipsometrica e batimetrica (questa eseguita da G. Rovereto e S. Squinabol) e per quella geologica in collaborazione con lo stesso Squinabol.

Nel dì 9 dicembre 1906 l'Università di Genova volle tributare al prof. A. Issel solenni onoranze in occasione del 40° anno del suo insegnamento.

La relazione pubblicata in proposito (3) è un documento per dimostrare la venerazione e la stima onde egli come uomo, come insegnante e come scienziato era circondato dai suoi concittadini, dai suoi colleghi e scolari e dai suoi ammiratori d'Italia e di fuori.

Arturo Issel, sempre schivo di ogni pubblica manifestazione a suo riguardo, dovè sentire gli elogi a lui prodigati con notevoli discorsi dal rettore prof. Adolfo F. Ros-

(1) A. Issel, *Crociera del « Violante », comandato dal Cap. armatore Enrico D'Albertis, durante l'anno 1877.* [I, *Parte narrativa*; II, *Risultati scientifici*: a) Cenni sulla geologia della Galita; b) Molluschi terrestri e d'acqua dolce viventi e fossili]. Annali del museo civico di storia naturale di Genova, vol. II. Genova, tip. del r. Istit. sordo-muti, 1879-'80).

(2) A. Donath edit., Genova.

(3) *Onoranze al prof. Arturo Issel in occasione del suo 40° anno di insegnamento nell'ateneo genovese*, con ritratto dello stesso prof. Issel. In-8°, di pag. 28. Genova, tip. Fr. Carlini, 1907.

sello, dal preside della Facoltà di scienze prof. O. Penzig, dal sindaco march. Gerolamo Da Passano, dal conte De Chercq console generale di Francia, dal rappresentante della Facoltà di scienze di Torino prof. Gino Loria, dal preside della Facoltà di lettere di Genova prof. L. Cerrato, dal presidente della Società di letture scientifiche prof. Enrico Morselli e dal rappresentante la Società ligure di storia patria avv. Mattia Moresco.

A tutti rispose Arturo Issel con animo grato e con parola semplice e serena. Egli dapprima rivolse la parola di ringraziamento riconoscente a coloro che in quella cerimonia impersonavano il presente; poi rivolse il pensiero al passato, ricordando con affetto quasi di figlio i suoi venerati maestri; e terminò inneggiando agli studenti perchè, seguendo le orme dei maestri, li superassero nell'amore per la scienza, porgendo un modello migliore alla generazione che sta per nascere o è nata da poco (1).

Alcune delle sue ultime pubblicazioni sono inserite negli Atti della nostra Accademia, quali:

I) *Prime linee di un ordinamento sistematico delle pietre figurate.* Memorie, ser. V, vol. XI, fasc. 2, 1916.

II) *Manoscritti e lezioni di Lorenzo Pareto.* Rendiconti, seduta 21 aprile 1918, pag. 273.

III) *Esempi notevoli di icoliti.* Memorie, ser. V, vol. XIII, fasc. 4, 1920. — Questa memoria fu presentata nella seduta del 21 dicembre 1919. Si veda Rendiconti, volume XXVIII, pag. 273.

IV) *Cenni di un ordinamento delle stimate geologiche.* Rendiconti, seduta 20 febbraio 1921, pag. 106.

Arturo Issel, sino all'ultimo anno di vita, continuò a lavorare per la scienza, onorando sè stesso e la nostra Accademia che lo volle tra i soci nazionali effettivi. L'ultimo suo contributo scientifico infatti è del 1922 (2).

Io ho cercato di adempiere, nel miglior modo possibile all'incarico avuto dalla nostra Presidenza di commemorare l'eminente e compianto collega, al quale ero unito da antichi vincoli scientifici, rafforzati dalla comune nostra provenienza dall'Università di Pisa e dal sempre vivo ricordo dei nostri venerati maestri, rimanendo tuttavia nel dubbio di non aver saputo nè corrispondere alla vostra aspettativa, nè esaltare nella vera misura i meriti e il valore di Arturo Issel.

(1) *Risposta del prof. Issel*, nelle « Onoranze ecc. », loc. cit., pag. 27 e 28.
(2) Si veda l'« Elenco cronologico delle pubblicazioni ecc. », in fondo a questa necrologia.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DEL PROF. ARTURO ISSEL

1. *Di una caverna ossifera di Finale.* Atti Soc. ital. Sc. nat., vol. VII, pp. 1-11, tav. I. Milano, 1864.

Nouvelles découvertes paléoarchéologiques en Ligurie (resumé d'un article de l'Ann. scient. et industr.). Bull. de matériaux pour l'histoire de l'homme. In-8°, di 4 pagine. Paris, décembre, 1865.

Rapporto sul miglior modo di ordinare le raccolte del marchese Pareto. Genova, tip. Lavagnino, 1865.

Dei molluschi raccolti dalla Missione italiana in Persia. In-4°, di 55 pagine, con 3 tavole. Mem. R. Acc. Scienze Torino, ser. II, tomo XXIII. Torino, 1865.

Della variabilità nelle specie. Breve cenno sulla teoria di Darwin. In-8°, di 32 pagine. Genova, tip. del R. Ist. dei Sordomuti, 1865.

Note sur une caverne à ossements de l'île de Malte. Bull. de matériaux pour l'histoire de l'homme. In-8°. Paris, janvier, 1866.

Del canale di Suez (Relazione presentata alla Camera di commercio ed arti di Trapani). Un piccolo vol. in-8°, con carta generale del canale dell'istmo di Suez, di 72 pagine. Genova, tip. del R. Ist. dei Sordomuti, 1865.

Varietà di scienze naturali. Biblioteca utile, vol. 34°. In-8°, di 150 pagine, con fig. interc. e 1 tav. Milano, 1866.

Resoconto del convegno dei naturalisti alla Spezia (19-21 settembre 1865). Annuario Scient. ed industr., anno II, 1865, § XVI, pp. 707-716, Milano, 1866. Questo resoconto era stato precedentemente pubblicato nella « Gazzetta di Torino ».

Antropologia, zoologia ed anatomia comparata (rivista per l'anno 1865). Annuario scient. ed industr., anno II, 1865, § V, pp. 251-311, Milano, 1866.

Dei molluschi raccolti nella provincia di Pisa (Catalogo). Mem. Soc. ital. Sc. nat., serie I, vol. II. In 4°, di 38 pagine. Milano, 1866.

Zoologia ed anatomia comparata. (Rivista per l'anno 1866). Annuario scient. ed industr.. anno III, 1866, § VI, pp. 275-317. Milano, 1867.

Delle conchiglie raccolte nelle breccie delle caverne ossifere della Liguria occidentale. Atti R. Acc. Scienze Torino, serie II, tomo XXIV, in 4°, di 14 pagine, con 1 tav. Torino, 1867.

Résumé des recherches concernants l'ancienneté de l'homme en Ligurie. Comptes-rendus du Congrès d'anthropologie et d'archéologie préhistorique, séssion de Paris. In 8°, di 15 pagine. Paris, 1867.

Physa pisana sp. n. Bull. malac. ital., vol. I, pp. 7-8, tav. I, fig. 7 e 8. Pisa, 1868.

Zoologia ed anatomia comparata. Rivista per l'anno 1867. Ann. scientif. ed industr., anno IV, 1867, parte I, § VI, pp. 326-368. Milano, 1868.

Le ostriche del porto di Genova. Atti R. Acc. Scienze Torino. In-8°, di 10 pagine. Torino, 1868.

Di alcune ossa umane provenienti dal terreno pliocenico di Savona. Atti Soc. it. Sc. nat., vol. XI, fasc. 3°, pp. 659-662. Milano, 1868.

Dei molluschi terrestri e d'acqua dolce raccolti nell'arcipelago di Malta. Bull. malac. ital., vol. I, pp. 1-6, pp. 17-24. Pisa, 1868.

Nassa (Cyclonassa) italica sp. n. Bull. malac. ital., vol. II, pp. 79-80, tav. IV, fig. 4-11. Pisa, 1869.

Malacologia del Mar Rosso: ricerche zoologiche e paleontologiche. Biblioteca Malacologica, vol. I. In 8°, di 388 pagine, con una carta geografica dell'Egitto e del Mar Rosso e con 5 tavole. Pisa, 1869.

Antropologia (rivista per l'anno 1869). Annuario scient. ed industr., anno VI, 1869, parte II, § XIII, pp. 417-434. Milano, 1870.

Della fauna malacologica del Mar Rosso. Bull. Soc. geogr. ital., fasc. IV, pp. 129-136, 1° maggio 1870. Firenze, 1870.

Relazione sommaria del viaggio nel Mar Rosso dei signori Antinori, Beccari ed Issel (re-

latore). Bull. Soc. geog. ital., fasc. V, parte II, 1° ottobre 1870, pp. 43-60. Firenze, 1870.

Intorno ai Chiton del mare di Genova. Bull. malac. ital., vol. III, tav. I, pp. 5-9. Pisa, 1870.

Elenco di conchiglie terrestri e d'acqua dolce dell'Umbria, raccolte dal prof. G. Bellucci. Bull. malac. ital., vol. III, pp. 113-118. Pisa, 1870.

Elenco di conchiglie terrestri raccolte a Tabiano, nel Parmigiano. Bull. malac. ital., vol. III, pp. 167-168. Pisa, 1870.

Elenco di conchiglie terrestri di Lecce. Bull. malac. ital., vol. III, pp. 168-169. Pisa, 1870.

Descrizione di una scimmia antropomorfa proveniente dall'Africa centrale. Annali Museo civico St. nat. di Genova, vol. I, pp. 55-84, con 1 tav. colorata. Genova, 1870.

Rapport sur les récentes découvertes et publications en Ligurie. Matériaux pour l'hist. de l'homme, vol. VI, pp. 38-43, avec pl. Paris, 1870.

Note bibliografiche. Effemeridi Soc. letture e conversaz. scient. Genova, 1870.

Viaggio nel Mar Rosso e tra i Bogos. Nuova Antologia sc. lett. ed arti, anno VI, fasc. II, febbr. 1871, pp. 416-434; fasc. III, marzo 1871, pp. 654-688; fasc. V, maggio 1871, pp. 136-163. Firenze, 1871.

Note bibliografiche di alcuni lavori dei prof. Gerolamo Boccardo, Achille Quadri, S. Trinchese e Igino Cocchi, in « Effemeridi Soc. letture e conversaz. scientif. », In-8°, di 19 pagine. Genova, tip. del giorn. ' il Commercio ', 1871.

Appendice al catalogo dei molluschi raccolti nella provincia di Pisa. Atti Soc. ital. Sc. nat., vol. XV (seduta 26 febbr. 1872), pp. 58-76. Milano, 1872.

Viaggio nel Mar Rosso e tra i Bogos; volume in-8°, di 130 pagine, con 2 carte geogr. e 13 fig. interc. Treves ed. Milano, 1872.

Sur l'usage des utils en pierre près les Bogos. Matériaux pour l'hist. de l'homme. Paris, 1872.

Note bibliografiche. Effemeridi Soc. letture e conversaz. scientif. Genova, 1872.

* *Il libro moneta*: proposta.

Gli esperimenti vulcanici del prof. Gorini. Effemeridi Soc. letture e conversaz. scientifiche, anno III, vol. II. Genova, tip. Pellas, 1872.

Replica al prof. Stoppani. Effemeridi Soc. letture e conversaz. scientif., anno IV, fasc. VIII. In-8°, di 13 pagine, Genova, 1873.

Oggetto e indirizzo della moderna mineralogia (Prolusione ad un corso di mineralogia). Effemeridi Soc. lett. e conv. scient., anno VI, Genova, 1873.

Nuovi documenti sulla Liguria preistorica. Effemeridi Soc. lett. e conv. scient., anno 1873, pp. 363-369. In-8°, di 6 pagine, con 5 fig. interc. Genova, 1873.

Iconografia di alcune conchiglie raccolte nel golfo di Suez e sulle spiaggie emerse del Mar Rosso (tav. I-III, con relative spiegazioni). Genova, tip. Ist. Sordo-Muti, 1873. In fondo alla spiegazione della tav. III è detto che queste tavole furono eseguite nel 1867 e che quasi tutte le specie figurate si trovano descritte nell'opera *Malacologia del mar Rosso* ecc.

Di alcuni molluschi raccolti nell'isola di Sardegna dal dott. Gestro. Ann. Mus. civ. St. nat. di Genova, vol. IV, novembre, pp. 275-281. Genova, 1873.

Di alcuni molluschi terrestri viventi presso Aden e sulla costa d'Abissinia. Ann. Mus. civ. St. nat. di Genova, vol. IV, novembre, pp. 521-530. Genova, 1873.

Malta residuo di una gran terra sommersa. Rivista marittima. Genova, 1874.

Sullo stato sferoidale dell'acqua nelle lave incandescenti. Bull. del vulcanismo ital., fasc. IV e V, pp. 57. Roma, 1874.

Cenni intorno al modo di esplorare utilmente le caverne ossifere della Liguria. Effem. Soc. lett. e conv. scient., nuova serie, disp. 3ª e 4ª. In-8°, di 15 pagine. Genova, 1874.

Molluschi borneensi (illustrazione delle specie terrestri e d'acqua dolce raccolte nell'isola di Borneo dai signori G. Doria e O. Beccari). Ann. Mus. civ. di St. nat. di Genova, vol. VI, pp. 366-486, tav. IV-VI. Genova, 1874.

Saggio di una teoria dei vulcani. Bull. del vulcanismo ital., fasc. 1-3, di 13 pagine. Roma, 1875. **50.**

Saggio di una teoria dei vulcani. Nuova Antologia sc. lett. ed arti, anno X, vol. XVIII, fasc. I, gennaio 1875, pp. 58-88. Firenze, 1875.

Lettera al socio prof. G. Gastaldi. Rend. Acc. Scienze Torino, vol. X, 1874-'75, pp. 765-769. Torino, 1875.

L'uomo preistorico in Italia, considerato principalmente dal punto di vista paleontologico. (Appendice alla traduz. italiana dell'opera di J. Lubbock, *I tempi preistorici e l'origine dell'incivilimento* (versione italiana di M. Les-

sona). In 8°, di 127 pagine, 66 fig. interc. Torino, Unione tip. ed. torinese, 1875.

* *Una caverna sepolcrale in Liguria.* La Beneficenza (strenna). Tip. Pellas, Genova, 1876.

Studio monografico sopra gli Strombidi del Mar Rosso (in collaborazione con C. Tapparone-Canefri). Ann. Museo civ. St. nat. di Genova, vol. VIII, pp. 337-366. Genova, 1876.

Osservazioni geologiche sul monte Negro (territorio di Porto Maurizio). Bull. R. Com. geolog., vol. VII, pp. 485-490. Roma, 1876.

Intorno ad un minerale manganesifero del Senese. Riv. scient. industr., anno VIII. Firenze, 1876.

Appunti paleontologici: I. Fossili delle marne di Genova. Ann. Museo civ. St. nat. di Genova (29 dic. 1876), vol. IX, 1876-'77, pp. 209-264. Genova, 1876-'77.

Appunti paleontologici: I. Fossili delle marne di Genova (Appendice, correzioni ed aggiunte). Ann. Museo civ. St. nat. di Genova, vol. IV, 1876-'77, pp. 401-406. Genova, 1876-'77.

La Galita: cenni di una escursione estiva nella crociera del 'Violante' durante l'anno 1876. Boll. Soc. geogr. ital., anno XI, ser. II, vol. XIV, fasc. 12°, dicembre 1877, pp. 463-471. Roma, 1877.

Appunti paleontologici: II. Cenni sui 'Myliobates' fossili dei terreni terziari italiani. Ann. Mus. civ. St. nat. di Genova, vol. X, pp. 313-340, con fig. interc. Genova, 1877.

Crociera del 'Violante': Testacei. Ann. Mus. civ. St. nat. di Genova, vol. XI, pp. 411-456. Genova, 1877-'78.

Istruzioni scientifiche pei viaggiatori raccolte per cura di A. Issel: Zoologia, per A. Issel e R. Gestro. (È opera del dott. Gestro quanto riguarda mammiferi, uccelli, insetti; il rimanente appartiene ad Issel). Mem. Soc. geogr. it., vol. I. In-8°, di 58 pagine. Roma, 1878.

Appunti paleontologici: III. Ritrovamento del genere 'Machaerodus' sugli Apennini liguri. Ann. Mus. civ. St. nat. di Genova, vol. XII, pp. 546-551. Genova, 1878.

Zeolite ed aragonite raccolte nei filoni cupriferi della Liguria. Bull. R. Com. geolog., vol. IX, pp. 116-122. Roma, 1878.

Di alcune fiere fossili nel Finalese. Giornale Soc. lett. e conversaz. scient., anno II, fasc. VI. In 8°, di 16 pagine, con 1 tav. [Questa tavola è in parte (vi è aggiunta la fig. 3) la tav. 5ª in: Atti R. Acc. Lincei, serie 3ª, vol. II, Mem. classe di sc. fis. ecc.]. Genova, tip. Sambolino, 1878.

Nuove ricerche sulle caverne ossifere della Liguria. Atti R. Acc. Lincei, 1877-'78, serie terza, Mem. classe sc. fis., mat. e nat., vol. II, pp. 51-116, fig. 1-7 interc., tav. I-V. Roma, 1878.

Rame nativo epigenico sopra un dente di squalo e frustoli di piante convertite in limonite. Bull. R. Com. geol. d'It., vol. IX, pp. 226-236, fig. 1-5 interc. Roma, 1878.

Le caverne ossifere ed i loro antichi abitanti. Nuova Antol. sc. lett. ed arti, anno XIII, parte I (vol. X, ser. II [tomo XL coll. generale]), pp. 328-344; parte II (vol. XI, ser. II [tomo XLI coll. generale]), pp. 265-290. Firenze, 1878.

Le isole e le scogliere madreporiche. Nuova Antol. sc. lett. ed arti, vol. XII, ser. II (tomo XLII collez. gen.), pp. 500-569. Firenze, 1878.

Il Museo civico di Genova. L'esploratore. Milano, settembre, 1878.

Sulla ostreicoltura in Francia e in Italia (Relaz. alla Cam. di comm. di Genova). In-8°, di 14 pagine. Genova, tip. Pellas, 1879.

Nuove ricerche sull'acido borico dei soffioni. (Note bibliografiche). Bull. del vulcanismo ital., anno VI, pp. 9-14. Roma, tip. della Pace, 1879.

Sulle traccie di antichissima lavorazione osservate in alcune miniere della Liguria. La Rassegna settim. di politica, sc., lett. ed arti, vol. III, n. 70, 1° sem. (4 maggio 1879), pp. 348-349. Roma, 1879.

* *Scene preistoriche.*

Datolite e scolecite del territorio di Casarza (Liguria). Bull. R. Com. geol. d'It., vol. X, pp. 530-544, fig. 1-3 interc. Roma, 1879.

Conclusioni di uno studio sui terreni serpentinosi della Liguria orientale. Bull. R. Com. geol. d'It., vol. X, pp. 579-583. Roma, 1879.

Appunti paleontologici: IV. Descrizione di due denti d'elefante raccolti nella Liguria occidentale. Ann. Mus. civ. di st. nat. di Genova, vol. XIV, pp. 153-168, fig. interc. Genova, 1879.

Osservazioni intorno a certe roccie anfiboliche della Liguria, a proposito d'una nota del prof. Bonney concernente alcune serpentine

della Liguria e della Toscana. Bull. R. Com. geolog. d'Italia, vol. XI (I della 2ª serie), pp. 183-192, 1 fig. interc. Roma, 1880.

Crociera del « Violante », comandato dal capitano armatore Enrico D'Albertis, durante l'anno 1877. Ann. Mus. civ. St. nat. di Genova, vol. XV (1879-'80) [I, *Parte narrativa*, pp. 197-236, 10 fig. interc.; II, *Risultati scientifici* (*Cenni sulla geologia della Galita*, pp. 237-258, con una carta geologica e 6 fig. interc.; *Molluschi terrestri e d'acqua dolce viventi e fossili della Tunisia*, pp. 259-282, 3 fig. interc.)]. Genova, 1880.

Cenni sulla miniera ramifera di Bargone Giornale Soc. lett. e conv. scient., anno VI. In-8°, di 19 pagine. Genova, 1880.

La Ligurie. In Bibliographie géologique et paléontologique de l'Italie, pp. 37-56. Bologne, Nicolas Zanichelli, 1881.

Bibliografia scientifica della Liguria (geologia, paleontologia, mineralogia e scienze affini). Ann. Mus. civ. di St. nat. di Genova, vol. XVI (14-26 marzo 1881), pp. 561-616. Genova, 1881.

Relazione degli studi fatti per un rilievo delle masse ofiolitiche nella riviera di Levante (Liguria). (In collab. con l'ing. L. Mazzuoli). Boll. R. Com. geol. d'It., vol. XII (2° della 2ª serie), pp. 313-349. Roma, 1881.

Istruzioni scientifiche pei viaggiatori, raccolte da Arturo Issel, in collaborazione dei signori Giovanni Celoria, Michele Stefano De Rossi, Raffaele Gestro, Enrico Giglioli, Guido Grassi, Angiolo Manzoni, Antonio Piccone, Gustavo Uzielli e Arturo Zanetti. In-8°, di 556 pagine. Ministero agr. ind. e comm., Roma, 1881. (Capitolo *Geologia e paleontologia*, dovuto a Issel, pag. 265; *Zoologia*, di Issel e Gestro, pp. 359-430; *Mineralogia*, di Issel, pp. 475-548).

Della 'Pupa Amicta' Parreys, come indizio di antichi livelli marini. Bull. Soc. malac. ital., vol. VII, pp. 208-212, Pisa, 1881.

I molluschi commestibili, le applicazioni delle conchiglie, le perle e i coralli (Esposizione internazionale di pesca di Berlino 1880; relazione). Annali dell' ind. e del comm., 1880, n. 28. In-8°, di 39 pagine. Roma, tip. eredi Botta, 1881.

* *Orografia, idrografia, meteorologia, geologia, caverne ossifere ed avanzi di antichi abitanti, materiali estrattivi.* Atti della giunta per l'inchiesta agraria ecc., vol. X, fasc. I. Roma, 1882.

Antiche linee litorali della Liguria. Bull. Soc. geol. ital., vol. I (1882), pp. 222-232. Roma, 1882.

Estratto della conferenza sulle serpentine tenuta in Bologna in occasione del 2° congresso internazionale di geologia. (Oltre ad A. Issel, parlarono anche i sigg. Capacci, De Stefani, Daubrée, Mazzuoli, Szabo, Sterry Hunt, Taramelli, Uzielli). Bull. Soc. geol. ital., vol. I (1882), pp. 18-20. Roma, 1882.

Istruzioni pratiche per l'ostricoltura e la mitilicoltura; per commissione del ministero di agr. ind. e comm. In-8°, di 260 pagine, con fig. interc. Genova, tipogr. del R. Ist. dei sordomuti, 1882.

Domenico Viviani e Giuseppe Denotaris (in collaborazione col prof. Piccino). Genova, 1882.

Note sur un instrument destiné à mésurer l'intensité de la pésanteur. Bull. Soc. imp. des nat. de Moscou, année 1882, n. 1, pp. 134-139. Moscou, 1882.

Di uno strumento destinato a misurare l'intensità della gravità. Giornale Soc. lett. e conversaz. scientif. Genova, 1882.

Osservazioni relative ad alcune caverne ossifere della Liguria occidentale. Bull. di Paletn., anno 8°, pp. 53-58. Reggio dell'Emilia, 1882.

Manuale del naturalista viaggiatore (in collaboraz. con G. Gestro). Manuali Hoepli: *Naturalista viaggiatore. Zoologia* (con 38 fig. interc.). Milano, 1883.

Cenni sulla geologia e sui materiali estrattivi delle provincie liguri. Atti giunta per l'inchiesta agraria, vol. X, fasc. I. Roma, 1883.

Esame sommario dei saggi di fondo raccolti dalla spedizione idrografica imbarcata a bordo del r. piroscafo « Washington », sotto gli ordini del comandante G. B. Magnaghi, nella campagna del 1882 (in collaborazione con G. De Amezaga). Pubbl. Uff. idrogr. R. Marina, di 19 pagine. Genova, 1883.

Sulla sovraposizione, nella riviera di Ponente, di una zona ofiolitica eocenica ad una formazione ofiolitica paleozoica (in collab. coll'ingegnere L. Mazzuoli). Boll. Soc. geol. it., volume II, 1883, pagg. 44-56. Roma, 1883.

100. *Le oscillazioni lente del suolo.* Nuova Antol. sc. lett. ed arti, fasc. XX, 1883 (vol. LXXI collez. generale), pagg. 646-666. Roma, 1883.

Le oscillazioni lente del suolo o bradisismi: saggio di geologia storica. Atti R. Univ. di Genova, vol. V. In-8°, di 422 pagine, con fig,

interc. e una carta generale dei bradisismi e una particolare di quelli d'Italia. Genova, 1883.

Bibliografia scientifica della Liguria: geologia, paleontologia, mineralogia e scienze affini (parte seconda). Ann. Mus. civ. Storia nat. di Genova, vol. XX, pp. 234-252. Genova, 1884.

Esame sommario di avanzi d'uomo e di animali raccolti nella caverna degli Orrerri, in Sardegna. Bull. di paletn. ital., anno 10°, nn. 1-2, pp. 9-12. Reggio dell'Emilia, 1884.

Nota sulla zona di coincidenza delle formazioni ofiolitiche eocenica e triassica della Liguria occidentale (in collaboraz. con L. Mazzuoli). Boll. R. Com. geol. d'It., vol. XV (5° della serie 2ª), pp. 2-23, con carta geol. ed una tav. di sezioni e fig. 1, 2 interc. Roma, 1884.

Della esistenza d'una zona ofiolitica terziaria a Rivara Danavese. Boll. R. Com. geol. d'It., vol. XV (5° della serie 2ª), pp. 23-33, fig. 1-3 interc. Roma, 1884.

Pintaderas. La Natura, n. XXIV. Milano, 1884.

Hache polie en ématite. L'homme, n. 13. Paris, 1884.

Astuccio mineralogico per escursione. Rivista alpina ital., n. 6. Torino, 1884.

Sopra un'ascia di ematite rossa proveniente dal paese di Niam Niam. Lettera al marchese Giacomo Doria. Ann. Mus. civ. Stor. nat. di Genova, vol. XX, pp. 487-493. Genova, 1884.

Pelagos: saggi sulla vita e sui prodotti del mare (in collaboraz. col prof. E. H. Giglioli). In-8°, di 436 pagine, con figure interc. Genova, 1884.

Delle osservazioni da eseguirsi per lo studio dei movimenti secolari del suolo. Boll. Club alp. it., n. 51, anno 1884.

Le caverne dei Balzi Rossi e gli scavi del prof. Orsini. La Natura, n. XXVIII. Milano, 1884.

Di alcuni nuovi manufatti d'ematite rossa. Ann. Mus. civ. St. nat. di Genova, serie 2ª, vol. II (XXII), pp. 77-81, figura interc. Genova, 1885.

Materiali per lo studio della fauna tunisina, raccolti da G. e L. Doria: VI, Molluschi. Ann. Mus. civ. St. nat. di Genova, serie 2ª, vol. II (XXII), pp. 5-15, con fig. interc. Genova, 1885.

Esame sommario di alcuni saggi di fondo raccolti nel golfo di Genova. Boll. R. Com. geol. d'It., vol. XVI (6° della ser. 2ª), pp. 129-139. Roma, 1885.

Proposta relativa ad una riforma da introdursi nella nomenclatura geologica. Atti Soc. tosc. Sc. nat., proc. verb., vol. V, ad. 15 nov. 1885, pp. 32-34. Pisa, 1885-'87.

Caverne ossifere del Loanese e del Finalese. Bull. paletn. it., anno 11°, serie II, tomo I, n. 7-8, pp. 97-113; n. 9-10, pp. 146-157, con 2 tavole. Parma, 1885.

La Liguria ed i suoi abitanti nei tempi primordiali. Movimenti geologici. (Discorso letto per l'inaugurazione dell'anno scolastico 1884-'85). In-8°, di pagine 51. Genova 1884, — 2ª ediz., Genova, R. Stab. tipo-litogr. P. Martini, 1885.

Viaggio nel mar Rosso e tra i Bogos (con Appendice). In-8°, di 213 pagine, IV ediz. Milano, fratelli Treves, 1885.

Norme per eseguire osservazioni e raccolte scientifiche. Portafoglio dell'alpinista. Genova, tip. Marittima, 1885.

Note intorno al rilevamento geologico del territorio compreso nei fogli di Cairo Montenotte e Varazze della carta topografica militare. Boll. R. Com. geol. d'It., vol. XVI (6° d. ser. 2ª), pp. 257-285. Roma, 1885.

La pietra di Finale nella riviera Ligure (Appendice: *Elenco delle caverne ossifere del Finalese*). Boll. R. Com. geol. d'It., vol. XVI (6° della serie 2ª), pp. 340-362, con schizzo geol. del Finalese. Roma, 1885.

Catalogo dei fossili della pietra di Finale. Boll. R. Com. geol. d'It., vol. XVII (7° della serie 2ª), pp. 27-43, con 2 tav. Roma, 1886.

Cenno sull'acquisto del museo Perrando. Giorn. di lett. e conv. scient., fasc. di marzo 1886. Genova, 1886.

Resti di un antropoide rinvenuti nel pliocene a Pietra Ligure. Boll. Soc. geol. ital., vol. V, pp. 455-489. Roma, 1886.

Scavi recenti nella caverna delle Arene Candide in Liguria. Bull. di paletn. it., anno 7°, serie II, tomo II, n. 7-8, pp. 112-133; n. 11-12, pp. 217-228, con 3 tavole. Parma, 1886.

Notes géologiques sur les grands fonds de a mer. Bull. de la Soc. belge de géol., pal. et hydrol., séance 18 dec. 1887, tome I, pagine 240-242. Bruxelles, 1887. (Questa nota è il riassunto della Memoria pubblicata nel tomo II, pp. 19-48, Bruxelles 1888).

Sur l'altitude qu'atteignent les formations quaternaires en Ligurie. Compt. rend. hebd. des séances de l'Ac. des sciences, II sem.,

tom. CV, séance du 14 nov. 1887, pp. 960-962. Paris, 1887.

Discussione sulla presenza di tracce glaciali nell'Appennino (in collaborazione con altri). Boll. Soc. geol. it., vol. VI, pp. 23-24. Roma, 1887.

Replica alla Memoria del socio De Stefani sul Permiano nell'Appennino. Boll. Soc. geol. it., vol. VI, pp. 24-25. Roma, 1887.

La nuova Carta geologica delle Riviere liguri e delle Alpi Marittime. Boll. Soc. geol. ital., vol. VI, pp. 209-224. Roma, 1887.

Discorso sulla geologia della Liguria. Boll. Soc. geol. ital., vol. VI, ad. gen. estiva di Savona, seduta del 12 settembre 1887, pagine 434-446. Roma, 1887.

Replica al socio C. De Stefani sulle interpretazioni relative alla stratigrafia delle assise attribuite al permiano e al triassico. Boll. Soc. geol. ital., vol. VI, pp. 451-453. Roma, 1887.

Discussione sul liguriano, il tongriano, l'aquitaniano ecc. Boll. Soc. geol. it., vol. VI, pp. 457-458. Roma, 1887.

Relazione delle gite fatte dai congressisti nei dintorni di Savona, nei giorni del 12 e del 13 settembre 1887. Boll. Soc. geol. it., vol. VI, pp. 468-473. Roma, 1887.

Brevi comunicazioni sulla 'Mitra deacea' Roeve, trovata nella caverna delle Arene Candide, e su una ascia litica rinvenuta presso Bambò in Birmania. Boll. Soc. geol. it., vol. VI, pag. 483. Roma, 1887.

Discussione sulla tectonica e sulle oscillazioni del suolo della Liguria. Boll. Soc. geol. ital., ad. 17 settembre 1887, vol. VI, pp. 495-496. Roma, 1887.

Le tremblement de terre du 23 février 1887 observé dans les tunnels ecc. Bull. Soc. belge de géol., pal. et hydrol., tome I. Bruxelles, 1887.

Sur le tremblement de terre de la Ligurie. Comptes-rendus hebd. des séances de l'Ac. des sciences, I sem., tom. CIV, séance du 7 mars 1887, pp. 662-664. Paris, 1887.

Bibliografia scientifica della Liguria: geologia, paleontologia, mineralogia, etnografia, paletnologia e scienze affini. Nuova ediz., in-8°, di 113 pagine. Genova, tip. Marittima, 1887.

Sur l'existence des vallées submergées du golfe de Gênes. Comptes-rendus hebdom. des séances de l'Ac. des sciences, I sem., tom. CIV, séance du 24 janvier 1887, pp. 250-253. Paris, 1887.

Sur l'époque du créusement des vallées submergées dans le golfe de Gênes. Comptes-rendus hebdom. des séances de l'Ac. des sciences, I sem., tom. CIV, séance du 31 janvier 1887, pp. 318-321. Paris, 1887.

Relazione sui banchi coralliferi di Sciacca ecc. Annali di agr., anno 1887, pp. 44-67. Roma, 1887.

Cenni di una accetta litica proveniente dalla Birmania (lettere al marchese G. Doria). Ann. Mus. civ. Stor. nat. di Genova, vol. XXV (serie 2ª, vol. 5°), pp. 509-513, con 2 figure interc. Genova, 1887.

Del ritrovamento di una conchiglia esotica nella caverna delle Arene Candide. Bull. di paletn. it., anno 13°, serie II, tomo III, n. 11-12, pp. 173-175. Parma, 1887.

Carta geologica delle Riviere liguri e delle Alpi marittime (in collaborazione con l'ingegnere L. Mazzuoli e con l'ing. D. Zaccagna). Genova, litogr. Armanino, 1887.

La caverna della Giacheira presso Pigna (Liguria occidentale). Atti Soc. tosc. Sc. nat., Memorie, vol. IX, pp. 115-124, tav. II. Pisa, 1888.

Il terremoto del 1887 in Liguria. Supplemento al Boll. del R. Com. geol. d'Italia, an. 1887, di 207 pagine, con 4 tav. e una carta grafica di parte della Liguria e della Provenza. Roma, 1888.

Note geologiche sugli alti fondi marini. Bull. Soc. belge de géol., pal. et hydrol., tom. II, pp. 19-48, 18 dec. 1887. Bruxelles, 1888. (Il riassunto in francese di questa Memoria è inserito nel tomo I del Bullettino del 1887, pp. 240-242).

150. *Don Pietro Perrando Deo Gratias* (commemorazione). Boll. Soc. geol. ital., vol. VIII, pp. 56-58. Roma, 1889.

Res ligusticae: IX. *Dei fossili recentemente raccolti nella caverna delle Fate* (Finalese). Ann. Mus. civ. Stor. nat. di Genova, serie II, vol. IX (XXIX), pp. 5-15, con fig. intercalate. Genova, 1889.

Figure di viscosità ed impronte radiculari con parvenza di fossili. Ateneo ligure, fasc. agosto-dicembre 1889. Genova 1889.

Sul collocamento di segnali in riva al mare per accertare le oscillazioni lente del suolo. Ann. dell'Uff. centr. di meteor. e geodin., parte IV, vol. IX, 1887. Roma, 1889.

Di una Sepia del pliocene piacentino.

Bull. Soc. malac. ital., vol. XIV, pp. 157-160, con fig. interc. Pisa, 1889.

Manufatto litico raccolto a Ponzone. Bull. di paletn. ital., anno 15°, serie 2ª, tomo V, n. 1-2, pp. 6-9. Parma, 1889.

Cenni sulla giacitura dello scheletro umano recentemente scoperto nel pliocene di Castenedolo. Boll. di paletn. it., anno 15°, serie 2ª, tom. V, n. 7-8, pp. 89-110. Parma, 1889.

Res Ligusticae: XII. *Il calcifiro fossilifero di Rovegno in Val di Trebbia.* Ann. Museo civ. St. nat. di Genova, serie 2ª, vol. IX (XXIX), pp. 91-119, tav. V-VI, fig. interc. Genova, 1889-'90.

Impressions radiculaires et figures de viscosité ayant l'apparence de fossiles. Boll. Soc. belge de géol., pal. et hydrol., tom. III, année 1889; Mémoires, séance 22 déc., pp. 450-455. Bruxelles, 1890.

Della formazione lherzolitica di Baldissero nel Canavese. Boll. R. Com. geol. d'It., vol. XXI (1° della 3ª ser.), pp. 433-436. Roma, 1890.

Di una gita nei dintorni di Genova (in collaborazione col prof. Squinabol). Atti Soc. ligust. Sc. nat., vol. I, pp. 216-221. Genova, 1890.

Radiolaires fossiles contenues dans les cristaux d'albite. Comptes-rendus hébd. des séances de l'Ac. des sciences, 1890, I sem., tom. CX, séance du 24 février 1890, pp. 420-424, 4 fig. intercalate. Paris, 1890.

Dei noduli a radiolarie di Cassagna e delle roccie silicee e manganesifere che vi si connettono. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. I, pp. 20-28. Genova, 1890.

Come nacquero le montagne (Parte I). Ateneo ligure, anno XIII, fasc. ottobre-dicembre. Genova, 1890.

Come nacquero le montagne (Parte II). Ateneo ligure, anno XIV, fasc. gennaio-febbraio. Genova, 1891.

Memoriale per gli alpinisti in Liguria. In-8°, di 476 pagine, 2 tavole e fig. intercalate. Genova, tip. del R. Ist. dei sordomuti, 1891.

Carta geologica della Liguria e dei territori confinanti, nella scala di $^1/_{200 \cdot 000}$ (in collaboraz. col. professor Squinabol). Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. II. Genova, 1891.

Note esplicative della carta geologica della Liguria e dei territorii confinanti (in collab. col prof. Squinabol). Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. II, pp. 3-39, con 6 fig. intercalate. Genova, 1891.

Sur le calcaire porphyrique de Rovegno dans la vallée de la Trebbia. Bull. Soc. belge de géol., pal. et hydrol.; proc. verbaux, séance du 1er juillet 1890, tome IV, pp. 160-162. Bruxelles, 1891-1892.

Quali potrebbero essere i provvedimenti da adottarsi dal Governo per trarre profitto dalla pesca e dall'allevamento dell'ostrica perlifera nelle isole Dahalak. (Quesito proposto dalla Soc. africana di Napoli). Boll. Soc. geogr. it., serie III, vol. V, fasc. X-XI, ottobre-novembre 1892, pp. 906-911. Roma, 1892.

Sugli antichi liguri. Nuova Antol. sc. lett. ed arti, vol. XL della sez. III (vol. CXXIV collez. gen.), fasc. XIV, 16 luglio 1892, pagine 197-226. Roma, 1892.

Cesare Maria Tapparone Canefri: cenni necrologici. Ann. Mus. civ. St. nat. di Genova, serie 2ª, vol. XII (XXXII), pp. 103-109, con ritratto. Genova, 1892.

Scoperte preistoriche nella caverna dei Balzi Rossi. Notizie degli scavi di antichità com. alla R. Acc. dei Lincei, pp. 37-38. Roma, febbraio 1892.

Cenno di alcuni manufatti litici della Liguria. Bull. di paletn. ital., anno XVIII, serie II, tomo VIII, n. 1-4, pp. 35-37. Parma, 1892.

Liguria geologica e preistorica. Due vol. in 8°, di 854 pagine, con fig. interc., atlante di 30 tav. e carta geol., in occasione delle feste colombiane per il 4° centenario della scoperta d'America. Genova, ed. A. Donath, 1892.

Frammento della carta delle formazioni ofiolitiche della riviera di Levante (in collaborazione con l'ing. L. Mazzuoli). In L. Mazzuoli, *Nuove osservazioni sulle roccie ofiolitiche della Riviera di Levante in Liguria.* tav. I. [Boll. del R. Com. geol. d'It., anno 1892, vol. XXIII (III della 3ª serie)]. Roma, 1892.

Brevi note di geologia locale. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. III, pp. 19–27. Genova, 1892.

Auffindung von 3 menschlichen Skeletten der paläolithischen Zeit in einer Höhle der Balzi Rossi. Verhandl. der berl. Gesellschaft für Anthrop., Ethn., ecc. Sitzung 18 Juni 1891. Berlin, 1892.

Della convenienza di promuovere l'esplorazione delle caverne d'Italia, sotto l'aspetto della topografia, della idrografia sotterranea e

della geologia. Boll. Soc. geogr. it., serie III, vol. V, fasc. VIII-IX, agosto-sett. 1892, pp. 745-749. Roma, 1892.

Note paleontologiche sulla collezione del signor G. B. Rossi. Bull. di paletn. it., anno XIX, serie II, tomo IX, n. 1-3, pp. 1-17, con 2 tavole; n. 4-6, pp. 57-92. Parma, 1893.

Cenno sulla costituzione geologica e sui fenomeni geodinamici dell'isola di Zante. Boll. d. R. Com. geol. d'It., vol. XXIV (IV della ser. 3ª), pp. 144–182, tav. V, con 1 carta geol. Roma, 1893.

Appunti geologici sui colli di Baldissero (Canavese). Boll. Soc. geol. it., vol. VII, pp. 255-279, tav. II. Roma, 1893.

Discorso inaugurale dell'adunanza generale estiva della Società geologica italiana, tenuta in Ivrea, dal 15 *al* 20 *settembre* 1893. Boll. Soc. geol. it., vol. XII, pp. 480–488. Roma, 1893.

Proposta relativa ad una riforma della nostra nomenclatura geologica. Boll. Soc. geol. it., vol. XII, pp. 512-515. Roma, 1893.

Discorso di chiusura dell'adunanza generale estiva della Società geologica italiana, tenuta in Ivrea, dal 15 *al* 20 *settembre* 1893. Boll. Soc. geol. it., vol. XII, pp. 520–521. Roma, 1893.

Cenni intorno al Museo geologico della R. Università di Genova. Boll. Soc. geol. it., vol. XII, pp. 692–704. Roma, 1893.

* *Altitude qu' atteignent les formations quaternaires en Ligurie.* Compt. rend. des séances de l'Ac. des sciences. Paris, 1894.

Rémarques sur les tremblements de terre subis par l'île de Zante pendant l'année 1893. Compt. rend. des séances de l'Ac. de sciences, séance du 11 fev. 1894. Paris, 1894.

Cenno biografico del prof. Gaspero Buffa. Annuario della R. Univ. di Genova, 1893-84. Genova, 1894.

Nota sul litorale fra Vado e Spotorno. (In collaboraz. con l'ing. S. Traverso). Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr. vol. V, fasc. 3, pp. 302–319, con 2 fig. interc. Genova, 1894.

Cenni di nuove raccolte fatte nelle caverne ossifere della Liguria. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., anno V, pp. 329–359, tav. XXVII e 2 fig. interc. Genova, 1894.

Intorno ai fenomeni sismici osservati nell'isola di Zante, durante il 1893 (In collab. col prof. G. Agamennone). Ann. R. Uff. centr. meteor. e geod. it., serie II, vol. XV, parte 1, 1893. Roma, 1894.

Della convenienza di promuovere l'esplorazione delle caverne d'Italia sotto l'aspetto della topografia, della idrografia sotterranea e della zoologia (relazione). Atti del primo congresso geogr. ital. tenuto a Genova dal 18 al 25 sett. 1892, vol. II, parte I, pp. 305–311. Genova, tip. R. I. Sordomuti, 1894.

Michele Lessona e Francesco Gasco. Cenni necrologici. Annuario R. Univ. di Genova, anno 1894–95. Genova, 1895.

La rupe oscillante e le voragini di Cefalonia. Mem. Soc. geogr., vol. V, pp. 149–164, 13 luglio 1895. Roma, 1895.

I bradisismi d'Italia secondo i più recenti studi. Intorno alla proroga del concorso aperto nel 1893 *per un lavoro illustrativo delle caverne di una regione d'Italia.* Atti del II Congresso geogr. ital. tenuto in Roma. Estr. di 11 pagine. Roma, 1895.

Dell'età attribuita da Domenico Viviani alle serpentine ligustiche. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. VI, fasc. 2, pp. 210–214. Genova, 1895.

* *Fu un sogno?* Natura ed Arte, a. IV. Milano, 1895.

Osservazioni e raccolte da farsi in escursioni e note diverse. Nella Guida per escursioni negli Appennini e nelle Alpi liguri, di G. Delle Piane, 2ª ediz. Genova, 1896.

Cenno di un parossismo eruttivo nelle sorgenti bituminifere di Zante. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. VII, pp. 70–78. Genova, 1896.

L'isola d'oro. Nuova Antol. Sc., lett. ed arti, vol. LXVI, serie IV (CL della collez. gen.), fasc. XXIV, 16 dic. 1896. pp. 675–691. Roma, 1896. **200.**

Compendio di geologia, col concorso dell'ing. S. Traverso. Parte I (1886), di pp. 428; Parte II (1897), di pp. 592. L'opera completa contiene 717 figure interc., tav. e carte geol. d'Italia. Unione tip. editr. Torino, 1896–97.

Analisi bibliografica di un'opera di C. Gratzer. Boll. Soc. geogr. ital., serie III, vol. X, fasc. X, pp. 384–388. Roma, 1897.

Analisi bibliografica di un'opera del dott. F. Mader. Boll. Soc. geogr. ital., serie III, vol. X, fasc. XI, pp. 424–432. Roma, 1897.

Salvatore Trinchese. Cenni necrologici. Ann. Mus. civ. St. nat. di Genova, serie II, vol. XVIII

(XXXVIII, pp. 5-11, con ritratto. Genova, 1897-'98.

Incisioni rupestri del Finalese. Bull. di paletn. ital., anno XXIV, serie III, tomo IV, n. 10-12, pp. 265-279, con 2 fig. interc. e 1 tav. Roma, 1898.

Cenno bibliografico di un'opera di Wilson Giorn. della Soc. di lett. e conv. scient. Genova, 1897.

Ferrovia Genova-Piacenza. Lettera nel periodico ' Il Caffaro ', marzo 1898.

Terremoto del 18 novembre 1897 a Città di Castello e sull'Appennino Umbro-Marchigiano. Atti soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. IX. pp. 233-254. Genova, 1898.

Morfologia e genesi del Mar Rosso. Atti del III Congr. geogr. ital., tenuto in Firenze, dal 12 al 17 apr. 1898. Estr. di 17 pagine, con 1 tav. Firenze, 1899.

Rupe incisa dell'Acquasanta (Appennino ligure). Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. X, pp. 23-28, con 4 figure interc. Genova, 1899.

Spallanzani nel Finale ligustico. Nella raccolta intitolata : *Nel primo centenario della morte di Lazzaro Spallanzani.* Reggio Emilia, 1899.

Considerazioni supplementari intorno al terremoto umbro-marchigiano del 18 dicembre 1898. Boll. sism. ital., vol. V. Modena, 1899.

Osservazioni sul Tongriano di S. Giustina e di Sassello. Atti R. Università di Genova, vol. XV. Genova, 1900.

Giovanni Marinelli geografo. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. XI, pp. 65-75. Genova, 1900.

Materiali edilizi decorativi adoperati in Genova. Conferenza nella raccolta intitolata : *Istituti municipali di pubblica istruzione ed educazione in Genova nell'anno 1900.* Genova, 1900.

Sullo sprofondamento del golfo di S. Eufemia. Ann. idrogr., vol. I. Genova, 1900.

Cenni storici sul gabinetto di Geologia della R. Università di Genova. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. XI, pp. 172-182. Genova, 1900.

Carta geologica dei territori di S. Giustina e Sassello, alla scala di 1: 50.000 (in collaborazione con G. Rovereto). Atti R. Univ. di Genova, vol. XV. Genova, 1900.

Appunti sulla terminologia nelle discipline geografiche. Ateneo ligure. Genova, 1900.

Essai sur l'origine et la formation de la mer Rouge. Bull. de la Soc. belge de géol., pal. et hydr., tome XIII, 1899, avril 1900, pp. 65-84, avec fig. interc. et avec pl. VIII. Bruxelles, 1900.

Note spiccate. I. Valle di Penna. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. XI, pp. 3-15. Genova, 1900.

Della Giadaite secondo le recenti osservazioni dell'ing. S. Franchi. Bull. di paletn. it., anno XXVII, serie III, tomo VI, n. 1-3, pp. 1-9. Parma, 1901.

Compendio di geologia. 2 volumi, con fig., seconda tiratura con nuove appendici. Torino, Un. tip. ed., 1901.

In vacanza. Gite e studii. In-8°, di 216 pagine. Roma, Soc. editr. Dante Alighieri, 1901.

Le rupi scolpite nelle alte valli delle Alpi Marittime. Bull. di paletn. it., anno XXVII, serie III, tomo VI, n. 10-12, pp. 217-259, 74 figure interc. Parma, 1901.

Le nuove incisioni rupestri alpine, illustrate da C. Bicknell. Bull. di paletn. ital., anno XXVIII, ser. II, tomo VIII, fasc. 7-9, pp. 234-247, 7 fig. interc. Parma, 1902.

A proposito del recente disastro nelle Antille. Proposta e voti. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., anno XIII, pp. 77-90. Genova, 1902.

Il concetto della direzione nelle montagne. Rivista geogr. ital., anno IX, fasc. III. In-8°, di 28 pagine. Firenze, tip. M. Ricci, 1902.

La geologia applicata e i suoi intenti. Giorn. di geol. pratica, vol. I, pp. 3-15. Genova, 1903.

Recensione di una nuova Memoria di C. Bicknell. Bull. di paletn. ital., anno XXIX, serie III, tom. IX, fasc. 4-6, pp. 120-121. Parma, 1903.

Applicazioni di un nuovo metodo per le misure di gravità. Giorn. geol. prat., vol. I, pp. 133-140. Genova, 1903.

Relazione a S. E. il Ministro di agricoltura, industria e commercio. Ann. di agricoltura, anno 1899, pp. 77-87; 89-90. Roma, 1903.

Sulla scoperta di un'antica stazione ligure in Provenza. (Cenni critici). Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. XV, pp. 51-61. Genova, 1904.

Terminologia geografica relativa alla configurazione orizzontale della terra emersa, al mare, alle profondità marine. In-8°, di 15 pa-

gine. Genova, tip. de R. Ist. idrogr., 1904. (N. B. Lo stesso lavoro è inserito come Appendice alla II parte del *Trattato di Idrografia* del Comandante P. L. Cattolica.)

Le aree di Marassi e di S. Martino. Studio geologico. Lettera al sig. Presidente degli spedali civili di Genova. In-4°, di 8 pagine. Genova, tip. Papini e figli, 1904.

Osservazioni geologiche fatte nei dintorni di Torriglia. Nota preliminare. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. XV, pp. 193–195. Genova, 1904.

Osservazioni intorno alla frana del Corso Firenze in Genova. Giorn. geol. prat., vol. II, pp. 171–184, con 1 figura. Perugia, 1904.

Due relazioni a S. E. il Ministro di agricoltura, Industria e Commercio, Annali di agricolt., n. 234, pp. 164–176 e 188–191. Roma, 1904.

Note spiccate. II. Valle di Calizzano. (Con appunti e sezioni di G. Rovereto). Atti Soc. lig. Sc. nat. e geogr., vol. XV, pp. 3–30. Genova, 1904.

Excursion géologique dans les environs de Gênes. Nota pubblicata in occasione dell'adun. tenuta in Genova, il 10 *settembre* 1905, *dalla Soc. geol. di Francia.* Atti soc. ligust. Sc. nat. e geogr., anno XVI, pp. 219–232, fig. 1–5 interc. e 1 schizzo geol. del Finalese. Genova, 1905. (N. B. Lo schizzo geologico del Finalese è quello stesso pubblicato nel Boll. R. Com. geol. d'It. anno 1885, tav. IV).

La nuova caverna di Frabosa. Mondo sotterraneo, vol. II. Udine, 1905.

Saggio di un nuovo ordinamento sistematico degli alvei torrenziali e delle rive marine. Atti Soc. lig. Sc. nat. e geogr., anno XVI, pp. 233–285, fig. 1–40 interc. Genova, 1905. (N. B. Nel fasc. n. 4 degli Atti ecc. è errata la numerazione delle pagine: da pag. 233 che segue alla 232, ultima del fasc. n. 3 precedente, si passa alla 234 e da questa alla 335 e così prosegue errata lá numerazione).

Torriglia e il suo territorio. Cenni geologici. Boll. Soc. geol. it., vol. XXV, pp. 1–58, con 15 fig. interc. Roma, 1906.

I problemi dei Balzi Rossi dinanzi al Congresso di Monaco. Bull. di paletnologia italiana, anno XXXII, serie IV, tomo II, fasc. 1–5, pp. 87–162. Parma, 1906.

Cavità rupestri simili alle caldaie dei giganti. Atti Soc. lig. Scienze natur. e geogr., anno XVIII, pp. 96–104, con 2 fig. interc. Genova, 1907.

Recensione: C. Bicknell, *Incisioni rupestri nuovamente osservate nelle alte valli delle Alpi Marittime.* Bull. di paletnologia ital., anno XXXIII, serie IV, tomo III, n. 6–10, pp. 181–182. Parma, 1907.

Un exemple de survivence préhistorique. Compt. rend. du XIII Congrés d'Anthropologie et d'Archéol. préhistor. Monaco, 1907.

Intorno alla proposta di promuovere periodiche riunioni di studiosi di scienze naturali. Relazione. Atti del Congr. dei Nat. ital. promosso dalla Soc. ital. di Sc. nat. Milano, 15–19 sett. 1906, pp. 75–77. Milano, 1907.

L'apprezzamento dei colori nelle scienze naturali. Relazione. Atti del Congr. dei Nat. ital. promosso dalla Soc. ital. di sc. nat. Milano, 15–19 sett. 1906, pp. 83–88. Milano, 1907.

Il concetto della direzione nei corsi d'acqua. Rivista geografica ital., anno XIV, fasc. II, pp. 65–78, con 13 fig. interc. Firenze, 1907. **250.**

Risposta del prof. A. Issel. Onoranze al prof. A. Issel in occasione del suo 40° anno di insegnamento nell'Ateneo genovese, pp. 19–28. Genova, tip. fr. Carlini Gio. Batt., 1907.

Lettera sulla spiaggia di Chiavari. Atti Soc. econ. Chiavari, 1908.

Recenti studii sulle rocce giadaitiche e nefritiche italiane. Bull. di paletn. it., anno XXXIV, serie IV, tomo IV, fasc. 9–12, pp. 148–154. Parma, 1908.

Alcuni resultati degli studi promossi dal principe di Monaco sulle caverne ossifere dei Balzi Rossi. Atti della Soc. ital. per il progr. delle scienze. Prima riunione, Parma, sett. 1907. Discorso inaugurale della sezione VII, pp. 183-194. Roma, 1908.

Relitti. Conferenza. Rivista ligure, anno XXX, fasc. V. Genova, 1908.

Caverne ossifere dei Balzi Rossi. (Resultato degli studii promossi dal principe di Monaco). Bull. di paletn. ital., anno XXXIV, serie IV, tomo IV, fasc. 1–4, pp. 17–31, con 3 fig. interc. Parma, 1908.

Liguria preistorica. Atti Soc. lig. storia patria, vol. XXX, in-8°, di 775 pag., con 8 tav. e fig. interc. Genova, 1908. (N. B. L'ultimo capitolo dell'opera fu tirato a parte col titolo di Epilogo).

Recensioni: C. Bicknell, *Nuovo contributo*

alla cognizione delle incisioni rupestri delle Alpi Marittime e U. Mazzini, *Monumenti celtici in Val di Magra.* Bull. di paletn. it., anno XXXV, serie IV, tomo V, fasc. 1–4, pp. 31–32 e 32–37, con 1 fig. Parma, 1909.

Osservazioni da eseguirsi per presagire i parossismi vulcanici. Natura, vol. I. Pavia, 1909.

Museo del Palazzo Bianco in Genova. Bull. paletn. it., anno XXXV, serie IV, tomo V, fasc. 1–4, pp. 20–30, fig. 7. Parma, 1909.

Recensione: G. Doublet, *Statuette de bronze des environs de Tende.* Bull. paletn. it., anno XXXVI, ser. IV, tomo VI, fasc. 1-5, pp. 61–62. Parma, 1910.

Osservazioni da eseguirsi per presagire i parossismi vulcanici. Atti Soc. it. per il progr. delle scienze. Terza riunione, Padova, sett. 1909, pag. 527. Roma, 1910.

Origine e conseguenze delle frane. Riv. mensile di sc. nat. Natura, vol. I. Pavia, 1910.

La rotazione terrestre è per l'uomo fattore precipuo della distribuzione geografica. Bull. Società geogr. it., serie IV, vol. XI, fasc. 2, pp. 122–134. Roma, 1910.

Rettificazioni ed aggiunte all'opera Liguria preistorica. In-4°, di 2 pagine. Genova, 1910.

Le misure di gravità ed il presagio dei parossismi vulcanici. Riv. lig. di Sc., lett. ed arte. Genova, 1910.

Alcuni mammiferi fossili del Genovesato e del Savonese. Mem. R. Acc. Lincei, anno CCCVII, ser. V, vol. VIII, fasc. V, pp. 191–224, con 4 tav. Roma, 1910.

Cenni intorno ai litorali italiani considerati dal punto di vista geologico. Portolano delle Coste d'Italia. Genova, tip. Pellas, 1911.

Notizie circa il ritrovamento di tombe arcaiche in Liguria. Bullettino di paletn. it., anno XXXVII, serie IV, tomo VII, fasc. 1–3, pp. 36–40. Parma, 1911.

Per l'Italia osservata. Due articoli nella Gazzetta d'Italia. Roma, marzo, 1911.

Il Plutonio di Gorini. Boll. Soc. geol. it., vol. XXX, pp. 493–496. Roma, 1911.

L'evoluzione delle rive marine in Liguria. Boll. Soc. geogr. ital., serie IV, vol. XII, fasc. IX, pp. 1085–1113; fasc. X, pp. 1204–1234; fasc. XI, pp. 1315–1344; fasc. XII, pp. 1436–1454. Roma, 1911.

Recensione di un'opera di A. Brun intitolata: Nouvelles recherches de Geochimie et Geophysique. Natura, vol. II. Milano, 1911.

Recensione: C. Bicknell, *Nouvelles découvertes de roches gravées dans les Alpes Maritimes italiennes.* Bull. paletn. ital., anno XXXVII, serie IV, tomo VII, fasc. 4–8. Parma, 1911.

Indagini e lavori da eseguirsi nel Mare Ligure. Boll. bimestr. R. Com. talassogr. ital., n. 15, pp. 221–226. Venezia, 1912.

La croce gammata in Liguria. Bull. paletn. ital., anno XXXVIII, serie IV, tomo VIII, fasc. 1–4, pp. 39–50, con 5 fig. Parma, 1912.

Un viaggiatore genovese nella Tripolitania e nella Cirenaica. Rivista ligure Sc., lett. e arte. Genova, 1912.

Un omero di Felsinotherium. Mem. R. Acc. Lincei, Classe sc. fis. mat. e nat., anno CCCIX, serie V vol. IX, fasc. IV, pp. 119–125, con 2 tav. Roma, 1912.

Naturalisti e viaggiatori liguri nel secolo XIX. Discorso. Atti Soc. ital. per il progr. delle scienze. VI riunione, Genova, ottobre 1912, pp. 33–58. Roma, 1913.

La villetta di Negro e il Museo geologico. Un vol. di 67 pp., con fig. interc. Genova, libreria ed. moderna, 1914.

Nuove stazioni neolitiche nelle Alpi liguri. Bull. paletn. ital., anno XXXIX, serie IV, tomo IX, n. 6–12, pp. 130–137. Parma, 1914.

Igino Cocchi. Boll. R. Com. geol. d'It., vol. XLIV, serie V, vol. IV, n. 1, pp. 1–9, con ritratto. Roma, 1914.

Federico Delpino e Antonio Piccone, botanici liguri. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. XXV, pp. 20–30. Genova, 1914.

Memoriale per gli alpinisti in Liguria. Un vol. di 41 pagine, con fig. interc. Genova, presso la sede della sezione ligure del C. A. I., 1914.

Lembi fossiliferi quaternari e recenti osservati nella Sardegna meridionale dal prof. D. Lovisato. Rendic. R. Acc. Lincei, anno CCCXI, vol. XXIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 10, pp. 759–770. Roma, 1914.

Giacomo Doria. Commemoraz. fatta dinanzi alla Soc. ligure di Storia patria, dal Vice-Presidente. Genova, tip. Sebenti, 1915.

Le caverne e la loro esplorazione scientifica. Annuario Sez. ligure Club alpino ital. Genova, 1915.

Giuseppe Sapeto. Gazzetta di Genova, anno LXXXIII, n. 9. Genova, 1915.

Le conchiglie marine del Genovesato. Cenno

preliminare. R. Com. talassogr. ital. Bollett. bimestr., nn. 33, 34, 35, fasc. 1°, 2° e 3° del vol. V, pp. 11-16. Venezia, 1915.

Il magg. gen. Antonio Cantore. Boll. Soc. geol. ital., vol. XXXIV, pag. LXIV. Roma, 1915.

Prime linee di un ordinamento sistematico delle pietre figurate. Mem. R. Accad. Lincei, vol. XI, serie 5ª, fasc. 11°, pp. 631-667. Roma, 1916.

Alfredo D'Andrade. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. XLVI, fasc. I, con ritratto. Genova, 1917.

Le selci enigmatiche di Breonio. Note preliminari. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. XXVII, n. 1, pp. 49-82, tav. I-IV. Genova, 1917.

Provvedimenti urgenti intesi a usufruttare le acque pubbliche. Ann. d'ingegn. e di architett., anno 1917. Roma, 1917.

Manufatto paleolitico rinvenuto nel Levantese. Bull. paletn. ital., anno XLII, n. 7-12. Parma, 1916-17.

Cenni intorno ai termini geografici dialettali della regione ligure. Bull. Soc. geogr. it., serie V, vol. VI, fasc. 7-8, pp. 487-508. Roma, 1917.

Bioliti e pisoliti. Boll. R. Com. geol. d'It., vol. XLVI, 6° della serie V, anni 1916-18, fasc. 4, pp. 297-339, tav. I-II. Roma, 1918.

Manoscritti e sezioni di Lorenzo Pareto. Rendic. R. Acc. Lincei, anno CCCXV, serie 5ª, vol. XXVII, 1° sem., fasc. 8, pp. 273-277. Roma, 1918.

Provvidenza e previdenza. Gazzetta di Genova, anno LXXXVII, n. 12. Genova, genn.-febbr. 1918.

300. *Il Finalese e le sue caverne.* Rivista Touring Club italiano, anno XXIV, n. 5. Milano, 1918.

Cenno di un nuovo giacimento antracitifero della Liguria occidentale. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. XXX, pp. 83-91. Genova, 1919.

In memoria di Clarence Bicknell. Atti Soc. ligust. Sc. nat. e geogr., vol. XXX, pp. 111-114. Genova, 1919.

Scienziati lunigianesi; Giacomo Doria. Mem. Soc. lunigianese G. Capellini per la st. nat. della regione, vol. I, fasc. 2, pp. 68-71. La Spezia, 1919.

La pesca marina in Liguria. La Nave, anno 2°, n. 1. Milano, 1920.

La sommersione progressiva della spiaggia di Chiavari. L'Azione, 4 marzo 1920. Genova, 1920.

Fra le nebbie del passato: caccie, battaglie e amori degli antichi liguri. In-8°, di 97 pagine. Bologna, tip. Zanichelli, 1920.

Fenomeni secondari e concomitanti dei terremoti. L'Azione, 28 ottobre 1920. Genova, 1920.

Esempi notevoli di icoliti. Mem. R. Acc. Lincei, anno CCCXVII, serie 5ª, vol. XIII, fasc. IV, pp. 161-174. Roma, 1920.

Note supplementari della Liguria preistorica. Atti Soc. lig. Storia patria. Genova, 1921.

Cenni di un ordinamento sistematico delle stimate geologiche. Rend. R. Acc. Lincei, anno CCCXVIII, serie 5ª, vol. XXX, 1° sem., fasc. IV, pp. 106-109. Roma, 1921.

I marmi di Castelvecchio e Rocca Barbera. In-8°, di 9 pagine. Genova, tip. Oliveri e C., 1921.

312. *Alcuni fossili nuovi del Savonese.* Atti Soc. ligust. di sc. e lett. Nuova serie, vol. I, anno 1922, fasc. II, pp. 120-128. Pavia, 1922.

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume I-XXXIII. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII.
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI.

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti delle Adunanze Solenni. Vol. I-III.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. Vol. I-IV.
» » » » » Boll. 1°-3°
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.

Annuario 1882-1924.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXIX.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-III.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia.
Indici degli Atti Accademici (in preparazione).

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1924

Notizie degli Scavi. Vol. XXI, in fascicoli trimestrali (1)	L. **120,00**
Rendiconti scienze morali. Vol. XXXIII, idem (1, 2, 3)	» **54,00**
Memorie, » » Vol. XVII, in fascicoli varî (1, 2, 3)	prezzi varî
Monumenti antichi. Vol. XXIX, puntata 1ª (1)	» **280,00**
Rendiconti scienze fisiche, Vol. XXXIII, in fascicoli bimensili (1, 2, 3) . .	» **108,00**
Memorie, » » Vol. XIV, in fascicoli varî (1, 2, 3)	prezzi varî
Rendiconto adunanza solenne. Vol. III (fascicolo 10°) (1, 2, 3)	» **8,00**
Annuario (1, 2, 3)	» **4,00**

(1) In vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (4).
(2) » » » » » Maglione e Strini, Via Due Macelli 88, Roma (7).
(3) » » » » l'Amministrazione dell'Accademia, Via della Lungara 10, Roma (29).

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXX 1923)

Serie quinta — Volume XIV — Fascicolo XVI.

B. MORPURGO e A. RABBENO

SULL'ADATTAMENTO AL CLIMA E AL LAVORO IN ALTA MONTAGNA

NEL PERIODO DELL'INVOLUZIONE SENILE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Sull'adattamento al clima e al lavoro in alta montagna, nel periodo dell'involuzione senile (¹).

Seconda Memoria del Socio prof. B. MORPURGO e del dott. A. RABBENO

presentata nella seduta del 18 novembre 1923

In una prima Memoria (serie V, vol. XIV, fasc. I) abbiamo pubblicato i risultati degli esperimenti fatti sull'acclimatazione e sull'allenamento in alta montagna, in un uomo sano, leggermente bradicardico, di 60 anni, ed abbiamo esposto il proposito di seguire l'andamento di quei processi nell'avanzarsi dell'età.

Ora riferiremo i risultati delle osservazioni fatte sul medesimo soggetto tuttavia sano, all'età di anni 61.

Per ciò che riguarda il piano generale ed i metodi delle ricerche, ci siamo naturalmente attenuti a quello adottato nel precedente studio ; però abbiamo apportato, sia nel primo sia nei secondi, alcune lievi modificazioni, consigliateci dall'esperienza dell'anno passato.

Nel piano delle ricerche abbiamo cercato di diminuire l'influenza della stanchezza cagionata dalla salita da Alagna al Col d'Olen, nel primo periodo dedicato alle osservazioni sulla acclimatazione. Oltre a ciò, abbiamo introdotto la regola di una gita settimanale « campione » per constatare gli eventuali progressi dell'allenamento.

Nell'intervallo fra l'una e la seguente gita-campione, il soggetto faceva escursioni varie, mai molto lunghe, ed a queste interpolava giornate di completo riposo.

Le lievi modificazioni dei metodi dell'esperimento consistono :

1°) nella istituzione di un ordine più rigoroso nella serie degli esperimenti, al fine di ottenere il massimo risparmio di tempo e la più esatta comparabilità dei risultati, specialmente in rapporto col tempo trascorso dopo il ritorno dalle gite.

Ogni serie di esperimenti, eseguita al ritorno dalle escursioni-campione, incominciava immediatamente dopo l'arrivo e si compieva in circa mezz'ora.

(¹) Lavoro eseguito nei Laboratorii Scientifici A. Mosso sul Monte Rosa.

I dati furono raccolti nel seguente ordine:
peso del corpo;
numero delle pulsazioni;
numero del respiro e ventilazione polmonare;
ricambio respiratorio;
pressione del sangue (Pachon);
capacità vitale;
forma del polso.

Abbiamo fatto un conteggio di globuli rossi a Torino prima di salire al Col d'Olen, ed altri due nella 7ª e nella 28ª giornata di dimora all'Istituto Mosso.

2º) Nella presa dell'aria nel sacco del Douglas. Considerando le grandi irregolarità dei risultati dell'anno precedente, abbiamo messo la massima cura nel togliere, per quanto era possibile, l'influenza dei fatti accidentali sul ritmo respiratorio; ed a tal fine il soggetto si è astratto, durante la respirazione nel sacco, da ogni pensiero riguardante l'esperimento, ed ha cercato di raggiungere lo stato più perfetto di riposo stando comodamente seduto, a palpebre calate, in ambiente perfettamente tranquillo.

Per agevolare il passaggio dell'aria espirata nel sacco del Douglas, abbiamo sostituito il rubinetto con una grande pinza a pressione, applicata al tubo di gomma che congiunge le valvole dello Zuntz col sacco, ed abbiamo reso ampio ed uniforme il tratto di congiunzione fra l'imboccatura della valvola ed il sacco.

Gli esperimenti di Torino furono fatti incominciando alle 9 del mattino, 2 ore circa dopo una leggera colazione (caffè); al Col d'Olen alle ore 7, prima della colazione (caffè e latte pane e burro). Gli esperimenti del Col d'Olen per l'acclimatazione, furono eseguiti soltanto al mattino; quelli sull'allenamento al mattino seguente una giornata di riposo prima della partenza per la gita-campione, e subito dopo il ritorno dalla gita stessa.

L'*escursione-campione* consistette nella discesa di circa 1000 metri dall'Istituto Mosso (2901 m.) a grande Halte (1911 m.) per il sentiero ripido e sassoso di Cimalegna, e nella risalita all'Istituto per la ripida strada mulattiera. Nelle prime due gite, in vicinanza di Grande Halte, fu intercalato un breve riposo, durante il quale fu consumata una piccola colazione al sacco; nelle due seguenti, il giro è stato fatto senza interruzioni.

Riportiamo un breve riassunto del diario delle giornate passate all'IstitutoMosso:

29 *luglio 1922*. Salita da Alagna (1191 m.) a Grande Halte nelle prime ore pomeridiane, a piedi, senza carico, in ore 2.15; pernottamento.

I giornata (30 luglio): partenza da Grande Halte ore 5,45, arrivo all'Istituto Mosso ore 8.45; riposo il resto della giornata.

II e III giornata, riposo, temperatura dell'ambiente 12º–14º C.; pressione atm. 546-545 mm.

IV giornata, prima escursione campione. Partenza dall'Istituto ore 8, Bocchetta delle Pisse (2401 m.) ore 11; riposo di 20' per la colazione al sacco. Ore 12.30 Grande Halte; dieci minuti di riposo; Ore 15.55 arrivo al Col d'Olen. Ore 7.25 di marcia con 30' di riposo; cielo coperto, nebbia. Ore 7: temp. ambiente 14º,5; press. atm. 545 mm. Ore 16. temp. 11º, press. atm. 541 mm.

V giornata: Ghiacciaio dell'Indren (circa 3500 m.); ore 3.45 di marcia.

VI giornata: Valle di Gressoney, ore 3.30 di marcia.

VII giornata: Al mattino, breve passeggiata.

VIII giornata: Al mattino Corno del Camoscio, Stolemberg: ore 3.45 di marcia. Al pomeriggio Grande Halte: ore 6.15 di marcia.

IX e X giornata; Riposo.

XI giornata: *seconda escursione campione*. Medesimo itinerario di quello seguito nella prima: ore 6.35 di marcia, con 40 minuti di riposo; cielo sereno, vento di S.W. Ore 7: temp. 8°,5: press. atm. 540 mm. Ore 14: temp. 9°; press. atm. 540 mm.

XII e *XIV giornata*: Brevi escursioni nei dintorni dell'Istituto.

XVI e *XVII giornata*: Riposo.

XVIII giornata: *Terza escursione campione*. Medesimo itinerario della prima. Ore 4.35 di marcia senza fermate e senza far colazione; cielo sereno. Ore 7 temp. 14°; press. atm. 537.5 mm. Ore 11.30 temp. 11°; press. atm. 538 mm.

XIX e *XX giornata*: Riposo.

XXI giornata: Escursione a Grande Halte. Ore 4.30 di marcia.

XXII giornata: Escursione alla Capanna Gnifetti. Ore 4.50 di marcia, neve buona.

XXIII giornata: Discesa a Grande Halte e ritorno: ore 4.10 di marcia.

XXIV giornata: Riposo.

XXV giornata: *Quarta escursione campione*: lo stesso percorso delle precedenti: ore 4.30 di marcia senza alcun riposo e senza mangiare. Cielo coperto, nebbia. Ore 7 temp. 11°; press. atm. 540 mm.; ore 12.20 temp. 10°; press. atm. 540 mm.

Nelle seguenti tabelle sono riuniti i risultati numerici delle singole esperienze: Nella I tabella sono registrati i valori ottenuti a Torino ed al Colle d'Olen nei giorni di riposo ed al mattino, prima della partenza per la gita-campione; nella II quelli ottenuti immediatamente dopo le escursioni campione; nella III sono notate le differenze tra i valori ottenuti immediatamente prima e dopo la gita campione.

TABELLA I.

Esperimenti eseguiti a Torino ed al Colle d'Olen « a riposo ».

Numero della giornata	Data 1922	Luogo	Peso del corpo Kgr.	Pressione del sangue (1)		Frequenza del polso	Capacità vitale cc.	Frequenza del respiro	Ventilazione polmonare litri in 5' (0° e 760 mm.)	CO_2 eliminata cc in 5' (0° e 760 mm.)	O_2 consumato cc in 5' (0° e 760 mm.)	$\frac{CO_2}{O_2}$	Calorie pro Kgr.-Ora
				Massima	Minima								
I	18-VII	*Torino*	73.000	150	80	54	3875	9	31.605	1216	1273	0.955	1.04
II	19- »	»	73.000	140	80	54	3925	12	35.138	1250	1363	0.917	1.10
		Media	*73.000*	*145*	*80*	*54*	*3900*	*10.5*	*33.371*	*1233*	*1318*	*0.936*	*1.07*
II	31-VII	*Colle d'Olen*	73.200	150	80	52	3435	13	26.160	1188	1400	0.8486	1.11
III	1-VIII	»	73.250	180	90	51	3390	14	27.240	1254	1480	0.8471	1.14
IV	2- »	»	73.250	180	90	44	3240	12	23.560	1067	1353	0.7892	0.92
XI	9- »	»	72.900	210	100	47	3300	14	28.180	1417	1547	0.9162	1.25
XVIII	16- »	»	72.500	170	90	52	3570	11	27.200	1330	1460	0.9106	1.19
XXV	23- »	»	72.800	170	90	49	3500	12	26.550	1147	1288	0.8907	1.03
		Media	*72.980*	*175*	*90*	*49*	*3406*	*12.6*	*26.480*	*1233*	*1421*	*0.8687*	*1.106*

(1) La pressione del sangue è stata determinata coll'apparecchio del *Pachon*, seguendo il metodo delle pressioni decrescenti.

Tabella II.

Esperimenti eseguiti al Col d'Olen, dopo il ritorno dalle escursioni « campione ».

Numero della giornata	Data 1922	Peso del corpo Kgr.	Pressione del sangue Massima	Pressione del sangue Minima	Frequenza del polso	Capacità vitale cc.	Frequenza del respiro	Ventilazione polmonare litri in 5' (0° e 760 mm.)	CO_2 eliminata cc. in 5' (0° e 760 mm.)	O_2 consumato cc. in 5' (0° e 760 mm.)	$\frac{CO_2}{O_2}$	Calorie pro Kgr.-ora
IV	2-VIII	72.500	150	80	88	3340	15	28.740	1245	1687	0.737	1.30
XI	9 »	71.600	130	70	95	3540	16	33.410	1584	1861	0.851	1.51
XVIII	16 »	70.900	110	70	93	3360	14	29.430	1325	1749	0.757	1.40
XXV	23 »	71.100	140	80	80	3500	14	30.400	1213	1566	0.774	1.26

Tabella III.

Differenze fra i valori osservati nelle giornate di escursione campione, prima della partenza e dopo il ritorno.

Numero della giornata	Numero della escursione	Peso del corpo Kgr.	Pressione del sangue Massima	Pressione del sangue Minima	Frequenza del polso	Capacità vitale cc.	Frequenza del respiro	Ventilazione polmonare litri in 5' (0° e 760 mm.)	CO_2 eliminata cc. in 5' (0° e 760 mm.)	O_2 consumato cc. in 5' (0° e 760 mm.)	$\frac{CO_2}{O_2}$	Calorie pro Kgr.-ora
IV	1	— 0.750	— 30	— 10	+ 44	+ 100	+ 3	+ 5.18	+ 178	+ 334	— 0.052	+ 0.38
XI	2	— 1.300	— 80	— 30	+ 48	+ 240	+ 2	+ 5.23	+ 167	+ 314	— 0.065	+ 0.26
XVIII	3	— 1.600	— 60	— 20	+ 41	— 210	+ 3	+ 2.23	+ 95	+ 289	— 0.153	+ 0.21
XXV	4	— 1.700	— 30	— 10	+ 31	0	+ 2	+ 3.90	+ 66	+ 278	— 0.116	+ 0.23

I dati ricavati dagli sfigmogrammi sono i seguenti [1]:

A Torino, 18-19 luglio 1922, ore 9.30. Polso di grandezza e celerità normali, regolare, ritmico, e. d. media.

Al Colle d'Olen. III giornata ore 7, a riposo: più piccolo che a Torino, regolare; e. d. alta.

IV giornata, ore 7, a riposo: le caratteristiche del polso sono eguali a quelle del mattino precedente. Ore 16.30 (35 minuti dopo il ritorno dall'escursione campione): un poco più grande, un poco più celere che al mattino, con qualche ineguaglianza e rare intermittenze, e. d. media.

XI giornata, ore 7, caratteristiche come al mattino della terza e quarta giornata. Ore 14.40 (20 minuti dopo il ritorno dall'escursione campione): polso più grande, più celere con qualche ineguaglianza e. d. bassissima, non di rado anacrotica.

XVIII giornata, ore 6.30, caratteristiche come al mattimo della III, IV e XI giornata. Ore 11.55 (20 minuti dopo il ritorno dall'escursione campione): grandezza e celerità press'a poco normali, e. d. bassissima, appena percettibile alla fine della catacrote o sull'ascissa, in alcune pulsazioni anacrotica.

XXV giornata, ore 7. Le figure del polso corrispondono alle precedenti, registrate a riposo. Ore 12.45 (35 minuti dopo il ritorno dall'escursione campione): grandezza e celerità eguali a quelle del mattino, qualche intermittenza, e. d. appena visibile alla fine della catactrote. In alcune serie di puls-

[1] e–d = elevazione dicrota = Diciamo *alta* l'elevazione dicrota situata nella metà superiore della fase discendente dell'elevazione principale, *media* quella nel terzo medio e *bassa* quella nel terzo inferiore.

sazioni seguentisi con frequenza minore delle altre, l'e. d. è media; queste pulsazioni coincidono colla linea ascendente della oscillazione respiratoria, la quale è più marcata che nel polso a riposo.

Il *conteggio dei globuli* diede i seguenti risultati:

	Globuli rossi (milioni)	Globuli bianchi —
Torino, 27 luglio 1922	5.47	6850
Col d'Olen, 5 agosto 1922 (VII giornata) . . .	6.71	6900
Col d'Olen, 26 agosto 1922 (XXVIII giornata)	6.57	——

Dal confronto dei dati raccolti a Torino ed al Col d'Olen, «*a riposo*», risulta che:

1°) il *peso del corpo* si è mantenuto molto costante;

2°) la *frequenza del polso* ha presentato una lieve diminuzione al Col d'Olen, e tale diminuzione si è mantenuta durante tutto il soggiorno in alta montagna;

3°) gli sfigmogrammi registrati al Col d'Olen differiscono da quelli di Torino soltanto per la situazione più alta dell'elevazione dicrota; questo fenomeno si nota tanto nei tracciati dei primi giorni, quanto in quelli dei giorni successivi;

4°) la *pressione del sangue* ha presentato un aumento tanto della massima quanto della minima, più pronunciato per la massima. Le cifre più elevate della massima e della minima furono raggiunte verso la metà del soggiorno al Col d'Olen; più tardi si verificò una piccola diminuzione, ma le cifre rimasero sempre superiori a quelle di Torino. Le variazioni delle due pressioni andarono di pari passo;

5°) il *numero dei globuli rossi* nel sangue periferico è aumentato al Col d'Olen; l'aumento si è manifestato alla fine della prima settimana (12 %) ed è rimasto della stessa grandezza fino al termine della quarta settimana;

6°) la *capacità vitale* è risultata minore al Col d'Olen che non a Torino. La diminuzione è comparsa già al secondo giorno ed è rimasta pressochè immutata sino alla fine del soggiorno all'Olen;

7°) la *ventilazione polmonare* diminuì e la diminuzione non fu modificata da un soggiorno abbastanza lungo nell'alta montagna;

8°) la *frequenza del respiro* ha subìto un piccolo aumento, che è scomparso dopo i primi giorni;

9°) il *volume dell'anidride carbonica eliminata* al Col d'Olen, a riposo, ha oscillato intorno al valore medio di Torino;

10°) il *volume dell'ossigeno consumato* presentò anch'esso delle variazioni, ma il valore medio superò di poco quello dal piano;

11°) il *quoziente respiratorio*, diminuito nei primi giorni all'Olen, diventò via via eguale a quello di Torino.

Il *consumo energetico* presentò un lievissimo aumento, in confronto con quello di Torino; perciò in complesso si può dire che il *ricambio respiratorio al Col d'Olen, a riposo, non si presentò notevolmente mutato in confronto a quello di Torino.*

Dopo le escursioni–campione, si è osservato:

1°) una diminuzione del peso del corpo, più cospicua nelle ultime gite;

2°) un aumento della frequenza del polso, abbastanza notevole. Se si pone uguale a 100 il numero del polso a riposo, si ottengono, per quello al ritorno dalle escur-

sioni-campione: 200, 202, 178, 163, cifre dalle quali risulta che nelle ultime gite si è osservato un minore acceleramento del polso;

3°) accanto a minime variazioni di ampiezza e ripidità dei tracciati, per lo più nel senso dell'aumento, un forte abbassamento della situazione dell'elevazione dicrota; non di rado il polso dicroto e talora quello anacroto. Per lo più furono riscontrate alcune intermittenze, e qualche volta una lieve irregolarità del polso;

4°) la pressione del sangue diminuì, tanto nel suo valore massimo, quanto in quello minimo, e la diminuzione dopo l'ultima escursione è stata uguale a quella osservata dopo la prima.

Il comportamento del polso e della pressione arteriosa corrisponde ad una diminuzione della forza del cuore e del tono dei vasi. Questi risultati concordano con quelli osservati nelle precedenti ricerche; le presenti hanno fatto inoltre rilevare qualche rara intermittenza dopo la fatica, e tali irregolarità non apparvero modificate dall'allenamento;

5°) la capacità vitale e la frequenza del respiro furono pressochè uguali a quelle registrate « a riposo »;

6°) la ventilazione polmonare presentò un aumento più elevato dopo le prime escursioni, in confronto con le ultime;

7°) l'eliminazione di CO^2 ed il consumo di O^2, aumentarono; questo aumento andò attenuandosi dopo le ultime gite, ed il decremento fu maggiore per l'eliminazione dell'anidride carbonica che non per il consumo di ossigeno;

8°) il quoziente respiratorio diminuì da $0{,}78 \div 0{,}91$ a $0{,}73 \div 0{,}85$.

Il consumo energetico ha dimostrato un piccolo aumento dopo le escursioni, aumento che è stato maggiore dopo le prime che non dopo le ultime. In altre parole, si può dire che il rendimento del lavoro fu leggermente aumentato coll'allenamento.

Se confrontiamo i valori medii, ottenuti nelle presenti ricerche, con quelli riscontrati nelle antecedenti, risulta quanto segue:

TABELLA IV.

Valori medii osservati negli esperimenti « a riposo » eseguiti negli anni 1921 e 1922.

Anno	Mese	Luogo	Peso del corpo	Frequenza del polso	Pressione del sangue: Massima	Pressione del sangue: Minima	Capacità vitale	Frequenza del respiro	Ventilazione polmonare litri in 5' (0° e 760 mm.)	CO_2 eliminata cc. in 5' (0° e 760 mm.)	O_2 consumato cc. in 5' (0° e 760 mm.)	$\frac{CO_2}{O_2}$	Calorie pro Kgr.-ora
1921	Luglio	Torino	69.955	53	170	102	4240	13	25.900	1095	1458	0.748	1.14
»	Agosto	Olen	69.700	51	190	90	3425	15	22.900	1169	1353	0.863	1.43
»	Dicemb.	Torino	69 120	50	207	85	3641	—	20.844	865	1112	0.777	0.89
1922	Luglio	Torino	73.000	54	145	80	3300	10	33.371	1233	1318	0.936	1.07
»	Agosto	Olen	72.980	49	175	90	3400	12	26.480	1233	1421	0.868	1.10

Negli esperimenti *a riposo* (cfr. tabella IV) il peso del corpo, il numero del polso e del respiro, la pressione del sangue, la capacità vitale, la ventilazione polmonare, passando dal piano al monte, presentano, tanto nelle ricerche del 1921 quanto in quelle di quest'anno, un comportamento molto simile.

Riguardo ai valori della pressione del sangue, si nota che essi sono più bassi che non nelle ricerche dell'anno scorso.

Negli esperimenti di quest'anno la ventilazione polmonare è risultata più grande e più uniforme che non negli esperimenti del 1921. Queste modificazioni dipendono probabilmente dal miglioramento apportato nella tecnica.

L'aumento della frequenza del polso, verificato l'anno scorso il giorno successivo all'arrivo al Col d'Olen, mancò quest'anno, probabilmente per il fatto che, mentre nel precedente la salita da Alagna al Col d'Olen era stata compiuta d'un tratto ed aveva prodotto molta stanchezza, quest'anno la gita fu spezzata e compiuta in ore opportune.

Risultò confermato che, nel nostro caso, la diminuzione della capacità vitale persiste durante tutto il soggiorno in alta montagna, contrariamente a quanto Viale ha trovato nei giovani. Notevoli differenze esistono nei valori del quoziente respiratorio; il Q. R. nell'estate del 1921, a Torino (0.7) è minore che quello del 1922 (0.9); in montagna il Q. R. è aumentato nel 1921 mentre risulta lievemente diminuito nel 1922. Il consumo energetico dimostra in entrambe le ricerche un piccolo aumento durante il soggiorno in montagna.

A proposito delle differenze fra i risultati del 1921 e quelli del 1922, va notato che nel '21, nel periodo delle ricerche al Col d'Olen, la temperatura dell'ambiente fu in generale più bassa ed andò progressivamente diminuendo, mentre nel '22 fu più alta e costante. È probabile che da queste circostanze sia dipeso l'aumento del ricambio nel '21 e, rispettivamente, la fermezza del medesimo nel '22.

*
* *

Le ricerche eseguite nel 1922 provano che, anche all'età di 61 anni, il soggiorno in alta montagna (3000 m.) non ha recato alcun disturbo alle principali funzioni di un uomo sano: l'acclimatazione è stata così rapida da potersi dire quasi immediata. Riguardo all'allenamento è da rilevare che le alterazioni prodotte dalla stanchezza e specialmente quelle osservate nella funzione circolatoria, non sono state notevolmente diminuite in seguito ad un breve periodo di esercizio. Si è notata soltanto una minore frequenza del polso dopo le ultime gite-campione. Ulteriori esperienze verranno tentate da uno di noi per precisare meglio la capacità di allenamento nel corso del periodo dell'involuzione senile.

L'argomento di queste ricerche fu scelto dal prof. Morpurgo ed il piano fu concretato da questo e dal dott. Rabbeno. Gli esami chimici e i relativi calcoli furono eseguiti dal dott. Rabbeno. Gli altri esperimenti furono naturalmente fatti dai due autori assieme.

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume I-XXXIII (1892-1924).
Rendiconti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII.
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI.

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti delle Adunanze Solenni. Vol. I-III.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. Vol. I-IV.
» » » » » Boll. 1°-3°
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.

Annuario 1882-1924.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXIX.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-III.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia.
Indici degli Atti Accademici (in preparazione).

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1924

Notizie degli Scavi. Vol. XXI, in fascicoli trimestrali (1)	L.	**120,00**
Rendiconti scienze morali. Vol. XXXIII, idem (1, 2, 3)	»	**54,00**
Memorie, » » Vol. XVII, in fascicoli varî (1, 2, 3)		prezzi varî
Monumenti antichi. Vol. XXIX, puntata 1ª (1)	»	**280,00**
Rendiconti scienze fisiche, Vol. XXXIII, in fascicoli bimensili (1, 2, 3) . .	»	**108,00**
Memorie, » » Vol. XIV, in fascicoli varî (1, 2, 3)		prezzi varî
Rendiconto adunanza solenne. Vol. III (fascicolo 10°) (1, 2, 3)	»	**8,00**
Annuario (1, 2, 3)	»	**4,00**

(1) In vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (4).
(2) » » » » Maglione e Strini, Via Due Macelli 88, Roma (7).
(3) » » » l'Amministrazione dell'Accademia, Via della Lungara 10, Roma (29).

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO XVII.

GUIDO PELLIZZARI

RICERCHE SULLA GUANIDINA

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Ricerche sulla guanidina.

Memoria del Corrispondente GUIDO PELLIZZARI

presentata nella seduta del 4 novembre 1923.

La guanidina, ottenuta per la prima volta da Strecker [1] per ossidazione della guanina, fu poi preparata con diversi processi sintetici: Erlenmeyer [2], per riscaldamento della cianamide in soluzione alcoolica con cloruro d'ammonio, ebbe il cloridrato di guanidina; poi Delitzsch [3] e quasi contemporaneamente Vohlard [4], scaldando il solfocianato d'ammonio, lo trasformarono con buon rendimento, in solfocianato di guanidina. Questi due processi, per la facilità colla quale si possono avere oggi i prodotti di partenza, rappresentano le preparazioni migliori per avere la guanidina, la quale va acquistando sempre maggiore importanza per i suoi numerosi derivati che interessano la chimica biologica nonchè per le applicazioni tecniche di alcuni composti che ad essa sono strettamente legati. La nitroguanidina è usata come esplosivo, ed alcuni derivati acilici della guanidina e della biguanide si adoprano largamente come acceleranti nella vulcanizzazione del caucciù.

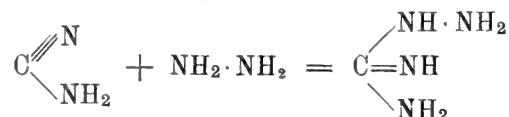
Da parecchi anni io mi sto occupando di sostanze che appartengono al gruppo della guanidina, con risultati di un certo interesse; e siccome le mie ricerche si trovano sparse in diverse note, credo utile di riunirle e coordinarle in una memoria riassuntiva, tralasciando tutta la parte analitica, i dettagli delle preparazioni e i composti collaterali di minore importanza, rimandando il lettore alle singole pubblicazioni, che sono elencate in ordine cronologico in fine di questo lavoro e che richiamo volta volta con una numerazione speciale differente da quella delle citazioni bibliografiche di altri autori.

Raggruppo queste mie ricerche, non in ordine cronologico, ma secondo la costituzione delle sostanze ottenute o le loro relazioni genetiche e, per maggior chiarezza, dò qui uno schema della distribuzione della materia nei diversi capitoli.

Nel capitolo I ho riunito le mie ricerche sopra i derivati nitrico e nitroso della guanidina. Gli studî sulla nitroguanidina, che fui il primo a riconoscere in un composto erroneamente descritto come nitrosoguanidina, mi portarono ad occuparmi della amido-

(1) Ann. 118, 159 (1861).
(2) Ann. 146, 259 (1868).
(3) J. paokt chem. [2] 8, 240 (1874).
(4) J. prakt. chem. [2], 9, 15 (1874).

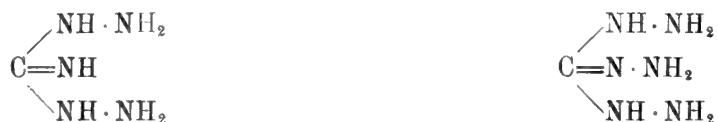
guanidina e dei suoi derivati (capitolo II) ch'io ottenni secondo una reazione che si dimostrò di generale applicazione; essa consiste nel fare agire la cianamide sull'idrazina:

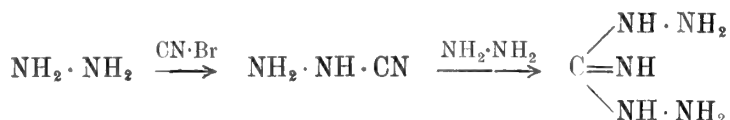
$$C\begin{matrix}\equiv N\\ \diagdown NH_2\end{matrix} + NH_2\cdot NH_2 = C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH_2\\ =NH\\ \diagdown NH_2\end{matrix}$$

La fenilidrazina agisce nello stesso modo; ma, invece di ottenere un unico prodotto se ne hanno due, perchè la cianamide si addiziona alla fenilidrazina, sia in posizione α, sia in posizione β

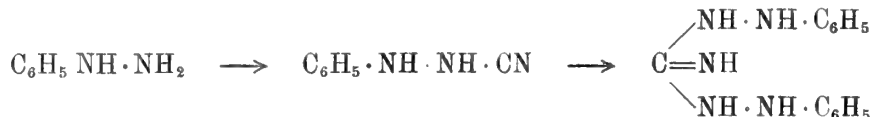
$$\overset{\alpha}{C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH\cdot C_6H_5\\ =NH\\ \diagdown NH_2\end{matrix}} \qquad \overset{\beta}{C\begin{matrix}\diagup N(C_6H_5)\cdot NH_2\\ =NH\\ \diagdown NH_2\end{matrix}} \quad ;$$

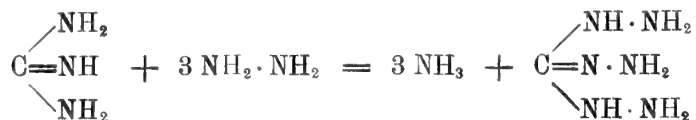
e queste sostanze si dimostrano importanti perchè, condensandosi con sostanze opportunamente scelte dànno luogo a derivati del pirimidone e del triazolo.

Fanno seguito a questo capitolo, sull'amidoguanidina e suoi derivati, i capitoli III e IV che trattano rispettivamente della diamidoguanidina e della triamidoguanidina:

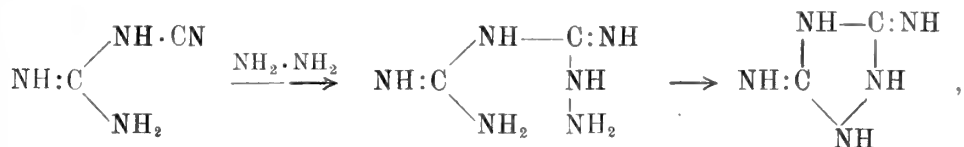
$$C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH_2\\ =NH\\ \diagdown NH\cdot NH_2\end{matrix} \qquad C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH_2\\ =N\cdot NH_2\\ \diagdown NH\cdot NH_2\end{matrix}$$

Ho ottenuto la diamidoguanidina con una sintesi dello stesso genere di quella che mi dette l'amidoguanidina, sebbene sia partito del bromuro di cianogeno e idrazina, poichè è da presumersi che in questa reazione si formi come prodotto intermedio l'amidocianamide che poi si addiziona a un'altra molecola di idrazina per dare la diamidoguanidina:

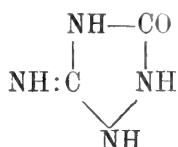
$$NH_2\cdot NH_2 \xrightarrow{CN\cdot Br} NH_2\cdot NH\cdot CN \xrightarrow{NH_2\cdot NH_2} C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH_2\\ =NH\\ \diagdown NH\cdot NH_2\end{matrix}$$

Colla fenilidrazina difatti il prodotto intermedio è stato potuto separare ed esso, in una seconda fase, dà la difenildiamidoguanidina, dimostrando così che la reazione ha pure un carattere di possibile estensione:

$$C_6H_5\,NH\cdot NH_2 \longrightarrow C_6H_5\cdot NH\cdot NH\cdot CN \longrightarrow C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH\cdot C_6H_5\\ =NH\\ \diagdown NH\cdot NH\cdot C_6H_5\end{matrix}$$

La triamidoguanidina non la ottenni con un processo sintetico, ma partendo dai sali della guanidina, ho sostituito in un modo molto semplice i tre residui dell'ammoniaca con tre residui dell'idrazina:

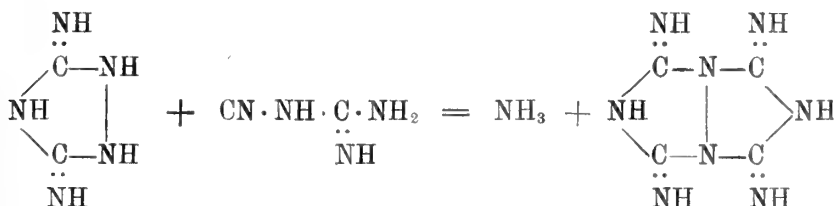
$$C\begin{matrix}\diagup NH_2\\ =NH\\ \diagdown NH_2\end{matrix} + 3\,NH_2\cdot NH_2 = 3\,NH_3 + C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH_2\\ =N\cdot NH_2\\ \diagdown NH\cdot NH_2\end{matrix}$$

La stessa triamidoguanidina ho ottenuto con reazione simile, anche partendo dai sali della mono– come della di–amidoguanidina.

Come la cianamide e l'idrazina mi hanno dato l'amidoguanidina, impiegando la cianguanidina (diciandiamide) avrei dovuto avere l'amidobiguanide, e probabilmente questa si forma; ma in seguito avviene la eliminazione di una molecola di ammoniaca e si passa a una sostanza a nucleo triazolico,

```
                                                        NH—C:NH
      ,NH·CN                   ,NH——C:NH                |   |
     /          NH2·NH2       /       |                 |   |
NH:C           ———————>  NH:C         NH     ——>  NH:C     NH    ,
     \                        \       |               \  /
      NH2                      NH2    NH2              NH
```

che ho chiamato guanazolo perchè si può derivare da due molecole di guanidina e una di idrazina, allo stesso modo che era chiamato urazolo un composto che avevo ottenuto da due molecole di urea e una di idrazina con eliminazione di ammoniaca. Impiegando la fenilidrazina e la diciandiamide, ebbi analogamente il fenilguanazolo che potei preparare anche con altre tre reazioni che ne confermano la costituzione. Del guanazolo e di numerosi suoi derivati ho reso conto nel capitolo V. Nel capitolo VI tratto dell'imidurazolo e dei suoi derivati:

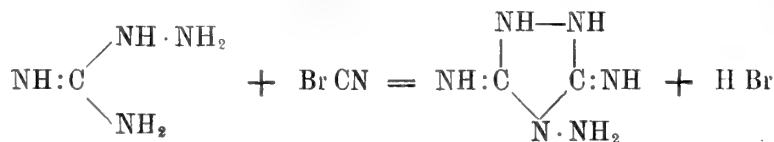
```
      NH—CO
      |   |
NH:C     NH
     \  /
      NH
```

Quest'imidurazolo è un composto intermedio fra il guanazolo e l'urazolo, cioè può derivarsi, come è dimostrato dalle due reazioni che servono a prepararlo, da una molecola di guanidina, una di urea e una di idrazina.

Nel capitolo VII sono descritti dei composti a nuclei condensati di guanazolo, imidurazolo e urazolo: queste tre sostanze, che hanno l'aggruppamento –NH-NH–, possono agire come una idrazina secondaria simmetrica; e, come la fenilmetilidrazina simm. colla diciandiamide mi aveva dato il fenilmetilguanazolo, così, facendo agire il guanazolo sulla diciandiamide, arrivai a un composto a doppio nucleo guanazolico che ho chiamato guanazo–guanazolo:

```
   NH                                            NH    NH
   ..                                            ..    ..
  ,C—NH                                         ,C—N—C
 /    |                                        /   |   \
NH    |   +  CN·NH·C·NH2  =  NH3  +  NH        |    >NH
 \    |            ..                          \   |   /
  `C—NH            NH                           `C—N—C
   ..                                            ..    ..
   NH                                            NH    NH
```

Nello stesso capitolo sono descritti composti simili, a due nuclei condensati: e cioè il guanazo–urazolo, il guanazo–imidurazolo e l'imidurazo–imidurazolo.

Nei seguenti capitoli sono descritte le sostanze che hanno come reazione di origine l'azione degli alogenuri di cianogeno sulla idrazina e sulla fenilidrazina. La diamidoguanidina, che si ottiene dal bromuro di cianogeno e l'idrazina, può reagire ancora col

bromuro di cianogeno per dare l'amidoguanazolo, descritto, insieme coi suoi derivati, nel capitolo VIII:

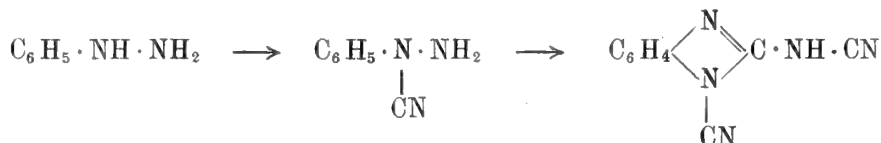
$$NH:C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH_2\\ \diagdown NH_2\end{matrix} + BrCN = \begin{matrix} NH — NH \\ | \quad\quad | \\ NH:C \quad\quad C:NH \\ \diagdown \; \diagup \\ N\cdot NH_2\end{matrix} + HBr$$

L'azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina è stata ricca di resultati e mi ha dato modo di arrivare a svariati prodotti, sempre però appartenenti al gruppo della guanidina o a sostanze affini. Nel capitolo IX sono descritti i prodotti diretti della reazione, che sono l'α- e la β- cianfenilidrazide e numerosi ed interessanti loro derivati:

$$\begin{matrix} \alpha \\ C_6H_5\,N\cdot NH_2 \\ | \\ CN \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} \beta \\ C_6H_5\cdot NH\cdot NH \\ | \\ CN \end{matrix}$$

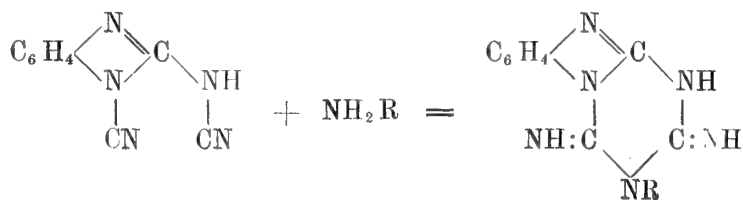
Nel capitolo X parlo dei prodotti di polimerizzazione che dànno queste due cianfenilidrazidi e che per la loro struttura sono in stretta relazione col guanazolo: la β-cianfenilidrazide dà un dimero a nucleo pentagonale che è il difenilamidoguanazolo, mentre l'isomero α dà la difenilguanazina a nucleo esagonale:

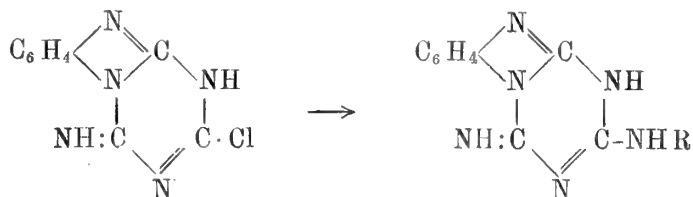
$$\begin{matrix} C_6H_5\cdot NH\cdot N — C:NH \\ | \quad\quad | \\ NH:C \quad\quad N\cdot C_6H_5 \\ \diagdown \; \diagup \\ NH \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} C_6H_5\cdot N — NH \\ NH:C\langle \quad\quad \rangle C:NH \\ NH — N\cdot C_6H_5 \end{matrix}$$

Nel capitolo XI sono descritti dei derivati della o– fenilendiamina ottenuti per una interessante e non ancora osservata trasposizione intramolecolare partendo dalla fenilidrazina: essa cogli alogenuri di cianogeno dà la rammentata α– cianfenilidrazide e questa per una ulteriore azione del bromuro di cianogeno passa in o- fenilendicianguanidina:

$$C_6H_5\cdot NH\cdot NH_2 \longrightarrow \begin{matrix} C_6H_5\cdot N\cdot NH_2 \\ | \\ CN \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N \\ C_6H_4\langle \quad \rangle C\cdot NH\cdot CN \\ N \\ | \\ CN \end{matrix}$$

La formula del nuovo prodotto è dimostrata in modo esauriente dai numerosi prodotti di demolizione ottenuti per graduale idrolisi ed anche per una sintesi della stessa sostanza partendo dalla o– fenilendiamina invece che dalla fenilidrazina.

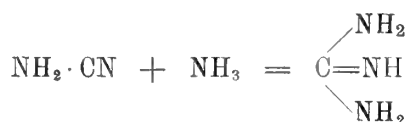
Questa fenilendicianguanidina è una sostanza interessante perchè con quei due gruppi cianogeno si presta a svariate reazioni: addiziona l'ammoniaca e le amine primarie per dare dei derivati della melamina, che ho descritto nel capitolo XII:

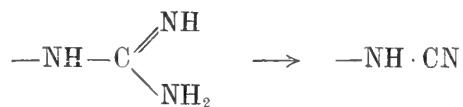
$$\begin{matrix} N \\ C_6H_4\langle \quad \rangle C \diagdown \\ N \quad\quad NH \\ | \quad\quad\quad | \\ CN \quad\quad CN \end{matrix} + NH_2R = \begin{matrix} N \\ C_6H_4\langle \quad \rangle C \diagdown \\ N \quad\quad NH \\ | \quad\quad\quad | \\ NH:C \quad\quad C:NH \\ \diagdown \; \diagup \\ NR \end{matrix}$$

Addiziona pure l'acido cloridrico, e anche in tal caso si chiude il nucleo esagonale melaminico, ma con un meccanismo differente, come è dimostrato nel capitolo XIII. Da questo composto clorurato, per azione delle amine, si arriva a derivati della melamina che sono differenti da quelli che si hanno per l'addizione diretta accennata innanzi:

$$C_6H_4\langle N \rangle \ldots \quad \mathrm{NH{:}C}\quad \mathrm{C\cdot Cl} \longrightarrow \ldots \quad \mathrm{NH{:}C}\quad \mathrm{C\text{-}NHR}$$

La costituzione loro è dimostrata dai prodotti di idrolisi, pure descritti nello stesso capitolo. Anche l'acido solfidrico si addiziona alla fenilendicianguanidina; il prodotto è pure un derivato solforato della fenilenmelamina.

La maggior parte dei diversi tipi di derivati della guanidina descritti in questa memoria li ho ottenuti da composti che hanno dei gruppi -CN legati all'azoto e che, addizionando delle basi, formano dei raggruppamenti guanidici; la cianamide mi portò alla sintesi dell'amidoguanidina; la cianguanidina mi dette il guanazolo; gli alogenuri di cianogeno e le idrazine mi dettero dei nuovi derivati cianurati che poi mi condussero all'amidoguanazolo, alla guanazina, e colla fenilendicianguanidina ebbi i derivati della melamina.

Il meccanismo di queste reazioni sintetiche, nel più semplice dei casi, è quello che si ritrova nella formazione della guanidina dalla cianamide e ammoniaca:

$$NH_2\cdot CN + NH_3 = C\begin{matrix} \diagup NH_2 \\ =NH \\ \diagdown NH_2 \end{matrix}$$

Nel capitolo XIV, che tratta dell'azione dell'acido nitroso sulla guanidina e sulle biguanidi, è messa in rilievo una nuova reazione, pure di carattere generale, che conduce a un resultato inverso al precedente. L'acido nitroso agisce sopra i composti guanidici togliendo gli elementi di una molecola di ammoniaca per dare dei derivati cianurati; cioè il gruppo guanidico retrocede in un residuo della cianamide:

$$-NH-C\begin{matrix} \diagup\!\!\diagup NH \\ \diagdown NH_2 \end{matrix} \longrightarrow -NH\cdot CN$$

Così, per mezzo di questa reazione, si passa dalla guanidina alla cianamide, dalla biguanide alla cianguanidina o diciandiamide e dalle biguanidi sostituite alle cianguanidine sostituite ed anche alle guaniluree o diciandiamidine sostituite, per le quali sostanze non si aveva ancora un metodo di preparazione.

I. — Nitro e nitroso-guanidina.

Per l'azione dell'acido nitrico fumante oppure dell'acido solforico concentrato sul nitrato di guanidina, ottenni la nitroguanidina (3). Questa sostanza era stata ottenuta molto tempo prima da Jousselin [1] nello stesso modo e descritta come nitrosoguanidina sulla base d' una sola determinazione di azoto che gli dette 62.18 % mentre l'azoto calcolato è 63,63: l'analisi completa, da me eseguita, dimostrò invece che si trattava di nitroguanidina e non di un derivato nitroso. Franchimont, quasi contemporaneamente, ebbe pure la stessa sostanza che descrisse in una breve nota [2]. J. Thiele, pure poco tempo dopo, pubblicò una lunga memoria col titolo nitro e amidoguanidina [3] in cui riconobbe che io avevo per il primo stabilito l'esistenza della nitroguanidina: egli ne dette anche una preparazione più pratica, trattando direttamente il solfocianato di guanidina con una miscela nitrica solforica.

La nitroguanidina cristallizzata dall'acqua si ottiene in bellissimi aghi lunghi bianchi lucenti, simili a quelli dell'anidride ftalica, che a 225°–226° si decompongono sviluppando ammoniaca. È poco solubile nell'acqua fredda, tanto che, gettando in molta acqua la miscela acida della preparazione, essa si separa. Ha funzioni acide e si scioglie facilmente a freddo nella potassa e precipita inalterata cogli acidi. Se però si fa bollire in soluzione potassica, si decompone con sviluppo di ammoniaca, protossido di azoto e anidride carbonica che rimane fissata alla potassa:

$$CH_4N_4O + H_2O = CO_2 + N_2O + 2\,NH_3\,.$$

Come scrissi nella mia nota, il mio programma era di arrivare, per riduzione, all'amidoguanidina fino ad allora sconosciuta ma di cui io avevo già preparato il derivato fenilico, come sarà detto nell'altro capitolo; e dall'amidoguanidina, per idrolisi, mi proponevo di arrivare all'idrazina per la quale non era stata ancora trovata una preparazione facile. Il lavoro di Thiele dimostrò come fossero possibili queste immaginate reazioni ed io più non mi occupai della nitroguanidina. Thiele preparò un sale di argento e stabilì anche l'esistenza di un sale diargentico; ma non riuscì ad avere, dalla nitroguanidina, dei derivati acidilici nè alchilici.

Quanto alla sua costituzione, due sono le formule discutibili:

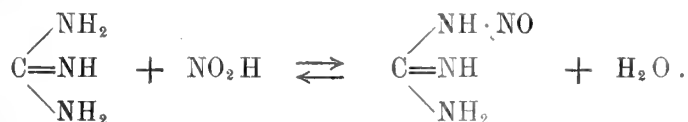
$$\text{I}\qquad C\begin{cases} \diagup NH_2 \\ = N\cdot NO_2 \\ \diagdown NH_2 \end{cases} \qquad\qquad \text{II}\qquad C\begin{cases} \diagup NH\cdot NO_2 \\ = NH \\ \diagdown NH_2 \end{cases}$$

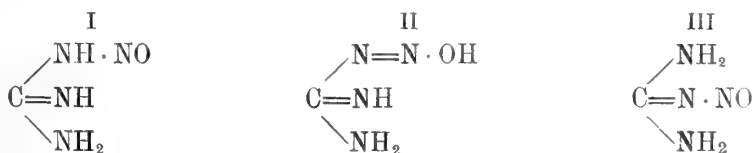
Io non avevo fatto ancora delle ricerche speciali in questo senso, ma credei più probabile la formula simmetrica I basandomi sulle poche cognizioni che allora si avevano

[1] Compt. ren. 85, 548; 88, 814, 1086 (1877).
[2] Rec. trov. chim. 10, 231.
[3] Ann. 170, 1.

su composti simili: Franchimont [1] prima, eppoi Franchimont e Klobbie [2], avevano ottenuto dei corpi contenenti il gruppo $=N \cdot NO_2$ che avevano chiamato nitramine, e dagli studî degli stessi autori sembrava che non si potessero ottenere sostanze col gruppo $—NH \cdot NO_2$. Thiele invece, avendo fatto uno studio molto più completo, ritenne probabile la formula II specialmente per le spiccate funzioni acide che mostra la sostanza e soprattutto perchè l'amidoguanidina, che ottenne per riduzione, mostra delle reazioni che meglio rispondono alla formula asimmetrica piuttosto che a quella simmetrica. Le ragioni esposte a questo proposito dal Thiele nel suo magistrale lavoro, benchè molto convincenti, non si possono considerare, come egli stesso dice, assolutamente dimostrative. Più tardi, come sarà detto nel capitolo seguente, io ottenni per sintesi l'amidoguanidina dalla cianamide e l'idrazina ed è questa sintesi che dimostra la formula asimmetrica dell'amidoguanidina e di conseguenza pure la formula II per la nitroguanidina. Questa sostanza ha trovato applicazione come esplosivo per la sua relativamente bassa temperatura di esplosione.

La nitrosoguanidina fu ottenuta la prima volta da Thiele [3] per cauta riduzione della nitroguanidina, e questo rimane ancora il metodo migliore di preparazione. Io l'ho ottenuta recentemente (27) per azione diretta dell'acido nitroso sulla guanidina. È una sostanza in aghetti gialli che deflagrano a 160–165°; è solubile nell'acqua, con colore giallo. Thiele trovò che, per ebullizione in soluzione acquosa, si scompone in cianamide acqua ed azoto, mentre in soluzione acquosa e in presenza di acidi minerali dà acido nitroso e guanidina ed è perciò che egli scrisse che non si può ottenere direttamente da queste due sostanze. Secondo le mie ricerche, che sono riassunte nel capitolo ultimo e col titolo « *Azione dell'acido nitroso sulla guanidina e sulle biguanidi* », questa affermazione non resulta vera: il fatto è invece che ci troviamo di fronte a una reazione reversibile

$$C\begin{cases}NH_2\\=NH\\NH_2\end{cases} + NO_2H \rightleftarrows C\begin{cases}NH\cdot NO\\=NH\\NH_2\end{cases} + H_2O\,.$$

Siccome lo stato di equilibrio è in favore della reazione da destra verso sinistra, la formazione diretta della nitrosoguanidina è piccola; ma, cercando di spostare l'equilibrio con una maggiore concentrazione di acido nitroso, ne potei avere in quantità sufficiente da identificarla ed analizzarla. Thiele discute per la nitrosoguanidina le tre seguenti formule di costituzione:

$$\overset{\text{I}}{C\begin{cases}NH\cdot NO\\=NH\\NH_2\end{cases}} \qquad \overset{\text{II}}{C\begin{cases}N=N\cdot OH\\=NH\\NH_2\end{cases}} \qquad \overset{\text{III}}{C\begin{cases}NH_2\\=N\cdot NO\\NH_2\end{cases}}$$

Esclude la formula II perchè con l'acido cloridrico avrebbe dovuto dare un cloruro con eliminazione di acqua, mentre invece ebbe per addizione un cloridrato; e ritiene

[1] Ber. referat. 16 b, 1869, 2674; 17, C, 167, 418; 18, C, 146; 18, C, 13; 20, C, 414, 687.

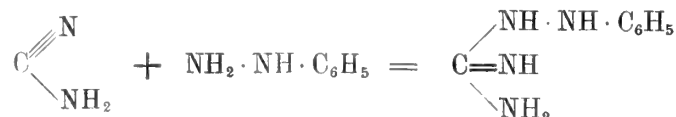
[2] Ber. referat. 20, C, 64, 690; 21, C, 515; 22, C, 58, 60, 295.

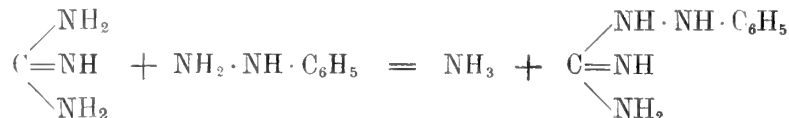
[3] Ann. 273, 133,

più probabile la formula I di fronte alla III, per la relazione di questa con la formula che egli, come ho già detto, ha reso probabile per l'amidoguanidina. La mia sintesi dell'amidoguanidina conferma, come è stato detto già per la nitroguanidina, anche per la nitrosoguanidina la formula asimmetrica I. Tchugaeff ammette per i derivati metallici, come quello caratteristico di nichel, la formula tautomerica diazoica II [1].

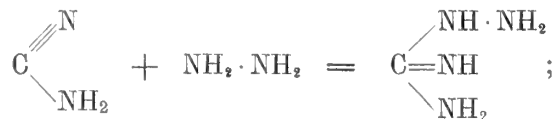
II. — Amidoguanidina e suoi derivati alchilici.

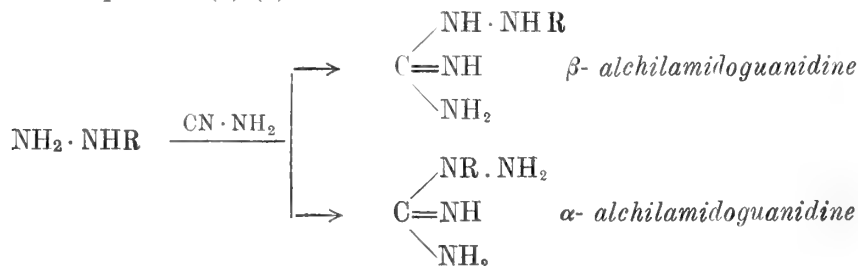
Per l'azione della cianamide sul cloridrato di fenilidrazina ottenni la β-fenilamidoguanidina (1) la quale si forma secondo la seguente equazione:

$$C\begin{matrix}\diagup\!\!\!\!\diagup\!\!\!\!\diagup N\\ \diagdown NH_2\end{matrix} + NH_2\cdot NH\cdot C_6H_5 = C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH\cdot C_6H_5\\ =NH\\ \diagdown NH_2\end{matrix}$$

Era questo il primo derivato alchilico dell'amidoguanidina scoperto quando ancora questa base era sconosciuta. La stessa β- fenilamidoguanidina (o anilguanidina, come allora la chiamai) ebbi anche facendo agire per fusione il cloridrato di fenilidrazina sul carbonato di guanidina:

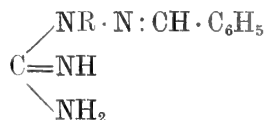
$$C\begin{matrix}\diagup NH_2\\ =NH\\ \diagdown NH_2\end{matrix} + NH_2\cdot NH\cdot C_6H_5 = NH_3 + C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH\cdot C_6H_5\\ =NH\\ \diagdown NH_2\end{matrix}$$

In questo modo però si ottiene un prodotto più impuro e con minor rendimento perchè la sostanza si forma in ambiente alcalino ed a temperatura elevata e quindi tende a decomporsi, mentre nell'altro modo, coll'addizione della cianamide col cloridrato di fenilidrazina, rimane salificata e così non si altera. Estendendo la reazione, ebbi:

a) la sintesi dell'amidoguanidina dalla cianamide e il monocloridrato di idrazina (5) (22):

$$C\begin{matrix}\diagup\!\!\!\!\diagup\!\!\!\!\diagup N\\ \diagdown NH_2\end{matrix} + NH_2\cdot NH_2 = C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH_2\\ =NH\\ \diagdown NH_2\end{matrix} \quad ;$$

b) la sintesi delle amidoguanidine monosostituite dalla cianamide e i cloridrati delle idrazine primarie. Questa reazione porta alla formazione contemporanea di due isomeri perchè l'addizione della cianamide all'alchilidrazina avviene sia all'atomo di azoto β sia a quello α (5) (8):

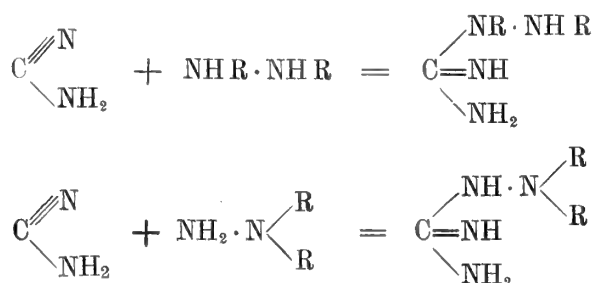
$$NH_2\cdot NHR \xrightarrow{CN\cdot NH_2} \begin{cases} C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NHR\\ =NH\\ \diagdown NH_2\end{matrix} & \beta\text{- alchilamidoguanidine} \\[2ex] C\begin{matrix}\diagup NR.NH_2\\ =NH\\ \diagdown NH_2\end{matrix} & \alpha\text{- alchilamidoguanidine}\end{cases}$$

[1] Ber. 39, 3388.

I cloridrati degli isomeri β sono relativamente poco solubili nell'acqua e cristallizzano facilmente, mentre i cloridrati degli isomeri α sono solubilissimi e formano degli sciroppi da cui cristallizzano difficilmente, ma riuscii a separarli e purificarli trasformandoli coll'aldeide benzoica nel derivato benzilidenico

$$C\begin{cases} NR \cdot N : CH \cdot C_6H_5 \\ =NH \\ NH_2 \end{cases}$$

Tali composti come nitrati cristallizzano bene eppoi, idrolizzati perdono l'aldeide e si ottengono allo stato puro i nitrati delle α–alchilamidoguanidine;

c) la sintesi delle amidoguanidine bisostituite dalla cianamide e i cloridrati delle idrazine secondarie, sia simmetriche sia asimmetriche (5):

$$C\begin{cases} \equiv N \\ NH_2 \end{cases} + NHR \cdot NHR = C\begin{cases} NR \cdot NHR \\ =NH \\ NH_2 \end{cases}$$

$$C\begin{cases} \equiv N \\ NH_2 \end{cases} + NH_2 \cdot N\begin{cases} R \\ R \end{cases} = C\begin{cases} NH \cdot N\begin{cases} R \\ R \end{cases} \\ =NH \\ NH_2 \end{cases}$$

Queste reazioni avvengono facilmente facendo bollire a ricadere in soluzione alcoolica quantità equimolecolari di cianamide e del cloridrato dell'idrazina impiegata: il prodotto che si ricava è il cloridrato della corrispondente amidoguanidina. I sali di queste basi sono sostanze ben cristallizzate e stabili, mentre le amidoguanidine libere si alterano prontamente all'aria e quindi non si possono avere allo stato puro.

Accenno brevemente ai composti ottenuti, rimandando alle diverse note per i particolari.

Amidoguanidina (5) (22)

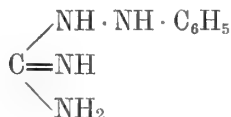
$NH_2 \cdot C(NH) \cdot NH_2$.

Per questa preparazione son partito dal monocloridrato di idrazina, facendo bollire fino a che scompare la reazione della cianamide col nitrato d'argento ammoniacale [1]. Per concentrazione si ricava il cloridrato di amidoguanidina, in bei cristalli prismatici, incolori, trasparenti, fusibili a 162–163°: anche altri sali, preparati per doppia decomposizione dal cloridrato, si dimostrarono identici a quelli descritti da Thiele ed ottenuti per riduzione dalla nitroguanidina. Ho poi trovato modo di preparare i sali di amidoguanidina (22) con un procedimento più economico, rapido e semplice, partendo dalla calciocianamide, che si trova in commercio come concime, e dal solfato ordinario di idrazina che direttamente non potrebbe servire perchè è acido e poco solubile. La reazione

[1] Finchè c'è cianamide si vede subito formarsi il noto precipitato giallo e soltanto dopo poco comincia la riduzione dovuta all'idrazina o all'amidoguanidina.

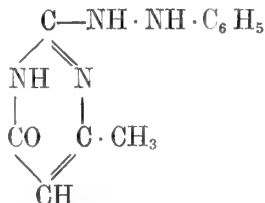
avviene in soluzione acquosa prendendo le quantità indicate delle due sostanze e trattandole con acido solforico in quantità tale da avere un liquido neutro che contiene disciolta la cianamide e il solfato neutro di idrazina che è un sale molto solubile, mentre rimangono indisciolti il solfato di calcio e alcune impurezze della calciocianamide che si tolgono colla filtrazione. La soluzione limpida viene scaldata a b. m. fino a scomparsa della reazione della cianamide; e quindi, trattata col bicarbonato potassico, dà il bicarbonato di amidoguanidina che è un sale poco solubile, con buonissimo rendimento e allo stato quasi puro e che facilmente può essere trasformato in qualunque altro sale di amidoguanidina che si voglia.

β-fenilamidoguanidina **(1) (19)**

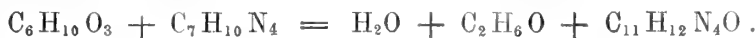
$$C\begin{cases} NH \cdot NH \cdot C_6H_5 \\ =NH \\ NH_2 \end{cases}$$

Il cloridrato di fenilidrazina e la cianamide, per riscaldamento in soluzione alcoolica, dànno il cloridrato di β-fenilamidoguanidina (o anilguanidina, come la chiamai dapprima quando ancora non era conosciuta l'amidoguanidina). A reazione compiuta, si distilla l'alcool e si riprende il residuo con poca acqua e un po' di acido cloridrico e si ottiene il prodotto in bei cristalli un po' rossastri. Il rendimento è del 50 % e rimane infine un sciroppo denso che contiene il composto isomerico α di cui dirò dopo. Il cloridrato di β-fenilamidoguanidina, purificato dall'acqua, si ottiene in cristalli aghiformi, quasi incolori, fusibili a 226° con decomposizione, assai solubili nell'alcool e nell'acqua e meno nell'acqua cloridrica. Trattato con potassa concentrata, si libera la base, prima in forma di gocciolette che presto si trasformano in aggregati cristallini assai solubili nell'acqua e che all'aria si alterano colorandosi in bruno. Furono preparati anche il cloroplatinato, il carbonato che cristallizza con una molecola di acqua, e l'acetato che è in cristalli bianchi lucenti fusib. a 195° con decomposizione.

Un altro modo di preparazione della β-fenilamidoguanidina consiste nel fondere insieme quantità equimolecolari di cloridrato di fenilidrazina e carbonato di guanidina: nella reazione si ha sviluppo di ammoniaca e, riprendendo il prodotto con acqua cloridrica, si ottiene il solito cloridrato come colla cianamide ma con minor rendimento e più impuro. La β-fenilamidoguanidina si presta a svariate reazioni che conducono a prodotti interessanti.

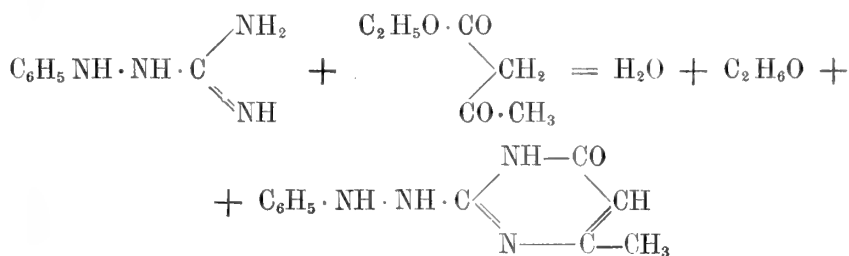
Fenilidrazin-metilpirimidone **(1) (13)**

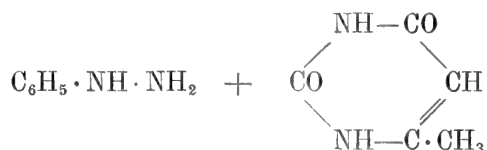
```
        C—NH·NH·C6H5
       / \\
     NH   N
     |    |
     CO   C·CH3
       \ //
        CH
```

La β-fenilamidoguanidina, per la sua costituzione, è da considerarsi come una idrazina secondaria simmetrica e non reagisce colle aldeidi ed i chetoni. Però si condensa

coll'etere acetacetico eliminando una molecola d'acqua e una di alcool:

$$C_6H_{10}O_3 + C_7H_{10}N_4 = H_2O + C_2H_6O + C_{11}H_{12}N_4O .$$

Se la reazione avvenisse come per la metilfenilidrazina simm., si sarebbe dovuto formare un derivato pirazolonico [1]. Se invece il residuo idrazinico non prende parte alla reazione, ma l'eliminazione dell'acqua e dell'alcool si effettua col gruppo guanidico come avviene colla benzalamidoguanidina [2], allora il prodotto corrisponde a un derivato pirimidinico. La decomposizione idrolitica del prodotto con l'acido cloridrico dette metiluracile e fenilidrazina e quindi fu dimostrato che si trattava di un derivato del pirimidone formatosi secondo la seguente equazione:

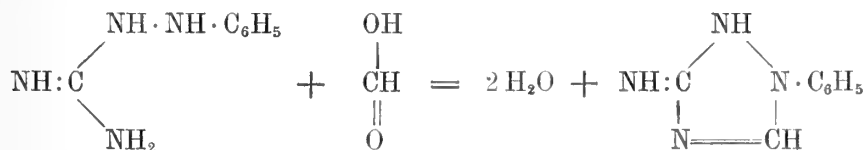
$$C_6H_5NH\cdot NH\cdot C\begin{matrix}\diagup NH_2 \\ \diagdown\!\!\diagdown NH\end{matrix} + \begin{matrix}C_2H_5O\cdot CO \\ \diagdown CH_2 \\ \diagup CO\cdot CH_3\end{matrix} = H_2O + C_2H_6O +$$

$$+ C_6H_5\cdot NH\cdot NH\cdot C\begin{matrix}\diagup NH-CO \diagdown \\ \qquad\qquad CH \\ \diagdown\!\!\diagdown N-C-CH_3 \diagup\!\!\diagup\end{matrix}$$

il quale effettivamente, per idrolisi, può dare fenilidrazina e metiluracile:

$$C_6H_5\cdot NH\cdot NH_2 + \begin{matrix} & NH-CO & \\ CO & & CH \\ & NH-C\cdot CH_3 & \end{matrix}$$

Il fenilidrazinmetilpirimidone si ottiene con buon rendimento e dall'alcool si ha in cristalli bianchi che non hanno un punto di fusione ma si decompongono lentamente colorandosi in rosso. Forma un cloridrato $C_{11}H_{12}N_4O$, 2 HCl, poco solubile. Col bromo in soluzione acetica forma il fenilidrazinbibromopirimidone che si decompone a 220-222°.

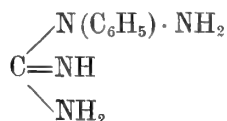
Colla β-fenilamidoguanidina e l'etere etilacetacetico si ottenne il fenilidrazinetilpirimidone, e colla β-fenil-α-metilamidoguanidina, di cui sarà detto dopo, ottenuta dalla fenilmetilidrazina simm. e cianamide, ebbi coll'etere acetacetico il fenilmetilidrazinmetilpirimidone che è in aghi lunghi bianchi fus. a 192°.

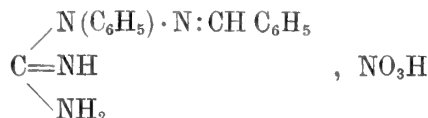
Per azione dell'acido formico sulla β-fenilamidoguanidina G. Cuneo [3] ottenne nel mio laboratorio un derivato triazolico che chiamò 1-fenil-3-imidotriazolina, secondo la seguente equazione:

$$NH{:}C\begin{matrix}\diagup NH\cdot NH\cdot C_6H_5 \\ \diagdown NH_2\end{matrix} + \begin{matrix}OH \\ | \\ CH \\ \| \\ O\end{matrix} = 2\,H_2O + \begin{matrix} & NH & \\ NH{:}C & & N\cdot C_6H_5 \\ | & & | \\ N & = & CH\end{matrix}$$

(1) Knorr, Ann. 138, 203.
(2) Thiele, Ann. 302, 307.
(3) Gazz. Chim. ital. 29, I, 12.

Secondo questa formula, il composto viene ad essere un derivato del diidrotriazolo, mentre nella forma tautomerica verrebbe ad essere l'1-fenil-3-amidotriazolo.

α-fenilamidoguanidina (8) (19)

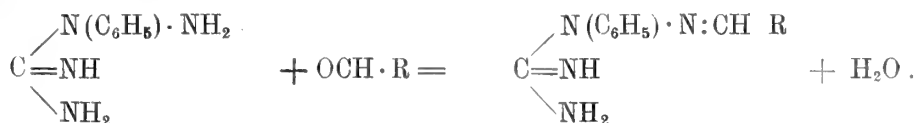
$$C\begin{cases} N(C_6H_5)\cdot NH_2 \\ =NH \\ NH_2 \end{cases}$$

Il liquido sciropposo bruno, dal quale fu separato il cloridrato della β-fenilamidoguanidina, contiene, come si è detto, il cloridrato dell'isomero α, che per la sua grande solubilità e per le impurezze che contiene non cristallizza. Per separare questa α-fenilamidoguanidina, ho approfittato di un carattere che non mostra il composto isomerico. Questo derivato α è una idrazina secondaria asimm., e quindi si condensa coll'aldeide benzoica. Il liquido sciropposo diluito vien trattato coll'aldeide in eccesso, ma il prodotto che si forma rimane disciolto come cloridrato molto solubile e si separa soltanto un po' di benzalfenilidrazina che si forma da un po' di fenilidrazina che c'è come impurezza e si toglie per filtrazione. Il liquido limpido, trattato con nitrato potassico, dà il *nitrato di benziliden-α-fenilamidoguanidina*:

$$C\begin{cases} N(C_6H_5)\cdot N:CH\,C_6H_5 \\ =NH \\ NH_2 \end{cases} \quad , NO_3H$$

che è una sostanza poco solubile e che purificata si ottiene in magnifici lunghi aghi bianchi lucenti fus. a 219° con decomposiziome. Il picrato dello stesso composto è in aghi gialli fus. a 242° e la benzilidenfenilamidoguanidina, che si può avere libera, si ottiene in grossi cristalli fus. a 133°.

Il nitrato di benzilidenfenilamidoguanidina, sciolto nell'acqua coll'aggiunta di un po' di acido nitrico, coll'ebullizione perde l'aldeide benzoica e così si arriva al nitrato della α-fenilamidoguanidina, che purificato si può avere in cristalli prismatici duri trasparenti grandi che appartengono al sistema monoclino. Questo sale fonde a 143° senza decomporsi; il picrato è in aghi lucenti gialli fus. a 179°. La base libera è cristallina, molto solubile, assorbe anidride carbonica dall'aria e riduce a caldo il reattivo di Fehling ed il nitrato d'argento ammoniacale: forma dei sali di fenilamidoguanidina ramica, che sono violetti, e specialmente caratteristico è il nitrato $(C_7H_9N_4)_2Cu\cdot 2NO_3H$ che si ottiene dal nitrato della base con nitrato ramico ed acetato sodico ed è in cristalli violetti .

Siccome la separazione di questa α-fenilamidoguanidina per mezzo del composto benzilidenico è un po' laboriosa, ho cercato di arrivare a un sale meno solubile che non sia il cloridrato e ci sono riuscito facendo reagire, sempre in soluzione alcoolica, la cianamide sul bromidrato di fenilidrazina (19). Per cristallizzazione frazionata si separa prima il bromidrato di β-fenilamidoguanidina in cristalli leggermente colorati in rosa, non trasparenti fus. a 210°; e dalle acque madri si ottiene, dopo, il bromidrato dell'isomero α in cristalli incolori trasparenti, spesso in forma di tavole esagonali, fus. a 219°.

Questa α-fenilamidoguanidina si presta ad interessanti reazioni: essa, come una idrazina secondaria asimm., si combina facilmente colle aldeidi e cogli acetoni e perciò può servire come utile reattivo (12) (13):

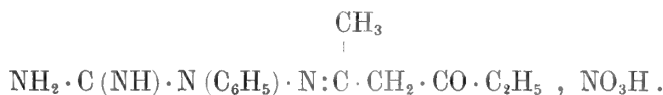
$$C\begin{cases} N(C_6H_5)\cdot NH_2 \\ =NH \\ NH_2 \end{cases} + OCH\cdot R = C\begin{cases} N(C_6H_5)\cdot N{:}CH\ R \\ =NH \\ NH_2 \end{cases} + H_2O\,.$$

I prodotti di condensazione hanno carattere basico e formano dei sali ben cristallizzati; e siccome le reazioni si fecero sempre col nitrato di α-fenilamidoguanidina ed in presenza di piccole quantità di acido nitrico libero, come catalizzatore, si ricavarono sempre i nitrati dei composti formatisi di cui dò qui un elenco:

nitrato di etilidenfenilamidoguanidina . . . . fus. a 182°
» di furfurolfenilamidoguanidina . . . . » a 171°
» di salicidenfenilamidoguanidina . . . . » a 207° con decomp.
» di m. nitrobenzilidenfenilamidoguanidina . . . . . » a 199° »
» di citralfenilamidoguanidina . . . . » a 120°
» di acetonfenilamidoguanidina . . . . » a 181° con decomp.
picrato di vanillidenfenilamidoguanidina . . . . » a 234° »

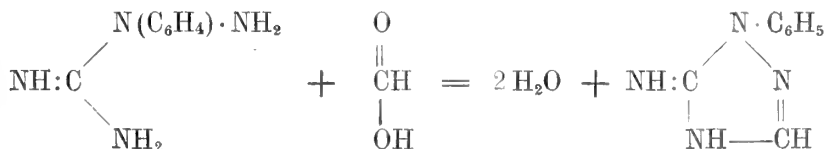
Coll'idrato di cloralio ebbi pure il nitrato di cloralfenilamidoguanidina fus. a 130°, che corrisponde alla formula

$$NH_2\cdot C(NH)\cdot N(C_6H_5)\cdot NH\cdot CH(OH)\cdot C\,Cl_3\ ,\ NO_3H\,.$$

L'etere acetacetico, che colla β-fenilamidoguanidina dette, per eliminazione di acqua e di alcool, un composto pirimidinico, come è stato già detto, agisce invece come un acetone sull'isomero α e dette il *nitrato dell'etere acetilacetofenilamidoguanidina* fus. a 160°:

$$NH_2\cdot C(NH)\cdot N(C_6H_5)\cdot N{:}\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}\cdot CH_2\cdot CO\cdot C_2H_5\ ,\ NO_3H\,.$$

Questi nitrati si possono facilmente trasformare in picrati, che sono sali poco solubili; di alcune di queste basi si prepararono anche i cloroplatinati.

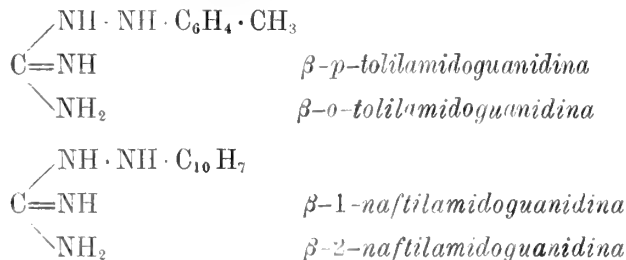
L'α-fenilamidoguanidina si comporta coll'acido formico similmente all'isomero β e cioè dà un composto triazolico isomerico, la 1-*fenil-3-imidotriazolina* (13):

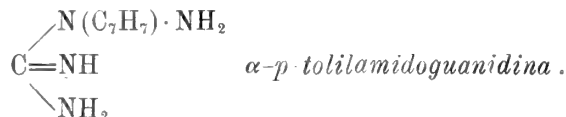
$$NH{:}C\begin{cases} N(C_6H_4)\cdot NH_2 \\ NH_2 \end{cases} + \begin{matrix} O \\ \| \\ CH \\ | \\ OH \end{matrix} = 2\,H_2O + NH{:}C\begin{matrix} \diagup N\cdot C_6H_5 \diagdown \\ | \qquad\qquad N \\ NH\!-\!\!-\!CH \end{matrix}$$

Anche per questa sostanza è possibile la forma tautomerica di fenilamidotriazolo; essa è in aghi lunghi lucenti, fus. a 157°, e se ne preparò anche il picrato ed il cloroplatinato che sono sali ben cristallizzati.

Come è stato detto al principio di questo capitolo, la reazione fra la cianamide e le idrazine fu estesa, oltre che alla fenilidrazina, anche ad altre idrazine primarie e secondarie, e qui dò soltanto l'elenco delle amidoguanidine ottenute e che furono descritte

allo stato di cloridrato e di altri sali ottenuti per doppia decomposizione. Della serie β furono ottenute le quattro seguenti monoalchilamidoguanidine (5):

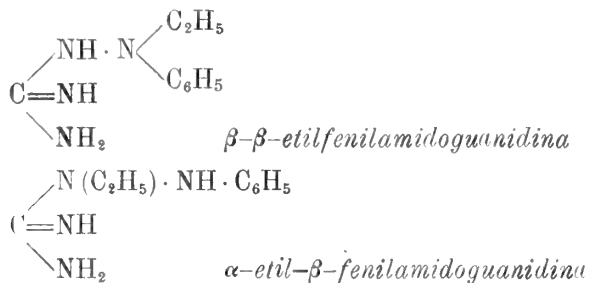
$$C\begin{cases} NH \cdot NH \cdot C_6H_4 \cdot CH_3 \\ =NH \\ NH_2 \end{cases}$$ *β-p-tolilamidoguanidina*; *β-o-tolilamidoguanidina*

$$C\begin{cases} NH \cdot NH \cdot C_{10}H_7 \\ =NH \\ NH_2 \end{cases}$$ *β-1-naftilamidoguanidina*; *β-2-naftilamidoguanidina*

Della serie α fu separata soltanto la (8)

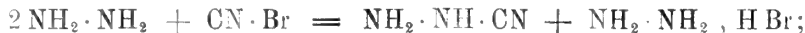
$$C\begin{cases} N(C_7H_7) \cdot NH_2 \\ =NH \\ NH_2 \end{cases}$$ *α-p-tolilamidoguanidina*.

Anch'essa fu ottenuta allo stato di nitrato, facendone prima il derivato benzilidenico.

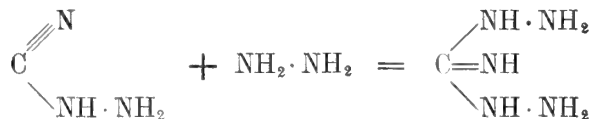
Le amidoguanidine bisostituite ottenute sono le seguenti (5):

$$C\begin{cases} NH \cdot N\begin{cases} C_2H_5 \\ C_6H_5 \end{cases} \\ =NH \\ NH_2 \end{cases}$$ *β-β-etilfenilamidoguanidina*

$$C\begin{cases} N(C_2H_5) \cdot NH \cdot C_6H_5 \\ =NH \\ NH_2 \end{cases}$$ *α-etil-β-fenilamidoguanidina*

III. — **Diamidoguanidina** (14) (22).

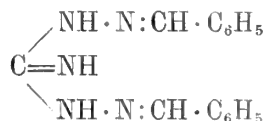
Per l'azione del bromuro di cianogeno sull'idrazina in soluzione acquosa, si ottenne come prodotto principale il bromidrato di diamidoguanidina [1]. Probabilmente dapprima deve avvenire la reazione normale di sostituzione del cianogeno a un idrogeno idrazinico con formazione della non ancora conosciuta amidocianamide e del bromidrato di idrazina.

$$2\,NH_2 \cdot NH_2 + CN \cdot Br = NH_2 \cdot NH \cdot CN + NH_2 \cdot NH_2\,,\,HBr;$$

poi, in una seconda fase, questa amidocianamide si addiziona al bromidrato di idrazina e forma il bromidrato di diamidoguanidina:

$$C\begin{cases} \equiv N \\ NH \cdot NH_2 \end{cases} + NH_2 \cdot NH_2 = C\begin{cases} NH \cdot NH_2 \\ =NH \\ NH \cdot NH_2 \end{cases}$$

[1] Gazz. chim. ital. 35, I, 291 e Rend. Soc. chim. di Roma 1904, II, 162. Poco tempo dopo Stollé e Hofmann Ber. 37, 4524 senza conoscere ancora la nostra pubblicazione, descrissero il cloridrato di diamidoguanidina ottenuto dal cloruro di cianogeno e idrazina.

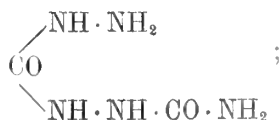
Questa reazione è del tutto paragonabile a quella colla quale si ottiene l'amidoguanidina dalla cianamide e un sale di idrazina. La diamidoguanidina libera non si può avere perchè è molto alterabile; invece i suoi sali sono stabili e ben cristallizzati: il bromidrato si può avere dall'alcool in lamine trasparenti incolori che, lasciate nelle acque madri, si trasformano in piccoli cristalli bianchi opachi, che fondono a 167° con decomposizione. Il picrato cristallizzato dall'acqua è in aghetti sottili, fus. a 191° con decomposizione. Il cloridrato fonde a 185° con decomposizione, e il cloroplatinato fonde a 172-173°. Questi sali corrispondono a una molecola di base per una di acido; ed anche con un eccesso di acido cloridrico concentrato non si ebbe un bicloridrato.

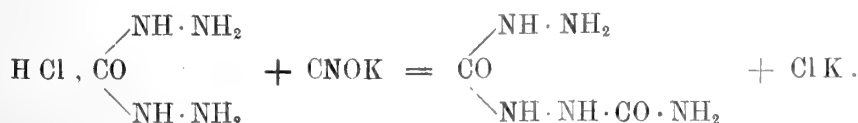
I sali di amidoguanidina in soluzione acquosa con un po' di acido libero dànno coll'aldeide benzoica i sali rispettivi del composto dibenzilidenico:

$$C{=}NH \begin{cases} NH \cdot N{:}CH \cdot C_6H_5 \\ \\ NH \cdot N{:}CH \cdot C_6H_5 \end{cases}$$

Questi sali sono bianchi e poco solubili nell'acqua: il bromidrato cristallizza bene dall'alcool, è in aghi incolori fusib. a 243° ed alla luce si colora in giallo rossastro; il cloridrato fonde a 230° e la dibenzilidenguanidina libera, purificata dal benzolo, è in aghi giallini fus. a 180°.

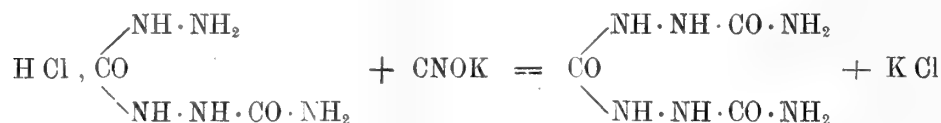
Insieme col bromidrato di diamidoguanidina, eseguendo la reazione in soluzione acquosa, si formano sempre, ma in quantità minore, due prodotti secondarii che rendono un po' laboriosa la purificazione del bromidrato della diamidoguanidina. Per impedire o diminuire la formazione di tali prodotti, trovai poi che è meglio fare agire il bromuro di cianogeno sull'idrato di idrazina in presenza di etere (22) e così si ottiene un prodotto quasi puro e con buonissimo rendimento.

In soluzione acquosa avvengono delle reazioni susseguenti che dànno luogo a questi prodotti secondarii: quello fra i due che si forma in quantità maggiore è il bromidrato di amidoguanazolo, dapprima chiamato guanazina, di cui sarà detto in modo speciale nel capitolo V; l'altro è l'*amidocarbocarbazide* che si produce sempre in piccola quantità, ma in maggiore quantità se la reazione viene fatta a caldo. Esso è il primo prodotto che si separa allo stato libero e non come bromidrato, come per le altre due sostanze, quando si concentra la soluzione: è una sostanza bianca cristallina, poco solubile fus. a 230°, di cui fu ripreso poi lo studio (**15**) e si trovò che corrisponde alla seguente formula e che perciò le spetta il nome di amidocarbocarbazide:

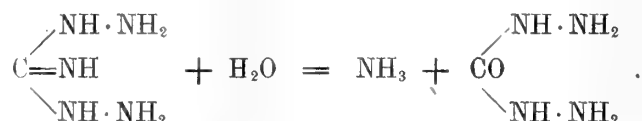
$$CO \begin{cases} NH \cdot NH_2 \\ \\ NH \cdot NH \cdot CO \cdot NH_2 \end{cases} ;$$

formula che fu confermata facendone una sintesi diretta col monocloridrato della carbazide e cianato potassico nei rapporti della seguente equazione:

$$HCl\,,\,CO \begin{cases} NH \cdot NH_2 \\ \\ NH \cdot NH_2 \end{cases} + CNOK = CO \begin{cases} NH \cdot NH_2 \\ \\ NH \cdot NH \cdot CO \cdot NH_2 \end{cases} + ClK\,.$$

L'amidocarbocarbazide ha funzioni basiche; sciolta in acido cloridrico, dà un prodotto di condensazione coll'aldeide benzoica. Scaldata al punto di fusione, elimina ammoniaca e si forma l'amidurazolo (cosidetta urazina) [1].

Il cloridrato dell'amidocarbocarbazide trattato ulteriormente col cianato potassico, dà la diamidodicarbocarbazide

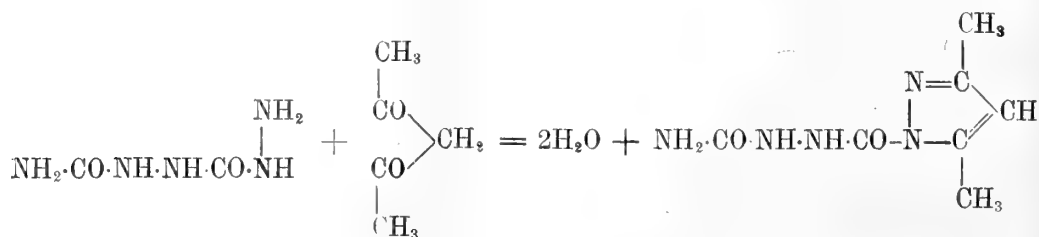
$$HCl\,,\,CO\begin{cases}NH\cdot NH_2\\ NH\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2\end{cases} + CNOK = CO\begin{cases}NH\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2\\ NH\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2\end{cases} + KCl$$

che si può ottenere anche direttamente dal bicloridrato della carbazide (1 mol.) col cianato potassico (2 mol.).

Il modo di formazione della amidocarbocarbazide come prodotto secondario nella reazione fra l'idrazina e il bromuro di cianogeno in soluzione acquosa, specialmente a caldo, può spiegarsi così: una porzione di diamidoguanidina che si forma a mano a mano che si aggiunge il bromuro di cianogeno, rimanendo per un certo tempo in liquido alcalino per l'idrazina ancora libera, si trasforma in carbazide per idrolisi:

$$C\begin{cases}NH\cdot NH_2\\ =NH\\ NH\cdot NH_2\end{cases} + H_2O = NH_3 + CO\begin{cases}NH\cdot NH_2\\ NH\cdot NH_2\end{cases}.$$

Questa ipotesi è appoggiata dal fatto che, facendo la reazione a zero, non si ottiene la amidocarbocarbazide. Un altro fatto secondario deve condurre alla formazione di un cianato: sappiamo che il cloruro di cianogeno colla potassa dà cloruro e cianato potassico:

$$Cl\cdot CN + H_2O = CNOH + ClH.$$

È presumibile che il bromuro di cianogeno nell'acqua alcalina per l'idrazina possa dare anche un po' di cianato e quindi si formi la amidocarbocarbazide. Come ho già detto, questa sostanza reagisce coll'aldeide benzoica, ma può reagire anche coi chetoni. Coll'acetilacetone agisce come una idrazina primaria, formando un derivato pirazolico

$$NH_2\cdot CO\cdot NH\cdot NH\cdot CO\cdot \overset{NH_2}{\overset{|}{NH}} + \begin{matrix}CH_3\\ |\\ CO\\ \\ CO\\ |\\ CH_3\end{matrix}\!\!>CH_2 = 2H_2O + NH_2\cdot CO\cdot NH\cdot NH\cdot CO\text{-}\begin{matrix}N=C(CH_3)\\ |\qquad\quad \\ N\text{—}C(CH_3)\end{matrix}\!\!>CH$$

il quale composto, colla potassa a caldo, perde la lunga catena laterale e dà il dimetilpirazolo [2]. Coll'etere acetacetico dette un derivato pirazolonico, comportandosi similmente alla semicarbazide [3].

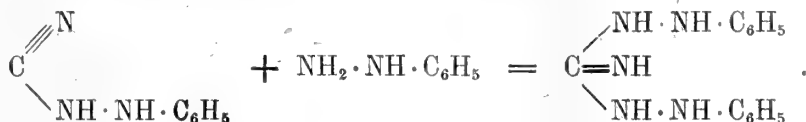
(1) J. prakt. Chem. 52, 454; Gazz. chim. ital. 27, II, 60.
(2) Marchetti, Gazz. chim. ital. 22, II, 373.
(3) Thiele e Stange, Ann. 283, 1.

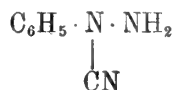
Difenildiamidoguanidina (16).

Si ottiene in modo simile alla diamidoguanidina, e cioè per l'azione del bromuro di cianogeno sulla fenilidrazina: in questa reazione si può constatare la formazione del composto intermedio, la β-cianfenilidrazide o anilcianamide, che è il primo prodotto dell'azione dell'alogenuro di cianogeno sulla fenilidrazina,

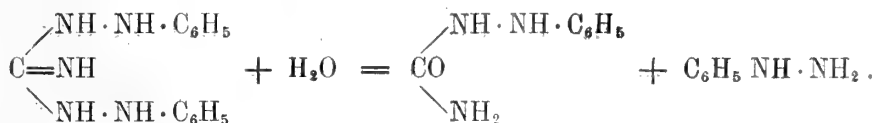
$$2\,C_6H_5NH\cdot NH_2 + CN\cdot Br = C_6H_5NH\cdot NH\cdot CN + C_6H_5\cdot NH\cdot NH_2\,,\,HBr;$$

poi la β-cianfenilidrazide reagisce sul bromidrato di fenilidrazina e si forma il bromidrato di difenildiamidoguanidina

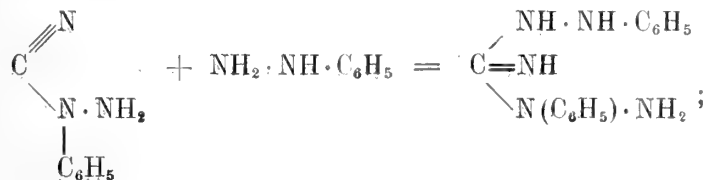
$$C\begin{cases}\equiv N\\ NH\cdot NH\cdot C_6H_5\end{cases} + NH_2\cdot NH\cdot C_6H_5 = C\begin{cases}NH\cdot NH\cdot C_6H_5\\ =NH\\ NH\cdot NH\cdot C_6H_5\end{cases}.$$

Quando il bromuro di cianogeno agisce sulla fenilidrazina in soluzione acquosa (capitolo IX), il prodotto principale della reazione è l'α-cianfenilidrazide

$$\begin{array}{c}C_6H_5\cdot N\cdot NH_2\\ |\\ CN\end{array}$$

ma si forma anche un po' dell' isomero β ed è questo che si addiziona a una molecola di bromidrato di fenilidrazina per fare il bromidrato di difenildiamidoguanidina che trovai la prima volta fra i prodotti secondarii della reazione in soluzione acquosa.

Per avere questa sostanza come prodotto principale, bisogna condurre l'operazione in questo modo: trattare la fenilidrazina, sciolta nell'etere, col bromuro di cianogeno e allora si forma soltanto la β-cianfenilidrazide, che rimane disciolta nell'etere, mentre il bromidrato di fenilidrazina precipita e le due sostanze in queste condizioni non agiscono fra loro; ma aggiunto l'acool, scacciato l'etere e scaldando, avviene la reazione e si ricava il bromidrato di difenildiamidoguanidina, il quale, purificato dall'alcool, si ottiene in cristalli bianchi lucenti che si decompongono verso 180°. Per prolungata ebullizione in soluzione acquosa, lentamente si decompone per dare fenilidrazina e fenilsemicarbazide:

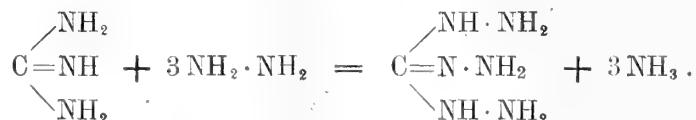
$$C\begin{cases}NH\cdot NH\cdot C_6H_5\\ =NH\\ NH\cdot NH\cdot C_6H_5\end{cases} + H_2O = CO\begin{cases}NH\cdot NH\cdot C_6H_5\\ NH_2\end{cases} + C_6H_5NH\cdot NH_2.$$

Il picrato di difenildiamidoguanidina è in minuti aghi che si decompongono verso 170°.

La rammentata α-cianfenilidrazide avrebbe potuto essa pure addizionarsi alla fenilidrazina per dare una α-β-difenildiamidoguanidina secondo la seguente equazione:

$$C\begin{cases}\equiv N\\ N\cdot NH_2\\ \;|\\ \;C_6H_5\end{cases} + NH_2\cdot NH\cdot C_6H_5 = C\begin{cases}NH\cdot NH\cdot C_6H_5\\ =NH\\ N(C_6H_5)\cdot NH_2\end{cases};$$

ma i tentativi fatti in proposito furono senza risultato.

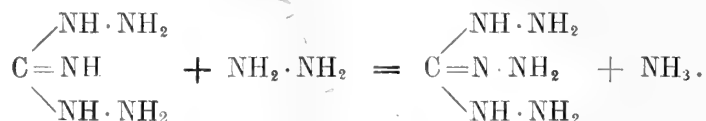
IV. — Triamidoguanidina (23).

Ho preparato i sali della triamidoguanidina facendo agire sui sali di guanidina l' idrato di idrazina: la reazione avviene facilmente e rapidamente con svolgimento di ammoniaca, ed ai tre residui di questa si sostituiscono tre residui idrazinici:

$$C\begin{cases}NH_2\\=NH\\NH_2\end{cases} + 3\,NH_2\cdot NH_2 = C\begin{cases}NH\cdot NH_2\\=N\cdot NH_2\\NH\cdot NH_2\end{cases} + 3\,NH_3\,.$$

Con eguale facilità, per azione di due mol. di idrazina, si passa dai sali dell'amidoguanidina a quelli della triamidoguanidina:

$$C\begin{cases}NH\cdot NH_2\\=NH\\NH_2\end{cases} + 2\,NH_2\cdot NH_2 = C\begin{cases}NH\cdot NH_2\\=N\cdot NH_2\\NH\cdot NH_2\end{cases} + 2\,NH_3\,.$$

Nello stesso modo si comportano i sali di diamidoguanidina, i quali per azione di una molecola di idrazina passano nei sali di triamidoguanidina:

$$C\begin{cases}NH\cdot NH_2\\=NH\\NH\cdot NH_2\end{cases} + NH_2\cdot NH_2 = C\begin{cases}NH\cdot NH_2\\=N\cdot NH_2\\NH\cdot NH_2\end{cases} + NH_3\,.$$

Le reazioni avvengono egualmente bene coi sali di guanidina come con quelli dell'amidoguanidina e della diamidoguanidina e si compiono scaldando dalle due alle cinque ore le soluzioni concentrate acquose o alcooliche dei detti sali colla quantità calcolata di idrato di idrazina. Se la operazione è fatta in soluzione acquosa, si scalda in bevuta aperta a b. m. il sale e l'idrato di idrazina sciolti nella quantità di acqua corrispondente a due o tre volte il peso del sale impiegato: il prodotto della reazione, che si depone quasi tutto allo stato solido cristallino per raffreddamento, si purifica poi dall'acqua e dall'alcool. Se l'operazione viene fatta in soluzione alcoolica, come talvolta è consigliabile, il sale di partenza si scioglie in 4 o 6 parti di alcool e, dopo aggiunto l'idrato di idrazina, si fa bollire a ricadere a b. m. I sali di triamidoguanidina, che in generale sono poco solubili nell'alcool anche a caldo, si depongono a mano a mano che si formano e si raccolgono dalla reazione quasi puri e basta una purificazione dall'acqua o dall'alcool per averli perfettamente incolori e ben cristallizzati. I sali di guanidina e quelli di amido-guanidina sono i più indicati come sostanze di partenza, perchè essi si possono preparare facilmente per azione degli acidi dal carbonato di guanidina del commercio o dal bicarbonato di amidoguanidina che si può avere facilmente col metodo rapido ed economico di cui ho parlato nel capitolo II e che è particolarmente descritto nella nota (22).

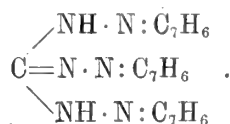
Il *nitrato di triamidoguanidina* (CN_6H_8, NO_3H) è assai solubile nell'acqua a caldo. e poco a freddo ed è pochissimo solubile nell'alcool anche a caldo. È in lunghi aghi incolori che a 216° si decompongono con sviluppo di gas: se il riscaldamento è lento, il punto di decomposizione si abbassa.

Bromidrato di triamidoguanidina (CN_6H_8, HBr): cristallizzato dall'acqua, si ottiene in lunghi aghi lucenti incolori che fondono a 232° decomponendosi con forte sviluppo gassoso: con lento riscaldamento il punto di decomposizione si abbassa e, se la polvere cristallina non è molto sottile, nel tubetto si vedono delle particelle muoversi e schizzare. È anch'esso assai solubile nell'acqua calda, poco a freddo e pochissimo nell'alcool.

Cloridrato di triamidoguanidina (CN_6H_8, HCl); cristallizzato dall'acqua è in prismi lunghi bianchi opachi, mentre dall'alcool (in cui è poco solubile) si ottiene in aghetti sottili trasparenti: fonde con decomposizione a 231°. Questo cloridrato era stato poco prima ottenuto da Stollè [1], ma non ben separato, scaldando per parecchi giorni il tetracloruro di carbonio coll'idrato di idrazina in corrente di ammoniaca: il rendimento che ebbe fu scarso, e difficile riuscì la purificazione del prodotto, tanto che l'autore tentò di farne la separazione attraverso il composto benzilidenico e da questo potè avere poco sale di triamidoguanidina perchè il composto benzilidenico, bollito coll'acido cloridrico, si scinde per la massima parte in benzaldeide, idrazina e carbazide.

Solfocianato di triamidoguanidina CN_6H_8, CNSH. Si ottiene dal solfocianato di guanidina scaldato in soluzione alcoolica coll'idrato di idrazina, e, purificato dall'alcool, si ottiene in aghi lunghi splendenti incolori che fondono a 136° senza decomporsi. È molto solubile nell'acqua e nell'alcool.

Il picrato di triamidoguanidina si ottiene trattando con acido picrico la soluzione acquosa di uno dei sali prima rammentati. Cristallizzato dall'acqua, in cui è poco solubile, si ottiene in lunghi aghi gialli che fondono a 171°, e soltanto a temperatura più elevata si decompone. Un sale qualunque di triamidoguanidina, sciolto nell'acqua leggermente acidulata collo stesso acido, dà coll'aldeide benzoica i relativi sali della *tribenzilidentriamidoguanidina*;

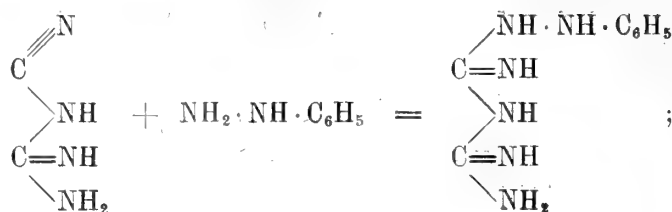
$$C \begin{cases} \diagup NH \cdot N : C_7H_6 \\ = N \cdot N : C_7H_6 \\ \diagdown NH \cdot N : C_7H_6 \end{cases} .$$

Questi sali sono poco solubili nell'acqua e precipitano: si cristallizzano facilmente dall'alcool e sono giallicci; trattati col carbonato sodico, liberano la base che si può avere dall'alcool in aghetti gialli fus. a 198°: Stollé trovò 196°.

V. — Guanazolo e suoi derivati (2).

Le idrazine, reagendo colla diciandiamide, non dànno per addizione una biguanide come fanno le amine, ma una base a nucleo pentagonale azotato. Le prime ricerche su questa interessante reazione le feci colla fenilidrazina; e lo stesso prodotto, ottenuto in questo caso, potei avere anche per altre vie, ciò che mi portò a confermare la formula ammessa e a stabilire il meccanismo della reazione. Quando il cloridrato di fenilidrazina si fa reagire colla diciandiamide (**2**), si dovrebbe formare normalmente il cloridrato

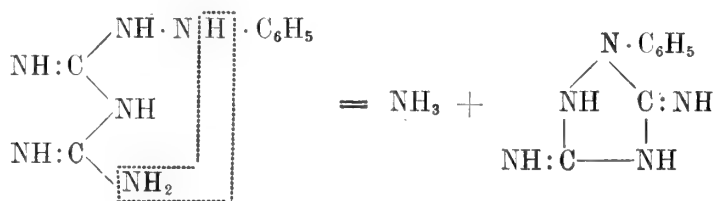
[1] Ber. 37, 3548.

della fenilamidobiguanide:

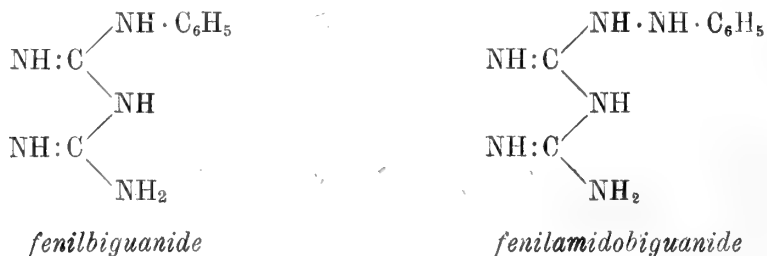
$$C(\equiv N)\!-\!NH\!-\!C(=NH)\!-\!NH_2 + NH_2 \cdot NH \cdot C_6H_5 = C(=NH)(NH \cdot NH \cdot C_6H_5)\!-\!NH\!-\!C(=NH)\!-\!NH_2 \; ;$$

invece si arriva ad un composto che ne differisce per una molecola di ammoniaca in meno, a seconda della seguente equazione:

$$C_2H_4N_4 + NH_2 \cdot NH \cdot C_6H_5 = NH_3 + C_8H_9N_5 .$$

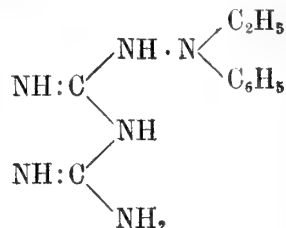
È probabile però che si formi come termine di passaggio la fenilamidobiguanide e che da questa si elimini poi l'ammoniaca per dare il composto $C_8H_9N_5$. Ammettendo un tal modo di formazione, si può subito argomentare sulla probabile costituzione del composto: infatti la molecola di ammoniaca deve necessariamente formarsi dall'unico gruppo $—NH_2$ della supposta biguanide e un atomo di idrogeno di uno dei varii gruppi $= NH$. Tra questi è, senza dubbio, quello finale il più adattato alla reazione perchè corrisponde all'idrogeno iminico α della fenilidrazina; questo, come si sa, si presta assai facilmente alla chiusura di un nucleo pentagonale

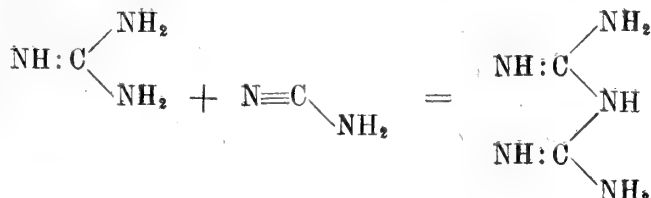
$$NH:C(NH \cdot N[H] \cdot C_6H_5)\!-\!NH\!-\!C(:NH)\!-\![NH_2] = NH_3 + \begin{matrix} & N \cdot C_6H_5 & \\ NH & & C:NH \\ NH:C & \text{——} & NH \end{matrix}$$

Il composto si comporta come un derivato fenilico di una sostanza eterociclica, mostrando in tutte le reazioni quella resistenza che si nota in simili anelli. Che veramente l'ammoniaca debba eliminarsi in quel modo, ce lo accenna anche il comportamento della fenilbiguanide. Questa, benchè contenga gran parte della catena della fenilamidobiguanide non dà nessun derivato ciclico:

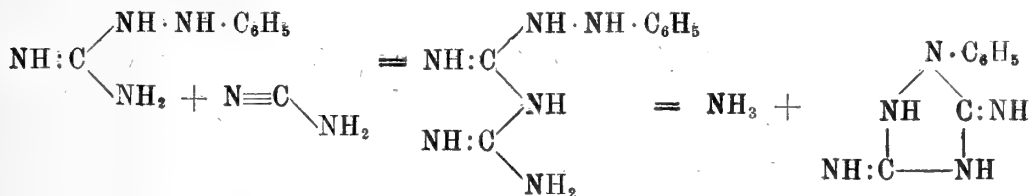
$$NH:C(NH \cdot C_6H_5)\!-\!NH\!-\!C(:NH)\!-\!NH_2 \qquad NH:C(NH \cdot NH \cdot C_6H_5)\!-\!NH\!-\!C(:NH)\!-\!NH_2$$

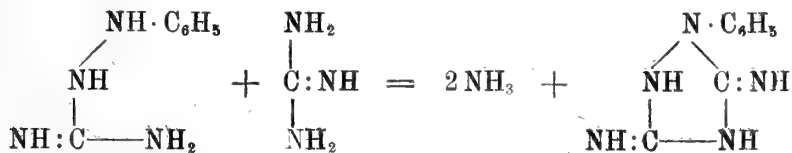
fenilbiguanide *fenilamidobiguanide*

La costituzione sviluppata con quel meccanismo presuppone la formazione intermedia di questa fenilamidobiguanide, che invero non ho potuto isolare: ma in favore di essa c'è in primo luogo il genere della reazione che normalmente dovrebbe condurre

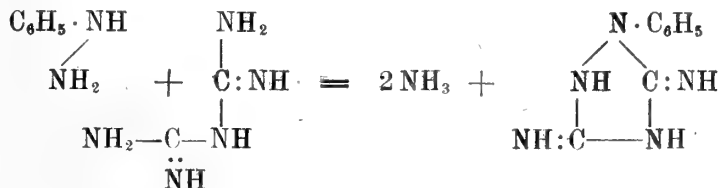
a un tale composto; poi c'è il fatto, anche più dimostrativo, che, mentre colle altre idrazine primarie e secondarie simm. si ottengono pure dei guanazoli, colla etilfenilidrazina asimm. ottenni la relativa biguanide, mancando ad essa la possibilità di eliminare ammoniaca nel modo indicato:

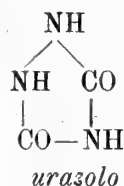
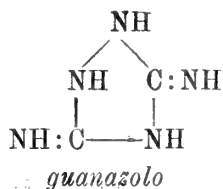
```
               C2H5
          NH · N<
NH:C<          C6H5
          NH
NH:C<
          NH2
```

È noto che la biguanide si forma anche per l'azione della cianamide sulla guanidina:

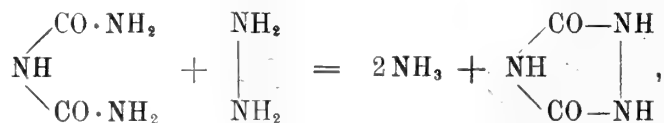
```
        NH2                                  NH2
NH:C<                                NH:C<
        NH2  +  N≡C<            =            NH
                      NH2            NH:C<
                                             NH2
```

La stessa reazione dovrebbe avvenire anche con una guanidina sostituita come è la β–fenilamidoguanidina (vedi capit. II) che, unendosi alla cianamide, dovrebbe dare la fenilamidobiguanide; ma invece di essa, si ottiene il composto $C_8 H_9 N_5$, poichè si elimina una molecola di ammoniaca come nella reazione fra la diciandiamide e la fenilidrazina:

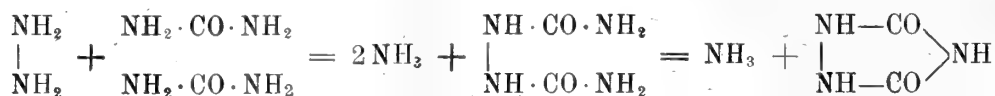
```
       NH·NH·C6H5                  NH·NH·C6H5                        N·C6H5
NH:C<                    =  NH:C<                                   /    \
       NH2  + N≡C<                 NH            =  NH3  +        NH     C:NH
                   NH2      NH:C<                                  |      |
                                   NH2                            NH:C————NH
```

Allo stesso composto $C_8 H_9 N_5$, conduce la reazione fra la stessa β–fenilamidoguanidina e il carbonato di guanidina; essa, senza la necessità di un termine di passaggio, porta pure alla formula di costituzione già sviluppata:

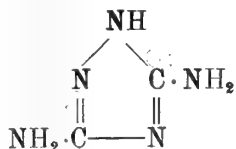
```
     NH·C6H5      NH2                           N·C6H5
    /              |                           /    \
  NH          +   C:NH   =   2NH3   +        NH     C:NH
   |               |                          |      |
NH:C————NH2       NH2                       NH:C————NH
```

E tale formula di costituzione trova anche una dimostrazione nella reazione fra la fenilidrazina e la biguanide, reazione che pure conduce allo stesso composto $C_8 H_9 N_5$

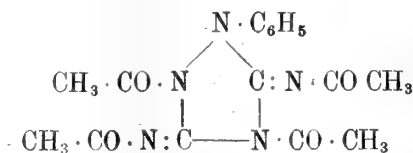
```
C6H5·NH          NH2                          N·C6H5
   /              |                          /    \
 NH2      +      C:NH   =   2NH3   +       NH     C:NH
                  |                         |      |
         NH2—C—NH                          NH:C————NH
             ··
             NH
```

La costituzione del composto $C_8 H_9 N_5$, ottenuto con quattro diverse sintesi, rimaneva così stabilita con grandissima probabilità, poi comprovata dai derivati a cui può dar luogo come sarà detto in seguito. A questo nucleo pentagonale azotato ho dato il nome di guanazolo, sia perchè rammenta la guanidina, colla quale è in stretta relazione genetica, sia perchè è l'analogo composto di un nucleo derivante dall'urea, l'urazolo, di cui Pinner [1] descrisse qualche derivato:

```
        NH                          NH
       /  \                        /  \
     NH    C:NH                  NH    CO
     |     |                     |     |
  NH:C-----NH                    CO----NH
     guanazolo                    urazolo
```

L'urazolo fu ottenuto da me per l'azione del biureto sull'idrazina (7):

```
   /CO·NH2      NH2                     /CO—NH
 NH          +   |    =  2NH3  +  NH        |   ,
   \CO·NH2      NH2                     \CO—NH
```

reazione analoga a quella già citata, colla quale ottenni il fenilguanazolo dalla biguanide e la fenilidrazina. Ottenni l'urazolo anche da un sale di idrazina (1 mol.) e urea (2 mol.) e in questa reazione fu constatato che prima si forma come prodotto intermedio l'idrazodicarbonamide [2], che poi al punto di fusione perde ammoniaca e dà l'urazolo:

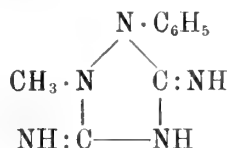
```
NH2     NH2·CO·NH2              NH·CO·NH2              NH—CO
 |   +              =  2NH3  +   |           =  NH3 +   |     >NH
NH2     NH2·CO·NH2              NH·CO·NH2              NH—CO
```

Il guanazolo, colla formula adottata, viene ad essere il diimidotetraidrotriazolo, e nella formula tautomera seguente viene ad essere il 3-5- diamidotriazolo 1.2.3

```
          NH
         /  \
        N    C·NH2
        ||   ||
   NH2·C-----N
```

È probabile che il guanazolo come i suoi derivati alchilici, possa agire secondo le due formule; ma le ricerche fatte parlano piuttosto in favore della tetraidrotriazolica che non della formula triazolica (**11**). Adottando la prima formula, più giustamente gli compete il nome di guanazolo, giacchè sono meglio messi in evidenza i due residui guanidici. Riassumo i risultati ottenuti per confermare una tale formula. Il fenilguanazolo, con anidride acetica, dette un *mono-*, un *di-* e un *tetracetilfenilguanazolo* al quale non può spettare se non la seguente costituzione:

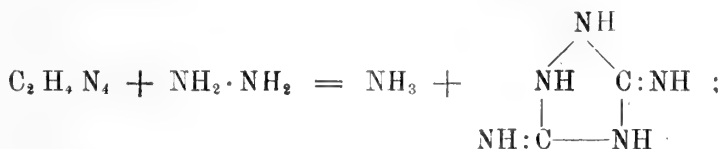
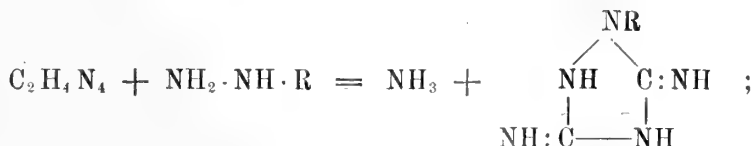
```
                    N·C6H5
                   /      \
        CH3·CO·N           C:N·CO CH3
               |           |
     CH3·CO·N:C------------N·CO·CH3
```

[1] Ber. 20, 2358; 21, 1219; J. chem. Soc. 1888, 50.

[2] L'idrazodicarbonamide era già stata preparata da Thiele (Ann. 270, 1) per azione del cianato potassico sul solfato di idrazina.

Nella forma tautomerica sopra scritta di fenildiamidotriazolo non avrebbe potuto dare se non un derivato diacetilico [1]. Il fenilguanazolo, con lo ioduro di metile, dette l'1–fenil–2–metil–guanazolo identico a quello che si ottiene direttamente dalla fenilmetilidrazina simm. e la diciandiamide ed a cui spetta indubbiamente la seguente costituzione:

```
          N·C6H5
         /  \
CH3·N      C:NH
      |       |
NH:C——NH
```

Il fenilguanazolo, coll'acido nitroso, dà un nitroso-derivato $C_6H_5 \cdot C_2H_3N_5 \cdot NO$; inoltre il fenilguanazolo dà un cloroplatinato normale, il quale, bollito in soluzione acquosa anche per lungo tempo, non perde acido cloridrico come ho trovato che fanno invece le basi triazoliche (reazione di Anderson) (21). Questo modo di reagire del fenilguanazolo coi diversi reattivi corrisponde alla formula di costituzione adottata, e non a quella di fenildiamidotriazolo. Coll'aldeide benzoica dà un prodotto di condensazione con una sola molecola di aldeide, mentre, se agisse secondo la formula tautomerica che ha due gruppi aminici, dovrebbe dare un derivato dibenzilidenico: il composto monobenzilidenico può, se mai, indicare che il fenilguanazolo può agire secondo una forma mista imido–amidica corrispondente a una formula diidrotriazolica.

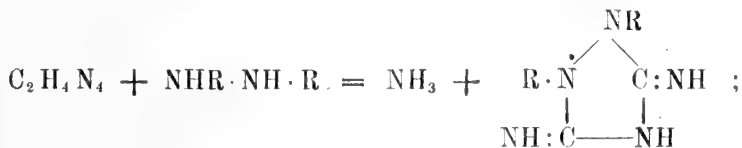
Dimostrati la costituzione del fenilguanazolo e il meccanismo della reazione fra la diciandiamide o cianguanidina e la fenilidrazina, generalizzai la reazione ed ottenni (6):

a) il guanazolo dalla diciandiamide e l'idrazina

```
                                                    NH
                                                   /  \
C2H4N4 + NH2·NH2 = NH3 +      NH     C:NH ;
                                                |        |
                                          NH:C——NH
```

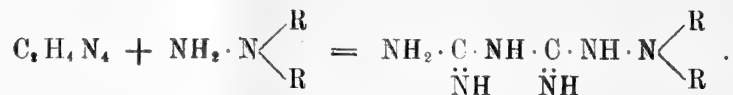
b) gli 1–alchilguanazoli dalla diciandiamide e le idrazine primarie

```
                                                    NR
                                                   /  \
C2H4N4 + NH2·NH·R = NH3 +      NH     C:NH ;
                                                |        |
                                          NH:C——NH
```

c) gli 1–2- dialchilguanazoli dalla diciandiamide e le idrazine secondarie simm.

```
                                                    NR
                                                   /  \
C2H4N4 + NHR·NH·R = NH3 +    R·N     C:NH ;
                                                |        |
                                          NH:C——NH
```

[1] Che l'idrogeno dei gruppi iminici come ha la guanidina possa essere sostituito dall'acetile è dimostrato dal fatto che la guanidina coll'anidride acetica dà la diacetilanidroguanidina. Korndörfer. Arch. der Pharm. 241, 449.

d) le β-β-dialchilamidobiguanidi dalla diciandiamide e le idrazine secondarie asimm.

$$C_2H_4N_4 + NH_2 \cdot N\!\!\left\langle\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\right. = NH_2 \cdot \underset{\ddot{N}H}{C} \cdot NH \cdot \underset{\ddot{N}H}{C} \cdot NH \cdot N\!\!\left\langle\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\right. .$$

Queste reazioni si fanno rapidamente scaldando alla fusione una miscela intima, in quantità equimolecolare, di diciandiamide e del cloridrato dell' idrazina impiegata; ed il guanazolo ottenuto si libera generalmente dal prodotto della reazione sciolto nell'acqua, per mezzo dell' idrato potassico. Accenno brevemente ai prodotti ottenuti rimandando per i particolari ai lavori citati.

Guanazolo (6).

La reazione per fusione fra la diciandiamide e il monocloridrato di idrazina è molto energica e si forma poco guanazolo e assai di un prodotto secondario, il guanazo-guanazolo, che descriverò in altro capitolo: meglio è fare la reazione in presenza di alcool a 100° in tubo chiuso, perchè per ebullizione in soluzione acquosa si forma pure troppo dell'altro prodotto e poco guanazolo. Per separarlo non si può adoprare la potassa perchè è troppo solubile e non si può estrarre coll'etere o qualche altro solvente organico. Occorre precipitarlo col solfato di rame come solfato di rame e di guanazolo, che è una polvere verde-sporco da cui poi si toglie il rame coll' idrogeno solforato e l'acido solforico colla barite. Il guanazolo si può avere così in bei cristalli incolori trasparenti monoclini, fus. a 206°. Operando così, da 12 gr. di monocloridrato di idrazina ebbi gr. 7 di guanazolo. È solubilissimo nell'acqua, con debole reazione alcalina al tornasole; assai solubile nell'alcool ed insolubile nell'etere, benzolo e cloroformio. Col cloruro ferrico dà una intensa colorazione rossa che scompare cogli acidi minerali. Forma dei sali ben cristallizzati e preparai ed analizzai il mono- e il bicloridrato, il solfato, il nitrato ed il picrato. Col solfato di rame, col cloruro mercurico e col nitrato d'argento forma dei composti ben definiti, poco solubili. Coll'acido nitroso dà un prodotto giallo che non fu studiato.

Fenilguanazolo e derivati (2) (11).

Nella parte generale di questo capitolo fu detto che il fenilguanazolo si può ottenere con quattro sintesi differenti, ma il metodo migliore di preparazione è quello dalla diciandiamide e cloridrato di fenilidrazina fatti reagire per fusione: la reazione avviene però anche riscaldando a ricadere una soluzione acquosa delle due sostanze. Il prodotto che si ottiene è il cloridrato, dal quale si libera il fenilguanazolo colla potassa concentrata. Purificato dall'alcool, si ottiene in cristalli grossetti bianchi duri, fus. 174–175°, assai solubili nell'alcool, discretamente nel cloroformio, poco nell'etere e nel benzolo e molto nell'acqua. Forma dei sali ben cristallizzati. Per i composti ottenuti dal fenilguanazolo coll'anidride acetica, coll'aldeide benzoica, coll'acido nitroso e collo ioduro di

metile, dei quali ho parlato nella parte generale a proposito della costituzione, do soltanto i punti di fusione, rimandando per i particolari alla nota (**11**):

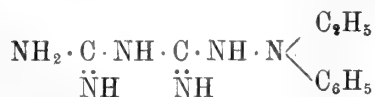
monoacetilfenilguanazolo	fus. 244°
diacetilfenilguanazolo	» 212°
tetracetilfenilguanazolo	» 157°
benzilidenfenilguanazolo	» 228°
nitrosofenilguanazolo	» 247°
fenilmetilguanazolo	» 258°

Per l'azione della diciandiamide sui cloridrati di altre idrazine ottenni i seguenti derivati alchilici del guanazolo:

p–tolilguanazolo	fus. 172°
o–totilguanazolo	» 159°
α–naftilguanazolo	» 230°
β–naftilguanazolo	» 212°

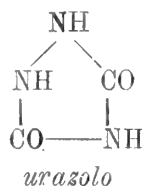
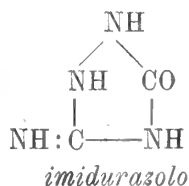
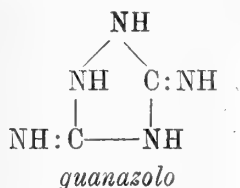
e col cloridrato della metilfenilidrazina simm. ebbi l' *1-fenil-2-metilguanazolo* fus. 208°, identico al prodotto ottenuto metilando il fenilguanazolo.

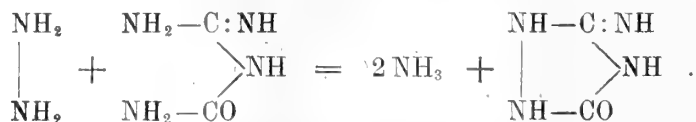
Colla diciandiamide e il cloridrato della etilfenilidrazina asimm. ottenni la *etilfenilamido-biguanide*

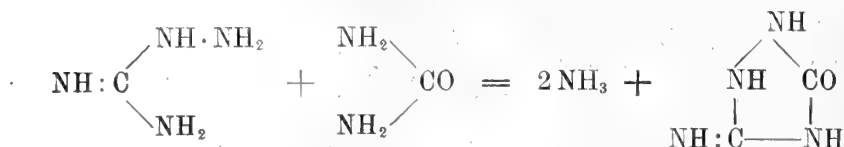
$$NH_2 \cdot \underset{NH}{\overset{\cdot\cdot}{C}} \cdot NH \cdot \underset{NH}{\overset{\cdot\cdot}{C}} \cdot NH \cdot N \begin{matrix} \diagup C_2H_5 \\ \diagdown C_6H_5 \end{matrix}$$

che allo stato libero è una sostanza amorfa friabile, che si rammollisce nell'aria umida; è molto solubile nell'acqua e nell'alcool e assai nell'etere e nel benzolo. Si rammollisce verso 50°; ha marcatissima reazione alcalina ed assorbe dall'aria l'anidride carbonica. Il solfato è in bei cristalli bianchi lucenti. Essa è l'unico rappresentante dell'amidobiguanide non ancora conosciuta.

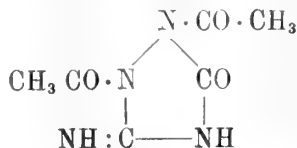
VI. — Imidurazolo (11).

Il guanazolo e l'urazolo sono due sostanze dello stesso tipo, benchè abbiano proprietà molto differenti: essi derivano infatti dallo stesso nucleo pentagonale a tre atomi di azoto e due di carbonio, ma differiscono inquantochè nell'urazolo vi sono due carbonili = CO mentre nel guanazolo vi sono due carbimidili = C : NH. L'urazolo deriva da due molecole di urea e una di idrazina, ed ha funzione di acido; il guanazolo deriva da due molecole di guanidina e una di idrazina ed è una base. Era interessante di ottenere un prodotto intermedio che corrispondesse in parte al guanazolo e in parte all'urazolo, che derivasse cioè da una molecola di guanidina, una di urea ed una di idrazina:

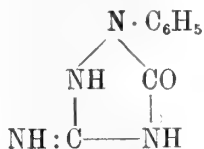
```
        NH                  NH                NH
       /  \                /  \              /  \
     NH    C:NH          NH    CO          NH    CO
     |     |             |     |           |     |
NH:C——————NH        NH:C——————NH          CO——————NH
   guanazolo          imidurazolo          urazolo
```

A questo nuovo composto, che denominai imidurazolo, sono giunto con due reazioni differenti, le quali ci dànno ragione della sua costituzione. La preparazione migliore perchè dà una maggiore quantità di prodotto e più facilmente purificabile, è l'azione del cloridrato di diciandiamidina o guanilurea sul monocloridrato di idrazina:

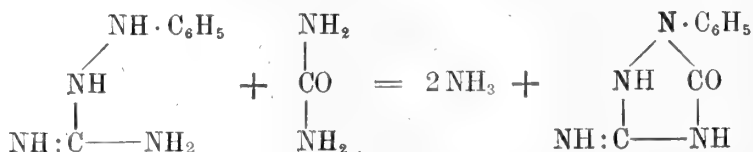
$$\begin{matrix} NH_2 \\ | \\ NH_2 \end{matrix} + \begin{matrix} NH_2-C:NH \\ \quad \diagdown NH \\ NH_2-CO \diagup \end{matrix} = 2\,NH_3 + \begin{matrix} NH-C:NH \\ | \quad\quad \diagdown NH \\ NH-CO \diagup \end{matrix} .$$

L'altra reazione è coll'amidoguanidina allo stato di cloridrato e l'urea:

$$NH:C \begin{matrix} \diagup NH\cdot NH_2 \\ \\ \diagdown NH_2 \end{matrix} + \begin{matrix} NH_2 \diagdown \\ \quad CO \\ NH_2 \diagup \end{matrix} = 2\,NH_3 + \begin{matrix} NH \\ \diagup \quad \diagdown \\ NH \quad CO \\ | \qquad | \\ NH:C —— NH \end{matrix}$$

Le due reazioni si eseguiscono fondendo la miscela dei composti di partenza. Come ho detto, è preferibile la prima: in tali condizioni, riprendendo coll'acqua la massa. rimane indisciolto un prodotto secondario (l'imidurazo-imidurazolo, di cui parlerò in un altro capitolo) e si scioglie l'imidurazolo che si ricava per concentrazione; purificato dall'acqua acidulata con un po' di acido acetico, si ottiene in aghi bianchi fus. 285°: è discretamente solubile nell'acqua ed insolubile nei soliti solventi organici. Ha funzioni di acido e di base e perciò si scioglie bene negli alcali come negli acidi minerali diluiti; riduce il nitrato d'argento ammoniacale. Coll'anidride acetica dette un derivato diacetilico che certamente corrisponderà alla formula

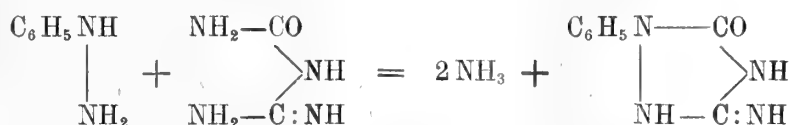
$$\begin{matrix} N\cdot CO\cdot CH_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ CH_3\,CO\cdot N \qquad CO \\ | \qquad | \\ NH:C —— NH \end{matrix}$$

essendo i due idrogeni del residuo idrazinico quelli di carattere più basico e perciò più facilmente sostituibili dai due acetili.

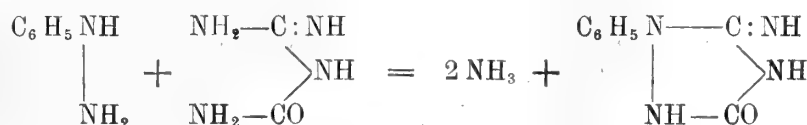
1-fenil-3-imidurazolo (11)

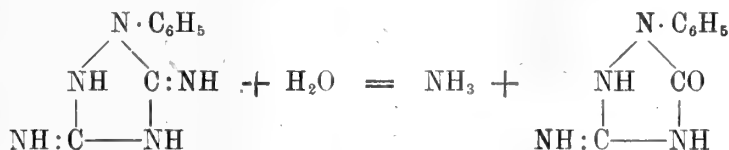
$$\begin{matrix} N\cdot C_6H_5 \\ \diagup \quad \diagdown \\ NH \quad CO \\ | \qquad | \\ NH:C —— NH \end{matrix}$$

Questo derivato dell'imidurazolo l'ottenni per l'azione della β-fenilamidoguanidina (allo stato di cloridrato) sull'urea:

$$\begin{matrix} NH\cdot C_6H_5 \\ \diagup \\ NH \\ | \\ NH:C —— NH_2 \end{matrix} + \begin{matrix} NH_2 \\ | \\ CO \\ | \\ NH_2 \end{matrix} = 2\,NH_3 + \begin{matrix} N\cdot C_6H_5 \\ \diagup \quad \diagdown \\ NH \quad CO \\ | \qquad | \\ NH:C —— NH \end{matrix}$$

La reazione si compie per fusione delle due sostanze, e il derivato si separa dal prodotto della reazione per mezzo dell'acqua dalla quale si ottiene in cristalli aghiformi minuti bianchi lucenti fus. 272°. Furono preparati ed analizzati il sale monoargentico e il monocloridrato che cristallizza con una molecola di acqua e che, sciolto nell'acqua, si dissocia cristallizzando addirittura la base libera, mentre è stabile in soluzione nell'acido cloridrico.

Lo stesso fenilimidurazolo si ottiene per azione della fenilidrazina sul cloridrato di diciandiamidina:

$$\begin{array}{c} C_6H_5NH \\ | \\ NH_2 \end{array} + \begin{array}{l} NH_2—CO \\ \qquad\quad \rangle NH \\ NH_2—C:NH \end{array} = 2\,NH_3 + \begin{array}{l} C_6H_5N——CO \\ \quad | \qquad\quad \rangle NH \\ \quad NH—C:NH \end{array}$$

È da notare che in tale reazione si potrebbe supporre si formasse anche il composto isomerico 1-fenil-5-imidurazolo, non trovato, secondo il seguente schema:

$$\begin{array}{c} C_6H_5NH \\ | \\ NH_2 \end{array} + \begin{array}{l} NH_2—C:NH \\ \qquad\quad \rangle NH \\ NH_2—CO \end{array} = 2\,NH_3 + \begin{array}{l} C_6H_5N——C:NH \\ \quad | \qquad\quad \rangle NH \\ \quad NH—CO \end{array}$$

Un terzo modo per ottenere l' 1-fenil-3-imidurazolo consiste nel fare agire la potassa sul fenilguanazolo: per idrolisi il carbimidile in posizione 5 si trasforma in carbonile:

$$\begin{array}{c} N\cdot C_6H_5 \\ / \quad \backslash \\ NH \qquad C:NH \\ | \qquad\quad | \\ NH:C——NH \end{array} + H_2O = NH_3 + \begin{array}{c} N\cdot C_6H_5 \\ / \quad \backslash \\ NH \qquad CO \\ | \qquad\quad | \\ NH:C——NH \end{array}$$

Il passaggio avviene lentamente e parzialmente facendo bollire il fenilguanazolo sciolto nella potassa al 20 %; più rapidamente avviene in tubo chiuso a 160-170°, e si ottiene anche in questo modo l'1-fenil-3-imidurazolo fus. a 273° e non l'altro isomero.

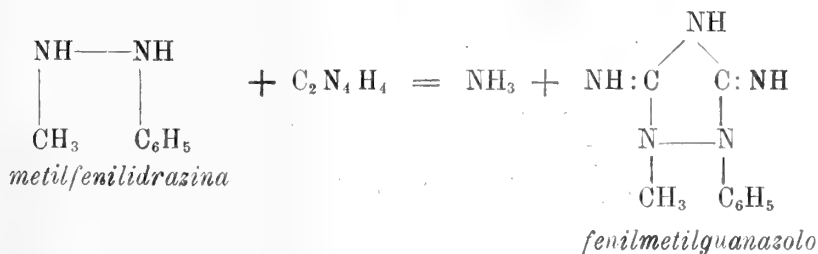
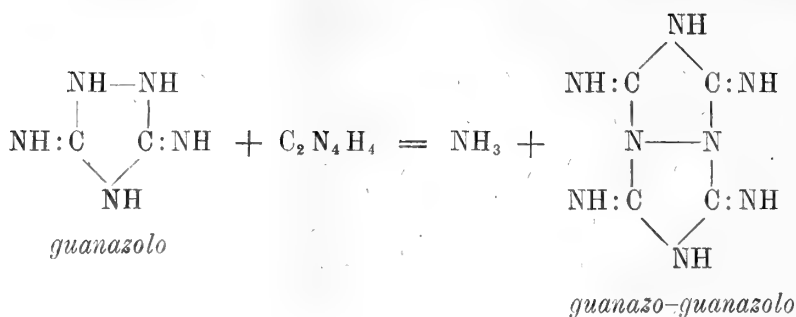
VII. — **Guanazo-guanazolo e composti affini (11).**

Il guanazolo, contenendo il residuo —NH·NH—, può paragonarsi ad una idrazina secondaria simm., p. es. alla metilfenilidrazina simm.; e come su questa agisce la diciandiamide per dare l' 1-fenil-2-metilguanazolo di cui è stato detto nel capitolo V, così la diciandiamide può agire sul guanazolo, formando sul residuo idrazinico un altro gruppo guanazolico e dar luogo al guanazo-guanazolo:

$$\begin{array}{c} NH——NH \\ | \qquad\quad | \\ CH_3 \qquad C_6H_5 \end{array} + C_2N_4H_4 = NH_3 + \begin{array}{c} NH \\ / \quad \backslash \\ NH:C \qquad C:NH \\ | \qquad\quad | \\ N——N \\ | \qquad\quad | \\ CH_3 \qquad C_6H_5 \end{array}$$

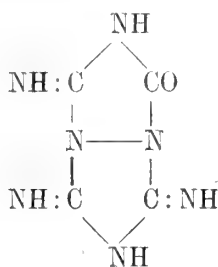
metilfenilidrazina *fenilmetilguanazolo*

```
   NH—NH                                                NH
   |    |                                              /  \
NH:C    C:NH  +  C2N4H4  =  NH3  +              NH:C      C:NH
   \   /                                           |       |
    NH                                             N———————N
 guanazolo                                         |       |
                                                NH:C      C:NH
                                                   \     /
                                                     NH
                                              guanazo-guanazolo
```

$$NH_2\text{-guanazolo} + C_2N_4H_4 = NH_3 + \text{guanazo-guanazolo}$$

Questa reazione si compie facendo bollire a lungo una soluzione concentrata di monocloridrato di guanazolo e diciandiamide e così si separa in pagliette minutissime bianche lucenti che conviene ogni tanto separare per evitare i sussulti. Più semplicemente si può ottenere da un sale di idrazina (1 mol.) e diciandiamide (2 mol.). La reazione si compie in due fasi: nella prima si forma il guanazolo e nella seconda il guanazo-guanazolo, ed è così che si forma come prodotto secondario quando si prepara il guanazolo specialmente, come si è detto, in soluzione acquosa. Per fusione si ha rapidamente e con ottimo rendimento, ma è meno bello di aspetto e costituisce una polvere bianca, indistintamente cristallina. È pochissimo solubile nell'acqua bollente, dalla quale si separa in sottilissime pagliette; non fonde neppure sulla lamina di platino, ma sparisce lentamente senza carbonizzarsi. Ha funzioni basiche e perciò si scioglie negli acidi diluiti e precipita cogli alcali; furono preparati il picrato e il cloroplatinato $(C_4 N_8 H_6, HCl)_2 Pt Cl_4, 2H_2O$. Col nitrato d'argento forma un composto $C_4 N_8 H_6, NO_3 Ag$. Coll'anidride acetica forma un derivato diacetilico e uno triacetilico.

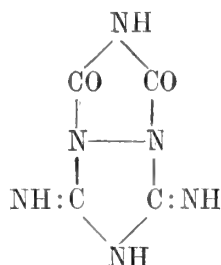
Il guanazo-guanazolo, per l'azione idrolizzante dell'acido cloridrico a caldo, subisce la trasformazione di un gruppo carbimidile in carbonile e passa in

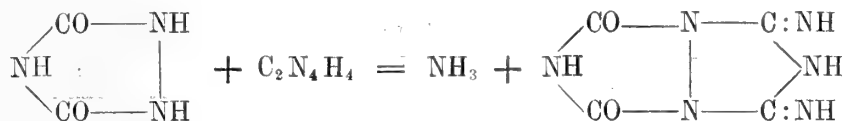
Imidurazo-guanazolo

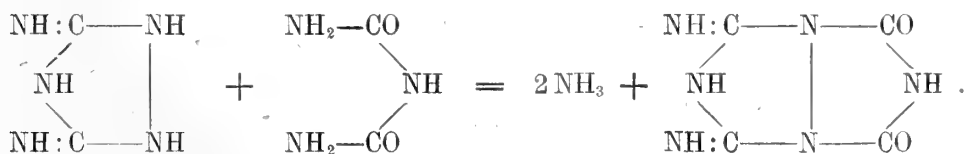
```
        NH
       /  \
   NH:C    CO
      |    |
      N————N
      |    |
   NH:C    C:NH
       \  /
        NH
```

Il passaggio si ottiene sciogliendo il guanazo-guanazolo nell'acqua e acido cloridrico quanto basta e facendo bollire fino a che un saggio colla potassa non dia un precipitato completamente solubile in eccesso di reattivo; allora si tira a secco a b. m. e, riprendendo con acqua il residuo per sciogliere il cloruro ammonico, rimane indisciolto l'imidurazo-guanazolo come polvere bianca che non fonde ed è insolubile nell'acqua, ma si scioglie a caldo negli acidi diluiti. Coll'acido cloridrico concentrato forma un cloridrato

cristallino che però perde l'acido cloridrico all'aria e si dissocia nell'acqua. Le proprietà acide sono più manifeste e si scioglie bene nelle basi anche a freddo, e coll'acido acetico precipita in forma gelatinosa mentre coll'acido cloridrico precipita pure gelatinoso ma poco dopo si trasforma in polvere cristallina; bollito a lungo in soluzione cloridrica, si idrolizza profondamente.

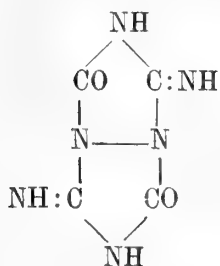
Urazo–guanazolo

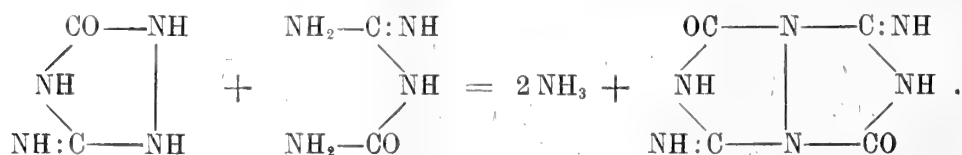
```
          NH
         /  \
       CO    CO
       |      |
       N------N
       |      |
   NH:C        C:NH
        \    /
          NH
```

L'urazolo, che ha una costituzione analoga al guanazolo, reagisce pure colla diciandiamide dando luogo ad un prodotto che rappresenta la riunione di un gruppo urazolico e uno guanazolico:

```
   ,CO----NH                            ,CO----N----C:NH
  /        |                           /       |      \
NH         |  + C2N4H4  =  NH3  +  NH          |       >NH
  \        |                           \       |      /
   `CO----NH                            `CO----N----C:NH
```

A questa stessa sostanza si può arrivare anche costruendo, sul guanazolo già formato, un nucleo urazolico per mezzo del biurete, come appunto si ottenne l'urazolo (7) dall'idrazina e biurete:

```
NH:C----NH      NH2—CO               NH:C----N----CO
   /     |            \                 /     |     \
 NH      |   +         NH  =  2NH3 +  NH      |      NH .
   \     |            /                 \     |     /
NH:C----NH      NH2—CO               NH:C----N----CO
```

Le reazioni avvengono facilmente per fusione delle sostanze rammentate: trattando il prodotto con acqua calda, rimane indisciolto l'urazo–guanazolo che è bene lavare ripetutamente con acido cloridrico diluito per asportare le impurezze: praticamente è consigliabile il primo metodo, perchè è più semplice preparare l'urazolo che il guanazolo. È una polvere bianca insolubile nei comuni solventi, che sulla lamina di platino non fonde ma annerisce e sparisce e, scaldata in un tubetto, dà ammoniaca e un sublimato. In questo composto sono assolutamente scomparse le proprietà basiche mentre sono rafforzate le proprietà acide di fronte all'imidurazo–guanazolo. Dalle soluzioni negli alcali precipita cogli acidi in forma gelatinosa e così rimane. Col nitrato d'argento la soluzione potassica dell'urazo–guanazolo forma un precipitato bianco che è un sale d'argento.

Imidurazo-imidurazolo

```
       NH
      /  \
    CO    C:NH
    |     |
    N-----N
    |     |
NH:C      CO
     \   /
      NH
```

È un composto isomerico all'urazo-guanazolo e, come è stato detto, si forma come prodotto secondario nella preparazione dell'imidurazolo per azione della diciandiamidina sul cloridrato di idrazina. Naturalmente, se si prendono quantità equimolecolari delle due sostanze, il prodotto principale è l'imidurazolo; ma, con due molecole di diciandiamidina per una di sale di idrazina, il prodotto principale è l'imidurazo-imidurazolo. La reazione avviene in due fasi che si possono compiere anche separatamente facendo agire l'imidurazolo sul cloridrato di diciandiamidina:

```
   CO----NH        NH2-C:NH                       OC-----N-----C:NH
  /       |             \                         /      |       \
NH        |    +         NH  =  2 NH3  +        NH       |        NH .
  \       |             /                         \      |       /
NH:C----NH         NH2-CO                       NH:C-----N-----CO
```

La formula di costituzione data non è sicura perchè la reazione potrebbe avvenire in modo che i due carbonili, invece di essere in posizione opposta, fossero dalla stessa parte della formula. La reazione si compie per fusione ed il prodotto si tratta con acqua calda per togliere il cloruro d'ammonio formatosi: così rimane l'imidurazo-imidurazolo come polvere bianca insolubile nell'acqua fredda e pochissimo solubile anche a caldo; si purifica sciogliendola a caldo nell'acqua con un po' di acido acetico e precipita come polvere indistintamente cristallina solubile nella potassa da cui precipita cogli acidi in forma gelatinosa; scaldata su lamina di platino, non fonde ma sparisce lentamente dando dei fumi bianchi.

A completare la serie mancano l'imidurazo-urazolo e l'urazo-urazolo che ho tentato di preparare, il primo dall'urazolo e diciandiamidina e l'altro dall'urazolo e biurete; ma non ebbi resultati favorevoli.

Questi prodotti a due nuclei condensati, ottenuti partendo dal guanazolo, dall'imidurazolo e dall'urazolo, hanno importanza anche teorica, giacchè confermano per le dette sostanze le formule che io ho adottato, piuttosto che quelle tautomeriche respettivamente di diamidotriazolo, di amidossitriazolo e di diossitriazolo, le quali, non possedendo il gruppo —NH-NH—, non potrebbero dare luogo alla formazione di un secondo nucleo pentagonale.

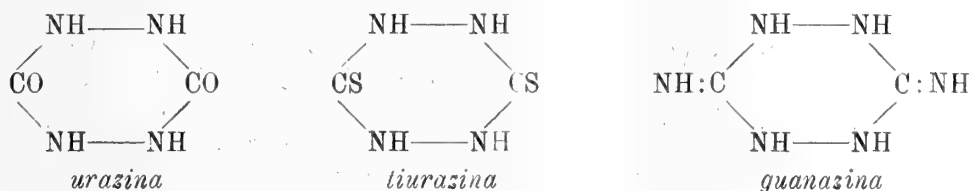
VIII. — Amidoguanazolo (14) (17).

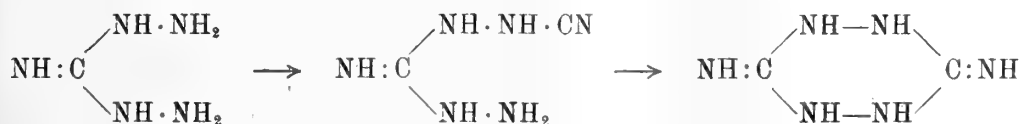
Per azione del bromuro di cianogeno sull'idrazina in soluzione acquosa, come è stato detto nel capitolo III, si forma come prodotto principale il bromidrato di diamidoguanidina e come prodotto secondario il bromidrato di un'altra base che è l'N-amidoguanazolo, dapprima chiamata guanazina. Questa sostanza si forma quasi esclusivamente se si adoprano le due sostanze in quantità equimolecolari, oppure per l'azione susseguente di una molecola del bromuro di cianogeno sul bromidrato di diamidoguanidina. Praticamente convien partire dal bromuro di cianogeno e idrazina in soluzione acquosa ed in quantità equimolecolari:

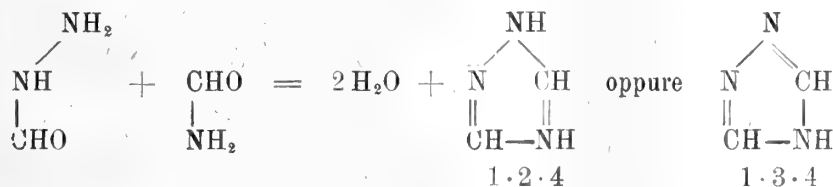
$$2\,N_2H_4 + 2\,CN\cdot Br = C_2H_6N_6\,,\,HBr + HBr\,.$$

Il nome di guanazina e la formula a nucleo esagonale furon dati a questa base nella prima nota (14) per analogia con due altre sostanze già conosciute, l'urazina [1] e la tiurazina [2]:

```
 NH——NH              NH——NH                 NH——NH
/      \            /      \               /      \
CO      CO         CS      CS          NH:C        C:NH
\      /            \      /               \      /
 NH——NH              NH——NH                 NH——NH
```

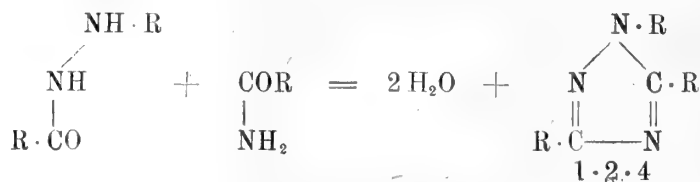
urazina — *tiurazina* — *guanazina*

Il modo di formazione dalla diamidoguanidina, che può essere la sostanza di partenza e che si forma in una prima fase prendendo bromuro di cianogeno e idrazina, fu interpretato immaginando che prima si formi un derivato cianurato della diamidoguanidina e poi si chiuda la catena esagonale:

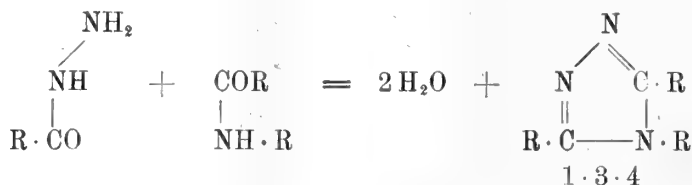
```
     /NH·NH2            /NH·NH·CN            /NH—NH\
NH:C          ——>  NH:C            ——>  NH:C        C:NH
     \NH·NH2            \NH·NH2              \NH—NH/
```

La costituzione della guanazina e delle altre due sostanze analoghe sopra scritte venne poi discussa e modificata coll'appoggio di nuove ricerche, dopo che un'altra sostanza, pure ritenuta a nucleo esagonale, la diidrotetrazina, fu riconosciuta per amidotriazolo. Avevo allora già trovato una semplice ed elegante sintesi del triazolo dalla formamide e formidrazide secondo il seguente schema:

```
 NH2                           NH                    N
/                             /  \                  /  \
NH    +  CHO  =  2H2O  +     N    CH    oppure     N    CH
|        |                   ||   ||               ||   |
CHO      NH2                 CH—NH                 CH—NH
                             1·2·4                 1·3·4
```

Trovai pure che praticamente la reazione può farsi anche colla diformilidrazide (che con un mio metodo si prepara facilmente), ed allora si elimina acqua ed acido formico.

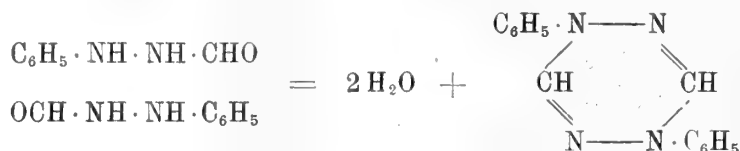
(1) Curtius. J. prakt. chem. [2] 52, 464; Purgotti e Viganò. Gazz. chim. ital. 27, II, 60.
(2) Purgotti. Gazz. chim. ital. 31, II, 550.

Questa reazione fu suscettibile di una estesa generalizzazione (**21**) e, partendo opportunamente da amidi e idrazidi o monoalchilidrazidi di acidi superiori al formico, potei preparare derivati mono-, di- e trisostituiti al carbonio e all'azoto del triazolo 1.2.4:

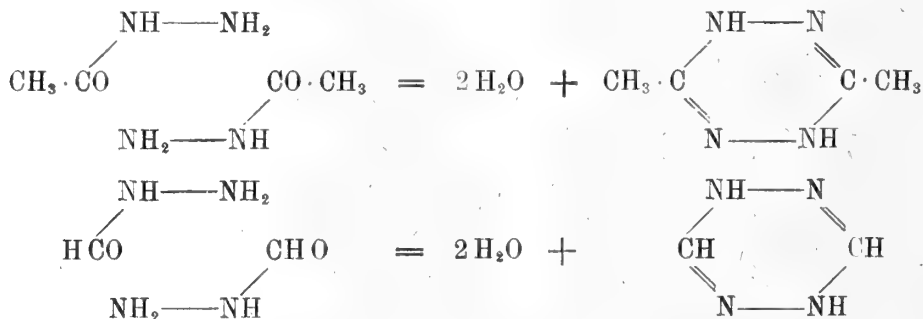
$$
\begin{array}{c} NH\cdot R \\ / \\ NH \\ | \\ R\cdot CO \end{array}
+
\begin{array}{c} COR \\ | \\ NH_2 \end{array}
= 2\,H_2O +
\begin{array}{ccc} & N\cdot R & \\ / & & \backslash \\ N & & C\cdot R \\ \| & & \| \\ R\cdot C & \text{—} & N \\ & 1\cdot 2\cdot 4 & \end{array}
$$

Questa reazione ebbe ancora una più larga applicazione colla sintesi dei derivati del triazolo simmetrico 1. 3. 4 adoprando, invece delle amidi, i derivati acidilici delle amine primarie e le acidilidrazidi:

$$
\begin{array}{c} NH_2 \\ / \\ NH \\ | \\ R\cdot CO \end{array}
+
\begin{array}{c} COR \\ | \\ NH\cdot R \end{array}
= 2\,H_2O +
\begin{array}{ccc} & N & \\ / & & \backslash\backslash \\ N & & C\cdot R \\ \| & & | \\ R\cdot C & \text{—} & N\cdot R \\ & 1\cdot 3\cdot 4 & \end{array}
$$

Queste ricerche portarono anche alla dimostrazione che, mentre esistono due serie di derivati dei triazoli 1. 2. 4 e 1. 3. 5, esiste un solo triazolo, e previdi che sarebbe stato lo stesso per i due possibili isotriazoli 1. 2. 3 e 1. 2. 5, come fu poi dimostrato da altri, e cioè che l'idrogeno iminico assume una sola posizione di equilibrio.

In seguito a queste ricerche, pensai che questa reazione di sintesi dei triazoli con una amide e una idrazide potesse ancora estendersi facendola avvenire fra due molecole di una stessa idrazide. Una prima realizzazione di questo concetto fu la sintesi della N-difeniltetrazolina o difenildiidrotetrazina simm. per riscaldamento della formilfenilidrazina [1]:

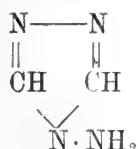
$$
\begin{array}{c} C_6H_5\cdot NH\cdot NH\cdot CHO \\ OCH\cdot NH\cdot NH\cdot C_6H_5 \end{array}
= 2\,H_2O +
\begin{array}{ccc} & C_6H_5\cdot N \text{—} N & \\ / & & \backslash\backslash \\ CH & & CH \\ \backslash\backslash & & / \\ & N \text{—} N\cdot C_6H_5 & \end{array}
$$

La eliminazione di acqua non può avvenire se non nel modo indicato nello schema, e quindi la formazione del nucleo esagonale tetrazinico è sicura. Pensai perciò che così avvenisse anche coll'acetidrazide e colla formidrazide, formandosi rispettivamente la C-dimetiltetrazolina e la tetrazolina o diidrotetrazina (**10**):

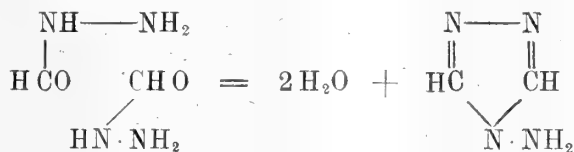
$$
\begin{array}{ccc} & NH \text{—} NH_2 & \\ / & & \\ CH_3\cdot CO & & CO\cdot CH_3 \\ & & / \\ & NH_2 \text{—} NH & \end{array}
= 2\,H_2O +
\begin{array}{ccc} & NH \text{—} N & \\ / & & \backslash\backslash \\ CH_3\cdot C & & C\cdot CH_3 \\ \backslash\backslash & & / \\ & N \text{—} NH & \end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc} & NH \text{—} NH_2 & \\ / & & \\ HCO & & CHO \\ & & / \\ & NH_2 \text{—} NH & \end{array}
= 2\,H_2O +
\begin{array}{ccc} & NH \text{—} N & \\ / & & \backslash\backslash \\ CH & & CH \\ \backslash\backslash & & / \\ & N \text{—} NH & \end{array}
$$

[1] Gazz. chim. ital. 26, II, 430.

Misi in evidenza che anche in queste reazioni si può praticamente e utilmente impiegare l' diacidilidrazidi per le quali indicai dei nuovi e semplici metodi di preparazione. Descrissi in quella nota la cosidetta dimetildiidrotetrazina e il suo derivato acetilico, che ottenni direttamente dalla diacetilidrazide, eliminandosi in questo caso una molecola di acqua e una di acido acetico invece di due molecole di acqua; e per la diidrotetrazolina descrissi il cloridrato, riserbandomi di proseguire le ricerche.

Intanto Hantzsch e Silberrad, in un lavoro sulla polimerizzazione dell'etere diazoacetico ([1]), identificarono la cosidetta diidrotetrazina o tetrazolina con la trimetintriazoimide di Curtius e Lang ([2]); e in quell'occasione i suddetti autori, seguendo il mio metodo di sintesi a loro noto, scaldando cioè la formidrazide, ebbero come me il cloridrato di diidrotetrazolina e da questo, con ossido d'argento, prepararono la base libera ch'io non avevo ancora descritta. Essi descrissero il derivato monoacetilico e trovarono un interessante passaggio al triazolo coll'acido nitroso. Ruhemann e Stapelton ([3]), sempre colla mia sintesi, prepararono la diidrotetrazina e trovarono che essa dà un prodotto di condensazione coll'aldeide benzoica. Bülow ([4]), in considerazione del passaggio al triazolo con l'acido nitroso, per il composto con l'aldeide benzoica, per il fatto che si ottiene un derivato mono- e non diacetilico, e per altre ragioni, assegnò alla cosidetta diidrotetrazina la costituzione di N-amidotriazolo 1.3.4:

```
N——N
||  ||
CH  CH
 \ /
 N·NH2
```

Questa costituzione, prima combattuta, fu poi accettata e convalidata con nuove ricerche da Curtius, Darapsky e Müller ([5]) e poi da Stollé ([6]). Secondo la nuova formula, la mia sintesi dai derivati acidilici dell'idrazina viene ad essere un caso particolare della reazione generale di formazione dei triazoli. Così come la formidrazide e la formanilide dànno l'N-feniltriazolo 1.3.5, dalla formidrazide (2 mol.) si ottiene l'N-amidotriazolo 1.3.5 secondo il seguente schema:

```
  NH——NH2                   N——N
  |                         ||  ||
 HCO    CHO  =  2H2O  +   HC    CH
       /                   \  /
   HN·NH2                  N·NH2
```

Una delle molecole di formidrazide funziona come formamide sostituita dal-NH_2, precisamente come nel caso della formanilide l'idrogeno è sostituito dal fenile: lo stesso dicasi per la cosidetta C-dimetiltetrazolina, la quale, per essere stata trasformata da Silberrad in dimetiltriazolo coll'acido nitroso ([7]) e per avermi dato colla *m*-nitroben-

([1]) Ber. 33, 58.
([2]) J. prakt. chem. [2] 38, 531.
([3]) J. Chem. Soc. 1899, 1131.
([4]) Ber. 39, 2618, 3372, 4106.
([5]) Ber. 40, 815.
([6]) J. prakt. chem. [2] 75, 416.
([7]) J. Chem. Soc. 1900, 1189.

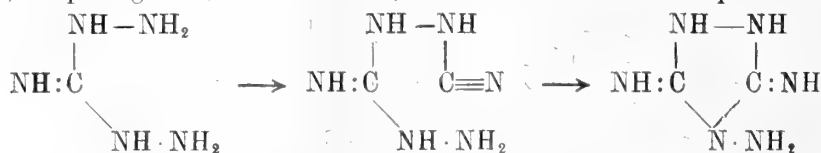
zaldeide un prodotto di condensazione, che gli altri non erano riusciti ad ottenere coll'aldeide benzoica (18), deve essere considerata come N-amido-dimetiltriazolo 1.3.5.

In seguito a questi risultati, fu discussa anche la formula di costituzione dell'urazina e della tiourazina: Busch (1) dimostrò che la difenilurazina e la fenilurazina hanno rispettivamente le seguenti formule di difenilamidurazolo e fenilamidurazolo:

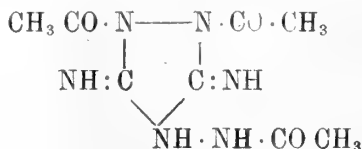
```
C6H5·N——NH              C6H5·N——N
     |    |                   |   |
     CO   CO                  CO  CO
      \  /                     \ /
    N·NH·C6H5                 N·NH2
```

Ciò fu confermato da Stollé (2), il quale dimostrò che i prodotti di condensazione dell'urazina col benzofenone e acetofenone ottenuti da Purgotti e Viganò (3), e che non potrebbero spiegarsi colla formula pentagonale, non sono altro rispettivamente se non i conosciuti bisdifenilazimetilene (4) e bismetilfenilazimetilene (5).

Accettata la nuova costituzione per le cosidette urazina e tiourazina, ne veniva che anche alla mia guanazina spetti la costituzione di N-amidoguanazolo. Ammettendo sempre che in una prima fase, per azione del bromuro di cianogeno sulla diamidoguanidina, si formi un derivato cianurato e che in una seconda fase si chiuda la catena, essa non sarebbe perciò esagonale o tetrazinica come è indicato nello schema scritto al principio di questo capitolo, ma pentagonale, ossia triazolica, come è invece indicato da quest'altro schema:

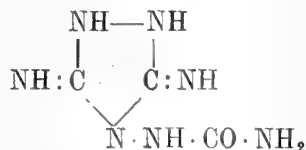
```
   NH—NH2              NH—NH                 NH—NH
   |                   |    |                |    |
NH:C        ——>    NH:C     C≡N   ——>    NH:C     C:NH
   \                   \                     \   /
    NH·NH2              NH·NH2                N·NH2
```

Anche in questo caso essendovi le due possibilità, è sempre il nucleo pentagonale che si forma a preferenza dell'esagonale: anzi, in alcuni casi in cui effettivamente il composto formatosi era a nucleo esagonale, si è trovato che facilmente si metamerizza in composto a nucleo pentagonale: così la diidrotetrazina asimm. al punto di fusione passa in N-amidotriazolo (6) ed il derivato trifenilico passa nel corrispondente derivato dell'amidotriazolo (7). Rimane sempre però colla formula esagonale che gli assegnai la N-difeniltetrazolina o N-difenildiidrotetrazina che ottenni dalla formilfenilidrazide, come ho già accennato prima.

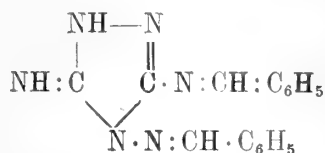
L'amidoguanazolo risponde a questa formula per i seguenti derivati: coll'anidride acetica dà un derivato triacetilico a cui spetta certamente questa formula in cui i tre idrogeni idrazinici sono sostituiti da tre acetili:

```
CH3CO·N——N·CO·CH3
      |   |
  NH:C    C:NH
      \  /
   NH·NH·CO CH3
```

(1) Ber. 34, 2311.
(2) J. prakt. chem. [2] 75, 416.
(3) Gazz. chim. ital. 31, II, 538.
(4) J. prakt, chem. [2] 44, 168.
(5) J. prakt. chem. [2] 44, 198.
(6) Ber. 40, 815.
(7) J. prakt. chem. [2] 75, 94.

Secondo la formula tetrazinica, si sarebbe presumibilmente dovuto avere un derivato tetracetilico, perchè ci sarebbero quattro idrogeni idrazinici nelle stesse condizioni.

Il bromidrato di amidoguanazolo, col cianato potassico, dà il *bromidrato di amidocarboamidoguanazolo*

$$\begin{array}{ccc} & NH\text{—}NH & \\ & | \quad\quad | & \\ NH:C & & C:NH \\ & \searrow \swarrow & \\ & N\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2 & \end{array}$$

Coll'aldeide benzoica dà un derivato dibenzilidenico: rammento che il fenilguanazolo dà un derivato monobenzilidenico e quindi s'intende come l'N-amidoguanazolo, che ha un gruppo -NH_2 invece del fenile, si condensi con due molecole di aldeide invece che con una: sembra logico anche qui di ammettere che il nucleo guanazolico coll'aldeide benzoica agisca secondo la formula semitautomerica di imido-amido-diidrotriazolo e che quindi questo derivato dibenzilidenico corrisponda a questa costituzione [1]:

$$\begin{array}{ccc} & NH\text{—}N & \\ & | \quad\quad \| & \\ NH:C & & C\cdot N:CH:C_6H_5 \\ & \searrow \swarrow & \\ & N\cdot N:CH\cdot C_6H_5 & \end{array}$$

Dal bromidrato di amidoguanazolo, che è un sale cristallino che fonde a 267° con decomposizione e che è il prodotto ricavato direttamente dalla reazione, potei ricavare la base libera coll'idrato di piombo frescamente preparato e non coll'ossido d'argento perchè viene ridotto con forte svolgimento di gas (17). L'amidoguanazolo fonde a 257° con decomposizione; è molto solubile nell'acqua, poco nell'alcool ed insolubile nell'etere, nel benzolo e nella ligroina. Ha reazione alcalina al tornasole; riduce il reattivo di Fehling, il nitrato d'argento e il cloruro mercurico. Col cloruro di ferro dà una intensa colorazione rossa. È una delle sostanze organiche più ricche di azoto (73,7 %). Oltre al bromidrato, furono preparati e analizzati questi altri sali: picrato, nitrato, acetato e solfato.

IX. — Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina.

α- e β-cianfenilidrazidi e loro derivati.

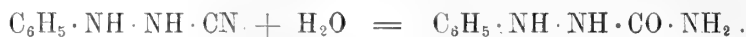
La fenilidrazina in soluzione eterea cogli alogenuri di cianogeno (4) dà un derivato di sostituzione in β, sostanza che chiamai dapprima anilcianamide e che meglio si può chiamare β-cianfenilidrazide per distinguerla dall'isomero che trovai più tardi:

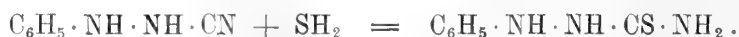
$$2\,C_6H_5\cdot NH\cdot NH_2 + CN\cdot Cl = C_6H_5\cdot NH\cdot NH\cdot CN + C_6H_5\cdot NH\cdot NH_2\,,\ HCl\,.$$

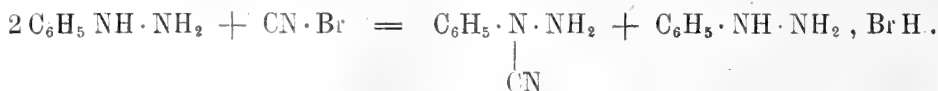
La reazione, che è bene fare raffreddando e in soluzione diluita, è immediata e il prodotto rimane sciolto nell'etere, mentre precipita il sale di fenilidrazina. Per evapora-

[1] Per composti analoghi urazolici, Busch (Ber. 34, 2314) ammette la forma semitautomera cheto-enolica.

zione rimane un olio che, rapidamente a caldo e lentamente a freddo, si polimerizza per dare il difenilamidoguanazolo di cui sarà detto nel capitolo seguente. Questa β-cianfenilidrazide può dare dei sali: aggiungendo una soluzione eterea di acido picrico alla soluzione eterea della base, si ha un picrato in aghi gialli, fus. a 198°; e facendovi passare una lenta corrente di acido cloridrico secco, precipita una polvere bianca che corrisponde a un bicloridrato, analogamente a quanto avviene per la cianamide; il cloridrato, che perde lentamente acido cloridrico nel vuoto sulla calce, è solubilissimo nell'acqua, ma dopo si trasforma nella fenilsemicarbazide, già ottenuta da E. Fischer dal cloridrato di fenilidrazina e cianato potassico [1]. Il passaggio alla stessa sostanza colla cianfenilidrazide è dovuto all'idratazione del cianogeno per mezzo dell'acido cloridrico che si libera:

$$C_6H_5 \cdot NH \cdot NH \cdot CN + H_2O = C_6H_5 \cdot NH \cdot NH \cdot CO \cdot NH_2 .$$

Lo stesso cloridrato, sciolto in poco alcool e coll'aggiunta di solfidrato ammonico, dà la nota fenilsemitiocarbazide [1]:

$$C_6H_5 \cdot NH \cdot NH \cdot CN + SH_2 = C_6H_5 \cdot NH \cdot NH \cdot CS \cdot NH_2 .$$

La fenilidrazina in soluzione acquosa col cloruro o col bromuro di cianogeno, che è più comodo ad aversi e ad adoperarsi, agisce in modo differente che non in soluzione eterea e dà l'α-cianfenilidrazide (**16**)

$$2\,C_6H_5\,NH \cdot NH_2 + CN \cdot Br = \underset{\displaystyle CN}{C_6H_5 \cdot \overset{}{N}} \cdot NH_2 + C_6H_5 \cdot NH \cdot NH_2\,,\, BrH .$$

Anche questa reazione avviene subito e a temperatura ordinaria ed il prodotto si separa in belle lamine bianche, che, greggie, arrossano all'aria; ma, purificato dall'acqua o dall'alcool con carbone, si ha in lamelle bianche splendenti fus. 89°. È poco solubile nell'acqua e assai nell'alcool, nel benzolo e nell'etere. Non ha proprietà basiche spiccate e soltanto con acido cloridrico concentrato dà un cloridrato che si dissocia nell'acqua; riduce a caldo il nitrato d'argento ammoniacale in presenza di potassa e il reattivo di Fehling. Nelle acque madri, da cui fu separata l'α-cianfenilidrazide, oltre al bromidrato di fenilidrazina si trovarono come prodotti secondarii il bromidrato di difenildiamidoguanidina (vedi cap. III), la conosciuta fenilsemicarbazide e il bromidrato di difenilamidoguanazolo (vedi cap. X). Tutt'e tre derivano dalla β-cianfenilidrazide; ciò dimostra che essa, sebbene in piccola quantità, si forma anche in soluzione acquosa insieme coll'isomero α che è il prodotto principale.

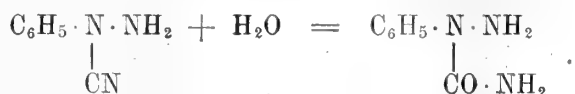
L'α-cianfenilidrazide è una idrazina secondaria asimmetrica, e perciò reagisce colle aldeidi e cogli acetoni:

$$\underset{\displaystyle CN}{C_6H_5 \cdot N} \cdot NH_2 + OCH \cdot R = H_2O + \underset{\displaystyle CN}{C_6H_5 \cdot N} \cdot N{:}CH \cdot R$$

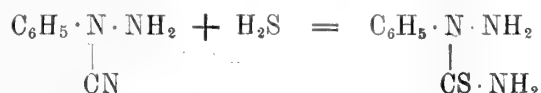
Io descrissi il composto benzilidenico, e Rolla [2] i prodotti di condensazione con diverse aldeidi e chetoni.

[1] Ber. 21, 1220; Ann. 212, 324.
[2] Gazz. chim. ital. 37, I, 71.

L'α-cianfenilidrazide è molto resistente ai liquidi acidi, e soltanto per prolungata ebullizione finisce per dare fenilidrazina, ammoniaca e anidride carbonica. Invece, colla potassa al 10 % a caldo si ha l'idratazione del gruppo cianogeno e la trasformazione in un isomero della conosciuta fenilsemicarbazide e che chiamai α-fenilsemicarbazide per distinguerla dall'altra a cui spetta l'antefisso β:

$$\begin{array}{l} C_6H_5\cdot N\cdot NH_2 \\ \qquad | \\ \quad\; CN \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} C_6H_5\cdot N\cdot NH_2 \\ \qquad | \\ \quad\; CO\cdot NH_2 \end{array}$$

Questa stessa sostanza era stata ottenuta da Busch e Walter [1] per altra via.

L'α-cianfenilidrazide, trattata a caldo col solfidrato ammonico, prende una molecola di idrogeno solforato per passare nella *α-fenilisemitiocarbazide*, isomera all'altra già rammentata e descritta la prima volta da E. Fischer e a cui spetta l'antefisso β:

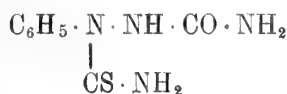
$$\begin{array}{l} C_6H_5\cdot N\cdot NH_2 \\ \qquad | \\ \quad\; CN \end{array} + H_2S = \begin{array}{l} C_6H_5\cdot N\cdot NH_2 \\ \qquad | \\ \quad\; CS\cdot NH_2 \end{array}$$

Anche queste due sostanze, come l'α-cianfenilidrazide da cui derivano, reagiscono facilmente per esempio coll'aldeide benzoica per dare i rispettivi composti di condensazione. Per la preparazione e le proprietà di queste sostanze rimando alla nota (12).

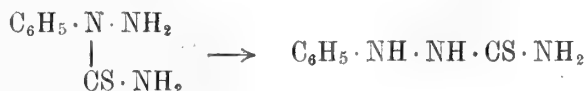
L'α-fenilsemicarbazide, salificata e trattata con cianato potassico e con solfocianato ammonico, dette rispettivamente (18):

$$\begin{array}{l} C_6H_5\cdot N\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2 \\ \qquad | \\ \quad\; CO\cdot NH_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} C_6H_5\cdot N\cdot NH\cdot CS\cdot NH_2 \\ \qquad | \\ \quad\; CO\cdot NH_2 \end{array}$$

fenilidrazodicarbonamide — *fenilidrazo-β-tiodicarbonamide*

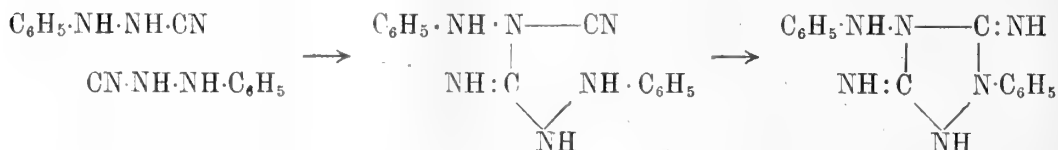
L'α-fenilsemitiocarbazide, salificata e trattata col cianato potassico, dette la fenilidrazo-α-tiodicarbonamide, sostanza isomerica a quella sopra scritta:

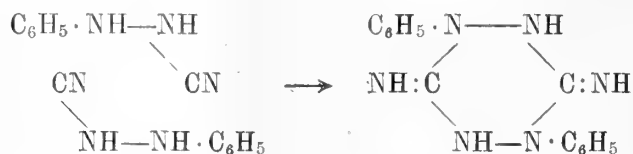
$$\begin{array}{l} C_6H_5\cdot N\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2 \\ \qquad | \\ \quad\; CS\cdot NH_2 \end{array}$$

E come l'idrazodicarbonamide scaldata perde ammoniaca per dare l'urazolo (7) similmente si comportano queste idrazodicarbonamidi sostituite per dare dei derivati solforati dell'urazolo. Si trovò anche che l'α-fenilsemitiocarbazide, bollita in soluzione alcoolica, si isomerizza nella β e se ne dette la spiegazione dimostrando che il composto α a caldo tende a dare del solfocianato di fenilidrazina e questo passa nella β-fenilsemitiocarbazide:

$$\begin{array}{l} C_6H_5\cdot N\cdot NH_2 \\ \qquad | \\ \quad\; CS\cdot NH_2 \end{array} \longrightarrow C_6H_5\cdot NH\cdot NH\cdot CS\cdot NH_2$$

[1] Ber. 36, 1359.

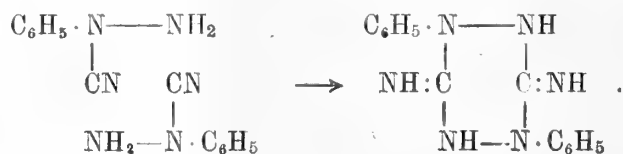
X. — Difenilamidoguanazolo e difenilguanazina.

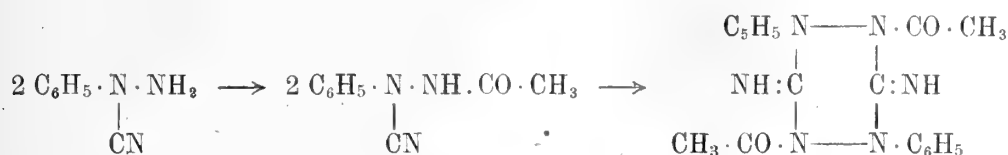
La β-cianfenilidrazide, che, come è stato detto, si ottiene dalla fenilidrazina e l'alogenuro di cianogeno in soluzione eterea, si polimerizza facilmente e al dimero che si forma fu assegnata dapprima una formula a catena aperta simile a quella della diciandiamide; ma poi, ripreso lo studio della sostanza e constatata la sua grande resistenza agli acidi e alle basi, si vide che non poteva corrispondere a quella formula ma piuttosto a una formula a nucleo chiuso pentagonale a cui spetta il nome di *difenilamidoguanazolo* (20). Il supposto composto a catena aperta forse si forma in una prima fase, ma poi l'anello si chiude nel senso indicato dal seguente schema, precisamente come dalla supposta ciandiamidoguanidina si forma l'amidoguanazolo:

$$
\begin{array}{l} C_6H_5{\cdot}NH{\cdot}NH{\cdot}CN \\ \quad CN{\cdot}NH{\cdot}NH{\cdot}C_6H_5 \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ccc} C_6H_5{\cdot}NH{\cdot}N & \text{——} & CN \\ | & & \\ NH:C & & NH{\cdot}C_6H_5 \\ & \diagdown\ \diagup & \\ & NH & \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ccc} C_6H_5{\cdot}NH{\cdot}N & \text{——} & C:NH \\ | & & | \\ NH:C & & N{\cdot}C_6H_5 \\ & \diagdown\ \diagup & \\ & NH & \end{array}
$$

È da osservare che la polimerizzazione potrebbe avvenire anche in modo da formare un nucleo esagonale guanazinico:

$$
\begin{array}{ccc} C_6H_5{\cdot}NH & \text{—} & NH \\ & & \diagdown \\ CN & & CN \\ \diagdown & & \\ NH & \text{—} & NH{\cdot}C_6H_5 \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ccc} & C_6H_5{\cdot}N\text{——}NH & \\ \diagup & & \diagdown \\ NH:C & & C:NH \\ \diagdown & & \diagup \\ & NH\text{—}N{\cdot}C_6H_5 & \end{array}
$$

Fu adottata la formula pentagonale perchè l'esperienza ha dimostrato che, quando sia possibile la formazione di un nucleo esagonale come la formazione di un nucleo pentagonale, è sempre quest'ultimo che si genera: inoltre il difenilamidoguanazolo è l'analogo del difenilamidurazolo a cui prima erroneamente era stata data la formula esagonale di difenilurazina come è stato accennato nel capitolo VIII. Il difenilamidoguanazolo cristallizza dall'alcool in grossi cristalli triclini trasparenti, fus. a 180°, che contengono una molecola di alcool di cristallizzazione e col tempo sfioriscono e si colorano in rosa. Furono preparati il cloridrato, il bromidrato e il picrato.

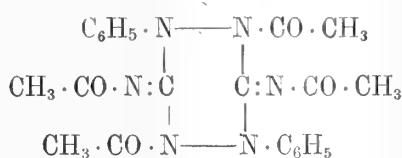
Per quanto avessi sottoposta l'α-cianfenilidrazide a svariate reazioni, non ne avevo mai osservato la polimerizzazione. Soltanto in questi ultimi tempi, per azione dell'anidride acetica, mi ha dato un dimero che certamente ha la costituzione della *difenilguanazina*, perchè la sua formazione non può avvenire se non nel seguente modo (30):

$$
\begin{array}{lcl} C_6H_5{\cdot}N & \text{——} & NH_2 \\ | & & \\ CN & & CN \\ & & | \\ NH_2 & \text{—} & N{\cdot}C_6H_5 \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{lcl} C_6H_5{\cdot}N & \text{——} & NH \\ | & & | \\ NH:C & & C:NH \\ | & & | \\ NH & \text{—} & N{\cdot}C_6H_5 \end{array}
$$

Il prodotto che si ricava dalla reazione è il derivato diacetilico e io ritengo che prima si formi il derivato acetilico della α-cianfenilidrazide e sia questo che si polimerizza: ciò lo deduco dal fatto che l'α-cianfenilidrazide, sciolta in un solvente simile all'anidride acetica, ma non acetilante e cioè nell'acido acetico glaciale, rimane inalterata, mentre coll'anidride acetica si ha subito una reazione vivace che corrisponderebbe all'acetilazione della cianfenilidrazide; ma il prodotto finale non si depone se non lentamente anche per l'aggiunta di alcool in cui è pochissimo solubile; inoltre si ha soltanto la formazione della diacetildifenilguanazina, senza aver mai o la base o il derivato monoacetilico anche moderando la reazione. La polimerizzazione avverrebbe dunque secondariamente alla formazione della acetil-α-cianfenilidrazide.

$$2\,C_6H_5\cdot\underset{\displaystyle CN}{\underset{|}{N}}\cdot NH_2 \longrightarrow 2\,C_6H_5\cdot\underset{\displaystyle CN}{\underset{|}{N}}\cdot NH.CO\cdot CH_3 \longrightarrow \begin{array}{ccc} C_5H_5\,N & \text{——} & N\cdot CO\cdot CH_3 \\ | & & | \\ NH:C & & C:NH \\ | & & | \\ CH_3\cdot CO\cdot N & \text{——} & N\cdot C_6H_5 \end{array}$$

Questo derivato diacetilico ha funzioni acide, cioè si scioglie facilmente nell'idrato sodico: bollendo la soluzione, si saponifica un gruppo acetilico e si ottiene la *monoacetildifenilguanazina* che più non ha carattere di acido e precipita in seno alla soluzione alcalina, a mano a mano che si forma; ha invece carattere basico, si scioglie nell'acido cloridrico e bollendo avviene la saponificazione dell'altro acetile e si depone il *cloridrato della difenilguanazina* che è poco solubile nell'acqua cloridrica e dal quale coll'ammoniaca si ricava la base libera. Ad essa può spettare tanto la formula di difenilguanazina che le ho assegnato, quanto quella tautomerica di difenildiamidodiidrotetrazina:

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5\cdot N & \text{——} & NH \\ | & & | \\ NH:C & & C:NH \\ | & & | \\ NH & \text{——} & N\cdot C_6H_5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} C_6H_5\cdot N & \text{——} & N \\ | & & \| \\ NH_2\cdot C & & C\cdot NH_2 \\ \| & & | \\ N & \text{——} & N\cdot C_6H_5 \end{array}$$

Al derivato diacetilico (che, come credo, si forma direttamente per polimerizzazione di due molecole di acetil-α-cianfenilidrazide) spetta certamente la formula sopra scritta, cioè coi due acetili legati a due atomi di azoto idrazinico. Per ebullizione coll'anidride acetica del derivato diacetilico, come della base stessa, si forma la *tetracetildifenilguanazina* alla quale pure spetta la formula seguente a tipo guanazinico:

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5\cdot N & \text{——} & N\cdot CO\cdot CH_3 \\ | & & | \\ CH_3\cdot CO\cdot N:C & & C:N\cdot CO\cdot CH_3 \\ | & & | \\ CH_3\cdot CO\cdot N & \text{——} & N\cdot C_6H_5 \end{array}$$

Ricordo che anche il fenilguanazolo dà un derivato tetracetilico e che la possibilità di sostituire coll'acetile l'idrogeno iminico della guanidina è dimostrata anche dalla formazione della diacetilanidroguanidina: colla costituzione di difenilamidodiidrotetrazina non si sarebbe potuto avere se non un derivato diacetilico come prodotto

di massima attivazione. Però dalle mie ricerche risulta che può reagire anche secondo questa forma tautomerica inquantochè colla aldeide benzoica si ha un prodotto di condensazione con una e con due molecole di aldeide, ai quali composti non possono spettare se non le due seguenti formule:

$$\begin{array}{lll} C_6H_5\cdot N & \text{---} & N \\ \quad\;\;| & & \| \\ NH_2\cdot C & & C\cdot N:CH\cdot C_6H_5 \\ \quad\;\;\| & & | \\ \quad\;\;N & \text{---} & N\cdot C_6H_5 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} C_6H_5\cdot N & \text{---} & N \\ \quad\;\;| & & \| \\ C_6H_5\cdot CH:N\cdot C & & C\cdot N:CH\cdot C_6H_5 \\ \quad\;\;\| & & | \\ \quad\;\;N & \text{---} & N\cdot C_6H_5 \end{array}$$

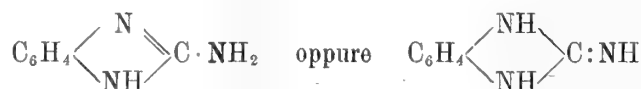
Ecco i punti di fusione delle sostanze ottenute:

difenilguanazina	fus. 198°
monoacetildifenilguanazina	» 228°
diacetildifenilguanazina	» 189°
benzilidendifenilguanazina (¹)	» 183°
dibenzilidendifenilguanazina (¹)	» 150°

Per la loro preparazione e proprietà rimando alla nota (**30**).

XI. — Passaggio dalla fenilidrazina a derivati della *o*-fenilendiamina (24).

La α-cianfenilidrazina, che si presta a numerose reazioni, fu sottoposta anche alla azione del bromuro di cianogeno allo scopo di introdurre nella fenilidrazina un secondo gruppo cianogeno in sostituzione di un idrogeno aminico in β; ma a tale composto non si potè arrivare ed invece si ottiene un prodotto che per la sua composizione corrisponde alla fenilidrazina tricianurata $C_8H_5N_5$, senza averne peraltro le proprietà. Coll'idrolisi mostra di avere due soli gruppi –CN legati all'azoto, che si eliminano facilmente e rimane una sostanza $C_7H_7N_3$, isomera alle α– e β–cianfenilidrazidi e che è l'*o-fenilenguanidina*:

$$C_6H_4\langle\begin{smallmatrix} N \\ NH \end{smallmatrix}\rangle C\cdot NH_2 \quad \text{oppure} \quad C_6H_4\langle\begin{smallmatrix} NH \\ NH \end{smallmatrix}\rangle C:NH$$

Ne consegue che il composto ottenuto dal bromuro di cianogeno e l'α-cianfenilidrazide è un derivato dicianurato della *o*-fenilenguanidina.

Questo passaggio dalla fenilidrazina a derivati della *o*-fenilendiamina rappresenta un fatto nuovo, di notevole importanza, anche perchè avviene a temperatura ordinaria ed in soluzione. È da ricordare qui che Thiele e Wheeler [2], scaldando a 200° il cloridrato di fenilidrazina con acido cloridrico fumante, ottennero la *p*-fenilendiamina, ma neppure una traccia di *o*-fenilendiamina.

(¹) Per questi due derivati, sono più appropriati i nomi rispettivamente di benziliden e dibenzilidendiamidodiidrotetrazina.

(²) Ber. 28, 1538.

Nel caso nostro la trasposizione molecolare

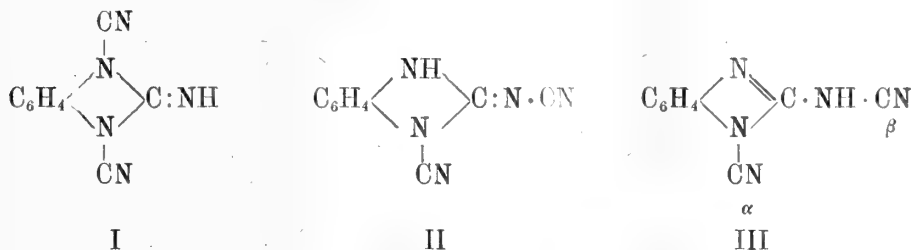
$$C_6H_5\text{—}NH\cdot NH_2 \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}\text{—}NH_2\\ \text{—}NH_2\end{cases}$$

non avviene direttamente, ma attraverso i prodotti di cianurazione: la prima fase è la formazione della α-cianfenilidrazide, ma i tentativi fatti per passare da essa alla o-fenilenguanidina

$$C_6H_5\text{—}N(CN)\cdot NH_2 \longrightarrow C_6H_4\begin{matrix}\text{—}NH\\ \text{—}NH\end{matrix}\!\!>C:NH$$

non riuscirono : occorre una ulteriore azione del bromuro di cianogeno ed in tal modo si perviene ad un derivato della o-fenilenguanidina, cioè ad una o-fenilendicianguanidina.

Per questa, tre formule possono discutersi:

$$\underset{\text{I}}{C_6H_4\begin{matrix}N(CN)\\ N(CN)\end{matrix}\!\!>C:NH} \qquad \underset{\text{II}}{C_6H_4\begin{matrix}NH\\ N(CN)\end{matrix}\!\!>C:N\cdot CN} \qquad \underset{\text{III}}{C_6H_4\begin{matrix}N\\ N(\underset{\alpha}{CN})\end{matrix}\!\!\geqslant C\cdot NH\cdot \underset{\beta}{CN}}$$

La I e la II rappresentano derivati della fenilenguanidina considerata a costituzione simmetrica; la III, derivati della fenilenguanidina considerata a costituzione asimmetrica. Può essere che la o-fenilenguanidina risponda alle due formule tautomere; ma le nostre osservazioni ci portano ad assegnarle piuttosto la formula asimmetrica. per le seguenti ragioni:

1) la o-fenilenguanidina mostra caratteri marcatamente basici, sia al tornasole, sia per la formazione di un carbonato stabile: e ciò meglio si spiega con una formula che ha un gruppo NH_2;

2) forma soltanto un derivato monobenzoilico e monoacetilico;

3) dà un prodotto di condensazione coll'aldeide m-nitrobenzoica [1].

Inoltre, al derivato dicianurato ottenuto spetta certamente una costituzione derivante dalla forma asimmetrica della fenilenguanidina: le tre formule sopra scritte dànno egualmente ragione del carattere acido che ha la fenilendicianguanidina; ma la formula I. che è simmetrica anche rispetto ai due cianogeni, è da scartarsi per il differente comportamento di uno di questi radicali rispetto all'altro; ora, delle due formule II e III. quella che ha i due gruppi cianogeni in condizioni veramente differenti è la III, perchè uno sostituisce un idrogeno iminico e l'altro aminico ed è presumibile che quello che si stacca molto facilmente anche a freddo per idrolisi colla potassa sia il cianogeno segnato in posizione α perchè appunto sostituisce un idrogeno meno basico dell'altro in β.

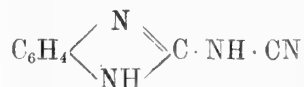
[1] Ho scelto come reattivo in questo caso e in altri simili l'aldeide m-nitrobenzoica piuttosto che la benzoica, perchè il prodotto è meno solubile e si presta meglio per separarsi e purificarsi.

La *o*-fenilen.-α-β-diciangunanidina si ottiene sciogliendo l'α-cianfenilidrazide (1 mol.) nell'alcool insieme col bromuro di cianogeno (2 mol.): dopo un giorno a temperatura ordinaria, comincia a separarsi il prodotto in minuti cristalli e la reazione continua lentamente. Dopo una settimana, la massima parte del prodotto si è formato e si può togliere dal liquido che seguita poi a darne un poco per altre due o tre settimane: il rendimento è circa del 45 % della sostanza di partenza. A caldo la reazione è più sollecita, ma con rendimento più scarso, e all'ebullizione il rendimento fu nullo. Un rendimento circa del 90 % si ha sospendendo la α-cianfenilidrazide bén polverizzata nell'acqua, in cui è poco solubile, insieme col bromuro di cianogeno ed aggiungendo dei pezzetti di marmo per saturare l'acido bromidrico prodotto dalla reazione. L'*o*-fenilendiciangua-nidina, quando è greggia, costituisce una polvere cristallina un po' rossastra. Si purifica sciogliendola a freddo nell'acqua e ammoniaca, quindi filtrando *rapidamente* per togliere le impurezze insolubili e precipitando *subito* coll'acido cloridrico. Non fonde neppure a 300° ma imbrunisce; è pochissimo solubile nell'acqua, nell'alcool e nell'acetone da cui si può avere in polvere cristallina; meglio si può cristallizzare dall'acqua contenente circa 10 % di acetato sodico in cui si scioglie discretamente a caldo e precipita quasi totalmente a freddo; ha reazione acida al tornasole, e colla quantità calcolata di carbonato sodico si ottiene un sale che si depone allo stato cristallino.

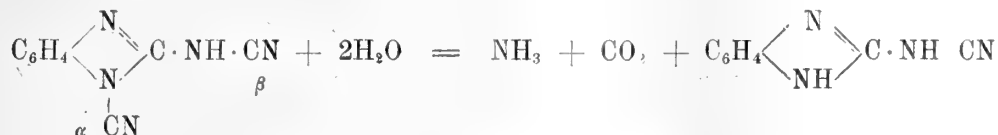
Si può ottenere anche direttamente dalla fenilidrazina, operando in soluzione acquosa, con un eccesso di bromuro di cianogeno, ed è certo che prima si forma l'α-cianfenilidrazina; ma anche praticamente è meglio, fare la reazione in due tempi per eliminare i prodotti secondarii della prima fase. In soluzione eterea, come ho già detto, si forma la β-cianfenilidrazide che non si presta ad una ulteriore cianurazione. Per l'α-cianfenilidrazide l'ulteriore azione del bromuro di cianogeno avviene in soluzione alcoolica, nell'acqua e nell'alcool metilico, ma non avviene affatto nell'etere, nel benzolo e nel cloroformio. È da escludersi che l'α-cianfenilidrazide si isomerizzi in quelle condizioni nella *o*-fenilenguanidina, in primo luogo perchè ogni tentativo in proposito è stato negativo, poi perchè, essendo lenta la reazione, si sarebbe potuto trovare un derivato monocianurato prima di arrivare al composto dicianurato, e in ogni modo perchè non si riesce ad arrivare a questo dalla fenilenguanidina e bromuro di cianogeno. Trattando l'α-cianfenilidrazide coll'anidride acetica o col cloruro di benzoile, non si arriva a prodotti derivanti dalla fenilenguanidina ma ad altre sostanze. Col bromuro di cianogeno la reazione probabilmente non avviene per gradi, ma avviene la sostituzione di due atomi di idrogeno con due cianogeni nello stesso tempo che avviene la trasposizione atomica.

La *o*-fenilen-α-β-diciangunanidina, per una graduale demolizione cogli agenti idrolizzanti, dette i seguenti prodotti:

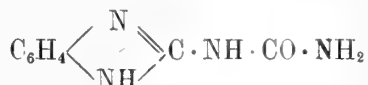
o-fenilen-β-cianguanidina

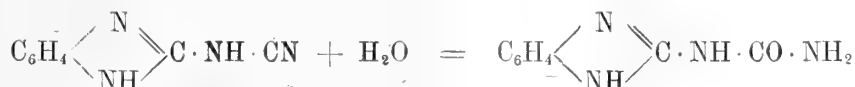
$$C_6H_4\left\langle\begin{array}{c}N\\NH\end{array}\right\rangle C\cdot NH\cdot CN$$

La fenilendiciananguanidina si scioglie facilmente a freddo nella potassa, ma, se non si riprecipita immediatamente con un acido, perde un po' lentamente a freddo e rapi-

damente a caldo un radicale cianogeno, con sviluppo di ammoniaca e di anidride carbonica che rimane fissata dalla potassa:

$$C_6H_4\langle{N \atop N(\alpha\,CN)}\rangle C\cdot NH\cdot CN\,(\beta) + 2H_2O = NH_3 + CO_2 + C_6H_4\langle{N \atop NH}\rangle C\cdot NH\ CN$$

Anche questa fenilen-β-cianguanidina ha carattere di acido, però meno accentuato del composto dicianurato: rimane infatti disciolta nel liquido alcalino in cui si è formata e precipita cogli acidi come polvere cristallina bianca. Cristallizzata dall'acqua bollente, in cui è poco solubile, si ottiene in caratteristici aghi lunghi sottili elastici splendenti, simili a quelli dell'anidride ftalica, ma più sottili e più lunghi: non ha punto di fusione; verso 240° ingiallisce e a 250-260° rammollisce e si decompone. Non arrossa il tornasole e si scioglie bene negli idrati alcalini, non alterandosi neppure per prolungata ebullizione ma soltanto in tubo chiuso a 140°. È poco solubile nell'ammoniaca e nei carbonati alcalini; forma un sale argentico $C_8H_5N_4Ag$. Da questa fenilencianguanidina non si risale al composto dicianurato col bromuro di cianogeno, se non trasformandola prima in sale alcalino come sarà detto dopo. Neppure si può ottenere per cianurazione diretta della fenilenguanidina, formandosi in tali condizioni l'isomerica fenilen-α-cianguanidina di cui pure si dirà dopo.

o–fenilen-β–guanilurea

$$C_6H_4\langle{N \atop NH}\rangle C\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2$$

La fenilen-β-cianguanidina, che si mostra molto resistente all'azione degli alcali, si idrolizza invece facilmente anche a freddo coll'acido cloridrico concentrato per dare il cloridrato della fenilen–β–guanilurea:

$$C_6H_4\langle{N \atop NH}\rangle C\cdot NH\cdot CN + H_2O = C_6H_4\langle{N \atop NH}\rangle C\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2$$

Meglio è di trattare a caldo la sostanza coll'acido cloridrico diluito con due volumi di acqua e di far bollire per cinque minuti: non si scioglie ma si vede modificarsi in un precipitato pesante e da questo cloridrato si libera la fenilenguanilurea per mezzo dell'ammoniaca. Dall'alcool si ottiene in aghetti lucenti i quali non fondono ma verso 180-200° perdono una molecola di ammoniaca per due di fenilguanilurea per dare il *difenildiguanilbiureto*

$$C_6H_4\langle{N \atop NH}\rangle C\cdot NH\cdot CO\cdot NH\cdot CO\cdot NH\cdot C\langle{N \atop NH}\rangle C_6H_4$$

Ottenni poi questa stessa fenilen–β–guanilurea per azione dell'idrato di sodio sul cloruro di fenilenammelile e sull'acido fenilenmelanurico (28) e poi anche per azione della potassa o della soda sulla fenilenbiguanide (**26**). Di queste reazioni parlerò nel sèguito di

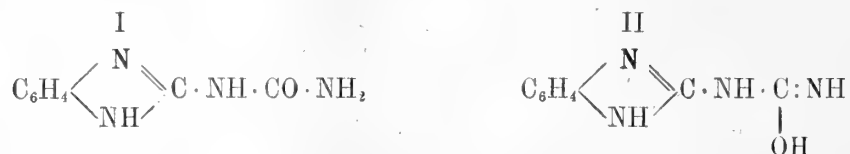
questa memoria, quando tratterò delle rammentate sostanze; intanto però, a proposito della fenilen-β-guanilurea, aggiungerò alcune interessanti osservazioni fatte in quella occasione. Questa sostanza, ottenuta per mezzo dell'acido cloridrico dalla fenilen-β-cianguanidina, cristallizzata dall'alcool si ottiene in aghetti splendenti; cristallizzata dall'acqua, in cui è meno solubile, si ottiene in pagliette lucenti che non contengono acqua di cristallizzazione. Lo stesso composto, ottenuto per l'azione idrolizzante della soda sul cloruro di fenilenammelile o sull'acido fenilenmelanurico o sulla fenilenbiguanide e precipitato dal liquido alcalino, in cui si è formato, coll'acido carbonico o coll'acido acetico e cristallizzato dall'acqua, è in aghi lunghi, lucenti, pure anidri, ma che, lasciati nell'acqua, si fanno opachi e contengono allora due molecole di acqua di cristallizzazione. Invece le lamelle lucenti della fenilenguanilurea ottenuta nell'altro modo, e cioè in ambiente acido di acido cloridrico, rimangono lucenti e anidre, lasciate nell'acqua anche per molto tempo.

Per gli altri caratteri i due prodotti si comportano nello stesso modo, e cioè non fondono ma verso 200° perdono ammoniaca per dare il rammentato biurete sostituito; dànno un cloridrato che si decompone nello stesso modo verso 255-260° come dànno un cloroplatinato e un picrato dello stesso aspetto (**24**). Questa osservazione mi portò a fare alcune esperienze (**28**), dalle quali risultò che la fenilenguanilurea ottenuta coll'acido cloridrico e in lamelle anidre, quando venga sciolta in soda o potassa e lasciata la soluzione a sè per qualche tempo, quindi riottenuta precipitandola coll'acido carbonico e cristallizzata dall'acqua, più non si ottiene in lamelle, ma in aghi lunghi che, lasciati nell'acqua madre o anche nell'acqua pura, si opacano prendendo due molecole di acqua di cristallizzazione. Viceversa, la fenilenguanilurea ottenuta in ambiente alcalino e in aghi lunghi e anidri o anche dopo l'idratazione, sciolta nell'acido cloridrico e tenuta così sotto forma di cloridrato in ambiente acido per qualche tempo e scaldando un poco, poi liberata con carbonato sodico e cristallizzata dall'acqua, più non dà gli aghi idratabili ma le pagliette che rimangono anidre. Questo passaggio dall'una all'altra forma con mezzi chimici mi ha fatto concludere che la sostanza può esistere in due forme desmotropiche:

I

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\NH\end{matrix}\right\rangle C\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2$$

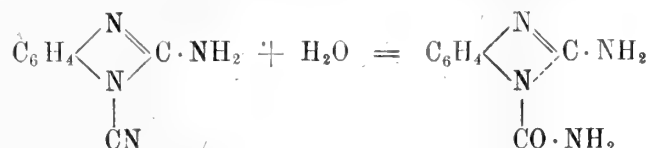
II

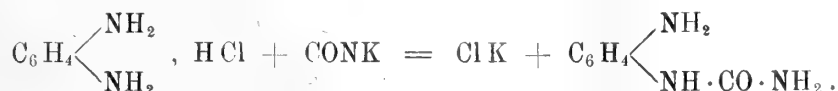
$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\NH\end{matrix}\right\rangle C\cdot NH\cdot \underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{C}}:NH$$

Con molta probabilità la forma in lamelle, ottenuta in ambiente acido, corrisponderà alla formula I; quella in aghi idratabili, ottenuta in ambiente alcalino, corrisponderà alla formula II.

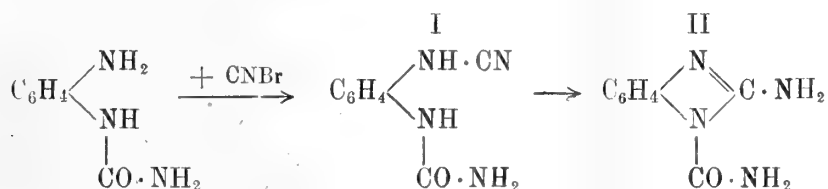
o-fenilen-α-guanilurea (**24** *bis*).

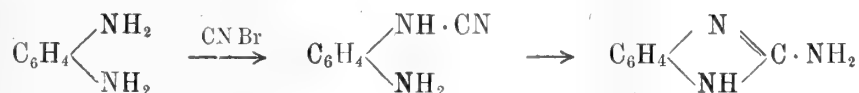
Il composto isomerico a quello precedente, che ha cioè il residuo ureico in posizione α, non si può ottenere dalla *o*-fenilen-α-cianguanidina, sostanza che, come dopo sarà detto, ho ottenuto cianurando direttamente la fenilenguanidina, perchè per

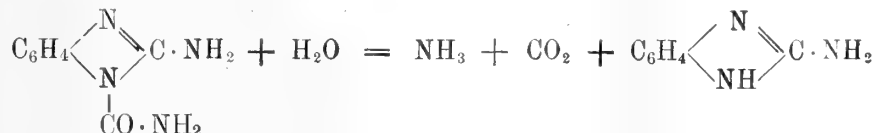
quanto si agisca blandamente cogli agenti idrolizzanti, non si riesce a limitare la reazione ed avere la fenilen-α-guanilurea secondo la seguente equazione:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ N \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2 \quad (N-CN) + H_2O = C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ N \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2 \quad (N-CO\cdot NH_2)$$

Il gruppo cianogeno in α si stacca completamente formando ammoniaca e anidride carbonica senza dare il prodotto intermedio. Sono però riuscito ad ottenere questa o-fenilen-α-guanilurea per altra via e colle seguenti reazioni: il monocloridrato di o-fenilendiamina col cianato potassico mi dette l'*o-amidofenilurea*

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} NH_2 \\ NH_2 \end{matrix}\right., HCl + CONK = ClK + C_6H_4\left\langle\begin{matrix} NH_2 \\ NH\cdot CO\cdot NH_2 \end{matrix}\right. .$$

Questa sostanza ha proprietà basiche e se ne preparò il picrato e il nitrato che sono sali ben cristallizzati. La base trattata in soluzione acquosa col bromuro di cianogeno passa nella o-cianamidofenilurea (I), la quale facilmente per trasposizione intramolecolare dà la o-fenilen-α-guanilurea (II).

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} NH_2 \\ NH\cdot CO\cdot NH_2 \end{matrix}\right. \xrightarrow{+\,CNBr} \overset{I}{C_6H_4\left\langle\begin{matrix} NH\cdot CN \\ NH\cdot CO\cdot NH_2 \end{matrix}\right.} \longrightarrow \overset{II}{C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ N \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2 \quad (N-CO\cdot NH_2)}$$

Questa reazione è simile a quella per la quale la o-fenilendiamina passa in fenilenguanidina [1]

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} NH_2 \\ NH_2 \end{matrix}\right. \xrightarrow{CNBr} C_6H_4\left\langle\begin{matrix} NH\cdot CN \\ NH_2 \end{matrix}\right. \longrightarrow C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ NH \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2$$

Mentre in quest'ultimo caso il prodotto intermedio non fu ottenuto e si passò subito alla fenilenguanidina, dalla nostra reazione invece si ricavò come primo prodotto l'o-cianamidofenilurea. Questa sostanza, che ha funzioni acide, è stabile allo stato secco, ma all'aria umida o coll'acqua lentamente si trasforma nel composto metamerico, la o-fenilen-α-guanilurea, che è un composto a carattere basico. Non si può avere libera e pura perchè è molto solubile, anzi igroscopica e tende a idrolizzarsi passando in fenilenguanidina, ammoniaca e anidride carbonica

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ N \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2 \quad (N-CO\cdot NH_2) + H_2O = NH_3 + CO_2 + C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ NH \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2$$

Questa decomposizione che avviene lentamente a freddo e a caldo più rapidamente, è molto accelerata anche alla temperatura ordinaria per la presenza di al-

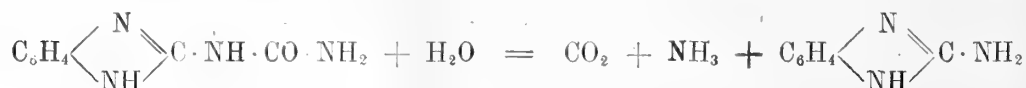
[1] Pierron, Ann. de chimie et phys., serie 8, tomo 15, pag. 190.

cali o di acidi minerali e quindi anche i suoi sali non si poterono ottenere allo stato di purezza. L'unico sale che si può aver bene è il picrato che si prepara sciogliendo a freddo nell'acqua la cianamidofenilurea ed aggiungendo acido picrico: il sale precipita lentamente a mano a mano che avviene la trasposizione intramolecolare. Anche questo sale che è poco solubile, quando si sciolga a caldo nell'acqua svolge anidride carbonica e a freddo cristallizza il picrato di fenilenguanidina.

In ogni modo rimane sicuramente dimostrata l'esistenza di questa fenilen-α-guanilurea molto instabile: questo risultato è assai importante perchè essendo per essa sicura la costituzione, rimane implicitamente dimostrata la costituzione dell'isomero, fenilen-β-guanilurea e conseguentemente anche la formula attribuita alla fenilen-β-cianguanidina ottenuta partendo dalla fenilidrazina e bromuro di cianogeno per mezzo delle reazioni già descritte.

o-fenilenguanidina (**24**).

La fenilen-β-guanilurea, per prolungata azione a caldo dell'acido cloridrico, dà il cloridrato di fenilenguanidina per demolizione del residuo ureico:

$$C_6H_4\left\langle{N \atop NH}\right\rangle C\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2 + H_2O = CO_2 + NH_3 + C_6H_4\left\langle{N \atop NH}\right\rangle C\cdot NH_2$$

Dal cloridrato con carbonato sodico fu separata la fenilenguanilurea e identificata con quella che, secondo le indicazioni di Pierron (l. c.), si ottiene direttamente dalla o-fenilendiamina e bromuro di cianogeno. Rimaneva così pienamente dimostrato il passaggio dalla fenilidrazina a derivati della o-fenilendiamina attraverso i prodotti cianurati.

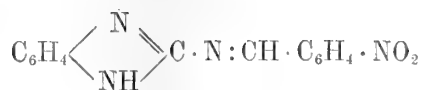
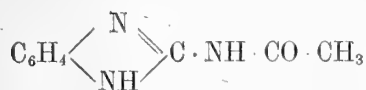
Al cloridrato e al solfato di fenilenguanidina già descritti, e che sono sali poco caratteristici perchè molto solubili, se ne aggiunsero altri nuovi che servono bene a riconoscere questa base: e cioè il carbonato, il nitrato, l'acetato, il picrato e il cloroplatinato. La base libera, che si ottiene dall'acqua in lamelle incolori fus. a 224°, ha reazione alcalina e, contrariamente a quanto accenna Pierron, non è egualmente solubile nell'acqua come nella potassa, ma si scioglie molto meglio in questo reattivo e perciò, quando la si ottiene dal cloridrato, non è utile di decomporlo cogli alcali fissi, ma invece coi carbonati alcalini, formando così il carbonato poco solubile che poi si dissocia nell'acqua a 100°. La base libera si può riconoscere anche per una intensa colorazione azzurra che dà in soluzione alcalina cogli ipocloriti e cogli ipobromiti, colorazione che poi passa al verdastro e quindi al giallo-bruno.

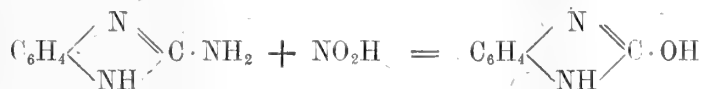
Come ho già accennato al principio di questo capitolo, si possono discutere per la o-fenilenguanidina le due formule seguenti:

$$\text{I} \qquad C_6H_4\left\langle{N \atop NH}\right\rangle C\cdot NH_2 \qquad\qquad \text{II} \qquad C_6H_4\left\langle{NH \atop NH}\right\rangle C:NH$$

I seguenti composti ottenuti parlano in favore della costituzione asimmetrica I: coll'anidride acetica si ottenne un monoacetilderivato, e colla m-nitrobenzaldeide un

prodotto di condensazione:

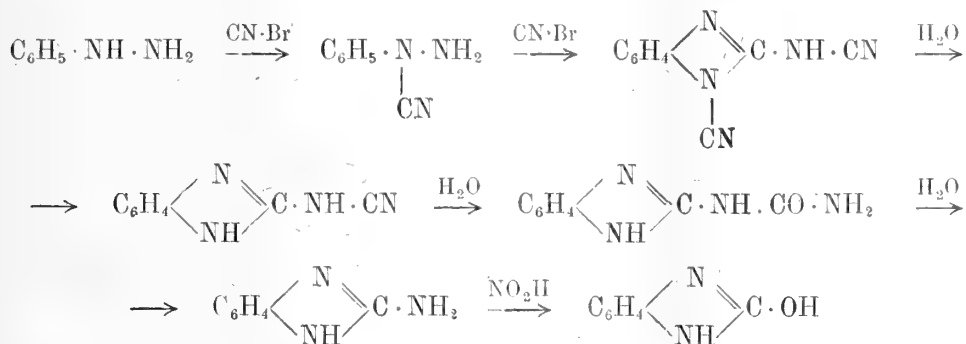
$$C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C \cdot NH \cdot CO \cdot CH_3 \qquad C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C \cdot N : CH \cdot C_6H_4 \cdot NO_2$$

Si ripetè anche la preparazione della benzoilfenilenguanidina già ottenuta da Pierron ed il passaggio coll'acido nitroso alla fenilenurea,

$$C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C \cdot NH_2 + NO_2H = C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C \cdot OH$$

alla quale può competere anche una formula simmetrica, benchè, per le funzioni acide che dimostra, sembri più probabile quella scritta.

Riunisco in un quadro le sostanze descritte ed ottenute partendo dalla fenilidrazina, tralasciando alcuni derivati:

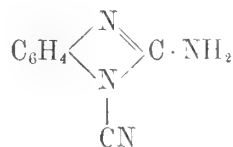
$$C_6H_5 \cdot NH \cdot NH_2 \xrightarrow{CN \cdot Br} C_6H_5 \cdot \underset{CN}{N} \cdot NH_2 \xrightarrow{CN \cdot Br} C_6H_4\langle{}^{N}_{N(CN)}\rangle C \cdot NH \cdot CN \xrightarrow{H_2O}$$

$$\longrightarrow C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C \cdot NH \cdot CN \xrightarrow{H_2O} C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C \cdot NH . CO \cdot NH_2 \xrightarrow{H_2O}$$

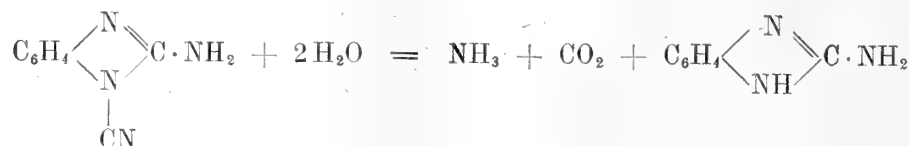
$$\longrightarrow C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C \cdot NH_2 \xrightarrow{NO_2H} C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C \cdot OH$$

Ricerche sintetiche per ottenere i derivati cianurati della fenilenguanidina partendo dalla o–fenilendiamina (24) (26).

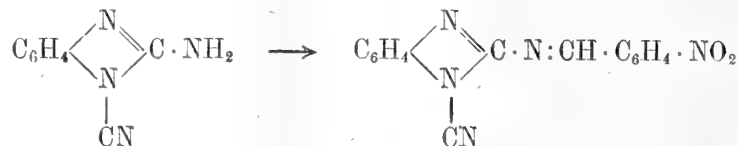
Come ho già detto, per l'azione del bromuro di cianogeno sulla *o–fenilendiamina* fu ottenuta la fenilenguanidina. Questa sostanza, sciolta nell'alcool insieme col bromuro di cianogeno, dà la

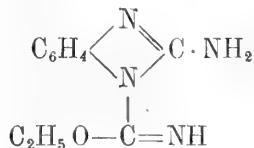
o–fenilen–α–cianguanidina,

$$C_6H_4\langle{}^{N}_{N(CN)}\rangle C \cdot NH_2$$

che si separa dal liquido, in cui è poco solubile, in aghi lunghi, giallicci, che, quando non sono ben secchi, si decompongono rapidamente a 173–175°, ma, seccati nel vuoto, cominciano a decomporsi a quella temperatura e seguitano lentamente coll' innalzarsi della medesima. Ha funzioni basiche che sono in relazione colla formula che ad essa ho attribuito, mentre l'isomero, che ha il cianogeno in β ha invece leggère funzioni acide. Si scioglie nell'acido cloridrico diluito a freddo e precipita inalterata coll'ammoniaca; dette

anche un cloroplatinato che fu analizzato. Nella potassa si scioglie a leggero calore e lentamente a freddo, rapidamente a caldo; perde ammoniaca e anidride carbonica, rigenerando la fenilenguanidina:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\ N\end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2 \;(N\text{—}CN) + 2H_2O = NH_3 + CO_2 + C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\ NH\end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2$$

Come ho già detto, non si riesce ad avere un prodotto intermedio di idratazione del cianogeno, ma questo si stacca subito in ambiente alcalino come fa il corrispondente radicale cianogeno in α della fenilen-α-β-dicianguanidina. In soluzione alcoolica insieme colla *m-nitrobenzaldeide* e con poche gocce di piperidina come catalizzatore, si ottenne un prodotto di condensazione la cui formazione conferma la formula ammessa per questo derivato cianurato ottenuto dalla fenilendiamina:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\ N\end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2 \;(N\text{—}CN) \longrightarrow C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\ N\end{matrix}\right\rangle C\cdot N:CH\cdot C_6H_4\cdot NO_2 \;(N\text{—}CN)$$

La fenilenguanidina sciolta nell'alcool, per aggiunta di bromuro di cianogeno e di alcoolato sodico, dà la *o-fenilen-α-ossietilcarboimido-guanidina*:

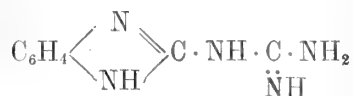
$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\ N\end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2 \;(N\text{—}C(=NH)\text{—}O\,C_2H_5)$$

il quale prodotto, purificato dall'alcool col carbone, si ottiene in aghetti incolori fus. a 155°. Ha funzioni basiche; si scioglie nell'acido cloridrico diluito a freddo e precipita colla ammoniaca e dà un cloroplatinato cristallino. Per ebullizione in soluzione potassica si decompone in alcool, ammoniaca, anidride carbonica e fenilenguanidina. In corrispondenza della sua costituzione dà anche esso un prodotto di condensazione coll'aldeide *m*-nitrobenzoica che dall'alcool si ottiene in aghi sottilissimi giallo-chiaro che si depongono formando un feltro e si decompongono a 205-206°. Tanto questa fenilen-α-cianguanidina come l'isomero β non sono suscettibili di cianurarsi ancora e direttamente col bromuro di cianogeno, sia nell'acqua sia nell'alcool; e con ciò si esclude che possano essere termini di passaggio nella formazione del derivato dicianurato che si ottiene partendo dalla fenilidrazina col bromuro di cianogeno.

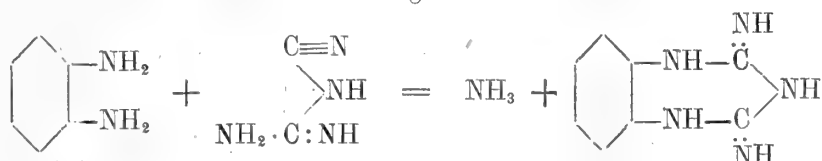
Però sono arrivato ad ottenere la fenilendicianguanidina facendo agire il bromuro di cianogeno, non sulla fenilen-β-cianguanidina, ma sul suo sale potassico (24): questa però rimaneva una sintesi parziale perchè, partendo della *o*-fenilendiamina, non ero ancora riuscito ad arrivare alla fenil-β-cianguanidina. Ci sono arrivato poi per una via indiretta, mediante questi passaggi:

1°) il cloridrato di *o*-fenilendiamina e dicianamide dànno la fenilenbiguanide;
2°) la fenilenbiguanide e acido nitroso dànno la fenilen-β-cianguanidina;

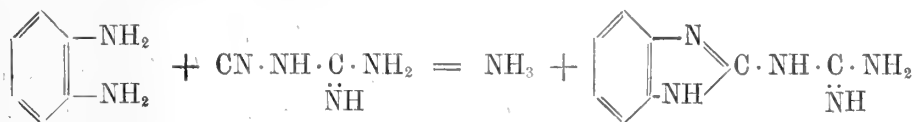
3°) il sale potassico della fenilen-β-cianguanidina col bromuro di cianogeno dà la fenilen-α-β-dicianguanidina.

o-fenilenbiguanide

$$C_6H_4\langle {N \atop NH} \rangle C \cdot NH \cdot \underset{\textstyle NH}{\overset{..}{C}} \cdot NH_2$$

Impiegando la nota reazione che conduce alle biguanidi, lo Ziegelbauer (1), per riscaldamento a 105° per sette ore in tubo chiuso di una soluzione alcoolica di cloridrato di *o*-fenilendiamina e diciandiamide, ottenne la fenilenbiguanide alla quale attribuì la costituzione che deriva dal seguente schema:

$$C_6H_4(NH_2)_2 + \underset{NH_2 \cdot C : NH}{\overset{C \equiv N}{>NH}} = NH_3 + C_6H_4 {\begin{matrix} -NH-\overset{NH}{\ddot{C}} \\ -NH-\underset{NH}{\ddot{C}} \end{matrix}} >NH$$

A questa stessa *o*-fenilenbiguanide sono arrivato, come sarà meglio spiegato colle formule nel capitolo seguente, coi seguenti passaggi: 1°) la fenilendicianguanidina, coll'ammoniaca, dà la fenilenmelamina; 2°) questa, per l'azione dell'acido cloridrico, passa in fenilenammelina; 3°) questa, colla potassa, si rompe per dare anidride carbonica e fenilenbiguanide (**25**).

Una tale serie di reazioni stabilisce per la fenilenbiguanide una costituzione differente da quella ammessa da Ziegelbauer, costituzione che non è razionale perchè avrebbe una catena eterociclica eptagonale! Invece nella mia formula c'è un anello pentagonale, la cui formazione è facile. Ecco la nuova formula e lo schema di formazione partendo dalla *o*-fenilendiamina e diciandiamide:

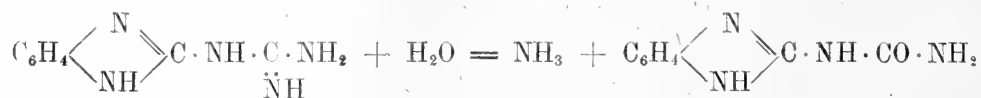
$$C_6H_4(NH_2)_2 + CN \cdot NH \cdot \underset{NH}{\ddot{C}} \cdot NH_2 = NH_3 + C_6H_4\langle {N \atop NH} \rangle C \cdot NH \cdot \underset{NH}{\ddot{C}} \cdot NH_2$$

Ho reso la preparazione più rapida, semplice, di miglior rendimento e di prodotto più puro, facendo bollire a ricadere una soluzione acquosa delle due sostanze per cinque ore: così l'ammoniaca che si forma va via e non ha luogo di reagire, come nel tubo chiuso, sopra una parte della diciandiamide in concorrenza colla fenilendiamina. Finita la reazione, si precipita il prodotto aggiungendo al liquido un eccesso di soda, si purifica dall'acqua col carbone e si ottiene in lamelle bianche fus. a 254° con decomposizione (2).

(1) M. 17, 653.

(2) Ziegelbauer dice che si scioglie nell'acqua con colorazione gialla ma ciò dipende da qualche impurezza che si toglie con ripetute cristallizzazioni o più rapidamente con un po' d'acido nitroso sciogliendola prima in acqua e acido cloridrico eppoi riottenendola colla soda.

Lo Z. descrisse pure un cloroplatinato della formula $(C_8H_9N_5)_2PtCl_4$, mentre io ebbi quello normale $(C_8H_9N_5, HCl)_2PtCl_4$, il quale cristallizzato dall'acqua calda perde due molecole di acido cloridrico come trovai che fanno anche i cloroplatinati dei triazoli (reazione di Anderson). Anche questo fatto conferma la mia formula la quale contiene appunto un nucleo triazolico.

La nuova formula è convalidata anche dalla facile trasformazione della fenilenbiguanide in fenilenguanilurea per l'azione a caldo della potassa:

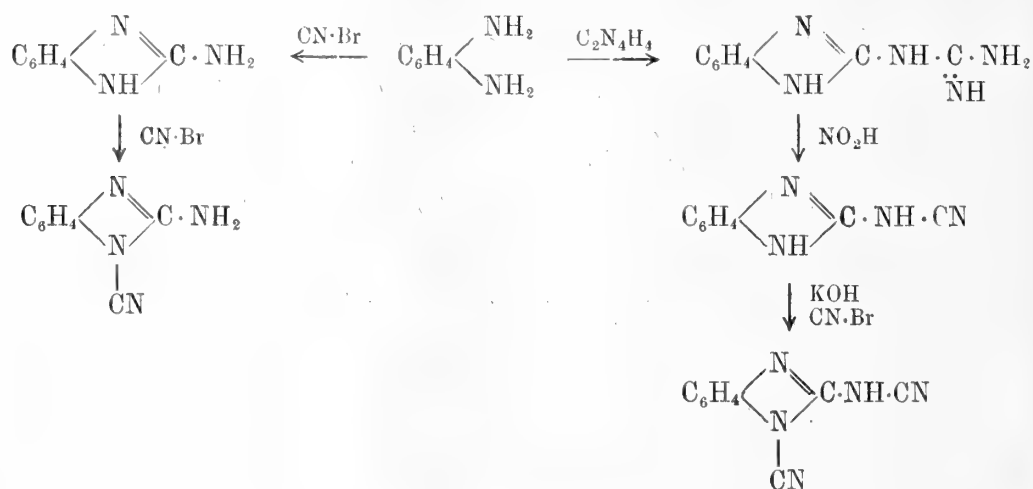
$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ NH \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH\cdot \underset{\ddot{N}H}{C}\cdot NH_2 + H_2O = NH_3 + C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ NH \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2$$

La fenilenbiguanide, trattata con acido nitroso, invece di dare (come era presumibile) la rammentata fenilenguanilurea per trasformazione del gruppo guanidico in gruppo ureico, eliminò gli elementi di una molecola di ammoniaca per passare, con rendimento quasi teorico, nella stessa *c*-fenilen-*β*-cianguanidina che si ebbe come primo prodotto di demolizione della fenilendicianguanidina (**16**). Con questo passaggio è realizzata la sintesi completa della fenilendicianguanidina partendo dalla *o*-fenilendiamina. Nel seguente quadro indico le reazioni che, partendo dalla *o*-fenilendiamina, mi hanno condotto ai derivati cianurati della fenilenguanidina:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ NH \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2 \xleftarrow{CN\cdot Br} C_6H_4\left\langle\begin{matrix} NH_2 \\ NH_2 \end{matrix}\right. \xrightarrow{C_2N_4H_4} C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ NH \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH\cdot \underset{\ddot{N}H}{C}\cdot NH_2$$

$$\downarrow CN\cdot Br \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow NO_2H$$

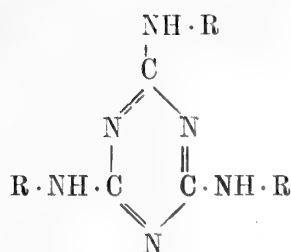
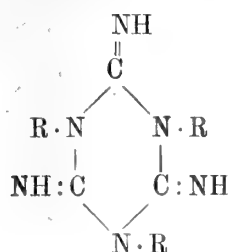
$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ \underset{CN}{N} \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH_2 \qquad\qquad C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ NH \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH\cdot CN$$

$$\downarrow \begin{matrix} KOH \\ CN\cdot Br \end{matrix}$$

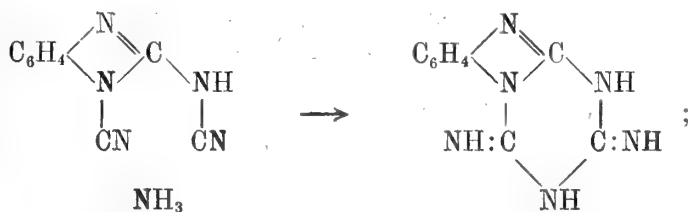
$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} N \\ \underset{CN}{N} \end{matrix}\right\rangle C\cdot NH\cdot CN$$

XII. — Azione della ammoniaca e delle amine sulla fenilendicianguanidina. Derivati della melamina (25).

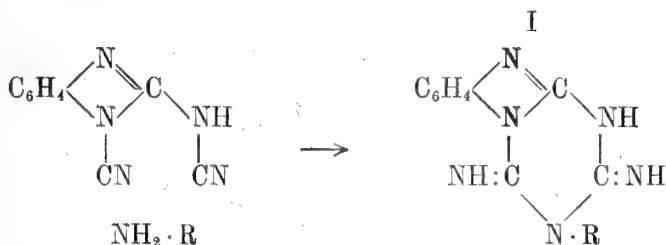
La *o*-fenilendicianguanidina ha funzioni acide: sciolta nella potassa, come fu detto, perde facilmente per idrolisi il gruppo cianogeno *α* mentre l'altro si mostra molto resistente a questo reattivo. In soluzione ammoniacale invece si addiziona con una molecola di ammoniaca e così fa coll'anilina e coll'idrazina. Questi prodotti, che hanno carattere nettamente basico, per le loro proprietà e per il loro comportamento risultano essere dei derivati della melamina, la quale, come è noto, si conosce in una sola forma ma due sono le serie di derivati alchilici corrispondenti alle due seguenti formule [1]:

[1] La nomenclatura fu proposta da Rathke (Ber. 21, 87) e adottata dai trattatisti. Per i derivati *exo*, che hanno gli alchili legati agli azoti fuori del nucleo è possibile la forma tautomerica con i tre doppi legami fuori del nucleo, mentre per i derivati *eso* ossia dell'isomelamina non è possibile altra formula di quella sopra scritta.

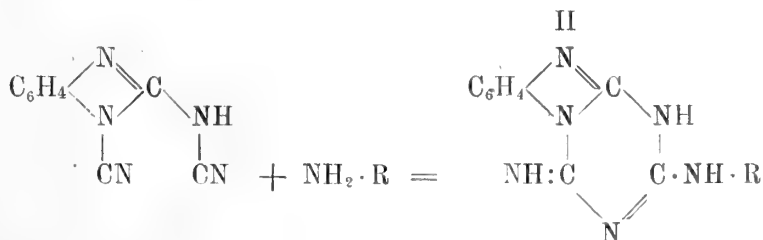
```
          NH·R                                   NH
           |                                     ‖
           C                                     C
         // \                                  /   \
        N     N                             R·N     N·R
        |     ‖                                |     |
  R·NH·C       C·NH·R                      NH:C       C:NH
        \\   /                                 \     /
          N                                      N·R
```

exo-trialchilmelamina (*normale*) *eso-trialchilmelamina* (*iso*)

I derivati melaminici ottenuti dalla fenilendicianguanidina, a causa del radicale bivalente fenilenico che rimane legato per una valenza ad un azoto del nucleo e coll'altra ad un azoto fuori del nucleo, non possono corrispondere se non alla forma *iso* o a una forma mista, non a quella normale.

La reazione coll'ammoniaca può spiegarsi col seguente schema:

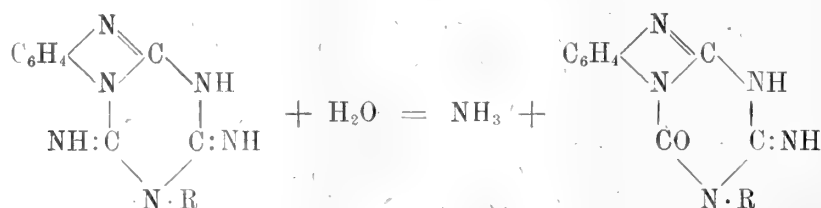
```
       N                                    N
     /   \\                               /   \\
C6H4<      C                         C6H4<      C
     \   /   \                            \   /   \
       N       NH          —→               N       NH
       |       |                            |       |
       CN      CN                       NH:C         C:NH
                                             \     /
         NH3                                   NH
```

e per l'anilina, l'idrazina e in generale colle amine primarie, così:

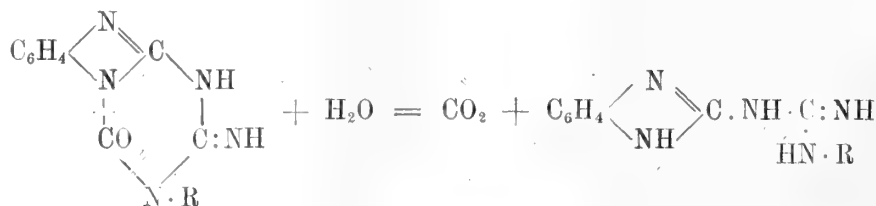
```
                                               I
       N                                    N
     /   \\                               /   \\
C6H4<      C                         C6H4<      C
     \   /   \                            \   /   \
       N       NH          —→               N       NH
       |       |                            |       |
       CN      CN                       NH:C         C:NH
                                             \     /
       NH2·R                                   N·R
```

Per il prodotto coll'ammoniaca sarebbero possibili due formule tautomere, una con due, l'altra con un doppio legame nel nucleo, mentre per i prodotti ottenuti colle amine primarie, ammesso che l'addizione avvenga nel modo indicato, non è possibile se non una formula tautomera con un solo doppio legame nel nucleo.

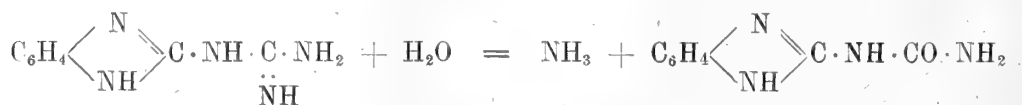
Meno verosimilmente potrebbe l'atomo di azoto dell'amina che si addiziona non entrare a formare il nucleo melaminico, e la chiusura avvenire invece con l'azoto di un radicale cianogeno:

```
                                                     II
       N                                        N
     /   \\                                   /   \\
C6H4<      C                             C6H4<      C
     \   /   \                                \   /   \
       N       NH                               N       NH
       |       |                                |       |
       CN      CN   + NH2·R  =              NH:C         C·NH·R
                                                 \     //
                                                    N
```

ma sostanze rappresentate sicuramente da questa formula con l'alchile in posizione *exo* ho potuto ottenere dal cloruro di ammelile e le amine primarie e secondarie, come sarà dimostrato nel seguente capitolo; e quindi rimane fissata per le melamine, che si ottengono direttamente dalla fenilendicianguanidina e le amine primarie (che distinguo col nome di isomelamine), la formula I.

Come è noto, la melamina cogli acidi o colle basi a caldo, per graduale trasformazione dei gruppi carbimidili in carbonili, passa in ammelina, acido melanurico e infine in acido cianurico. Queste melamine sostituite subiscono, almeno in parte, queste trasformazioni: cioè, scaldate coll'acido cloridrico, dànno la corrispondente ammelina

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ C_6H_4 \langle & & \rangle C \diagdown \\ & N \diagup & \quad NH \\ & | & \quad | \\ NH{:}C & & C{:}NH \\ & \diagdown \; \diagup & \\ & N \cdot R & \end{array} + H_2O = NH_3 + \begin{array}{ccc} & N & \\ C_6H_4 \langle & & \rangle C \diagdown \\ & N \diagup & \quad NH \\ & | & \quad | \\ CO & & C{:}NH \\ & \diagdown \; \diagup & \\ & N \cdot R & \end{array}$$

La posizione del carbonile è determinata dai susseguenti prodotti di demolizione: queste ammeline sono molto resistenti all'acido cloridrico, ma subiscono più facilmente l'azione idrolizzante della potassa e, invece di passare nell'acido melanurico corrispondente, subiscono la rottura dell'anello, con eliminazione di anidride carbonica, e si ottiene la biguanide sostituita (¹):

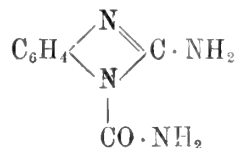
$$\begin{array}{ccc} & N & \\ C_6H_4 \langle & & \rangle C \diagdown \\ & N \diagup & \quad NH \\ & | & \quad | \\ CO & & C{:}NH \\ & \diagdown \; \diagup & \\ & N \cdot R & \end{array} + H_2O = CO_2 + C_6H_4 \begin{array}{c} \diagup N \diagdown \\ \diagdown NH \diagup \end{array} C.NH \cdot \begin{array}{l} C{:}NH \\ HN \cdot R \end{array}$$

Colla fenilenisomelammina (R = H) si ottiene la fenilenammelina per mezzo dell'acido cloridrico, e poi colla potassa la fenilenbiguanide, identica a quella che si ottiene dallo *o*–fenilendiamina e la diciandiamide. La fenilenbiguanide per una ulteriore azione della potassa dà la fenilenguanilurea, identica a quella che si ha dalla fenilen–β–cianguanidina,

$$C_6H_4 \begin{array}{c} \diagup N \diagdown \\ \diagdown NH \diagup \end{array} C \cdot NH \cdot \underset{\textstyle NH}{\overset{}{C}} \cdot NH_2 + H_2O = NH_3 + C_6H_4 \begin{array}{c} \diagup N \diagdown \\ \diagdown NH \diagup \end{array} C \cdot NH \cdot CO \cdot NH_2$$

e siccome ad essa spetta indubbiamente, per i fatti esposti nel capitolo precedente, la

(¹) È da notare che questa rottura del nucleo, che non è stata osservata per l'ammelina, avviene stentatamente colla fenilenammelina (R=H) ed è facile coi derivati fenilico ed amidico. Ciò potrebbe trovare una spiegazione nella possibilità che l'ammelina, almeno in soluzione alcalina, assuma la forma normale e che quindi il nucleo con tre doppi legami, come un nucleo benzenico, presenti una maggiore resistenza. Per il composto con R=H ci possono essere al massimo due doppi legami nel nucleo e, quando R è un alchile, solo un doppio legame.

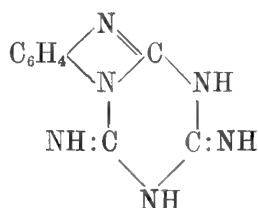
costituzione assegnatale, ne viene di conseguenza dimostrata anche la costituzione da me proposta pure nel capitolo precedente per la fenilenbiguanide e viene anche stabilita la posizione del carbonile nella fenilenisoammelina. Se il carbonile fosse nell'altra posizione possibile, cioè in quella del carbimidile, e viceversa, si arriverebbe a un'altra fenilenguanilurea,

$$C_6H_4\langle N \rangle\!\!\!\!\!\!\!\!\quad C\cdot NH_2 \quad (N{=}C,\ N{-}CO\cdot NH_2)$$

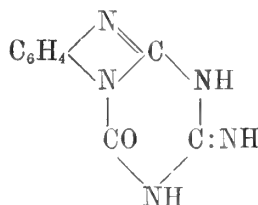
```
       N
      / \\
C6H4<     >C·NH2
      \ /
       N
       |
       CO·NH2
```

quella cioè corrispondente alla fenilen-α-cianguanidina, che non si può ottenere così perchè il cianogeno in α si stacca completamente senza dare il composto intermedio di idrolisi.

Do alcune notizie sui composti ottenuti colle reazioni descritte, rimandando per i particolari alla nota originale (25).

o-fenilenisomelamina

```
       N
      / \\
C6H4<     >C
      \ /    \
       N      NH
       |      |
   NH:C       C:NH
        \    /
          NH
```

Si sospende la fenilendicianguanidina greggia nell'acqua e per aggiunta di ammoniaca in eccesso a freddo, si scioglie facilmente, salvo qualche impurezza che si toglie colla filtrazione rapida e fatta subito. Il liquido, specialmente di estate, dà presto la fenilenisomelamina, e la reazione si completa a b. m. Il prodotto è costituito da una polvere bianca microcristallina, insolubile nei comuni solventi (non fonde neppure a 300°); ha proprietà basiche e per questo si può purificare sciogliendola nell'acido cloridrico e precipitandola coll'ammoniaca.

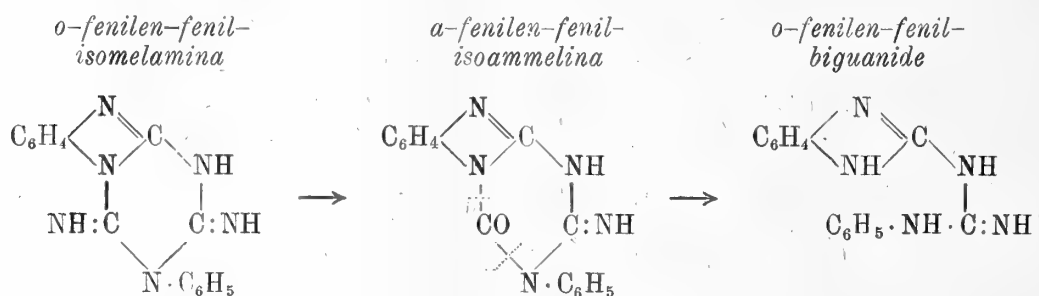
o-fenilenisoammelina

```
       N
      / \\
C6H4<     >C
      \ /    \
       N      NH
       |      |
       CO     C:NH
        \    /
          NH
```

La fenilenisomelamina, sciolta nell'acido cloridrico diluito con circa due volumi di acqua, coll'ebullizione depone, dopo poco, il cloridrato di fenilenisoammelina, poco solubile anche a caldo, in quantità teorica e dal quale coll'ammoniaca si libera la base. Si purifica sciogliendola in acqua fortemente ammoniacale; e per evaporazione a b. m.,

a mano a mano che l'ammoniaca se ne va, si depone in croste cristalline bianche. Non fonde neppure a 300°; è insolubile nell'acqua ma, per la doppia funzione di acido e di base, si scioglie tanto negli acidi quanto nelle basi forti. Il cloridrato è cristallino, e nell'acqua parzialmente si idrolizza. Il sale potassico è un colloide, e per appropriata concentrazione dà un gel che si ridiscioglie facilmente a caldo o per diluizione.

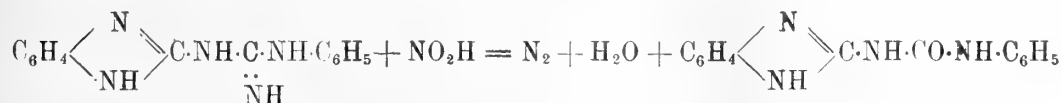
Il passaggio dalla fenilenisoammelina alla fenilenbiguanide, di cui è stato parlato nel capitolo precedente, e che quì si forma per rottura del nucleo melaminico secondo lo schema prima scritto, si ottiene facendo bollire a ricadere una soluzione della sostanza nella potassa al 5 % circa: si svolge ammoniaca, e il nuovo prodotto si depone a freddo; però è bene separarlo ogni tanto, per toglierlo all'azione ulteriore della potassa, rimettendo le acque madri a bollire. La fenilenbiguanide infatti, per riscaldamento in soluzione potassica, passa in fenilenguanilurea, secondo l'equazione scritta nella parte generale; e, siccome rimane disciolta nel liquido alcalino, si ricava precipitandola coll'anidride carbonica. Fu anzi in questa occasione che venne osservata la differenza nella cristallizzazione da quella che si ricava dalla fenilen-β-cianguanidina coll'acido cloridrico, per cui si concluse che può esistere in due forme desmotropiche, come ho detto nel capitolo precedente.

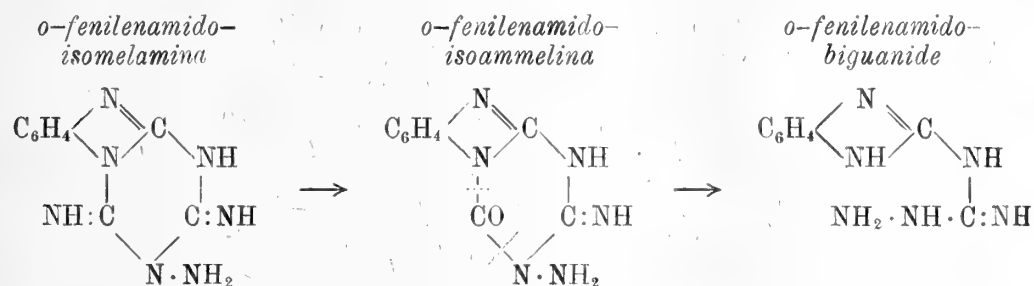
```
 o-fenilen-fenil-              a-fenilen-fenil-            o-fenilen-fenil-
   isomelamina                   isoammelina                  biguanide

       N                             N                          N
C6H4<     >C                  C6H4<     >C                C6H4<     >C
       N      NH                     N      NH                  NH      NH
       |      |       -->            |      |       -->                 |
   NH:C       C:NH                  CO      C:NH            C6H5·NH·C:NH
        \    /                        \    /
        N·C6H5                        N·C6H5
```

La fenilendicianguanidina in polvere sottile, come si ottiene purificata sciogliendola nell'ammoniaca e subito precipitata coll'acido cloridrico, sospesa nell'alcool che contiene l'anilina un po' in eccesso, per ebullizione a ricadere, vi si scioglie e a freddo cristallizza la fenilenfenilisomelamina che si ottiene in aghi lucenti bianchi che fondono a 241° decomponendosi e contengono una molecola di acqua di cristallizzazione. Ha proprietà basiche: si scioglie negli acidi diluiti e precipita coll'ammoniaca in polvere amorfa, che, lasciata nel liquido, diventa cristallina prendendo una molecola di acqua di cristallizzazione. Sciolta nell'acido cloridrico diluito con due volumi di acqua, per ebullizione si trasforma nella fenilenfenilisoammelina che si depone, durante il riscaldamento, allo stato di cloridrato, che è poco solubile: da esso, coll'ammoniaca, si libera il prodotto che, purificato dall'alcool, si ottiene in lunghi aghi sottili incolori che contengono una molecola di alcool di cristallizzazione e fondono a 292° con decomposizione. A differenza della fenilenisoammelina che mostra carattere tanto di base quanto di acido, questo derivato fenilico non mostra che caratteri basici e può dare sali cogli acidi ma non si scioglie affatto nella potassa. Il differente comportamento può spiegarsi colla possibilità, per la fenilenisoammelina, di assumere la forma tautomerica ossidrilica mentre questa fenilenfenilammelina non mostra questa possibilità.

La *o*-fenilenfenilbiguanide si ottiene dalla fenilenfenilammelina per ebullizione colla potassa al 10 % : la sostanza non si scioglie, ma si vede raggrumarsi e poi divenir polverulenta pesante. Cristallizzata dall'alcool con un po' di carbone, si ottiene in aghetti bianchi raggruppati e fonde a 178°: ha proprietà basiche e se ne preparò il nitrato ed il cloroplatinato.

Per ebullizione cogli acidi o colle basi la fenilenfenilbiguanide non dette la corrispondente guanilurea ma si idrolizzò più profondamente dando fenilenguanidina, anilina, ammoniaca ed anidride carbonica. Ho potuto però ottenere la *o*-fenilenguanilfenilurea per azione dell'acido nitroso sulla fenilenfenilbiguanide:

$$C_6H_4\left\langle{N \atop NH}\right\rangle C\cdot NH\cdot \underset{NH}{\overset{..}{C}}\cdot NH\cdot C_6H_5 + NO_2H = N_2 + H_2O + C_6H_4\left\langle{N \atop NH}\right\rangle C\cdot NH\cdot CO\cdot NH\cdot C_6H_5$$

La reazione si fa sciogliendo la sostanza in acqua e acido cloridrico ed aggiungendo il nitrito sodico: il prodotto si separa come cloridrato, dal quale si libera la base che, cristallizzata dall'alcool, si ottiene in aghetti che fondono a 193° con decomposizione.

o-fenilenamido-isomelamina		*o-fenilenamido-isoammelina*		*o-fenilenamido-biguanide*
$C_6H_4\left\langle{N \atop N}\right\rangle C\langle NH$; $NH{:}C$ — $C{:}NH$; $N\cdot NH_2$	→	$C_6H_4\left\langle{N \atop N}\right\rangle C\langle NH$; CO — $C{:}NH$; $N\cdot NH_2$	→	$C_6H_4\left\langle{N \atop NH}\right\rangle C\langle NH$; $NH_2\cdot NH\cdot C{:}NH$

La fenilendicianguanidina, sospesa nell'acqua, per aggiunta a freddo di idrato di idrazina, tende a sciogliersi ma, già prima che tutta sia passata in soluzione, comincia a deporsi il prodotto di addizione: per completare la reazione, si scalda per poco a b. m. e si ottiene un rendimento teorico. Il prodotto, purificato dall'acqua, si ottiene in aghi lunghi sottili incolori lucenti che contengono una molecola di acqua di cristallizzazione che perdono lentamente a 100° doventando opachi e rigonfiandosi. Si decompone a 283°; ha funzioni basiche molto manifeste, tanto che si scioglie a freddo nell'acido acetico diluito e precipita cogli alcali. Sciolta in liquido acido, dà un composto di condensazione coll'aldeide benzoica, che non precipita perchè rimane disciolto allo stato di sale, ma si libera col carbonato sodico.

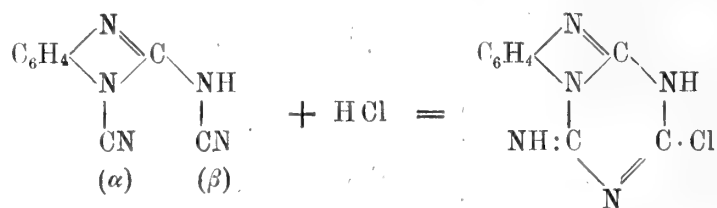
La fenilenamidoisomelamina, sciolta nell'acido cloridrico diluito con tre volumi di acqua, dà, per riscaldamento all'ebullizione, il cloridrato di fenilenamidoammelina che è in aghetti che contengono una molecola di acqua di cristallizzazione. Questo cloridrato si idrolizza parzialmente nell'acqua e quindi non si scioglie completamente se non nell'acqua acidulata: fonde a 289°; la base che si libera col carbonato sodico fonde a 303°. Anche questa fenilenamidoammelina non mostra carattere acido, non sciogliendosi nella potassa: il derivato benzilidenico si separa come cloridrato poco solubile, dal quale si può avere la base; questa dall'alcool si separa in un feltro di aghetti

sottilissimi, che occupa tutto il volume della soluzione; non fonde neppure a 300° e, bollita cogli acidi, libera l'aldeide benzoica.

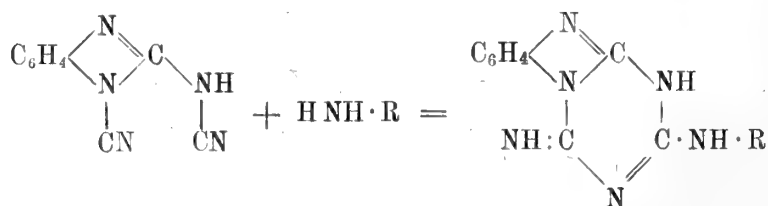
La fenilenamidoammelina, bollita in sospensione nella potassa al 6–7 %, senza sciogliersi si trasforma in fenilenamidobiguanide. Cristallizzata dall'acqua o dall'alcool, fonde decomponendosi a 195–197°. Ha reazione alcalina al tornasole e forma sali ben cristallizzati. Con un sale di cobalto dà un composto roseo, non però manifestamente cristallino come lo dà la fenilenbiguanide.

XIII. — **Addizione dell'acido cloridrico e dell'acido solfidrico alla *o*-fenilendicianguanidina** (28) (32).

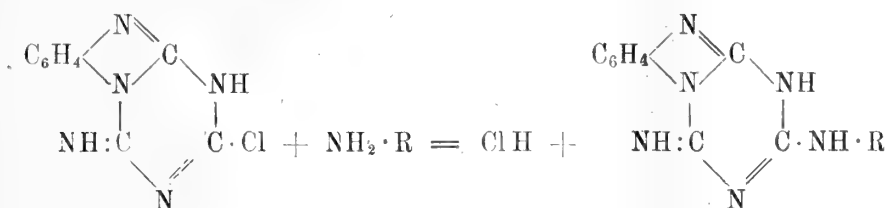
Come la fenilendicianguanidina addiziona l'ammoniaca e le amine primarie per dare dei derivati dell'isomelamina, così addiziona una molecola di acido cloridrico per dare un derivato clorurato melaminico, che si forma nel seguente modo:

```
         N                                 N
   C6H4< >C                          C6H4< >C
         N   NH                            N   NH
         |   |      + HCl  =               |   |
         CN  CN                        NH:C    C·Cl
        (α)  (β)                            \ //
                                              N
```

Al nuovo prodotto spetta il nome di *cloruro di o-fenilenammelile*, giacchè rappresenta la fenilenammelina che abbia, nella forma tautomera, l'ossidrile sostituito dal cloro ([1]).

Nel caso dell'addizione delle amine primarie, fu ammesso che la chiusura del nucleo melaminico avvenga coll'atomo d'azoto dell'amina stessa, ma nel caso presente necessariamente è l'atomo d'azoto di uno dei due gruppi cianogeno che serve a chiudere il nucleo. Ciò potrebbe far supporre, per analogia, che anche per le amine primarie succeda lo stesso, in questo modo:

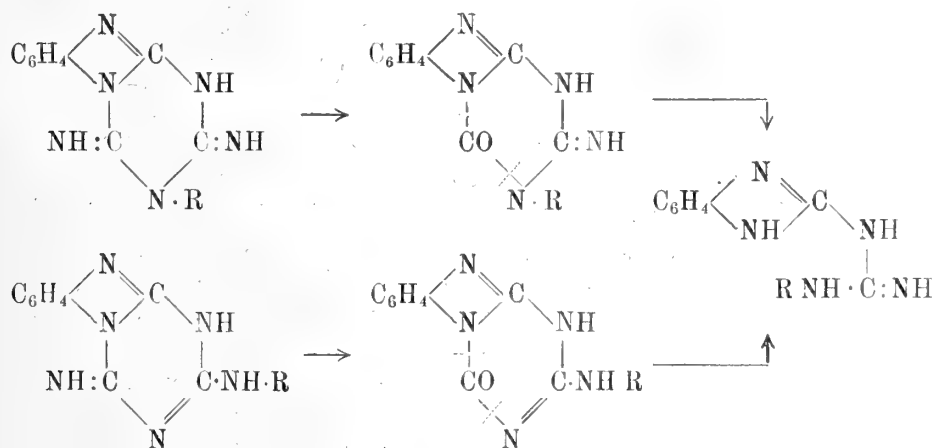
```
         N                                 N
   C6H4< >C                          C6H4< >C
         N   NH                            N   NH
         |   |    + HNH·R  =               |   |
         CN  CN                        NH:C    C·NH·R
                                            \ //
                                              N
```

([1]) Un composto simile senza il fenilene si trova descritto col nome di clorocianurdiamide e fu ottenuto per azione blanda dell'ammoniaca sul cloruro cianurico (Ann. 10, 43; Ann. chim. [2] 19, 90; 20, 98).

Ma i fatti dimostrano che è giusto lo schema anteriormente ammesso, col quale si arriva a un derivato che ha l'alchile legato ad un atomo di azoto del nucleo, perchè per l'azione della stessa amina sul cloruro di fenilenammelile non si ottiene la stessa sostanza, ma un isomero *exo* che ha indubbiamente l'alchile legato ad un azoto fuori del nucleo:

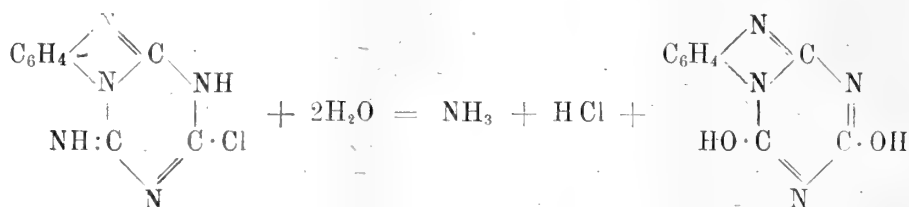
```
      N                                          N
    /  \\                                      /  \\
C6H4     C                                C6H4     C
    \  /   \                                  \  /   \
      N     NH                                  N     NH
      |     |                                   |     |
   NH:C     C·Cl  +  NH2·R  =  ClH  +        NH:C     C·NH·R
       \   //                                    \   //
         N                                         N
```

Però per l'azione di una amina secondaria sul cloruro di fenilenammelile e sulla fenilendicianguanidina, colla quale pure reagisce, si ottiene lo stesso prodotto, ciò che vuol dire che colle amine secondarie, non potendosi fare l'addizione come colle primarie, avviene dunque nell'altro modo come per l'acido cloridrico.

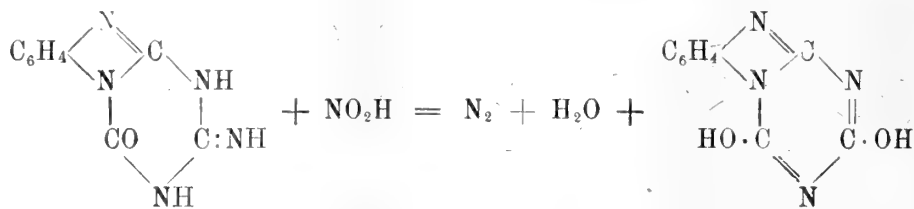
Colla ammoniaca, come si è detto, la fenilendicianguanidina forma la fenilenisomelamina e col cloruro di fenilenammelile e ammoniaca si ottiene il medesimo prodotto, il quale evidentemente corrisponde alle due formule tautomeriche: cioè l'idrogeno prende una unica posizione, quella di maggiore equilibrio.

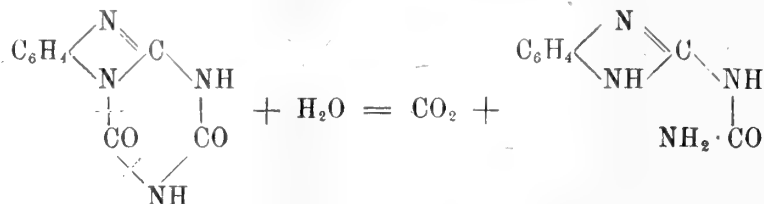
Le *exo*-alchilfenilenmelamine, per l'azione dell'acido cloridrico, dànno le *exo*-alchilfenilenammeline isomeriche e quelle *iso* già descritte; ma per l'azione della potassa i due isomeri, per rottura del nucleo ed eliminazione di anidride carbonica dànno la stessa fenilenalchilbiguanide:

```
      N                            N
    /  \\                        /  \\
C6H4     C                  C6H4     C
    \  /   \                    \  /   \
      N     NH                    N     NH          ----------+
      |     |        -->          |     |                     |
   NH:C     C:NH                 CO     C:NH                  v
       \   /                       \   /                  N
        N·R                         N·R                 /  \\
                                                    C6H4     C
                                                        \  /   \
                                                         NH     NH
                                                                |
      N                            N                    R NH·C:NH
    /  \\                        /  \\                        ^
C6H4     C                  C6H4     C                        |
    \  /   \                    \  /   \                      |
      N     NH                    N     NH                    |
      |     |        -->          |     |                     |
   NH:C     C·NH·R               CO     C·NH R      ----------+
       \   //                      \   //
         N                           N
```

Questo risultato dimostra pure che l'atomo di cloro si fissa al carbonio corrispondente al cianogeno β, come è indicato nello schema di addizione dell'acido cloridrico alla fenilendicianguanidina; perchè, se si fissasse in α, si avrebbe come prodotto di demolizione un'altra fenilenalchilbiguanide.

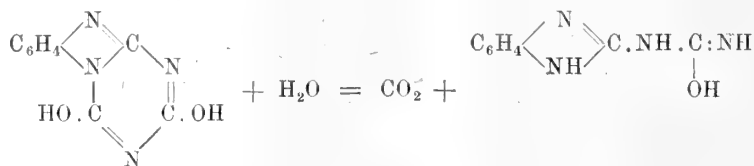
Il cloruro di fenilenammelina, trattato a caldo coll'acido cloridrico, dà l'acido fenilenmelanurico ([1])

```
       N                                                          N
     /  \\                                                      /  \\
C6H4<     C                                               C6H4<     C
     \  /   \                                                  \  /   \
      N      NH                                                 N      N
      |      |    + 2H2O  =  NH3 + HCl +                        |      ||
  NH:C       C·Cl                                           HO·C       C·OH
       \    //                                                   \\   /
         N                                                         N
```

Allo stesso composto sono arrivato per l'azione dell'acido nitroso sulla fenilenisoammelina:

```
       N                                                          N
     /  \\                                                      /  \\
C6H4<     C                                               C6H4<     C
     \  /   \                                                  \  /   \
      N      NH                                                 N      N
      |      |     + NO2H  =  N2 + H2O +                        |      ||
     CO      C:NH                                           HO·C       C·OH
       \    /                                                    \\   /
         NH                                                        N
```

La potassa agisce sull'acido fenilenmelanurico nello stesso modo come agisce sulla fenilenammelina, cioè rompe il nucleo nello stesso punto con eliminazione di anidride carbonica e si ottiene la già descritta fenilen-β-guanilurea ([2]) (ved. capo XI)

```
       N                                            N
     /  \\                                        /  \\
C6H4<     C                                 C6H4<     C
     \  /   \                                    \  /   \
      N      NH                                   NH      NH
      |      |     + H2O  =  CO2 +                        |
     CO      CO                                      NH2·CO
       \    /
         NH
```

([1]) Ho scritto la formula ossidrilica, perchè generalmente si adotta questa per l'acido melanurico, ma si potrebbe dargli quella iso con i due carbonili o una mista. Anche all'acido cianurico si dà la formula ossidrilica, ma, secondo le ricerche di Hantzsch (Ber. 39, 139) e di Palazzo e Scalzi (Gazz. chim. ital. 38, I, 662) dovrebbe riguardarsi come uno pseudo-acido totale che però può assumere la forma normale allo stato di sale alcalino. Per l'acido fenilenmelanurico ho ragione di credere che possa esistere libero nelle due forme: una instabile in aghi lunghi e una stabile in aghi molto piccoli. Anche nello schema seguente, per uniformità, uso la stessa formula ossidrilica benchè possa scriversi anche nell'altro modo.

([2]) Ho scritto in questo schema l'acido fenilenmelanurico colla formula carbonilica per maggior chiarezza, per il confronto col corrispondente schema di scissione della fenilenammelina; ma ricordando che la fenilenguanilurea ottenuta in ambiente alcalino, si presenta con proprietà differenti di quando la si ottiene in ambiente acido e che perciò verosimilmente può avere la forma desmotropica ossidrilica [ved. cap. XII e la nota (28)], e considerato che anche l'acido fenilenmelanurico in soluzione alcalina avrà la forma normale ossidrilica, meglio corrisponderà questo schema:

```
       N                                          N
     /  \\                                      /  \\
C6H4<     C                               C6H4<     C.NH.C:NH
     \  /   \                                  \  /         |
      N      N                                  NH          OH
      |      ||    + H2O  =  CO2 +
  HO.C       C.OH
       \\   /
         N
```

Aggiungo alcune notizie sui composti ottenuti secondo le reazioni descritte in questo capitolo, rimandando, per maggiori particolari, alle note originali.

Cloruro di fenilenammelile (**28**).

La fenilendicianguanidina, purificata sciogliendola nell'acqua ammoniacale e subito precipitata coll'acido cloridrico, raccolta e spremuta, si presta bene alla reazione senza bisogno di asciugarla. Lasciata in contatto a freddo per 24 ore con acido cloridrico fumante, avviene l'addizione e il prodotto poi, a leggero calore (50-60°), si scioglie in molta acqua, togliendo colla filtrazione un po' di sostanza inalterata; quindi, per saturazione con carbonato sodico, precipita il cloruro di fenilenammelile sotto forma di un precipitato bianco voluminoso, leggero. È una polvere bianca che un po' si scioglie a caldo nell'alcool e allora si ottiene in cristalli microscopici; e tanto il prodotto direttamente precipitato seccato all'aria, quanto quello cristallizzato dall'alcool, contengono una molecola e mezza di acqua. Non fonde, ma verso 200° ingiallisce e, aumentando la temperatura, la colorazione si fa più intensa e il prodotto si decompone lentamente. Non è solubile nell'acqua, ma mostra leggere proprietà basiche sciogliendosi, senza alterarsi, a leggero calore negli acidi diluiti: sciolto nell'acido nitrico, non dà, per l'aggiunta di nitrato d'argento, il precipitato di cloruro d'argento se non lentamente o per riscaldamento. Mostra anche proprietà acide sciogliendosi a freddo nella potassa diluita e a caldo nei carbonati alcalini.

Acido o-fenilenmelanurico.

Il cloruro di fenilenammelile, sciolto nell'acido cloridrico diluito coll'ebullizione, dà dopo poco, l'acido fenilenmelanurico che si separa in piccoli aghetti; ed anche purificato dall'acqua, in cui è poco solubile, si ottiene pure in piccoli aghetti che non fondono neppure a 300°: più facilmente si può purificare sciogliendolo nell'acqua ammoniacale e precipitandolo coll'acido cloridrico.

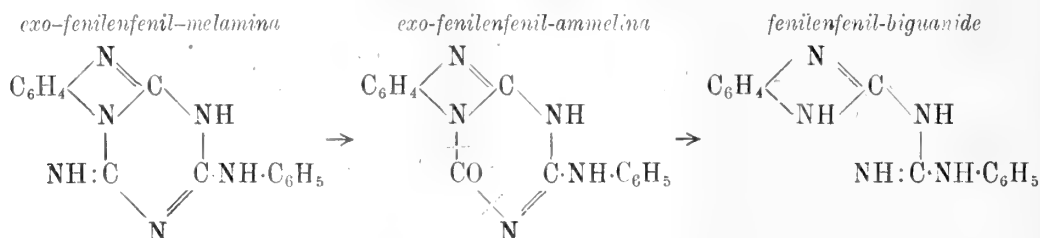
L'ottenni anche per l'azione dell'acido nitroso sulla fenilenammelina e la reazione avviene a freddo e lentamente sciogliendo la sostanza nell'acqua e acido cloridrico e facendovi passare dei vapori nitrosi sviluppati da anidride arseniosa e acido nitrico. Si sviluppano bollicine gassose e il prodotto si depone molto lentamente, pure in aghetti minuti. Pare che l'acido fenilenmelanurico esista in due forme desmotropiche: una in minuti aghetti come si ottiene nei due modi anzi detti, che sarebbe la forma stabile; e una in cristalli lunghi aghiformi rifrangenti che si ottengono dal cloruro di fenilenammelile con acido cloridrico quando si scalda per poco tempo in modo da non arrivare alla separazione del prodotto durante l'ebullizione, ma si separi poi durante il raffreddamento. Non si può pensare che si formino aghi lunghi perchè si depongono più lentamente, perchè quelli ottenuti per mezzo dell'acido nitroso si ottengono anche più lentamente, eppure sono piccoli. Gli aghi lunghi per ebullizione in acqua pura o con aggiunta di acido cloridrico si trasformano in aghi piccoli.

Come ho già detto, la potassa a caldo agisce sull'acido fenilenmelanurico formando la fenilenguanilurea che rimane disciolta e precipita coll'anidride carbonica: allo stesso

prodotto si arriva col cloruro di fenilenammelile e potassa a caldo e, per quanto abbia cercato di moderare la reazione, sono arrivato, prima che alla fenilanguanilurea, all'acido fenilenmelanurico, ma non alla corrispondente fenilenammelina per sostituzione del cloro con un ossidrile. Col carbonato sodico ebbi un prodotto che corrisponde, all'analisi, a un tale composto, ma ne tralasciai lo studio perchè è amorfo e non si presta ad essere purificato.

Il cloruro di fenilenammelile si scioglie facilmente nell'ammoniaca; e lentamente a freddo e rapidamente a caldo, per eliminazione di acido cloridrico, dà la fenilenmelamina, che potrebbe rappresentare un isomero di quella ottenuta direttamente dalla fenilendicianguanidina e ammoniaca, ma, come ho già detto, è eguale ad essa. Invece colle amine si ottengono i seguenti composti melaminici differenti da quelli ottenuti direttamente e, da questi, ammeline differenti e biguanidi eguali:

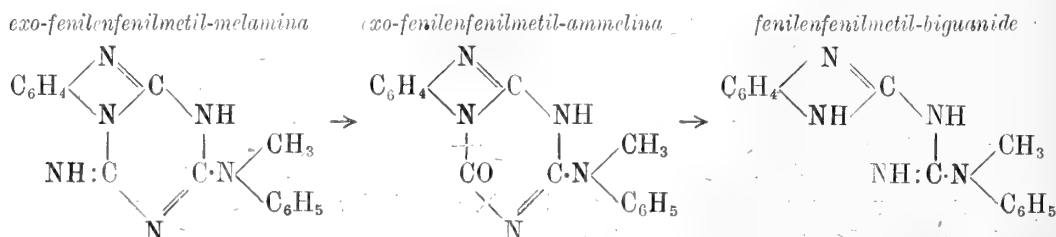
exo-fenilenfenil-melamina → *exo-fenilenfenil-ammelina* → *fenilenfenil-biguanide*

```
     N                         N                          N
C6H4< >C                  C6H4< >C                   C6H4< >C
     N   NH                    N   NH                     NH  NH
     |   |         →           |   |          →               |
 NH:C    C·NH·C6H5            CO   C·NH·C6H5          NH:C·NH·C6H5
     \  //                      \ //
      N                          N
```

Il cloruro di fenilenammelile, sospeso nell'alcool con un egual peso di anilina, per riscaldamento a ricadere, si scioglie lentamente ed a freddo si depone il cloridrato della *exo*-fenilenfenilmelamina: da questo, con ammoniaca, si separa la base, che, cristallizzata dall'alcool, si ottiene in aghi minutissimi che non fondono a 300°, mentre l'isomero cristallizza con una molecola di acqua, fonde a 241° e mostra anche proprietà basiche meno accentuate perchè non si scioglie a freddo nell'acido cloridrico diluito, ma soltanto a caldo.

La soluzione cloridrica, coll'ebullizione, depone il cloridrato della *exo*-fenilenfenilammelina, dal quale, col carbonato sodico, si libera il nuovo prodotto. L'*exo*-fenilenfenilammelina non è solubile nei comuni solventi e bisogna purificarla sciogliendola nella potassa e precipitandola con acido carbonico: non fonde neppure a 300°, mentre l'isomero si ottiene cristallizzato dall'alcool con una molecola di alcool di cristallizzazione e fonde a 292°.

Sciolto nella potassa al 10 % per ebullizione si decompone più lentamente dell'isomero e dà la stessa fenilenfenilbiguanide fs. a 178° di cui ho già detto nel capitolo precedente.

exo-fenilenfenilmetil-melamina → *exo-fenilenfenilmetil-ammelina* → *fenilenfenilmetil-biguanide*

```
     N                        N                         N
C6H4< >C                 C6H4< >C                  C6H4< >C
     N   NH                   N   NH                    NH  NH
     |   |   CH3    →         |   |   CH3     →             |   CH3
 NH:C    C·N<                CO   C·N<              NH:C·N<
     \  //   C6H5              \ //   C6H5                  C6H5
      N                         N
```

Il cloruro di fenilenammelile, sospeso nell'alcool con un peso di metilanilina eguale a quello del cloruro, per ebullizione a ricadere si scioglie e si depone una mescolanza di

fenilenfenilmetilmelamina libera e di cloridrato. Il prodotto raccolto, lavato con alcool viene sciolto nell'acido cloridrico diluito; e con ammoniaca, dopo filtrazione, si precipita la base. Lo stesso prodotto si ottiene facendo bollire a ricadere nell'alcool parti eguali di fenilendicianguanidina e metilanilina: la sostanza, prima si scioglie eppoi già nell'ebullizione si depone il prodotto di addizione. Si purifica cristallizzandola dall'alcool in cui è pochissimo solubile e si ottiene in polvere cristallina che si decompone ad alta temperatura.

La *exo*-fenilenfenilmetilmelamina sciolta in acido cloridrico diluito con due volumi di acqua coll'ebullizione per circa 15-20 minuti non depone nulla a caldo, ma a freddo dà il cloridrato di fenilenfenilmetilammelina: nell'acqua si idrolizza parzialmente ma può cristallizzare dall'acqua cloridrica. Dal cloridrato, coll'ammoniaca, si separa il nuovo prodotto come polvere bianca insolubile nell'acqua e poco nell'alcool. Per purificare questa ammelina, meglio è discioglierla nella soda e precipitarla con anidride carbonica: si ottiene così una polvere microcristallina che si decompone ad alta temperatura: ha proprietà basiche ed acide e, sciolta nell'idrato sodico, dà un sale in aghi sottilissimi che formano un feltro.

La fenilenfenilmetilbiguanide si ottiene sciogliendo l'ammelina sopra descritta nella potassa al 5 % e facendo bollire a ricadere; dopo un'ora comincia a separarsi il prodotto in piccoli cristalli che conviene raccogliere perchè anch'esso tende a decomporsi; si rimettono le acque madri a bollire e così seguitando si ottiene un discreto rendimento. La fenilenfenilmetilbiguanide o meglio fenilenguanilfenilmetilguanidina, purificata dall'alcool si ottiene in lamelle riunite a ciuffi fs. a 163°, pochissimo solubili nell'acqua, molto nell'alcool, assai nell'etere e nel benzolo.

o-fenilentioammelina (**32**).

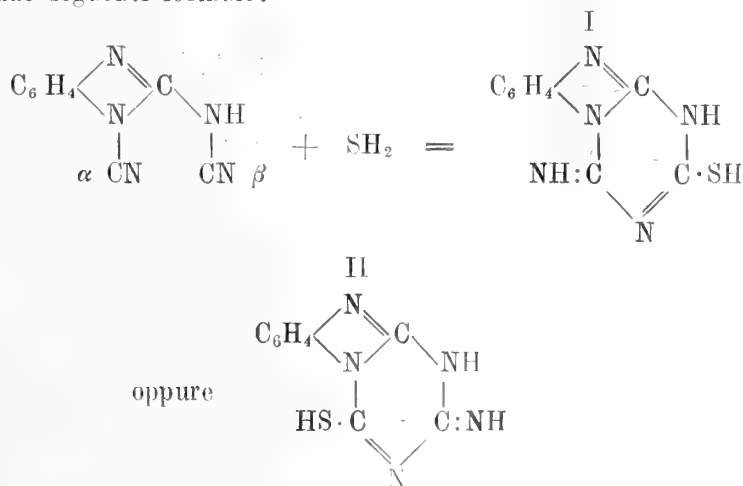
La fenilendicianguanidina, mentre addiziona l'ammoniaca e le amine primarie per dare dei derivati dell'isomelamina e addiziona anche l'acido cloridrico per dare il cloruro di fenilenammelile, può addizionare pure una molecola di acido solfidrico ed anche in questo caso si ha la chiusura del nucleo esagonale melaminico secondo una delle due seguenti formule:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\N\end{matrix}\right\rangle C\begin{matrix}\\ \diagdown NH\\ |\\ CN\ \beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}|\\ \alpha\ CN\end{matrix} \quad + SH_2 = \quad \text{I}\quad C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\N\end{matrix}\right\rangle C\diagdown NH;\ \ NH{:}C \quad C\cdot SH;\ \ \diagdown N \diagup\!\!\!/$$

I:
```
        N
C6H4 <     > C
        N       \ NH
        |         |
     NH:C       C·SH
          \   //
            N
```

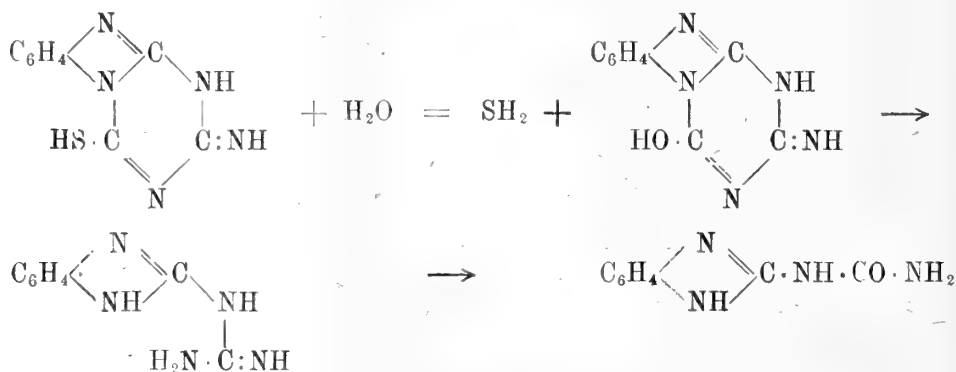
oppure

II:
```
        N
C6H4 <     > C
        N       \ NH
        |         |
     HS·C       C:NH
         \\   /
            N
```

Reagenti:
```
        N
C6H4 <     > C
        N       \ NH
        |         |
     α CN       CN β     + SH2 =
```

Il composto solforato formatosi mostra cogli agenti idrolizzanti un comportamento che risponde alla formula II e non alla I. Infatti, bollito con acido cloridrico anche concentrato e per lungo tempo rimane inalterato, quindi per analogia coi composti affini già descritti precedentemente si deve ritenere che il carbimidile si trova in posizione β e non in α, altrimenti si sarebbe facilmente trasformato in carbonile. Per ebullizione in soluzione di idrato sodico il composto perde idrogeno solforato e si trasforma in *o*-fenilenammelina identica a quella che si ottiene per azione dell'acido cloridrico sulla fenilenmelamina (cap. IX). Nel caso presente la formazione di tale sostanza di costituzione sicura, non può venire espressa altrimenti che adottando per la fenilentioammelina appunto la formula II, col seguente schema, che dà ragione anche dei susseguenti prodotti di demolizione.

Infatti, insieme alla fenilenammelina ([1]) si trovano i suoi prodotti di idrolisi già precedentemente descritti: la fenilenbiguanide e la fenilen-β-guanilurea.

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\N\end{matrix}\right\rangle C\begin{matrix}\diagdown NH\\ \mid\\ C:NH\end{matrix} \;\; (HS\cdot C \;\; \text{ad anello con } N) + H_2O = SH_2 + C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\N\end{matrix}\right\rangle C\begin{matrix}\diagdown NH\\ \mid\\ C:NH\end{matrix} \;\; (HO\cdot C \;\; \text{ad anello con } N) \longrightarrow$$

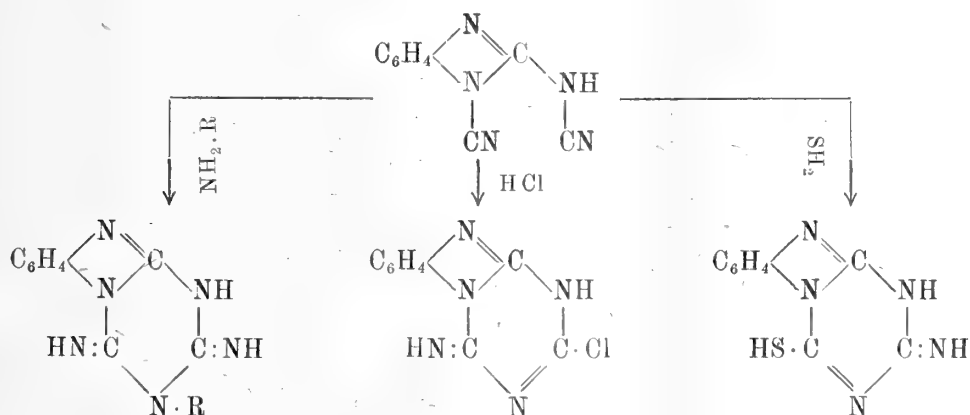
$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\NH\end{matrix}\right\rangle C\diagdown NH\cdot C(:NH)\cdot NH_2 \longrightarrow C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\NH\end{matrix}\right\rangle C\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2$$

Anche se non si fosse trovata la fenilenammelina o che si avessero dei dubbi sulla sua identificazione non avendo essa un punto di fusione, basterebbe l'aver trovato la fenilenbiguanide di costituzione sicura e molto facilmente identificabile per dimostrare che al composto solforato spetta la formula II e non quella I.

L'*o*-fenilentioammelina si ottiene sciogliendo gr. 10 di fenilendicianguanidina greggia in 100 cc. di solfidrato ammonico dei reattivi, diluiti con 150 cc. di acqua: la soluzione viene fatta a freddo in una capsula agitando con un pestello e colla filtrazione si tolgono alcune impurezze rimaste indisciolte. La soluzione limpida lasciata a sè per 24 ore depone il prodotto in aggregati cristallini bianchi duri e dalle acque madri colla diluizione o scacciando il solfidrato ammonico con una corrente di aria si ottiene ancora un po' di prodotto con un rendimento in tutto di circa il 90 % della sostanza di partenza. Non fonde neppure scaldato a 300° ma si decompone a più alta temperatura; è insolubile nell'acqua e nei comuni solventi organici e anche negli acidi inorganici diluiti. Ha funzioni di acido debole e si scioglie poco nell'ammoniaca diluita e bene nell'idrato sodico o potassico e riprecipita inalterato cogli acidi. Se si fa bollire la soluzione nella soda al 6% per due ore, per raffreddamento

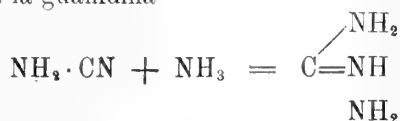
([1]) In questo schema la fenilenammelina è rappresentata colla formula ossidrilica piuttosto che con quella tautomerica carbonilica per maggior chiarezza. S'intende che anche il composto solforato può rappresentarsi colla formula tiocarbonilica invece che con quella solfidrilica.

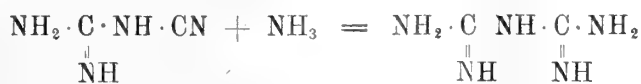
si depone in lamine cristalline della *o*-fenilenbiguanide fus. a 245°. Il liquido alcalino da cui fu separata questa sostanza, acidificato leggermente con acido cloridrico, sviluppa idrogeno solforato e anidride carbonica e depone la fenilenammelina mescolata a un po' di prodotto solforato inalterato. Le due sostanze si separano sciogliendo la fenilenammelina a caldo in acqua e acido cloridrico da cui si ricava a freddo sotto forma di cloridrato mentre il composto solforato rimane indisciolto. Dalle acque madri cloridriche dell'idrolisi alcalinizzate con carbonato sodico e tirate a secco ed estraendo con alcool si ricava un po' di fenilen-β-guanilurea.

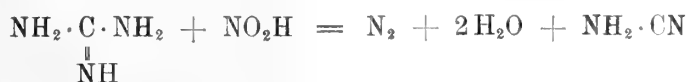
Riassumendo i resultati esposti in questo e nel capitolo precedente, resulta che la *o*-fenilen-α-β-dicianguanidina per l'addizione di una molecola di amina primaria, di acido cloridrico o di acido solfidrico conduce sempre alla chiusura di un nucleo melaminico o di suoi derivati, ma con un meccanismo differente nei tre casi, tanto che l'alchile, il cloro e lo solfo vanno ad occupare posizioni differenti.

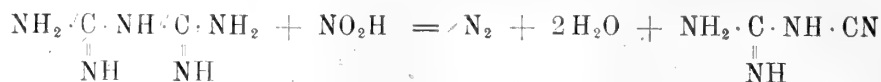
```
                         N
                  C6H4<     >C
                         N      NH
                         |      |
                         CN     CN
   NH2.R                 | HCl                  SH2
     ↓                   ↓                       ↓
      N                    N                      N
C6H4<   >C           C6H4<   >C             C6H4<   >C
      N    NH              N    NH                N    NH
      |    |               |    |                 |    |
  HN:C     C:NH        HN:C     C·Cl          HS·C     C:NH
      \   /                \   //                \\   /
       N·R                   N                     N
```

XIV — Azione dell'acido nitroso sulla guanidina e sulle biguanidi.

È noto che la cianamide per addizione di una molecola di ammoniaca, sotto forma di cloruro di ammonio, dà la guanidina

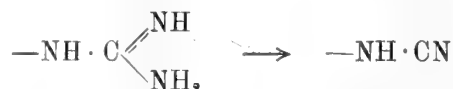
$$NH_2\cdot CN + NH_3 = C\begin{cases}NH_2\\ =NH\\ NH_2\end{cases}$$

Similmente la diciandiamide, col cloruro di ammonio, dà la biguanide:

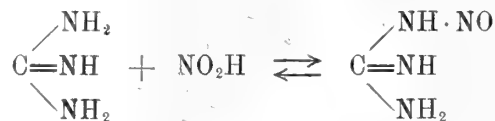
$$\underset{\underset{NH}{\|}}{NH_2\cdot C}\cdot NH\cdot CN + NH_3 = \underset{\underset{NH}{\|}}{NH_2\cdot C}\ \ \underset{\underset{NH}{\|}}{NH\cdot C}\cdot NH_2$$

La reazione inversa non era conosciuta, cioè non si era riusciti a togliere direttamente da un composto guanidico gli elementi di una molecola di ammoniaca per passare alla cianamide o ad un suo derivato. In una prima nota (27) ho dimostrato che, per l'azione dell'acido nitroso sulla guanidina, si può passare alla cianamide:

$$\underset{\underset{NH}{\|}}{NH_2\cdot C}\cdot NH_2 + NO_2H = N_2 + 2H_2O + NH_2\cdot CN$$

Colla biguanide e l'acido nitroso ho avuto analogamente la diciandiamide o cianguanidina:

$$\underset{\substack{\| \\ NH}}{NH_2 \cdot C} \cdot \underset{\substack{\| \\ NH}}{NH \cdot C} \cdot NH_2 + NO_2H = N_2 + 2H_2O + \underset{\substack{\| \\ NH}}{NH_2 \cdot C} \cdot NH \cdot CN$$

Queste due reazioni rappresentano schematicamente un processo inverso a quello della citata formazione della guanidina e della biguanide, giacchè, se effettivamente non si elimina una molecola di ammoniaca, si eliminano una molecola di azoto e due di acqua che sono i prodotti di decomposizione di una molecola di nitrito ammonico.

L'importanza di queste due reazioni non sta nell'aver trovato due altri modi di formazione della cianamide e della diciandiamide (sostanze che ora si possono avere tanto facilmente dalla calciocianamide), ma nell'aver trovato una nuova reazione colla quale, per mezzo dell'acido nitroso, si trasforma un gruppo guanidico in residuo cianamidico:

$$-NH \cdot C \begin{matrix} \nearrow NH \\ \searrow NH_2 \end{matrix} \longrightarrow -NH \cdot CN$$

L'ammoniaca, come si è detto, si elimina come azoto ed acqua e ciò può far supporre una transitoria formazione di nitrito ammonico; ma da certi indizi mi pare che l'acido nitroso formi prima un prodotto intermedio. Nel caso della guanidina ho potuto constatare che il composto intermedio si forma ed è la nitrosoguanidina di cui ho parlato nel capitolo I e che Thiele riteneva non si potesse ottenere direttamente dall'acido nitroso e guanidina perchè appunto in liquido acido si scompone in queste due sostanze; si tratta, invece, di una reazione reversibile:

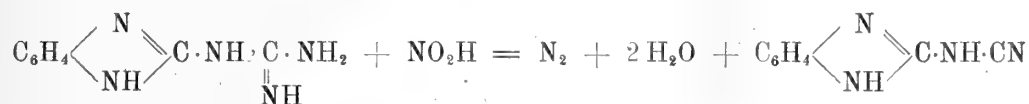
$$C \begin{matrix} \diagup NH_2 \\ =NH \\ \diagdown NH_2 \end{matrix} + NO_2H \rightleftarrows C \begin{matrix} \diagup NH \cdot NO \\ =NH \\ \diagdown NH_2 \end{matrix}$$

La quantità che se ne forma è piccola, ma ne determinai un incremento aumentando la concentrazione dell'acido nitroso. La reazione si eseguisce sciogliendo in poca acqua carbonato di guanidina e nitrito sodico in eccesso eppoi aggiungendo, a freddo, acido solforico: la nitrosoguanidina rimane disciolta nel liquido acido e, per separarla e identificarla occorre neutralizzare con soda eppoi concentrare a leggero calore: così prima si separa, raffreddando con ghiaccio, del solfato di sodio eppoi anche la nitrosoguanidina in aghetti sottili gialli che si possono separare. Per ottenere la cianamide si opera nelle condizioni stesse e neutralizzata la soluzione si fa bollire per trasformare, come aveva trovato anche Thiele, la nitrosoguanidina in cianamide, che si separa allo stato di cianamide argentica. Un miglior rendimento lo ebbi con soluzione concentrata e con eccesso di acido nitroso, come dimostrano le quattro seguenti esperienze:

		I	II	III	IV
Carbonato di guanidina	gr.	1.00	1.00	1.00	1.00
Nitrito sodico	»	0.75	0.75	1.50	1.50
Acqua	»	15.00	10.00	15.00	10.00
Acido solforico al 25 %	cc.	5.00	5.00	7.5	7.5
Cianamide argentica ottenuta . . .	gr.	0.07	0.11	0.15	0.37

Per il passaggio dalla biguanide alla diciandiamide si prendono due parti di solfato di biguanide e una di nitrito sodico si sciolgono in dieci parti di acqua e si aggiunge una parte di acido acetico glaciale: la reazione è poco vivace e svolge lentamente gas. Il giorno dopo si trova la diciandiamide cristallizzata; poi dalle acque madri, rese prima ammoniacali e tirate a secco estraendo con alcool se ne ottiene dell'altra con un rendimento di oltre il 70 % .Usando acido solforico si ha vivace reazione con sviluppo di vapori rossi e scarso rendimento. Adoperando l'acido acetico si può osservare che la soluzione dopo poco si colora leggermente in giallo e saggiando il liquido con solfato ferroso e soda si ottiene una colorazione rossa intensa come dà la nitrosoguanidina: è perciò presumibile che anche qui si formi come prodotto intermedio la nitrosobiguanide non ancora conosciuta e che questa lasciata nel liquido acido dia azoto, acqua e diciandiamide, come lo confermerebbe l'osservazione che il giorno dopo quando c'è il prodotto, la colorazione gialla del liquido è sparita.

Della diciandiamide non si conoscevano derivati alchilici e la ragione sta nel fatto che fino ad ora essa era stata ottenuta esclusivamente per polimerizzazione della cianamide e le cianamidi monoalchilate, invece di polimerizzarsi allo stesso modo, dànno dei trimeri che sono le trialchilmelamine e le cianamidi bisostituite non si polimerizzano. Questa nuova reazione che conduce alla diciandiamide si presta ad essere generalizzata in modo da condurre a diciandiamidi sostituite, per azione dell'acido nitroso sopra le biguanidi: inoltre colla stessa reazione, sia direttamente si indirettamente, ho ottenuto anche i derivati alchilici della guanilurea o diciandiamidina.

Una prima diciandiamide si ebbe in questo modo dalla *o*-fenilenbiguanide che dette la *o*-fenilencianguanidina (**26**):

$$C_6H_4\left\langle{N \atop NH}\right\rangle C\cdot NH\cdot \underset{\parallel \atop NH}{C}\cdot NH_2 + NO_2H = N_2 + 2\,H_2O + C_6H_4\left\langle{N \atop NH}\right\rangle C\cdot NH\cdot CN$$

Questa reazione, come ho detto nel capitolo XI, si compie facilmente e con rendimento quasi teorico e mi servì a risalire sinteticamente dalla *o*-fenilendiamina alla fenilendicianguanidina.

In un'ultima ricerca (**29**) ho studiato l'azione dell'acido nitroso sopra la fenilmetilbiguanide e sopra la piperidilbiguanide e nei due casi ho ottenuto le diciandiamidi corrispondenti, cioè l'acido nitroso trasforma nel modo indicato il gruppo guanidico non sostituito in residuo cianamidico. Però trovai in tutt'e due i casi in quantità notevole un secondo prodotto che proviene dall'azione dell'acido nitroso sull'altro gruppo guanidico, quello cioè sostituito che, similmente a casi analoghi conosciuti, viene trasformato in gruppo ureico:

$$-NH\cdot \underset{\parallel \atop NH}{C}\cdot N\left\langle{R \atop R}\right. \longrightarrow -NH\cdot CO\cdot N\left\langle{R \atop R}\right.$$

Così dunque la fenilmetilbiguanide dette la fenilmetilcianguanidina di carattere neutro e simile, per il comportamento e per l'aspetto, alla diciandiamide, e la guanilfenil-

metilurea di carattere basico, che è una diciandiamidina sostituita:

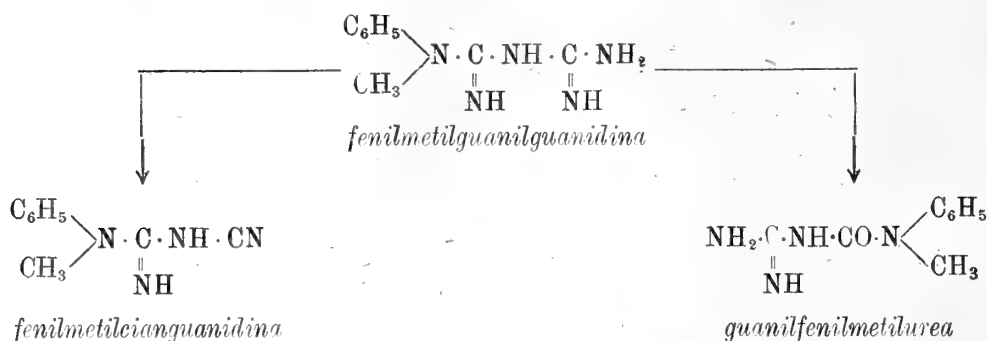
$$\frac{C_6H_5}{CH_3} > N \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH_2$$

fenilmetilguanilguanidina

$$\frac{C_6H_5}{CH_3} > N \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH \cdot CN$$

fenilmetilcianguanidina

$$NH_2 \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH \cdot CO \cdot N < \frac{C_6H_5}{CH_3}$$

guanilfenilmetilurea

Analogamente la piperidilbiguanide dette, coll'acido nitroso, la piperidilcianguanidina e la guanilpiperidilurea:

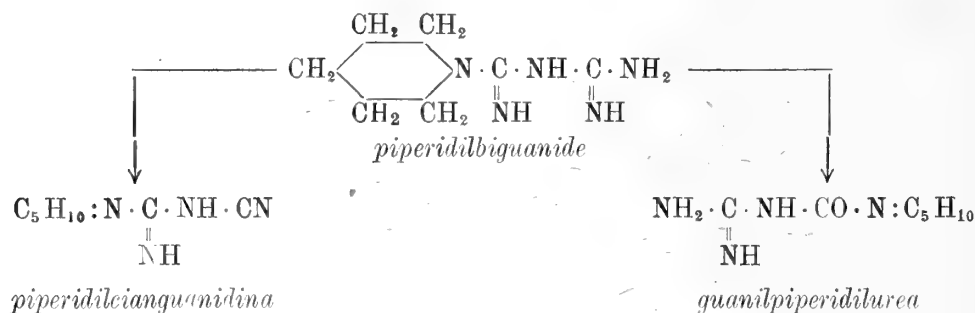
$$CH_2 < \frac{CH_2 - CH_2}{CH_2 - CH_2} > N \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH_2$$

piperidilbiguanide

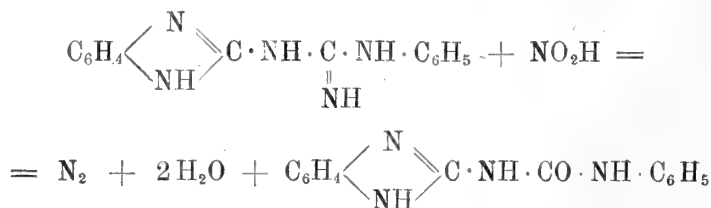
$$C_5H_{10} : N \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH \cdot CN$$

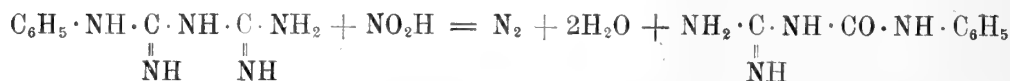
piperidilcianguanidina

$$NH_2 \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH \cdot CO \cdot N : C_5H_{10}$$

guanilpiperidilurea

Nel caso dell'azione dell'acido nitroso sulla fenilenbiguanide si ebbe un solo prodotto, come è stato sopra scritto, benchè si trattasse anche qui di una biguanide bisostituita; ma, come apparisce dalla sua formula, la sostituzione col radicale bivalente è in due azoti differenti e quindi non c'è la possibilità di trasformare quel gruppo guanidico sostituito in gruppo ureico: la fenilenguanidina che ha questa possibilità benchè abbia lo stesso radicale bivalente si trasforma coll'acido nitroso in fenilenurea. Ricordo anche che un'altra biguanide sostituita nei due gruppi guanidici, la fenilenguanilfenilguanidina rammentata nel capitolo XII, per l'azione dell'acido nitroso dette la fenilenguanilfenilurea (**25**):

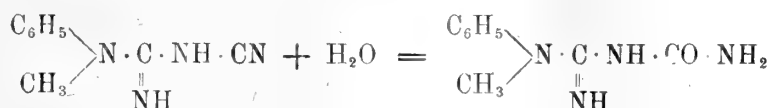
$$C_6H_4 < \frac{N}{NH} > C \cdot NH \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH \cdot C_6H_5 + NO_2H =$$

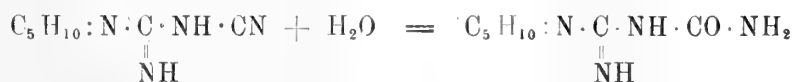
$$= N_2 + 2H_2O + C_6H_4 < \frac{N}{NH} > C \cdot NH \cdot CO \cdot NH \cdot C_6H_5$$

Colla fenilbiguanide e acido nitroso ottenni solamente la guanilfenilurea

$$C_6H_5 \cdot NH \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH_2 + NO_2H = N_2 + 2H_2O + NH_2 \cdot \underset{\| \atop NH}{C} \cdot NH \cdot CO \cdot NH \cdot C_6H_5$$

benchè ci fosse la possibilità di ottenere la diciandiamide corrispondente.

La costituzione di questa guanilfenilurea fu dimostrata idrolizzandola coll'acido cloridrico diluito, poichè dette anilina, anidride carbonica e guanidina: in ogni modo rimaneva stabilita anche per il fatto che il composto isomerico, la fenilguanilurea è già stata descritta (1) e fonde a 62°, mentre la guanilfenilurea da me ottenuta fonde a 144°.

Le tre diciandiamidi sostituite ottenute si comportano come la diciandiamide ordinaria e cioè per breve ebullizione coll'acido cloridrico subiscono l'idratazione del gruppo cianogeno che passa in residuo ureico e si ottennero così le alchilguaniluree, isomeriche alle guanilalchiluree ottenute coll'acido nitroso, per le quali rimaneva così dimostrato che i gruppi sostituenti sono nel residuo ureico, mentre in quelle ottenute dalle diciandiamidi sono nel residuo guanidico. Nel capitolo XI è già stato detto come dalla fenilencianguanidina si ottenga la fenilenguanilurea; qui dirò che coll'acido cloridrico dalla fenilmetilcianguanidina ho ottenuto la fenilmetilguanilurea:

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>N\cdot \underset{\underset{NH}{\|}}{C}\cdot NH\cdot CN + H_2O = \begin{matrix} C_6H_5 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>N\cdot \underset{\underset{NH}{\|}}{C}\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2$$

e dalla piperidilcianguanidina la piperidilguanilurea:

$$C_5H_{10}:N\cdot \underset{\underset{NH}{\|}}{C}\cdot NH\cdot CN + H_2O = C_5H_{10}:N\cdot \underset{\underset{NH}{\|}}{C}\cdot NH\cdot CO\cdot NH_2$$

Queste guaniluree o diciandiamidine sostituite dell'uno come dell'altro tipo, non dànno coi sali di nichelio dei composti caratteristici come fa la diciandiamidina, ma si formano dei precipitati amorfi. Anche per queste sostanze non dò se non brevi notizie rimandando, per maggiori particolari, alla nota originale (**29**).

La fenilmetilbiguanide, che è una delle sostanze di partenza, si prepara facilmente dal cloridrato di metilanilina e diciandiamide (2) ed io stesso ho dato qualche utile indicazione su questa preparazione. La fenilmetilbiguanide sciolta in acqua e acido acetico coll'aggiunta di nitrito sodico dà una soluzione giallastra dalla quale si sviluppano lentamente delle bollicine gassose a freddo: la reazione si completa a caldo e quindi coll'ammoniaca si precipita un olio che poi cristallizza ed è una miscela dei due prodotti della reazione. La separazione si ottiene trattando questo prodotto con poca acqua ed acido acetico sino a neutralità e così rimane indisciolta la fenilmetilcianguanidina che cristallizzata dall'acqua si ottiene in lamine incolori trasparenti molto simili a quelle della diciandiamide: fonde a 143° senza alterarsi; è neutra al tornasole ed assai solubile nell'acqua, nell'alcool e nel cloroformio, discretamente solubile nel benzolo e poco nell'etere. Dalla soluzione acquosa calda concentrata si separa prima oleosa eppoi cristallizza. Forma un cloridrato che si idrolizza nell'acqua.

La guanilfenilmetilurea si trova nella soluzione acquosa acetica e si precipita coll'ammoniaca ma contiene ancora un po' di fenilmetilcianguanidina che si toglie malamente colla cristallizzazione frazionata: è meglio perciò ripetere la separazione con

(1) Zentr. Blatt. 1914, I, 842.
(2) J. prakt. chem. (2) 84, 408.

acqua ed acido acetico. Per avere un prodotto assolutamente puro si trasforma in nitrato che è poco solubile e da questo si riottiene colla ammoniaca: si presenta così in cristalli prismatici talvolta aggregati fs. a 175° in un liquido trasparente che quasi subito diventa opaco: è discretamente solubile nell'acqua, molto nell'alcool, discretamente nel cloroformio e poco nel benzolo ed ha reazione alcalina al tornasole.

Il composto isomerico la fenilmetilguanilurea si prepara dalla fenilmetilcianguanidina scaldata per pochi minuti con acido cloridrico diluito e così precipita come cloridrato da cui si separa la base che dall'acqua si ottiene in aghetti bianchi che fondono a 141 °, e il prodotto fuso scaldato a 160-170° si fa opaco per deposizione di sostanza solida con sviluppo di ammoniaca. Con solfato di rame e ammoniaca dà un composto colore fior di pesco, mentre l'isomero dà un precipitato fioccoso azzurro chiaro: anche essa ha reazione basica al tornasole.

Dalla piperidilbiguanide [1] sotto forma di solfato in soluzione acquosa con nitrito sodico ed acido acetico, conducendo l'operazione similmente al caso precedente, ottenni e separai la piperidilcianguanidina in lamelle splendenti incolori fs. a 172-173° in un liquido che non si altera anche sovrascaldato: ha reazione neutra ed è discretamente solubile nell'acqua ed assai nell'alcool e nel cloroformio. La guanilpiperidilurea cristallizzata dall'acqua fonde 177°-178° ed il fuso a quella temperatura dopo poco s'intorba per separazione di sostanza solida. È basica ed il picrato fonde a 190° decomponendosi.

La piperidilguanilurea che si ottiene scaldando per pochi minuti con acido cloridrico la piperidilcianguanidina non fu separata allo stato libero essendo moltissimo solubile, ma ne preparai il picrato che fonde a 245°.

Colla fenilbiguanide e l'acido nitroso feci parecchie prove, ma ottenni soltanto la fenilguanilurea e siccome questa forma un nitrato poco solubile la reazione è bene farla sciogliendo questa biguanide nell'acqua con acido nitrico ed aggiungendo poi una soluzione di nitrito sodico: la reazione è vivace e subito si depone il nitrato di fenilguanilurea che purificato dall'acqua con carbone è ben cristallizzato incolore e a 211-212° si decompone con annerimento. La base liberata colla soda ed estratta coll'etere cristallizzata dall'acqua si ottiene in lunghi aghi trasparenti incolori fs. a 144° ed è solubilissima nell'alcool, ed assai nell'acqua e poco nel benzolo. Scaldata sopra il punto di fusione, e cioè verso 180°, svolge gas e forma una sostanza solida cristallina. Questo fenomeno è stato riscontrato per tutte le guaniluree qui descritte ma non fu particolarmente studiato: solo per la fenilenguanilurea si constatò che si elimina una molecola di ammoniaca e si ottiene un biurete sostituito derivante da due molecole della guanilurea (**24**). Può essere che succeda lo stesso per le altre alchilguaniluree ma per le guanilalchiluree è più probabile che con eliminazione di ammoniaca si formi una biguanide sostituita con due residui ureici alchilati.

[1] Ber. 24, 902.

PUBBLICAZIONI

DA CUI VENNE DESUNTA LA PRESENTE MEMORIA

1. Pellizzari G. *Ricerche sulla guanidina*: I. *Anilguanidina*. Gazz. chim. ital. (1891) 21, I, 330.
2. Pellizzari. *Ricerche sulla guanidina*: II. *Fenilguanazolo*. Ibid. (1891) 21, II, 141.
3. Pellizzari. *Ricerche sulla guanidina*: III. *Nitroguanidina*. Ibid. (1891) 21, II, 405.
4. Pellizzari e Tivoli. *Azione del cloruro di cianogeno sulla fenilidrazina*. Ibid. (1892) 22, I, 226.
5. Pellizzari e Cuneo. *Ricerche sulla guanidina*: IV. *Amidoguanidina e suoi derivati alchilici*. Ibid. (1894) 24, I, 222.
6. Pellizzari. *Guanazolo e suoi derivati alchilici*. Ibid. (1894) 22, I. 481.
7. Pellizzari e Cuneo. *Urazolo e triazolo*. Ibid. (1894) 24, I, 499.
8. Pellizzari. *Ricerche sulla guanidina*: V. *Nuovi derivati dell'amidoguanidina*. Ibid. (1896) 26, II, 179.
10. Pellizzari. *Sopra la preparazione di alcune idrazidi e loro prodotti di trasformazione*. Rend. Lincei (1899) VIII, 1° sem. 327.
11. Pellizzari e C. Roncagliolo. *Ricerche sul guanazolo*. Gazz. chim. ital. (1901) 31, I, 477.
12. Pellizzari e Rickards. *Composti dell'amidofenilguanidina colle aldeidi e coi chetoni*. Ibid. (1901) 31, I, 526.
13. Pellizzari e C. Roncagliolo. *Sopra le fenilenamidoguanidine isomeriche*. Gazz. chim. ital. (1901) 31, I, 513.
14. Pellizzari e Cantoni. *Azione del bromuro di cianogeno sull'idrazina*: I. Ibid. (1905) 35, I, 291.
15. Pellizzari e F. Roncagliolo. *Azione del bromuro di cianogeno sull'idrazina*: II. Ibid. (1907) 37, I, 434.
16. Pellizzari. *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina*: II. Ibid. (1907) 37, I, 611.
17. Pellizzari e Repetto. *Azione del bromuro di cianogeno sull'idrazina*: III. N-*amidoguanazolo* (*guanazina*). Ibid. (1907) 37, II, 317.
18. Pellizzari. *Sull' n-amidotriazolo* 1-3-4 (*tetrazolina*). Ibid. (1909) 39, I, 520.
19. Pellizzari. *Derivati dell'idrazodicarbonamide e dell'urazolo*. Ibid. (1911) 41, I, 30.
20. Pellizzari. *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina*: III. *Difenilamidoguanazolo*. Ibid. (1911) 41, I, 54.
21. Pellizzari. *Triazolo e suoi derivati*. Ibid. (1911) 41, II, 20.
22. Pellizzari e Gaiter. *Sopra la preparazione dell'amidoguanidina e della diamidoguanidina*. Ibid. (1914) 44, II, 72.
23. Pellizzari e Gaiter. *Sulla triamidoguanidina*. Ibid. (1914) 44, II, 78.
24. Pellizzari e Gaiter. *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina*: IV. *Passaggio a derivati della o-fenilendiamina*. Ibid. (1918) 48, II, 151.

24 *bis*. Pellizzari. *Sull' o-amidofeniturea*. Ibid. (1919) 48, I, 16.

25. Pellizzari. *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina*: V. *Derivati della melamina*. Ibid. (1921) 51, I, 89.
26. Pellizzari. *Sintesi della o-fenilendicianguanidina dalla o-fenilendiamina*. Ibid. (1921) 51, I, 140.
27. Pellizzari. *Passaggio dalla guanidina alla cianamide e dalla biguanide alla diciandiamide*. Ibid. (1921) 51, I, 224.
28. Pellizzari. *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina*: VI. *Cloruro di o-fenilenammelile*. Ibid. (1922) 52, I, 199.
29. Pellizzari. *Derivati alchilici della diciandiamide e della diciandiamidina*. Ibid. (1923) 53, I, 384.
30. Pellizzari. *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina*: VII. *Derivati della guanazina*. Ibid. (1923) 53, II, 661.
31. Pellizzari. *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina*: VIII. *Derivati exoalchilici della melamina*. Ibid. (1924) 54, I, 177.
32. Pellizzari. *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina*: IX. *o-fenilentioammelina*. Ibid. (1924) 54, I, 451.

INDICE

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume I-XXXIII. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII.
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI.

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti delle Adunanze Solenni. Vol. I-III.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. Vol. I-IV.
» » » » » Boll. 1°-3°
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.

Annuario 1882-1924.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXIX.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-III.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia.
Indici degli Atti Accademici (in preparazione).

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1924

Notizie degli Scavi. Vol. XXI, in fascicoli trimestrali (1)	L. **120,00**
Rendiconti scienze morali. Vol. XXXIII, idem (1, 2, 3)	» **54,00**
Memorie, » » Vol. XVII, in fascicoli varî (1, 2, 3)	prezzi varî
Monumenti antichi, Vol. XXIX, puntata 1ª (1)	» **280,00**
Rendiconti scienze fisiche, Vol. XXXIII, in fascicoli bimensili (1, 2, 3) . .	» **108,00**
Memorie, » » Vol. XIV, in fascicoli varî (1, 2, 3)	prezzi varî
Rendiconto adunanza solenne. Vol. III (fascicolo 10°) (1, 2, 3)	» **8,00**
Annuario (1, 2, 3)	» **4,00**

(1) In vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (4).
(2) » » » » » Maglione e Strini, Via Due Macelli 88, Roma (7).
(3) » » » l'Amministrazione dell'Accademia, Via della Lungara 10, Roma (29).

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO XVIII.

GINO LORIA

DA DESCARTES E FERMAT A MONGE E LAGRANGE

CONTRIBUTO ALLA STORIA DELLA GEOMETRIA ANALITICA

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange.
Contributo alla storia della geometria analitica.

Memoria del Corrisp. GINO LORIA

presentata nella seduta del 18 novembre 1923.

Tutti coloro, a cui punse vaghezza di conoscere l'opera donde comincia la letteratura relativa al metodo delle coordinate, provarono una insormontabile delusione; chè *La géométrie* di Descartes differisce da un trattato moderno di geometria analitica infinitamente più di quanto si differenzino due esposizioni, l'una antica e l'altra moderna, di qualunque altra disciplina matematica. Chi poi da tal fatto è spinto ad investigare la evoluzione di quel ramo dello scibile, cozza contro assai gravi difficoltà, cagionate specialmente da due fatti. Il primo è che Descartes (e lo stesso può ripetersi relativamente a Fermat) considerò la novella disciplina siccome una semplice metamorfosi prodotta nella geometria degli antichi dall'influenza dell'algebra, poco dianzi trasferitasi dall'Italia alla Francia; onde presentasi spontaneo il paragone dell'autore del *Discours de la méthode* con Cristoforo Colombo, sceso nella tomba nell'ignoranza di avere scoperto un nuovo mondo; tale stato di cecità si trasmise da quel sommo ai propri immediati discepoli, i quali preferirono commentare la parte algebrica de *La géométrie* al recare quei perfezionamenti di cui aveva estremo bisogno la tecnica delle coordinate. L'altra ragione della trascuranza di cui soffrì per qualche tempo il metodo di cui ragioniamo è da cercarsi nel sorgere e prosperare del calcolo infinitesimale, appunto allora costituitosi in Inghilterra e Germania, nuovo sole a cui si volgevano tutti gli sguardi. Per conseguenza, chi voglia conoscere la prima fase di sviluppo di quel metodo, piuttosto che ricorrere a pubblicazioni scientifiche, deve compulsare i carteggi dei pensatori del tempo: e tale onesto spionaggio rivela un lungo periodo, durante cui chi usava le coordinate procedeva con passi lenti ed incerti, non senza riuscire ad evitare ignominiose cadute. Ma a quel metodo ricorsero, per forza naturale di cose, coloro che si proposero di applicare i nuovi calcoli (e specialmente la simbolica leibniziana) all'investigazione delle proprietà dell'estensione figurata, in particolar modo allo studio delle curve piane; ebbero così origine vaste, profonde, feconde ricerche che portarono alla costituzione della teoria delle linee algebriche, la quale in tal modo conseguì durante la prima metà del sec. XVIII, basi talmente solide che non vennero in seguito rimosse, nè tampoco sostanzialmente modificate. Nel frattempo i vaghi accenni fatti da Descartes intorno all'estensione allo spazio, del concetto di coordinate, dopo essere stati

negletti per circa un cinquantennio, venivano esumati e svolti e diedero vita a due nuovi importantissimi capitoli della geometria dello spazio, teoria delle curve sghembe e teoria delle superficie, che entrambe, prima dello spirare del secolo XVIII, ricevevano uno straordinario impulso e mirabili perfezionamenti per opera di Monge. Ora, per uno di quei fenomeni strani, che non di rado presenta la storia del pensiero umano, mentre le coordinate erano state brillantemente applicate allo studio dei fatti relativi alle complicate figure limitate da linee e superficie curve, nessuno si era domandato quali servigi esse potevano prestare nell'indagine delle proprietà di quelle semplicissime, che si riguardano di esclusiva pertinenza della geometria elementare. A siffatta questione rispose in modo degno di lui un sommo matematico italiano, Lagrange, mostrando in tal modo, col fatto, come non esista soggetto, per quanto umile, su cui lo splendore del genio non sappia projettare mirabile luce. Da quel momento le questioni, metriche e di posizione, concernenti punti, rette e piani, entrarono a far parte del programma di qualunque trattazione completa del metodo delle coordinate. La prima, in ordine di tempo, di tali esposizioni reca la firma del Lacroix; e dal grande trattato, in cui egli (sia pure incidentalmente) ha insegnati i rudimenti della geometria analitica, trae origine la letteratura moderna relativa a tale disciplina; cosicchè si può dire che appunto in quel momento sia stato gettato il solido ponte che unisce *La géométrie* di Descartes alla variopinta schiera di manuali, grandi e piccoli, che a centinaia videro la luce durante quest'ultimo secolo.

A documentare che tali siano state le fasi di sviluppo dell'importante branca della matematica creata da Descartes e Fermat è intesa la presente Memoria.

Frutto di circa un quarto di secolo di studi [1], essa presenta ancora imperfezioni e lacune; ed io certamente non mi sarei deciso a licenziarla per la stampa, ove non avessi riflettuto che, quando si è ormai da gran tempo varcato « il mezzo del cammin di nostra vita », è imprudente di fare assegnamento sull'incerto domani. Tuttavia, malgrado le manchevolezze che non dissimulo e la concisione impostami dal desiderio di non occupare troppe pagine di questo volume, io m'illudo che i competenti riconosceranno che questo scritto arreca un non ispregievole contributo ad una delle questioni storico-matematiche più importanti e spinose fra le irresolute, come stanno a provarlo i dibattiti che essa provocò fra eminenti studiosi [2].

[1] Cfr. la comunicazione preliminare *Pour une histoire de la géométrie analytique* (« Verh. des III intern. mathem. Kongresses ». Heidelberg 1904, pp. 562-574).

[2] Cfr. l'esordio del § 2 del Cap. I della presente Memoria.

SOMMARIO

CAPITOLO PRIMO

I precursori di Renato Descartes.

§ 1. — COORDINATE IN OPERE DELLA CLASSICA ANTICHITÀ.

Intorno alle origini del metodo delle coordinate ebbe, per molto tempo, generale favore l'opinione che M. Chasles espressa con le celebri frasi: « Cette doctrine de Descartes, dont aucun germe ne s'est trouvé dans les écrits des anciens géomètres, et la seule, peut-être, dont on puisse dire, comme Montesquieu de son *Esprit des lois*, PROLEM SINE MATRE CREATAM » (1). Ma, con l'approfondirsi e l'ampliarsi della ricerca storica, con la reiterata constatazione dell'applicabilità, allo sviluppo delle teorie matematiche, del principio che « natura non facit saltum », nacquero dei dubbî intorno all'analogia fra il metodo delle coordinate e Minerva uscita, armata di tutto punto, dal cranio di Giove. Ed infatti lo studio approfondito delle opere costituenti la geometria superiore degli antichi, compiuto da persone in grado di distinguere l'essenziale dall'accessorio, la sostanza dalla forma, portò a concludere (2) che la geometria analitica dovette principal-

(1) *Aperçu historique* etc. (II éd., Paris 1875), p. 94.
(2) R. Baltzer, in Pappo ed. Hultsch (Berlino 1878), p. 1232.

mente la vita alla traduzione delle pesanti argomentazioni greche nel linguaggio espressivo dal calcolo letterale. Tale opinione, diffusasi poco dopo essere stata ripetuta [1] nella prefazione di un eccellente trattato, trovò una luminosa e definitiva conferma con la metodica investigazione della teoria delle sezioni coniche, quale leggesi in Apollonio [2]. Essa, infatti, menò alla conclusione che quella teoria è basata esclusivamente sopra i concetti e le proposizioni esposti da Euclide ne' suoi *Elementi*, ond'è intelligibile a tutti coloro che sono famigliari con gli strumenti costantemente usati nella geometria di misura dal celebre professore del museo di Alessandria. Questi differiscono da quelli di cui ci serviamo noi, per essere i numeri sostituiti da segmenti e i loro prodotti binarî da rettangoli o quadrati e per il costante intervento di rapporti e proporzioni. Ebbe così origine un' « algebra geometrica » che permette la risoluzione di tutti i problemi di primo e secondo grado, cioè di tutte le questioni che s'incontrano nella teoria delle sezioni coniche. Intorno all'applicazione di tale procedura allo studio delle linee piane, giova anzitutto rilevare in generale che il « sintomo », mediante cui gli antichi solevano rappresentare una curva, disimpegna lo stesso ufficio dell'equazione della curva stessa; in particolare notiamo che nello scritto sui *Luoghi piani* di Apollonio Pergeo [3] si trovano varie proprietà caratteristiche della retta e della cirrenza che equivalgono alle differenti forme con cui se ne possono scrivere le equazioni cartesiane, mentre la definizione planimetrica delle sezioni coniche, usata da quel celebre geometra nel suo « opus magnum », equivale all'equazione di una curva di secondo d'ordine riferita ad un diametro ed alla tangente in un estremo [4]; ed i cambiamenti, che egli fa subire a quella definizione, non differiscono, in fondo, da trasformazioni di coordinate. Ed appunto giovandosi di siffatti artifici il prelodato matematico perviene a molte importanti relazioni metriche, le più famose delle quali sono quelle che tutti conoscono sotto il nome di « teoremi di Apollonio ».

Accenniamo di volo la presenza, per quanto nascosta, di coordinate polari nella definizione della spirale di Archimede ed il fatto che, nella geometria greca, l'uso di coordinate cartesiane non è limitato allo studio dei fenomeni aventi per teatro il piano; chè nella famosa memoria di Archimede *Sopra le conoidi e le sferoidi* s'incontra un gran numero di ragionamenti nei quali è facile di ravvisare una identità sostanziale con altri in uso nelle esposizioni della teoria delle quadriche mediante coordinate cartesiane; anzi, i pochi particolari in cui entra il Siracusano inducono a credere si trattasse di procedimenti generalmente noti. Debito di giustizia impone però di avvertire che la mancanza, nell'antica matematica, del concetto di numeri negativi impose la necessità di distinguere in ogni proposizione parecchi e spesso molti casi, il che rese lo stile pesante e le ricerche più ardue; in ciò appunto consiste l'inferiorità dell'« algebra geometrica » rispetto ai metodi moderni, e in ciò deve cercarsi il motivo dell'abbandono di essa da parte dei geometri posteriori.

(1) Baltzer, *Analytische Geometrie* (Leipzig 1882), p. IV.

(2) H. G. Zeuthen, *Die Lehre der Kegelschnitte in Altertum* (Kopenhagen 1886).

(3) Cfr. G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, II ed. (Milano 1914), pp. 393-397.

(4) Gli è ciò che avverte anche lo Chasles scrivendo: « elle joue, comme on voit, dans ses mains. à peu près le même rôle que l'équation du second degré à deux variables dans le système de géométrie analytique de Descartes » (*Aperçu historique*, p. 18).

Nè, finalmente, va dimenticato che le linee usate dagli agrimensori e dagli auguri romani sotto i nomi di *decimanus* e *cardo*, altro non sono se non due rette fra loro perpendicolari, a cui venivano riferiti tutti i punti del terreno, a scopo pratico.

§ 2. Anticipazioni reali o presunte della geometria cartesiana.

I cardini della geometria analitica odierna sono: 1º) le coordinate; 2º) la rappresentazione geometrica delle funzioni [1]. Ora, mentre quelle, come vedemmo testè, non rimasero del tutto ignote ai nostri progenitori scientifici, al concetto di funzione, nemmeno sotto i suoi più semplici aspetti, essi non si sono mai elevati, onde riuscirebbe vano qualunque tentativo per dimostrare che essi siano giunti a percepire la sostanziale identità fra l'investigazione delle prerogative di una linea piana e lo studio della corrispondente dipendenza funzionale. Ora tale circostanza importantissima, anche se giunse a maturità soltanto nella seconda metà del sec. XVII, non rimase del tutto ignota ai geometri anteriori; anche se la storia non si curò di registrare colui che per primo l'avvertì, essa è però in grado di segnalare alcuni documenti che ne fanno cenno in epoca abbastanza remota. Il più cospicuo è il *Tractatus de latitudinibus formarum*, opera scritta nel 1361, e di cui si conoscono non meno di quattro edizioni a stampa (1482, 1486, 1505, 1515); ne è autore Nicola Oresme, nato a Caen (o nelle vicinanze di questa città) nel 1323 e morto, vescovo di Lisieux, l'11 luglio 1382; ivi egli non si atteggia ad inventore delle cose che espone, ma le attribuisce ad antichi (*veteres*) non meglio definiti [2].

Col nome di *forma* (tolto dall'aristotelico εἶδος che significa il contrapposto della materia priva di conformazione e qualità determinate, cioè il principio di dare forma al mondo) l'Oresme designa qualunque fenomeno dipendente da una variabile unica; in essa intervengono due grandezze dette una *longitudo* e l'altra *latitudo*; ed il citato matematico le rappresenta con la stessa procedura empirica applicata oggi ad es. per rappresentare le variazioni del corso di un titolo industriale o della temperatura atmosferica in un assegnato periodo di tempo. Si è, dunque, in presenza della rappresentazione grafica nella sua forma primitiva, limitata, cioè, ai valori positivi delle variabili ed alle funzioni ad un valore. Secondo l'Oresme, la *latitudo* può essere *uniforme* o *difforme*. Nel primo caso è rappresentata da una retta parallela alla linea assunta per fondamentale; l'altro caso, a sua volta, si suddivide in due sotto-casi: cioè, può aversi una *latitudo secundum se totum difformes*, ed allora la linea rappresentativa è del tutto arbitraria, mentre per la *latitudo secundum partem difformes* la rap-

(1) Dal non avere nettamente distinti questi due ingredienti ebbe origine la polemica fra S. Günther e H. G. Zeuthen, provocata dal primo con l'opuscolo *Die Anfänge und die Entwickelungstadien des Coordinatenprincipes* (« Abh. des naturforschenden Gesell. zu Nümberg », tom VI: trad. ital. nel tom. X, 1877, del « Bull. di bibl. e storia ecc. »), a cui rispose il secondo con la *Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument* (« Bull. de l'Acad. danoise » 1888); una breve replica del Günther leggesi nella « Neue philologische Rundschau » 1888.

(2) Fra questi non si trovava presumibilmente il monaco Suisset, professore a Oxford, il quale, come notò J. Timtchenko (« Bibl. mathem. », 3ª ser., tom. I, 1900, pp. 515-516), in un'opera astronomica (*Calculationum liber Suisethi anglici*) stampata a Venezia nel 1498, considerò esclusivamente le « latitudines uniformiter difformes ».

presentazione grafica consta di varie parti, alcune delle quali appartengono alla categoria delle uniformi. L'Oresme ha anche considerate le latitudini *difformiter difformes*, le quali corrispondono a curve rappresentative prive di qualunque regolarità. Inoltre, ben prima di Keplero, egli ha notato che, nei pressi di un massimo o di un minimo, l'accrescimento di una variabile è nullo. Da tutto ciò emerge che egli non meritava la dimenticanza in cui venne lasciato durante parecchi secoli ([1]) e da cui, cinquant'anni or sono, lo trasse un benemerito storico tedesco ([2]).

Dopo di avere ricordati coloro che a ragione furono considerati come precursori di Descartes, è opportuno fare cenno di coloro che lo furono a torto.

E primo ci si presenta un grande algebrista francese, Francesco Viète (n. nel 1540, m. a Parigi il 13 dicembre 1603), nelle cui opere complete si cerca indarno alcun cenno delle ascisse per individuare i punti di una retta, sistema di cui egli fu detto inventore ([3]); se poi nelle seconde sue note *Ad logisticam speciosam*, oggi perdute, si trovasse, come venne asserito senza prova ([4]), l'applicazione dell'algebra alla geometria, è un'asserzione che è impossibile confutare, trattandosi di una semplice congettura.

Fra coloro, a cui venne a torto ([5]) attribuita la conoscenza della geometria analitica, incontriamo il matematico del duca di Savoja G. B. Benedetti (n. a Venezia il 14 agosto 1530, m. a Torino il 20 gennaio 1590); a torto, perchè nelle sue ben note *Diversarum speculationum* etc. (Aug. Taurin. 1585) si leggono bensì problemi geometrici risoluti con l'aiuto del calcolo o viceversa problemi algebrici sciolti geometricamente, ma di coordinate non si trova cenno alcuno.

Un terzo geometra, che si annoverò senza ragione fra gli inventori della geometria analitica, è il patrizio di Ragusa Marino Ghetaldi (1566–11 aprile 1626) ([6]), grazie alla sua opera postuma *De resolutione et compositione mathematica* (Roma 1630). Ma a quella conclusione si giunse per effetto di orgoglio nazionale o senza avere studiata a fondo quell'opera ([7]): giacchè in essa non si trova che una metodica applicazione dell'algebra

([1]) L'Hankel ha osservato (*Zur Geschichte der Mathem. in Altertum und Mittelalter*, Leipzig 1874, p. 351) che nel 1398, fra i corsi obbligatorii per gli studenti dell'Università di Colonia, se ne trova uno sulle « latitudinibus formarum » ed il Günther (« Bull. di bibiol. ecc. », tom, X, 1877, p. 376 e 377) che altrettanto può ripetersi riguardo a Vienna e Ingolstadt.

([2]) M. Curtze. *Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme* (Berlin 1870). L'opera del prelato francese venne nuovamente analizzata con scrupolosa cura da H. Wieleitner (*Der « Tractatus de latitudinibus formarum » des Oresme*, « Bibl. mathem. », III ser., vol. XIII, 1912–'13, pp. 115–45), il quale rettificò in alcuni punti le conclusioni del Curtze.

([3]) E. d'Ovidio, *Geometria analitica* (III ed., Torino 1903, p. 11); da quest'opera derivano presumibilmente i passi di G. Fano e G. Guareschi criticati da G. Eneström (Bibl. mathem., » III ser., tom. XIV, 1913–'14, p. 354).

([4]) F. Ritter, « Bull. di bibl. e storia », tom. I, 1868, p. 245. M. Chasles (*Aperçu hist.*, ed. cit. p. 52) parla di Viète come precursore di Descartes, senza precisare il senso dell'anticipazione.

([5]) G. Libri, *Histoire des sciences mathém. en Italie*, tom. III (Paris 1840), p. 142, e Note XXVIII; Chasles, op. cit., pp. 540–541.

([6]) A. Favaro, *Amici e corrispondenti di G. Galilei*, XXIV [*Marino Ghetaldi*] (« Atti del r. Ist. veneto, tom. LXIX, 2a parte, 1910, pp. 303–324).

([7]) La rettifica dell'opinione errata è merito di E. Gelcich (*Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie* « Abh. zur Gesch. der Mathem. », IV Heft, 1882, pp. 191–231), le cui vedute si trovano confermate nella nota di H. Wieleitner, *Marino Ghetaldi und die Anfänge der Koordinatengeometrie* (« Bibl. mathem. » 3a sez., tom. XIII, 1912–'13, pp. 242–247).

alla scoperta delle soluzioni geometriche dei problemi di primo e secondo grado; ora ricerche di tal genere possono bensì preparare da lungi l'avvento delle coordinate, ma sono ben lungi dal costituire tale metodo; si aggiunga che procedure siffatte erano allora in pubblico dominio, come basta a provarlo l'*Algebra discorsiva numerale e lineare* (Bologna 1618) di P. A. Cataldi (m. a Bologna l'11 febbraio 1626), volume probabilmente conosciuto dal Ghetaldi e nel quale alle operazioni aritmetiche sono sostituite costruzioni geometriche.

Con questi cenni chiudiamo quanto concerne il periodo d'inconscia preparazione del metodo analitico; da questo punto comincia la vera storia.

CAPITOLO II.

Descartes e Fermat nella storia delle coordinate.

§ 1. — R. Descartes.

Colui che passa per creatore del ramo di scienza di cui seguiamo le vicende, nacque a La Haye (in Turenna) il 31 marzo 1596 da famiglia ragguardevole, appartenente però — per usare la nomenclatura del tempo — non alla grande ma alla piccola nobiltà, non alla « noblesse d'épée », ma alla « noblesse de robe », grazie ai membri di essa che appartennero alla magistratura. Non appena uscito dall'infanzia (Pasqua 1604), egli fu posto in educazione nel collegio reale de La Flèche (Angiò) diretto dai gesuiti; ivi rimase non meno di otto anni, e poi prese a viaggiare visitando, non solo la dolce terra di Francia, ma anche l'Olanda, la Germania, l'Ungheria e l'Italia. Benchè l'itinerario delle peregrinazioni compiute dal giovane gentiluomo non sia noto che in parte, pure si sa che egli, talora sotto l'assisa del soldato, assistè ad alcuni degli avvenimenti notevoli così numerosi nel periodo in cui divampò la guerra dei trent'anni (1618–1648), o, per usare le sue stesse parole, passando il tempo a « rouler ça et là dans le monde, tachânt d'y être spectateur plutôt qu'acteur en toutes les comédies qui s'y jouent » [1]. I particolari di queste scorrerie non pervennero sino a noi: si è soltanto serbato il ricordo del 10 novembre 1619, giorno in cui, per dichiarazione sua, egli scoperse i fondamenti di una disciplina mirabile. Il seguente inverno 1619–'20 fu un'epoca decisiva per tutta la carriera del sommo pensatore, giacchè, appunto allora, egli giunse alle quattro famose regole per la ricerca della verità, che servirono a lui di guida durante tutta la vita e che furono poi e sempre serviranno come filo conduttore per coloro che aspirano a scrutare il mistero che ne circonda. Nella fase successiva della sua vita (1620–28) Descartes non abbandonò le abitudini randagie e cercò sempre nuove occasioni di applicare le norme da lui formulate, per liberarsi dai pregiudizi di cui, per eredità o per la ricevuta educazione, egli era imbevuto: in tal modo spianava il terreno su cui erigere l'edificio che doveva assicurargli l'immortalità. Per essere poi libero dai vincoli imposti dalla convivenza con i propri connazionali, sul finire del 1628 decise di stabilirsi al-

[1] *Discours de la méthode*, tom. VI, p. 28 dell'ed. cit. più avanti delle *Oeuvres de Descartes*.

l'estero e, fra le molte contrade che già conosceva, prescelse i Paesi Bassi, terra di protestanti ove non poteva venire raggiunto dagli strali che la Chiesa cattolica spiccava contro gli eterodossi di qualsiasi specie. Il primo periodo di tale soggiorno (novembre 1628–settembre 1629) fu totalmente assorbito dalla redazione di un trattato di metafisica; distolto da siffatta occupazione dalla notizia di un impressionante fenomeno astronomico osservato a Roma addì 29 marzo 1629, si volse per qualche tempo allo studio della fisica del cielo, frutto del quale fu un'estesa opera intitolata *Del mondo*, in cui il sistema copernicano veniva presentato con marcata predilezione: la condanna pronunziata contro Galileo persuase Descartes, non solo a desistere da una pubblicazione minacciosa di noie e di guai, ma persino a distruggere il proprio manoscritto ([1]). In pari tempo egli si accinse a presentare le conclusioni, a cui era giunto, sotto forma tale che non lo esponesse a venire citato a comparire dinnanzi al terribile tribunale della santa Inquisizione; e non deve essere riuscito a lui difficile l'eseguire tale metamorfosi se, solo quattro anni dopo, potè vedere la luce ([2]) il celebre *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences*, seguìto dai tre saggi intitolati *Dioptrique*, *Météores*, *Géométrie*. L'accoglienza che quest'opera ricevette da parte degli studiosi fu certamente lusinghiera ([3]), ma non unanimemente favorevole; per conseguenza, durante il triennio 1637–'40, egli fu costretto a chiarire il proprio pensiero e rispondere alle obiezioni, più o meno fondate, rivoltegli da matematici e fisici; coi filosofi dovette invece battagliare nel corso del successivo decennio ([4]).

La fama di Descartes raggiunse allora tale altezza che il governo francese spontaneamente gli conferì una vistosa pensione, nella segreta speranza d'indurlo a rimpatriare. Ma indarno! Chè nel frattempo lo Chanut, ambasciatore di Francia alla corte di Svezia, avendo parlato entusiasticamente del grande filosofo alla regina Cristina, questa insistette perchè egli si stabilisse nella sua corte e finì per conseguire lo scopo. Infatti il 1° settembre 1649 egli abbandonò l'Olanda per il più settentrionale regno d'Europa; per sua sventura, chè una violenta polmonite, prodotta dalla rigidezza di quel clima, lo spense (11 febbraio 1650), gettando nel lutto gli estimatori e discepoli che egli annoverava in tutto il mondo e che ragionevolmente attendevano da lui altre opere degne della sua fama. Momentaneamente venne sepolto a Stockolma, ove erasi spento; ma nel 1666 i numerosi ammiratori, che egli annoverava in patria, iniziarono un'energica agitazione che culminò col ritorno in patria della salma dell'eminente pensatore; essa giunse a Parigi il 24 giugno 1667, e, grazie alla protezione del re Sole, venne inumata nella chiesa di Sainte Geneviève–du–Mont ([5]). Da questo tranquillo riposo pensò toglierlo l'Assemblea nazionale per collocarla nel Pantheon:

([1]) A. Favaro, *La condanna di Galileo e le sue conseguenze per il progresso degli studii* (« Scientia », luglio 1916).

([2]) La stampa ne fu ultimata il 6 giugno 1637.

([3]) Un primo elenco delle edizioni e delle traduzioni della *Géométrie* fu compilato da G. Eneström. (« Bibl. mathem. », III ser., tom. IV, 1903, p. 211); riguardo alle critiche, vedi più avanti.

([4]) A conferma di tal fatto stanno alcune parole scritte da Descartes al P. Mersenne il 25 gennaio 1647, dalle quali desumesi che egli allora non si occupava più di matematica (*Oeuvres de Descartes*, tom. IV, p. 595).

([5]) L'epigrafe è riprodotta in Montferrier, *Dictionnaire des sciences mathématiques*, tom. I (Paris 1838), p. 434.

la relativa deliberazione ebbe un principio di esecuzione col trasporto dei resti mortali del celebre filosofo nel Jardin Elysée des monuments français; ma, essendo questo stato distrutto per esigenze edilizie, quei venerati resti vennero trasferiti nella chiesa di Saint-Germain-des Près, ove oggi ancora si trovano (1). La mancata solenne apoteosi di Descartes deve attribuirsi esclusivamente alle agitazioni politiche che turbarono la Francia in quest'ultimo secolo, non già ad un intiepidimento dei sentimenti d'ammirazione per il creatore del razionalismo: ciò si desume dalle frequenti edizioni che ebbero i suoi scritti, dalle innumerevoli pubblicazioni intese a popolarizzare o commentare le sue idee e dall'entusiastico consenso che trovò il progetto di pubblicare, in occasione del terzo centenario della sua nascita, un'edizione definitiva di tutte le sue opere, non escluso il carteggio (2).

§ 2. — La « Géométrie » di R. Descartes.

Benchè la *Géométrie* sia dall'autore presentata come *una delle applicazioni* del suo metodo per scoprire la verità, pure lo storico della matematica può analizzarla isolatamente, riserbandosi di ricorrere al carteggio da lui tenuto con scienziati del suo tempo ed ai commenti di poco posteriori, per apprendere i complementi dati a quell'opera da lui stesso o dai suoi discepoli immediati.

Avverte il Descartes (*Oeuvres*, ed. cit. tom. VI, p. 368) che il suo volume « ne pourra être lu que par ceux qui savent déjà ce qui est dans les livres de géométrie »; con tali parole egli evidentemente alludeva, non già a tutto quanto ci tramandarono gli antichi, ma semplicemente a quanto leggesi negli *Elementi* di Euclide. A scrivere quell'opera egli fu indotto dalla osservazione, da lui esposta nel *Discours de la méthode* (*Oeuvres*, tom. VI, pp. 17-18), che « l'analyse des anciens est toujours si astreinte à la considération des figures qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination ». Per ciò egli si propose di fare acquistare alla scienza dell'estensione la generalità di cui già godeva la scienza del numero; donde l'idea di stabilire una cordiale collaborazione fra discipline che sino allora avevano proceduto estranee una all'altra. Tale risultato venne raggiunto introducendo la metodica considerazione di un segmento rettilineo fisso, assunto quale unità di misura e mediante il quale ogni altro analogo segmento viene rappresentato da un numero univocamente determinato (3). Fatto ciò, bisogna trovare quali costruzioni geometriche prendano il posto delle consuete operazioni aritmetiche: ed infatti il nostro matematico espone, in principio del suo trattato, procedimenti del tipo di quelli che oggi si leggono nelle prime pagine di ogni trattato di calcolo grafico. Assurge poi a considerazioni generali intorno

(1) Chi desidera conoscere la relativa epigrafe la troverà nell'articolo di D. E. Smith, *Two mathematical shrines of Paris* (« The American mathem. Monthly », febbraio 1921).

(2) L'esecuzione di tale progetto venne affidata a Ch. Adam e P. Tannery e fu tradotta in atto negli anni 1896-1910. È l'edizione di cui noi ci serviamo, l'ultimo volume della quale contiene una biografia di Descartes, scritta dall'Adam ed alla quale abbiamo attinto a larga mano nel comporre il presente § del nostro lavoro.

(3) Assicura E. Bortolotti (*Esercitazioni matematiche*, tom. III, 1923, p. 86) che la considerazione del segmento unitario si trova già in una *Geometria*, sinora inedita, di R. Bombelli (nato verso il 1530).

alla possibilità di risolvere mediante il calcolo le questioni di geometria, sulla via da seguire per ottenere le equazioni risolutrici e per determinarne graficamente le radici (positive); tali generalità vengono applicate alle equazioni delle forme $z^2 = az \pm b^2$, le quali servono a risolvere tutti i problemi che gli antichi chiamavano « piani ».

Chi desidera vedere altre applicazioni congeneri delle stesse generalità ricorra ad una lettera scritta da Descartes al P. Mersenne, in data 23 agosto 1638 (*Oeuvres*, tom. II, p. 317), e ad altre due da lui dirette alla principessa Elisabetta di Boemia, nelle quali ultime sono stabilite le equazioni in cui traducesi il problema di « costruire un cerchio tangente a tre altri, dati nel medesimo piano ».

Nella *Géométrie* egli si arresta, non già su questa, ma su un'altra questione che, al dire di Pappo, nell'antichità godette di straordinaria rinomanza e sulla quale la sua attenzione era stata attratta, sino dal gennaio 1632, dal notissimo matematico ed orientalista Golio (*Oeuvres*, tom I, pp. 232–235); alludiamo al « problema delle tre o più rette » che, a quanto riferisce il citato commentatore, sotto la forma più generale, enunciasi come segue: « Date in un piano n rette $r_1, r_2, \ldots, r_n$ e dati n angoli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, determinare il luogo geometrico di un punto M tale che, condotti da esso gli n segmenti MR_1, MR_2, ..., MR_n terminati alle rette date e formanti con le stesse gli angoli dati, il prodotto di un assegnato numero di essi stia in un dato rapporto col prodotto dei rimanenti ». Per dare un'idea del modo in cui Descartes lo risolve (limitandosi però ai casi in cui il luogo risulti di ordine non superiore a due), chiamiamo O il punto comune a due (r_1 e r_2) delle date rette e, seguendo il suo esempio, chiamiamo x e y i numeri che misurano i segmenti OR_1 e MR_1; allora, mediante opportune considerazioni di triangoli simili, tutti gli altri segmenti $MR_2, \ldots, MR_n$ si potranno esprimere in funzione di x, y e delle costanti che servono a determinare la scambievole posizione delle date rette; in conseguenza la condizione

$$\frac{MR_1 \cdot MR_2 \ldots MR_k}{MR_{k+1} \cdot MR_{k+2} \ldots MR_n} = \text{cost.}$$

si traduce in una relazione fra x e y: è l'equazione del luogo cercato riferito a O come origine e r_1 come asse delle ascisse, le coordinate essendo in generale oblique. Notisi, però, che Descartes non parla di equazione del luogo, ma osserva che la questione ammette infinite soluzioni, potendosi assumere ad arbitrio x per poi dedurne y. Egli non attribuisce un segno alle coordinate ed alle costanti, ma nota come le equazioni da lui stabilite sussistano soltanto per una speciale disposizione di figura, mentre i ragionamenti fatti sono applicabili in qualunque caso.

Tale schema (in particolare l'espediente di scegliere un asse di riferimento collegato ai dati della questione) venne mantenuto ancora per più di un secolo almeno, da tutti coloro che risolsero col calcolo problemi locali. Descartes si avvide subito che, con l'avere stabilita l'equazione del luogo risolutore del problema di Pappo, la questione che egli erasi proposto non era esaurita, essendo ancora necessario determinare in ogni caso le qualità della linea geometrica trovata; ma, per completare la soluzione, sono necessarii altri principii, oltre quelli contenuti nel I libro della *Géométrie*: all'esposizione di essi è consacrato il II libro, intitolato *Sopra la natura delle linee curve*, ed al quale ora ci volgiamo.

Il grande geometra comincia ricordando la distinzione dei luoghi, fatta dagli antichi, in piani, solidi e lineari; critica poi l'epiteto di meccaniche dato a certe linee, dal momento che esso in realtà compete anche alla retta ed al cerchio, potendosi l'una e l'altro descrivere per mezzo di strumenti. Dal lungo discorso che egli dedica a questo argomento il lettore moderno argomenta che egli percepiva chiaramente la distinzione delle linee piane in algebriche e trascendenti, quantunque egli non insegni i caratteri essenziali delle une e delle altre. Per meglio chiarire il suo concetto, egli considera una classe di curve che si possono costruire servendosi d'un apparato da lui altrove chiamato *compasso mesolabico* (*Oeuvres*, tom. X, pp. 234–242): sono le linee aventi per equazione polare generale $\varrho = \alpha : \cos^{2n} \omega$ (¹), di cui la più semplice ($n = 0$) è un cerchio. Passa poi a classificare le linee che « ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque équation », la quale deve supporsi algebrica (²) perchè (prosegue il nostro autore), se in essa entrano soltanto il prodotto o i quadrati delle due quantità indeterminate, la curva corrispondente si dirà di *primo genere* (³); se invece l'equazione sale al 3° od al 4° grado, si dirà di *secondo*; se al 5° o 6°, di *terzo*; ecc. Il lettore non mancherà di osservare che in tale definizione è tacitamente ammesso che il grado della equazione di una curva non dipende dalla scelta della retta assunta come asse di riferimento; che l'esistenza di tale sottinteso non sia totalmente sfuggita a Descartes si desume dall'osservazione seguente, da lui fatta più innanzi (*Oeuvres*, tom. VI, pp. 393–394): « encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'équation plus courte et plus aisée, toutefois, en quelle façon qu'on les prenne, on peut toujours faire que la ligne paraisse du même genre » (⁴). Sebbene la surriferita classificazione abbia avuta esistenza effimera, essendosi osservato che le linee degli ordini $2n - 1$ e $2n$ non hanno molte proprietà comuni, pure non si può dire che egli a torto scrivesse al P. Mersenne, sulla fine del 1637: « ce que je donne au second livre, touchant la nature et les propriétés des lignes courbes et de la façon de les examiner, est, ce me semble, autant au delà de la géométrie ordinaire, que la réthorique de Ciceron est au de là de l'*a b c* des enfants », aggiungendo poco modestamente che « nos neveux ne trouveront jamais rien en cette matière que je ne puisse avoir trouvé aussi bien qu'eux si j'en ausse pris la peine de le chercher » (*Oeuvres*, tom. I, pp. 479–480). Ad ulteriore illustrazione di quanto precede, Descartes stabilisce l'equazione di una nuova linea (di terz'ordine), la

(¹) Cfr. G. Loria, *Spez. alg. und transs. ebene Kurven*. II Aufl., I Bd. (Leipzig 1910), p. 381.

(²) Linee di primo genere sono per Descartes il cerchio e le sezioni coniche; la retta è considerata soltanto incidentalmente (*Oeuvres*, tom. VI, p. 407).

(³) Di linee trascendenti (cicloidi e spirale logaritmica) Descartes si occupò altrove non metodicamente (*Oeuvres*, tom. II, pp. 135, 257, 263 e 306; tom. X. pp. 305–308); l'ignoranza di tali passi spinse Leibniz (ved. l'articolo *De dimensionibus figurarum inveniendis*, « Acta erud, » 1684 o « Math. Schriften », tom. V, Halle 1858, p. 124) a criticare il nostro geometra per avere ristretto il campo della geometria alla considerazione delle figure rappresentabili mediante equazioni algebriche. Per altre osservazioni, tendenti a diminuire l'importanza dell'applicazione dell'algebra alla geometria, si vegga la lettera da lui scritta a Galloys sin dal dicembre 1678 (« Mathem. Schriften. », tom. I, Berlin 1845, p. 183).

(⁴) Torneremo più avanti (p. 791) sulla questione della conoscenza, da parte di Descartes, della trasformazione delle coordinate.

cosiddetta *parabola cartesiana* [1]. Ritorna poi al problema di Pappo per completarne la soluzione col determinare la specie della curva a cui si giunge quando le rette date siano 3 o 4; la ricerca è minuta, tediosa e, ciò che più monta, non esauriente; lo stesso Descartes se ne accorse perchè in data 31 marzo 1638 segnalò al P. Mersenne un caso omesso (*Oeuvres*, tom. II, pp. 82–85); le lacune da lui lasciate diedero poi larga materia di critica da parte dei geometri del tempo suo [2]. Ma poichè esse si possono agevolmente colmare imitando i ragionamenti ed i calcoli da lui esposti, così egli non a torto riteneva di avere insegnata la rappresentazione analitica di tutti i luoghi piani e solidi, epperò trovano applicazione le orgogliose parole con cui egli chiudeva il suo libro: « nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que j'ai expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les trouver » (*Oeuvres*, tom. VI, p. 485).

In seguito il nostro autore mostra che il suo metodo è pure applicabile al caso in cui le rette date nel problema di Pappo siano di numero superiore a quattro, svolgendo i calcoli relativi nell'ipotesi che le date rette siano 5 e che l'ordine del luogo risultante sia 3. Gettando poi uno sguardo all'estesa provincia di cui aveva arricchito il regno della geometria, egli asserisce che, trovata l'equazione di una linea qualsiasi, si è in possesso degli elementi per risolvere tutte le questioni relative alla linea stessa. Per mostrare la verità di tale asserzione, egli tratta il problema di condurre da un punto N dell'asse la normale ad una curva di cui si conosca l'equazione; « c'est ceci le problème », egli dichiara, « le plus utile et le plus général non seulement que je sache, mais même que j'ai jamais desiré de savoir en géométrie » (*Oeuvres*, tom. VI, p. 413). Da questo momento il problema delle normali occupò i geometri grandi e piccoli durante molti decennii; per risolverlo, nell'ipotesi che la data curva sia algebrica, Descartes cerca le condizioni affinchè abbia una radice doppia l'equazione determinatrice delle ascisse x dei punti comuni a quella curva ed un cerchio di centro N; ora ciò accade sempre e soltanto quando il primo membro di quell'equazione ha un fattore della forma $(x-l)^2$; onde alla ricerca di quelle condizioni è applicabile il metodo dei coefficienti indeterminati, a cui il nostro venne condotto appunto in tale occasione (*Oeuvres*, tom. VI, p. 423) e che notoriamente prestò poi e tuttora presta ottimi servigi ai matematici in circostanze svariatissime. Nell'intento di meglio chiarire la natura di tal modo di procedere, Descartes lo applica anzitutto all'ellisse, di cui (*Oeuvres*, tom. VI, p. 415) scrive l'equazione sotto la forma

$$x^2 = ry - \frac{r}{q} y^2$$

[1] G. Loria, op. cit., I Band, p. 51.

[2] Ved. il libello, attribuito a J. Beaugrand, pubblicato da P. Tannery in *La correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri* (Paris 1893), pp. 41 e 43; inoltre la lettera di Descartes al P. Mersenne del 2 marzo 1646 (*Oeuvres*, tom. IV, pp. 363–366), nonchè quanto scrissero Costantino Huygens al P. Mersenne il 17 marzo 1648 (*Oeuvres complètes de Huygens*, tom. I, p. 84), Roberval a Cristiano Huygens il 6 luglio 1656 (ibid., pp. 449–452), questi a Fr. van Schooten il successivo 25 (ibid., pp. 440–442), poi a Roberval due giorni appresso (ibid., p. 664) e di nuovo allo Schooten il 5 dicembre dello stesso anno (ibid., pp. 519–524) e la risposta di questo in data 12 dello stesso mese (ibid., pp. 526–527). Per altre critiche dello stesso Beaugrand a Descartes, ved. *Oeuvres de Fermat, Supplément aux tomes I–IV* (Paris 1922), pp. 98–114.

con un'automatica sostituzione di lettere nell'enunciato di un teorema di Apollonio (*Coniche*, lib. I, prop. XIII), *fatto questo della massima importanza come prova del fatto che la geometria analitica, ne' suoi primordii, non fu che una metamorfosi dell'antica geometria dovuta all'influenza della simbolica algebrica* (cfr. quanto dicemmo nel Cap. I, § 1). Un'altra applicazione del medesimo schema di calcolo si riferisce alla concoide di Nicomede; qui però Descartes non fa se non enunciare la relativa costruzione, lasciando in chi legge il desiderio di conoscere i particolari dei suoi ragionamenti. Meno conciso è il nostro autore nell'applicazione dei medesimi concetti alle ovali che hanno tanta parte nella sua *Diottrica*, evidentemente perchè sentì il bisogno di colmare una lacuna lasciata in quest'opera (1).

Assai più di quanto egli dice a tale proposito, c'interessa l'ultima pagina del II libro della *Géométrie*, chè ivi egli fa un cenno rapido, ma chiarissimo, intorno all'estensione, allo spazio, del concetto di coordinate. A ciò egli perviene mediante una duplice proiezione ortogonale su due piani fra loro perpendicolari; avendo, però, considerata la cosa un po' superficialmente, non si accorse che la conseguente riduzione di problemi stereometrici a questioni piane è effettuabile soltanto in alcuni casi (2); in particolare gli sfuggì che, mentre ciò era possibile riguardo al problema delle tangenti, non lo era affatto riguardo a quello delle normali. *In conseguenza egli commise due non lievi errori*: quello, cioè, di ritenere che una curva gobba, al pari di una linea piana, avesse in ogni punto una normale determinata ed unica, e l'altro di ammettere che le normali in punti corrispondenti delle due proiezioni ortogonali di una linea sghemba fossero le proiezioni di una normale di tale linea (3).

Quanto trovasi esposto nei due primi libri della *Géométrie* abilita Descartes a congegnare metodi per risolvere graficamente i problemi di un grado superiore al secondo, col vincolo di servirsi dei mezzi più semplici possibili (4); e, per meglio illustrare i suoi

(1) Queste curve sono definite mediante una relazione della forma $\varrho_1 + k\varrho_2 = \text{cost.}$, ϱ_1 e ϱ_2 essendo le distanze di un punto della curva da due poli fissi; tale definizione fa risalire a Descartes l'invenzione delle coordinate bipolari, come la definizione della spirale d'Archimede collega quella delle coordinate polari al sommo geometra di Siracusa. Sulle ovali di Descartes si veda il frammento postumo pubblicato in *Oeuvres*, tom. X, pp. 310-328.

(2) Un cenno un po' vago di tale imperfezione fu fatto da M. Cantor per suggerimento di P. Stäckel (*Vorles. über Gesch. der Mathem.*, II Band. II Aufl., Leipzig 1900, p. 816). L. Schlesinger, nella sua versione tedesca della *Géométrie* (2° Aufl., Leipzig 1923, p. 121), si limita a rimandare al Cantor. Più esplicito al riguardo è lo Zeuthen (*Geschichte der Mathem. in XIV und XVII Jahrhundert*, Leipzig 1903, p. 212).

(3) Siaci lecito chiarire questa osservazione col seguente ragionamento: La curva Γ abbia per proiezioni ortogonali, su due piani $\pi_1 \pi_2$ fra loro perpendicolari, le curve Γ' e Γ''. Siano P′ e P″ le proiezioni di un punto P di Γ; t' e n' la tangente e la normale in P′ a Γ, t'' e n'' le rette analoghe per Γ'; t' e t' saranno le proiezioni della tangente t in P a Γ. Sia poi n la retta avente per proiezioni n' e n''. Ora, se è retto l'angolo nt avente per proiezione l'angolo retto $n'\,t'$, uno dei suoi lati dev'essere parallelo a π_1; t in generale non lo è, onde dovrà esserlo n. Similmente si dimostra che n dev'essere parallelo a π_2; ma allora dovrà essere parallela alla retta $\pi_1\,\pi_2$. Ora, in generale, nel fascio costituito dalle normali in π alla curva Γ non vi è alcun elemento parallelo a $\pi_1 . \pi_2$, che è una retta arbitraria dello spazio: dunque n in generale, non è normale a Γ.

(4) Di tale condizione restrittiva parla chiaramente Descartes in una lettera scritta ad un anonimo, forse sullo scorcio del 1637 (*Oeuvres*, tom. I, p. 460). Che egli abbia cominciato assai prima ad occuparsi della risoluzione dei problemi geometrici con dati mezzi è dimostrato da altre due let-

concetti, mostra come il compasso mesolabico, di cui già parlammo (p. 787), abiliti a inserire fra due date rette quante si vogliono medie proporzionali. Però, onde raggiungere l'intento, ebbe bisogno di alcune proprietà fondamentali delle equazioni algebriche, la scoperta delle quali valse a collocarlo fra i creatori della relativa teoria. Procuratosi il corredo algebrico indispensabile, Descartes si volge alla risoluzione geometrica delle equazioni, mostrando che, se queste sono di 3° o 4° grado, si raggiunge lo scopo con la semplice delineazione di una parabola. Applica poi il metodo da lui ideato ai due problemi cubici classici (duplicazione del cubo e trisezione dell'angolo), senza tacere la fondamentale osservazione che ad essi si possono ricondurre tutti i problemi solidi. Per mostrare, poi, che i suoi metodi non sono limitati a siffatti problemi, egli tratta in modo somigliante le equazioni di 6° grado, cioè ne determina le radici segando un'ordinaria parabola con una parabola cartesiana — curva dianzi (v. p. 788) considerata — chiudendo con nuovi sviluppi relativi all'inserzione, fra due rette date, di quattro medie proporzionali.

Tale ritorno ai problemi determinati che forma l'epilogo della *Géométrie* di Descartes, mostra ad evidenza che egli concepì le coordinate, non come uno strumento per investigare le proprietà dell'estensione figurata, ma soltanto come un ausiliare per la risoluzione dei problemi determinati; ciò spiega perchè nella *Géométrie* manchi il più lieve accenno intorno alla rappresentazione grafica delle funzioni e stabilisce una netta separazione fra quell'opera ed altre posteriori che erroneamente si sogliono considerare quali derivazioni di essa.

§ 3. — Coordinate nel carteggio di R. Descartes.

Compendia la *Géométrie* tutto quanto Descartes seppe intorno alle coordinate? In particolare, avvertì egli il bisogno di attribuire segni alle coordinate? Era egli in grado di delineare completamente una curva di cui possedeva l'equazione? Conobbe egli il maneggio e l'utilità della trasformazione delle coordinate? Non avendo egli pubblicato più nulla di geometrico dopo il 1637 [1], l'unico mezzo che si presenti per rispondere a tali questioni consiste nel ricorrere al carteggio che egli tenne con scienziati del suo tempo; i passi utilizzabili non sono molto numerosi; sono però abbastanza importanti per venire qui riferiti e commentati. Tutti concernono la curva di equazione $x^3 + y^3 = n\,xy$, da lui inventata [2]. Essa si trova definita, mediante questa equazione, in una lettera al P. Mersenne del gennaio 1638 (*Oeuvres*, tom. I, p. 490) accompagnata da una figura inverosimile, che giova avere sott'occhio (fig. 1) ed in cui $CP = x$, $BC = y$. A quella curva s'interessò un celebre professore del Collegio di Francia, il Roberval, che

---

tere, scritte al P. Mersenne l'8 ottobre ed il 13 novembre 1629 (ivi, pp. 25–26 e 70–71), ove è detto essere impossibile il dividere con mezzi elementari una circonferenza in 27 o 29 parti eguali; in altre allo stesso, del 4 novembre 1630 e del giugno 1632 (ivi, pp. 175 e 276), si trovano alcune asserzioni congeneri, riguardanti la duplicazione del cubo.

[1] « Je renonce à la géométrie », scriveva egli addì 11 ottobre 1638 (*Oeuvres*, tom. II, p. 395).

[2] È questa la linea conosciuta oggi da tutti sotto il nome di *foglia di Cartesio*.

credette di averne scoperta la forma [1]; ma siccome non aveva idee esatte intorno ai segni da attribuirsi alle coordinate, ritenne che, come la curva ha un cappio entro l'angolo formato dalle direzioni positive degli assi coordinati, ne possedesse altri negli

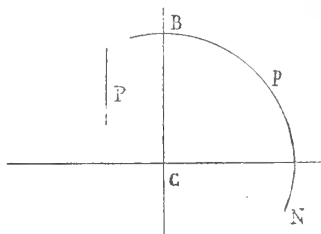



Fig. 1.

altri tre; ebbe così origine un intreccio che ricorda un nodo di cravatta e che indusse il Roberval a chiamare *galand* la curva di Descartes [2]. Ora, in data 17 luglio 1638 questo grande scrisse al P. Mersenne: « Et M. Roberval me semble aussi vain, avec son galand, qu'une femme qui attache un ruban à ses cheveux, aussi de paraître plus belle; car il n'a besoin d'aucune industrie, pour trouver la figure de cette ligne courbe, puisque j'en avais envoyé la définition » (*Oeuvres*, tom. II, p. 274). Ora, malgrado il tono di sprezzante superiorità che le informa, queste linee mostrano ad evidenza che chi le scrisse *non* si accorse dell'errore commesso dal Roberval e non era in grado di rettificarlo. Ciò è confermato dalla figura che illustra la soluzione data da Descartes (lettera al P. Mersenne del 23 agosto 1638; *Oeuvres*, tom. II, p. 313) al problema di trovare la larghezza della foglia in questione, chè in essa si trova soltanto il cappio esistente entro l'angolo formato dalle direzioni positive degli assi. Ma nella stessa lettera (ivi, p. 336) si trova questo altro importantissimo passo dedicato al Roberval: « Au reste, puisque je vois qu'il a pris à considérer la figure de cette ligne, laquelle il nomme galand ou fleur de jasmin, je lui en veux ici donner une autre qui ne merite pas moins que celle là les mêmes noms »; è la curva $\frac{y^2}{x^2} = \frac{a - x}{a + 3x}$, equazione che Descartes enuncia a parole; ora a questa si perviene sostituendo ai primitivi assi le loro bisettrici, per cui la presunta nuova curva non differisce da quella già nota. Lo dice Descartes medesimo nella chiusa della succitata lettera (vol. cit., p. 336), scrivendo le seguenti parole atte a stabilire la conoscenza, da parte sua, della trasformazione delle coordinate: « J'oubliai à vous dire que la nouvelle ligne que j'ai proposée à Roberval est tout la même que l'autre, ce que je fais pour me rire de lui, s'il ne le reconnaît pas, à cause qu'il s'est vanté de la connaître comme le cercle ». Della medesima curva egli si è occupato ancora in due lettere al P. Mersenne (*Oeuvres*, tom. II, pp. 425 e 462), ove è trattata la questione di determinare le tangenti di esse che formano con l'asse un angolo di 45°, senza però aggiungere cosa alcuna capace di gettare qualche luce sull'entità delle sue cognizioni intorno alla tecnica delle coordinate.

(1) A prima giunta la giudicò « une espèce d'ovale »; ved. lettera a Fermat del 1° giugno 1638 (*Oeuvres de Fermat*, tom. II, p. 151).

(2) Nome adottato anche da Fermat nella lettera al P. Mersenne del 28 ottobre 1638 (ved. *Oeuvres de Fermat*, tom. II, pp. 169-170).

§ 4. — Primi commentatori di Descartes.

Lo stile di Descartes è, oltre ogni dire, brillante e sembra sia stato scelto per nascondere le difficoltà che incontra chi studia a fondo la *Géométrie* e le lacune che egli (per propria dichiarazione) lasciò ad arte affinchè i suoi detrattori non si vantassero di avere anticipatamente conosciuto le cose da lui inventate. A togliere difficoltà e lacune s'industriarono ammiratori e discepoli che pullularono a lui dintorno, specie in Olanda, ove egli trascorse gli anni della sua maggiore produttività intellettuale. Tali commenti vennero da noi accuratamente esaminati; ma, come il lettore avvertirà senza stenti, con limitati risultati, chè chi li scrisse mostrò in generale d'interessarsi di preferenza delle pagine della *Géométrie* che all'algebra si riferiscono.

I. Il primo dei chiosatori che ci si presenta è un anonimo gentiluomo (forse Godefroy de Haestrecht) di cui Descartes fa cenno nelle lettere al fido Mersenne del 23 agosto e dell'11 ottobre 1638 (*Oeuvres*, tom. II, pp. 332 e 352), il quale ci lasciò poche pagine intitolate *Calcul de mons. Descartes*, recentemente scoperte fra le carte relitte da Leibniz [1]. La maggior parte di quanto contengono concerne gli elementi del calcolo algebrico; ma non vi manca un cenno intorno all'applicazione di tale scienza alla risoluzione delle questioni geometriche. Fra queste va notata la ricerca del luogo geometrico dei punti, per cui è costante la somma dei quadrati delle distanze da quattro punti fissi; il commentatore di cui ci occupiamo trova essere il luogo un cerchio, conformemente a quanto (come vedremo tra breve) espose il Fermat nella sua divinazione dei *Luoghi piani* di Apollonio.

II [2]. Estensione di poco diversa hanno le *Notae breves in Geometriam Renati Des Cartes* scritte da Florimond de Beaune, studioso che trascorse tutta la sua vita a Blois (27 settembre 1601-19 agosto 1652), ove occupava la carica di consigliere a quel tribunale [3]. Leggendole, si trae il convincimento che i contemporanei di Descartes non seppero ravvisare nelle coordinate uno strumento nuovo per investigare le proprietà delle figure geometriche; di notevole va notata l'esplicita osservazione che un'equazione di primo grado fra le coordinate cartesiane rappresenta una retta, fatto che Descartes aveva avvertito (*Oeuvres*, tom. VI, p. 401, lin. 5-7) solo per incidenza, quasi fosse cosa di valore trascurabile.

III. Maggiore importanza possiede l'opuscolo intitolato *Francisci Schooten in Geometriam Renati Des Cartes Commentaria* [4]. Ne è autore Fr. van Schooten; nato a Leida nel 1616, studente dal 1631 in quell'Università (ove suo padre era insegnante di mate-

[1] Venne pubblicata per la prima volta per cura di H. Adam nel « Bulletin des sciences mathém ». (II ser., tom. XX, I parte, 1896, pp. 221-248) e poi in *Oeuvres de Descartes* tom. X, pp. 659-680.

[2] I commenti che ci apprestiamo ad analizzare (insieme con altri esclusivamente algebrici e coll'opera del de Witt di cui nel § seguente) si trovano allegati all'edizione latina della *Géométrie* di Descartes fatta a Francoforte s. M. nel 1695 e che sta a noi sott'occhio.

[3] Di lui è parola più volte nel carteggio di Descartes (*Oeuvres*, tom. II, pp. 459, 510, 524, 573, 638).

[4] Per alcune correzioni si veda la lettera di Chr. Huygens a Schooten del 29 ottobre 1654 (*Oeuvres complètes de Huygens*, tom. I, p. 304).

matica), negli anni 1635-'36 entrò in relazione con Descartes, che lo provvide di lettere di raccomandazione quando egli si recò in Francia; di ritorno in Olanda, visitò il grande filosofo e nel 1646 ottenne una cattedra nel patrio ateneo; morì a Leida il 25 maggio 1660, ed ebbe per successore suo fratello Pietro (22 ottobre 1634–30 novembre 1675) che ritroveremo fra breve. I chiarimenti da lui scritti alla *Géométrie* sono così minuscoli e proiettano luce così scarsa sul sistema di coordinate, che ci dispensiamo dal riferirli. Un passo che merita si faccia eccezione è quello in cui lo Schooten dimostra la costruzione della normale alla concoide che, come vedemmo (ved. p. 789), Descartes erasi limitato ad enunciare; ad onore dello Schooten va rilevato che del suo egli vi aggiunse una costruzione migliore, la quale non differisce da quella che oggi si desume dalla considerazione della sotto-normale polare [1]. Altro passo dello stesso commento degno di menzione è quello in cui lo Schooten espone la soluzione del problema analogo per la cicloide, giungendo così allo stesso risultato che Descartes espose nella celebre lettera al Mersenne del 23 agosto 1638 (*Oeuvres*, tom. II, p. 305). La restante parte del commento di cui ci occupiamo serve di illustrazione e di complemento ai metodi cartesiani per risolvere le equazioni cubiche e biquadratiche, tema importante che lo stesso geometra ha ulteriormente svolto nell'opuscolo *De cubicarum aequationum resolutione*. Origine e scopi congeneri ha il *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebrico in lucem editus a Petro Schooten Francisci fratre*, notevole raccolta di problemi geometrici determinati, risoluti col calcolo algebrico.

§ 5. — G. De Witt.

Fra i primi che meditarono sulla grande opera di Descartes merita un posto distinto Giovanni de Witt, il quale fu annoverato fra i commentatori di essa. Nato a Dodrecht il 24 settembre 1625, dall'avvocatura, a cui erasi dedicato, passò alla vita pubblica ed a soli vent'otto anni divenne gran pensionario d'Olanda; con mano ferma resse il timone dello Stato in tempi difficili; ma i servigi eminenti che rese alla patria non lo salvarono da ingiuste accuse e dalla morte che gl'inflisse una plebe furibonda, aizzata contro di lui (20 agosto 1672). A Fr. van Schooten devesi la pubblicazione dei suoi *Elementa curvarum linearum* — l'opera che gli dà diritto ad una onorevole menzione in ogni storia della geometria, — da lui finita addì 8 ottobre 1658, a soli ventitre anni.

Il I libro di essa contiene una teoria geometrica delle sezioni coniche, definite e studiate nel piano, scritta con stile rigorosamente euclideo [2]. Esso serve di prefazione al resto dell'opera, i cui intenti risultano palesi da quanto è dichiarato nel II libro; ivi, infatti, si leggono le seguenti parole: « In qualunque questione, in cui si tratti di studiare un luogo, cioè una linea retta o curva, riguardate che siano come note e determinate due rette facenti fra loro un angolo dato o scelto ad arbitrio, e considerato un punto qualsivoglia del luogo richiesto, si giunge ad un'equazione; ridottala alla sua forma più semplice, se in quella equazione non si trova il prodotto delle incognite o qual-

[1] Cfr. G. Loria, *Spez. alg. und transs. ebene Kurven*, tom. I, II Aufl. (Leipzig 1910), p. 138.

[2] Ivi s'incontrano i termini tecnici *crus patiens* e *crus efficiens*, ma non nel significato di *coordinate*, come trovasi erroneamente asserito in « The mathematical Gazette », ottobre 1922 (p. 142).

che loro potenza, il luogo in questione è una retta. Ma se delle stesse incognite una sale al quadrato, mentre l'altra non compare moltiplicata per sè o per la prima, il luogo richiesto è una parabola. Che se poi di entrambe si trovano i quadrati od il prodotto (potenze superiori non si possono avere se il luogo è piano o solido), il luogo cercato sarà un'ellisse, un'iperbola od una circonferenza ». Per stabilire la verità di quanto è ivi asserito, l'autore suppone dato un punto fisso A (« initium immutabile punctum ») sulla retta assunta come asse ed una direzione a cui devono essere fra loro parallele le « ordinatim applicatae » e si occupa anzitutto d'interpretare geometricamente l'equazione $y = \frac{b}{a} x$, ove, qui come sempre, x e y sono le due coordinate di un punto arbitrario del luogo che si considera e le costanti a e b si suppongono positive.

A tale scopo egli prende sul dato asse un punto B, e da B conduce un seguente BC che abbia la direzione prestabilita e tale che si abbia AB : BC $= a : b$; preso allora un punto D arbitrario della retta AC e condotta DE parallela a BC, risulta una coppia di triangoli simili, che mostrano essere $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, donde emerge che le coordinate di ogni punto della semi-retta indefinita AC soddisfano alla data equazione; che altrettanto accada riguardo alla semi-retta complementare l'autore non dice, perchè non si occupa dei valori negativi delle coordinate. Per interpretare analogamente le equazioni

$$y = \frac{bx}{a} + c \ , \ y = \frac{bx}{a} - c \ , \ y = c - \frac{bx}{a} ,$$

egli applica un procedimento costante che anzitutto riferiremo nel primo caso: Si cominci (fig. 2) dal tracciare la retta ACD rappresentata dall'equazione $y = \frac{bx}{a}$ (ved. più sopra) e poi si conduca il segmento AF eguale a c e parallelo a BC e nel senso B...C ;

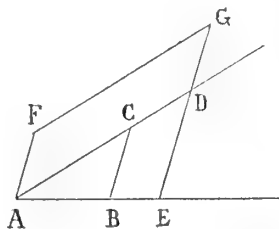



Fig. 2.

la parallela condotta da F a AD è la retta cercata: lo si vede subito, considerando il punto G in cui essa è incontrata da una retta DE, che è un'arbitraria parallela BC. Per interpretare similmente la equazione $y = \frac{bx}{a} - c$, si opera similmente, ma il segmento AF deve portarsi nel senso C...B. Per applicare un analogo ragionamento al terzo caso, bisognerebbe avere già interpretata l'equazione $y = -\frac{b}{a} x$, cosa che il De Witt non fece. Per conseguire egualmente lo scopo, egli costruisce (fig. 3) il triangolo ABC analogo all'omonimo precedente, ma tale che l'angolo ABC sia il supplemento di

quello che le ordinate formano con l'asse dato; poi il segmento A F eguale a c, parallelo a BC ma di senso opposto a questo segmento; e finalmente da F la parallela alla

Fig. 3.

retta AC; si vede subito che questa è la retta cercata. Da notarsi che egli omise di esaminare *ex-professo* l'equazione $y = -\frac{b}{a}x - c$; ma la considerò poi ed interpretò nello studio, fatto dopo, della parabola. Emerge, da ciò, che il De Witt non possedeva idee chiare sulla interpretazione delle quantità negative, ma però ne aveva come un vago presentimento; da quanto egli scrive si trae la conferma del fatto che *nel primo stadio di sviluppo della geometria analitica non si avvertì la necessità di considerare anche i valori negativi delle coordinate per ottenere la rappresentazione* **completa** *di un'equazione fra le due coordinate di un punto.*

Passando a casi più complicati, il nostro autore (che sdegna arrestarsi al cerchio) si occupa (II cap.) delle seguenti equazioni: $y^2 = ax$; $y^2 = ax + b^2$, $y^2 = ax - b^2$, $y^2 = b^2 - ax$, nonchè di quelle che ne derivano per lo scambio di x con y; sono tutte quelle di tipo parabolico, ad eccezione della $y^2 = -ax - b^2$. Che l'equazione $y^2 = ax$ rappresenti una parabola, viene dal nostro autore dimostrato appoggiandosi sopra quanto espose nel suo I libro; notisi, però, che egli disegna soltanto la parte di curva per cui è $y > 0$. Che altrettanto si possa dire riguardo alle altre equazioni considerate, egli dimostra con un semplice cambiamento dell'origine, mantenendo intatti l'asse e la direzione delle ordinate. Tale concetto è sfruttato in altre ipotesi più complicate, che l'autore esamina, enunciando prima la regola generale e poi applicandola caso per caso; così, ad es., per interpretare l'equazione $y^2 + 2ay = bx - a^2$, egli pose $y + a = z$, e così fu condotto alla nota equazione $z^2 = bx$.

Nel III cap. egli dimostra che le tre equazioni

$$xy = f^2 \;;\; \frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2 \;,\; \frac{lx^2}{g} = y^2 - f^2$$

rappresentano altrettante iperboli, mentre la

$$x^2 + \frac{l\,y^2}{g} = f^2$$

compete ad un'ellisse, tutto ciò applicando i risultati ottenuti nel I libro. Per inter-

pretare poi equazioni analoghe ma più complicate, di nuovo egli ricorre ad una trasformazione di coordinate; così in presenza dell'equazione

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} + 2cy = \frac{bx^2}{a} + 2x + d_3,$$

egli pone

$$z = y + \frac{ba}{a} + c;$$

così ottiene un'equazione della forma $az^2 = (x+l)^2 \pm m^2$ (ove a è un numero positivo), la quale riducesi subito all'altra $az^2 = u^2 \pm m^2$, che è una delle equazioni caratteristiche dell'iperbole.

Come applicazione della teoria esposta il De Witt risolve tre problemi locali, determina cioè il luogo dei punti che sono equidistanti da un punto e da una retta dati, o per cui è costante la differenza o la somma delle distanze da due punti fissi; per raggiungere l'intento, suppone ortogonali le coordinate e l'asse e l'origine scelti opportunamente. Considerando che lo strumento da lui costantemente usato è la trasformazione delle coordinate, egli dedica l'ultimo capitolo del suo lavoro ad indicare come questa operazione si effettui algebricamente, così confermando la grande importanza di un espediente che egli ha il vanto di avere per primo posto nella debita luce.

§ 6. — Cristiano Huygens.

Dopo lo Schooten e il De Witt, troviamo in Olanda un geometra pari ai grandissimi, il quale, quantunque nulla abbia pubblicato sulla materia che ci occupa, pure ha contribuito al suo perfezionamento, rettificando errori commessi da alcuni che si mostrarono incapaci di delineare con esattezza una curva di data equazione: Cristiano Huygens. Nato all'Aja, da cospicua famiglia, il 14 aprile 1629, si fece conoscere confutando una pretesa quadratura del cerchio proposta da G. di S. Vincenzo; i suoi studii sulla teoria delle probabilità e le scoperte da lui fatte dei satelliti di Giove e dell'anello di Saturno gli diedero tale rinomanza che il ministro Colbert gli offrì una lauta pensione, purchè andasse ad abitare Parigi; avendo accettato (1666), rimase alla corte di Luigi XIV sino alla revoca dell'editto di Nantes (1681). Nel frattempo (1673) aveva pubblicato l'*Horologium oscillatorium*, poi (1691) diede in luce il *Traité de la lumière*; morì in patria, carico di onori e di gloria, l'8 giugno 1695.

Sino dall'età di diciassette anni era entrato in corrispondenza col P. Mersenne; mantenne poi carteggio con i più eminenti matematici del suo tempo ed appunto in parecchie sue lettere trovasi documentato il contributo da lui dato al metodo delle coordinate, che ora ci apprestiamo a descrivere.

L'errore, che vedemmo (p. 791) commesso dal Roberval nel tentare di scoprire la forma della curva $x^3 + y^3 = nxy$, non è l'unico del genere che s'incontri nella letteratura matematica, il che non deve meravigliare essendo desso prodotto dall'assenza di convenzioni per interpretare i valori negativi delle coordinate. Tipico a questo proposito è un passo di una lettera che R. F. de Sluse (nato vicino a Liegi il 7 luglio 1622,

morto in questa città il 19 marzo 1685) scrisse a Huygens il 24 dicembre 1657 (*Oeuvres complètes de Huygens*, tom. II, p. 106) e relativo alla curva di equazione $ay + y^2 = ax - x^2$; per noi tale curva è l'intera circonferenza passante per l'origine A delle coordinate e il punto B $(a, 0)$, avente quindi per centro il punto $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$; pel de Sluse invece essa è l'insieme dell'arco circolare AB del suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse; alla figura risultante egli reputa conveniente d'imporre un nome greco speciale (ἀτελῆ γραμμὴν).

Che errori congeneri non abbia saputo evitare lo stesso Huygens, è dimostrato da alcuni passi del suo carteggio relativo alle curve chiamate attualmente «perle di de Sluse» ([1]) e che conviene avere presenti. La più semplice di dette curve è definita a parole nella lettera del de Sluse datata 14 agosto 1657 (*Oeuvres de Huygens*, tom. II, p. 47), ove trovasi una figura atta a giustificare il nome di *perla* dato alla curva corrispondente, ma che non compete affatto alla linea di equazione $x^2(a - x) = m^2y$; ad Huygens veniva richiesto di determinare l'area, la tangente ed il baricentro.

Non più conformi al vero sono le figure che illustrano le soluzioni di questi problemi date dal grande geometra olandese (lettere del 3 settembre e del 7 dicembre 1657; *Oeuvres*, tom. II, pp. 50 e 93), da Fr. van. Schooten (lettere del 28 settembre e del 23 novembre 1658; vol. cit. pp. 59 e 89), da H. van Heuraet (ivi, p. 96) e da C. Mylon (ivi, pag. 337): per convincersene basta paragonare le figure disegnate dalle citate lettere con quelle a cui guida una discussione esatta e completa della surriferita equazione. Un po' migliore è una figura che trovasi nella lettera di de Sluse del 3 gennaio 1658 (*Oeuvres de Huygens*, tom. II, p. 122), purchè la s'interpreti come relativa, non all'equazione $ay^2 - y^3 = a^2x$, ma all'analoga $ax^2 - x^3 = a^2y$. La figura esatta (v. fig. 4) si trova

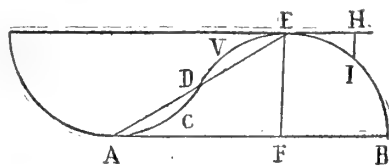



Fig. 4.

finalmente nella lettera di Huygens a de Sluse del 22 gennaio 1658 (*Oeuvres*, tom. II, p. 124) ove è insegnata la costruzione del flesso della curva; fu, dunque, *la ricerca di questi notevoli punti che mostrò ai geometri l'errore in cui erano caduti* ([2]).

Anche la forma della curva $x + y = \sqrt[4]{ax^3}$ immaginata da de Sluse (*Oeuvres*, tom. II, p. 76) non fu conosciuta nell'epoca che descriviamo; essa, infatti, non gode di alcuna simmetria, come credette Huygens, il quale seguì troppo ciecamente le indicazioni fornitegli dal de Sluse (vol. cit., pp. 80 e 93). Meno infelice è la delineazione

([1]) La definizione generale di tali curve si legge nella lettera di de Sluse a Huygens del 12 aprile 1658 (*Oeuvres de Huygens*, tom. II, p. 168); tradotta in formole, essa guida all'equazione $\frac{y^m}{x^n(a-x)^p} = \text{cost.}$; dalla figura che l'accompagna si desume che lo scrivente riteneva quelle curve simmetriche rispetto all'asse delle x.

([2]) La stessa figura esatta si trova in posteriori lettere di de Sluse (*Oeuvres de Huygens*, tom. II, pp. 126 e 132).

di altre due perle di quarto ordine (*Oeuvres*, II, pp. 135 e 149) le quali hanno infatti un asse di simmetria.

Nel carteggio di Huygens si trovano finalmente alcuni passi interessanti, concernenti la curva cartesiana di equazione $x^3 + y^3 = nxy$. In un primo periodo, che va dal settembre 1662 al febbraio 1663 (*Oeuvres*, tom. IV, pp. 238, 246, 312, 316), di essa viene considerato il solo cappio che trovasi entro l'angolo delle direzioni positive degli assi (¹). Ad esso segue una lunga sosta determinata da studii del grande olandese estranei alla geometria. A tale scienza egli venne ricondotto dalle comunicazioni epistolari sul calcolo infinitesimale fattegli da Leibniz e geometri contemporanei; portato a occuparsi nuovamente della curva cartesiana, in due lettere dirette una al marchese de l'Hôpital addì 29 dicembre 1692 (*Oeuvres*, tom. X, pp. 351-352), l'altra al Basnage de Beauval nel febbraio 1693 (ivi, p. 417) (²), egli finalmente arriva a tracciare la figura completamente e con soddisfacente esattezza. Del resto, che nel frattempo egli si fosse famigliarizzato con l'interpretazione geometrica delle equazioni cartesiane è dimostrato da altri documenti. Così in due lavori, che risalgono all'anno 1690 (*Oeuvres*, tom. IX, pp. 473 e 573), si trova disegnata con precisione la curva $\sqrt{2a^2 + 2ax} + \sqrt{2a^2 - 2ax} = y$ (detta da Huygens « curva mea »), che ritroviamo in una lettera da lui diretta a Leibniz il 26 marzo 1691 (*Oeuvres*, tom. X, p. 56). In modo del pari soddisfacente è delineata la curva $x(x^2 + y^2) = a^2y$ in uno squarcio che risale al 1690 (*Oeuvres*, tom. IX, p. 474; cfr. ivi, p. 537), nuovo documento comprovante i progressi compiuti dalla geometria cartesiana nella seconda metà del secolo XVII; congenere è un passo di altra lettera di Huygens (27 agosto 1687; *Oeuvres*, tom. IX, pp. 198-200), ove leggesi un cenno chiarissimo della rappresentazione parametrica di una curva piana.

Osserviamo, prima di chiudere questo §, che, volendo fissare tutti i punti di contatto fra Huygens e Descartes, si deve tener conto di alcune pagine che il primo scrisse poco più che ventenne (1650; *Oeuvres*, tom. XI, pp. 243 e 245), ove sono risolti due problemi locali, i quali conducono all'equazione di una retta in coordinate cartesiane.

§ 7. — Giacomo Bernoulli.

A rendere completo l'elenco di coloro che si adoperarono a chiarire, completare diffondere la *Géométrie* di Descartes, ci corre l'obbligo di fare qui menzione di un pensatore che, in molte branche della matematica, si affermò quale matematico di alta originalità; parliamo del fondatore di una dinastia di eccellenti geometri, cioè Giacomo Bernoulli. Nato a Basilea il 27 dicembre 1654, fu dal padre avviato alla teologia; ma per l'influenza che subì da professori dell'Università di Amsterdam, nel corso di un viaggio da lui compiuto in Francia, in Inghilterra e nei Paesi Bassi, abbracciò con entusiasmo le nuove idee che in quell'epoca pubblicava Leibniz e così conseguì tale ri-

(¹) Tali figure si ritrovano a pp. 462 e 467 dell'opera di Fr. van Schooten, *Vijfde Boeck der mathematische Oeffeningen* (Amsterdam 1660), pp. 462 e 467.

(²) Ved. anche la lettera a Leibniz del 20 maggio 1693 (*Oeuvres*, tom. X, p. 429) e le lettere del Marchese de l'Hôpital a Huygens del 12 febbraio 1693 (ivi, p. 390).

nomanza che a soli 26 anni fu chiamato ad insegnare nel patrio ateneo; sgraziatamente la morte lo colse nel fiore della produttività (16 agosto 1704). Incaricato di curare l'edizione basileese dell'« opus magnum » di Descartes, egli la corredò di alcune *Notae et animadversiones* che passarono poi nella collezione delle sue opere complete ([1]); nel giudicarle è indispensabile di tenere presente che furono scritte mezzo secolo dopo la comparsa della *Géométrie* e quando già era cominciata la mirabile fioritura di scritti matematici dovuta alla benefica influenza del grande filosofo dell'ottimismo; infatti il fervorino per le curve trascendenti (Nota V) e le considerazioni relative al cerchio osculatore (Nota VIII) ed ai flessi (Nota XXII), che leggonsi nelle succitate *Note*, non potevano venire scritte prima dell'invenzione del calcolo differenziale. Osserviamo da ultimo che veri e propri caratteri di commenti possiedono gli articoli *Animadversio in geometriam cartesianam* e *Constructio quorundam problematum hypersolidorum*, dallo stesso matematico pubblicati nel fascicolo di giugno 1688 degli «Acta eruditorum » ([2]).

§ 8. — Fermat.

Ammesso che la data della pubblicazione per la stampa di un'opera sia l'unica considerazione, in base a cui giudicare la paternità di un'opera, l'applicazione metodica dell'algebra alla ricerca dei luoghi geometrici deve senza esitazione attribuirsi a Descartes. Ma se da tale norma si crede di potere prescindere, quando si tratti di un'epoca storica in cui il commercio epistolare compieva lo stesso ufficio che oggi disimpegna la stampa periodica, quel diritto di proprietà può venire con ragione contestato all'autore del *Discours de la méthode* da un suo grande emulo di cui ora ci occuperemo ([3]) (riprendendo l'ordine cronologico al quale ci fu forza fare uno strappo per descrivere la fortuna che ebbe la geometria cartesiana); dopo di avere osservato che, se ciò non diede luogo ad una nuova disputa fra quei due sommi, è soltanto perchè entrambi consideravano la geometria con coordinate come una semplice trasfigurazione dei metodi in uso presso gli antichi ([4]).

Pietro Fermat nacque a Beaumont de Lamagne (terra più vicina a Montauban che non a Tolosa) e fu ivi battezzato il 20 agosto 1601; esauriti gli studii a Tolosa, si avviò alla magistratura e fu successivamente « conseiller à la chambre des réquêtes » (30 dicembre 1634) e « conseiller de la chambre de l'édit » (30 agosto 1648); grazie al suo valore giuridico, ottenne un titolo di nobiltà; morì a Castres il 12 gennaio 1663,

([1]) Joh. Bernoulli Basil. *Opera* (Genevae 1744), pp. 667-717.

([2]) *Opera*, pp. 343-351.

([3]) I meriti di Fermat in generale ed a questo riguardo non furono riconosciuti se non in tempi vicini a noi: valgono a provarlo il fatto che egli non si trova nell'elenco di sommi del secolo di Luigi XIV, redatto da Voltaire, nonchè le seguenti parole del Fontenelle: « Ç'a été une excellente idée, et d'une utilité inestimable a toute la géométrie, que celle Descartes d'exprimer la nature des courbes par des équations algébriques (« Hist. de l'Acad. des sciences, année MDCCXXIX, p. 57 »).

([4]) La biografia di Fermat è nota con grande imprecisione; i dati relativi si riassumono in quanto è riferito nel testo. In vita, nulla di lui fu pubblicato per le stampe; per cura del figlio vide la luce il volume intitolato *Varia opera mathematica* D. P. de Fermat (Tolosae 1679). Dopo lunga attesa, per cura di P. Tannery e Ch. Henry furono pubblicati, in 5 vol. le *Oeuvres de Fermat* (Paris 1891-1923) edizione a cui noi ci riferiremo sempre nella presente memoria; ivi gli scritti in latino sono accompagnati da versioni francesi; donde la ragione delle duplici citazioni di noi fatte nel testo.

avendo dedicato alla matematica soltanto i rari istanti lasciati liberi dalle sue occupazioni ufficiali.

Il lavoro di Fermat che ci interessa ha per titolo *Ad locos planos et solidos isagoge*, il quale venne certamente concepito e forse scritto prima del 1637 (¹); il concetto informatore di esso mostra che la geometria analitica di Fermat si avvicina alla nostra assai più di quanto non faccia quella di Descartes. Quel concetto è enunciato come segue: « Ogni qualvolta in un'equazione finale entrano due quantità incognite, si ha un luogo, l'estremità dell'una descrivendo una linea retta o curva » (*Oeuvres de Fermat*, tom. I, p. 91; III, p. 85). Per chiarire il senso di tali frasi, è necessario di sapere che il nostro matematico suppone data di posizione una retta N Z M e su essa un punto N; preso su di esso il segmento N Z eguale ad una (a) delle quantità incognite, si conduce da Z il segmento ZM formante con la retta N Z un dato angolo e la cui lunghezza eguagli l'altra (e) (²); quell'angolo si suppone ordinariamente retto (*Oeuvres*, tom. I, p. 92; III, p. 86).

Premesso ciò, Fermat insegna ad interpretare le più semplici equazioni a due incognite (³). Anzitutto, mediante considerazione di una coppia di triangoli simili, egli dimostra che la equazione $ax = by$ rappresenta una retta; che altrettanto sia da ripetersi riguardo all'equazione $c - ax = by$ si vede osservando che, posto $c = ak$ quest'equazione si può scrivere $\frac{b}{a} = \frac{k - x}{y}$, che si riduce alla forma precedente mutando il punto fisso della data retta. Osserva Fermat che così si hanno elementi sufficienti per risolvere tutti i problemi locali che conducono a rette, per es. quello che porta il numero 7 nel libro I dei *Luoghi piani* di Apollonio; appunto servendosi del risultato surriferito egli giunse al seguente teorema, da lui semplicemente enunciato: « Siano date quante si vogliano rette e si conducano ad esse, da un punto, delle rette formanti con le date angoli conosciuti; se la somma dei prodotti delle rette così condotte per altrettante rette date è eguale ad un'area data, il luogo geometrico di quel punto è una retta » (*Oeuvres*, tom. I, p. 93; III, p. 87). Passando alle equazioni di 2° grado, Fermat considera l'equazione $xy = k^2$ in assi ortogonali e, con una tacita applicazione delle *Coniche* di Apollonio, l'interpreta come rappresentatrice di un'iperbole; che lo stesso succeda riguardo ad un'equazione della forma $xy + ax + by = k^2$, si vede scrivendo questa sotto la forma

$$(x + b)(y + a) = k^2 + ab$$

e poi spostando l'origine con conservazione della direzione degli assi. Meno esatto è Fermat asserendo che le equazioni $\frac{x^2}{y^2} = \text{cost.}$, $\frac{x^2 + xy}{y^2} = \text{cost.}$, rappresentano

(¹) Cfr. l'articolo del *Journal des savants* del 2 febbraio 1665, citato in *Oeuvres de Fermat*, tom. I, p. 91 nota (1); l'*Isagoge* è ricordata in una lettera di Descartes del 25 gennaio 1638 (*Oeuvres de Descartes*, tom, I, p. 503).

(²) L'uso delle vocali per indicare le incognite risale a Viète, al quale Fermat volle mantenersi fedele, criticando anzi Descartes per avere adottato il sistema opposto (*Oeuvres* tom. I, p. 120; III, p. 11).

(³) Nella seguente analisi dell'*Isagoge*, per non creare al lettore inutili difficoltà, furono adoperate notazioni e simboli moderni.

una retta, chè realmente ne rappresentano *due*. Che l'equazione $x^2 = ky$ rappresenti una parabola è dimostrato da Fermat applicando la teoria delle coniche e così offrendo una nuova prova dell'essere per lui *la teoria che espone una semplice metamorfosi della geometria degli antichi*; che altrettanto possa ripetersi riguardo all'equazione $x^2 = ky + l$ viene da lui dimostrato con un cambiamento dell'origine. Una semplice applicazione del teorema di Pitagora porta a concludere che l'equazione $a^2 - x^2 = y^2$, in assi ortogonali, appartiene ad un circolo; altrettanto vale per tutte le equazioni della forma $x^2 + y^2 + ax + by = c$; da ciò Fermat trionfalmente conclude di essere in grado di stabilire tutte le proposizioni contenute nel II libro dei *Luoghi piani* di Apollonio. Finalmente all'interpretazione dell'equazione $\frac{b^2 - x^2}{y^2} = k$ egli giunge giovandosi di teoremi fondamentali concernenti le curve di second'ordine. Dei casi analoghi più complicati fa rapido cenno, inducendo nel lettore la convinzione che egli maneggiasse con invidiabile disinvoltura la trasformazione delle coordinate e che, col mezzo di tale artificio, egli fosse in grado di interpretare qualunque equazione di 2° grado fra le due coordinate d'un punto.

Come coronamento al suo lavoro egli enuncia la seguente proposizione, analoga ad altra superiormente riferita: «Sieno date quantesivogliano rette e si conducano ad esse da un punto altrettante rette formanti con le date angoli pure dati; se la somma dei quadrati delle rette condotte è eguale ad un'area data, quel punto si troverà su un luogo solido determinato» (*Oeuvres*, tom. I, p. 102; III, p. 95). Fermat aggiunge l'osservazione: «Se questa scoperta avesse preceduta la nostra restituzione, ormai antica, dei due libri *Sui luoghi piani* (¹), le costruzioni dei teoremi locali sarebbero riuscite molto più eleganti; tuttavia noi non lamentiamo tale lavoro precoce e non abbastanza maturo. Giacchè per la scienza è di un certo interesse il non sottrarre alla posterità i prodotti intellettuali tuttora informi; l'opera, in origine semplice e rozza, diviene più forte e più grande, grazie a nuove invenzioni. Anzi è importante il potere conoscere completamente i reconditi progressi dello spirito e lo sviluppo spontaneo dell'arte» (*Oeuvres*, tom. I, p. 103; III, p. 96).

In una breve, ma importante Appendice all'*Isagoge*, Fermat ha trattato un tema che vedemmo largamente svolto nella *Géométrie* di Descartes; ha, cioè, fatto conoscere in qual modo i problemi cubici e biquadratici si possano risolvere appoggiandosi ai principii ivi svolti. In tal modo egli ritrovò le soluzioni del problema di Delo mediante un'iperbole ed una parabola o due parabole, registrate da Eutocio nel suo commento ad Archimede; di più stabilì che tutti i problemi cubici e biquadratici si possono risolvere mediante intersezioni di una parabola con un cerchio.

Un tema analogo, ma più vasto, ha la *Dissertatio tripartita* intitolata *De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas et unicuique problematum generi proprie convenientes* (*Oeuvres*, tom. I, pp. 118-131; III, pp. 109-120); essa è d'indole essenzialmente polemica, come risulta dall'esordio («può sembrare un paradosso dire che, anche in geometria, Descartes non era che un uomo»); nella foga dell'assalto Fermat mosse al suo rivale alcuni appunti ingiustificati; ma gli sviluppi da lui dati intorno

(¹) *Apollonii Pergaei libri duo « de locis planis » restituti* (*Oeuvres*, tom. I, pp. 3–51).

alla inserzione di quante si vogliono medie proporzionali fra due rette date non sono immeritevoli di recare la sua firma e mostrano che in lui il matematico era superiore al polemista.

Brillanti conferme dell'abilità di Fermat nell'interpretare e combinare le equazioni delle curve piane si traggono dalla seconda parte della memoria dal titolo *De aequationum localium transformatione et emendatione* (*Oeuvres*, tom. I, pp. 255-285; III, pp. 216-237): giacchè ivi egli, con metodi modellati su quelli degli antichi, giunge alla quadratura di parecchie curve speciali (ad es., delle parabole e delle iperboli di grado superiore). Va aggiunto che la generalizzazione della spirale di Archimede, esposta al P. Mersenne nella lettera del 3 giugno 1636 (*Oeuvres*, tom. II, pp. 12-14; III, pp. 277-278), mostra che egli era in grado di servirsi di coordinate polari.

A Fermat si deve ancora una memoria, scritta sotto forma di lettera al Carcavi, in data 6 gennaio1643 (*Oeuvres*, tom. I, pp. 111-117; III, pp. 102-108) (1), la quale essendo intitolata *Isagoge ad locos ad superficiem*, può credersi come relativa alla geometria analitica dello spazio. Tale induzione si conferma leggendo che ivi Fermat si propose di provare che « i caratteri cercati e trovati nelle linee considerate come luoghi possono similmente venire investigati nelle superficie piane, sferiche, coniche e cilindriche e nelle superficie conoidi e sferoidi (2) purchè si stabiliscano in precedenza i lemmi costitutivi di ciascuno di tali luoghi ». Ma l'artificio da lui usato consiste, non nell'uso di coordinate, bensì nel segare con piani le superficie considerate, per poi cercare la specie delle curve risultanti; è un metodo non scevro di pericoli, come emerge dal fatto che esso condusse il grande matematico a conseguenze inesatte. Così è vero che è piana ogni superficie di cui tutte le sezioni piane sono rette, e sferica se sono circonferenze; ma non è vero che essa sia un cono od un cilindro quando le sezioni sono rette, circonferenze o sezioni coniche. Benchè, pertanto, i fondamenti delle ricerche in discorso siano tutt'altro che solidi, Fermat arrivò a notevoli estensioni di proposizioni planimetriche; riferiamo a riprova di ciò i teoremi seguenti: I) è una sfera il luogo dei punti pei quali è costante la somma dei quadrati delle distanze da quanti si vogliano punti fissi (cfr. una lettera al P. Mersenne del 22 ottobre 1638; *Oeuvres*, tom. II, p. 174); II) è un piano il luogo dei punti pei quali è costante la somma delle rette condotte sotto dati angoli a quanti si vogliano dati piani (cfr. una lettera al P. Mersenne del 26 marzo 1641; *Oeuvres*, tom. II, p. 219); III) se invece è costante la somma dei quadranti delle rette di cui nella proporzione precedente, il luogo è una sferoide (3).

A differenza di Descartes, Fermat non ebbe, come geometra, continuatori o discepoli; i suoi scritti durante parecchi decennii rimasero ignoti alla generalità degli studiosi; quando ebbero l'onore della stampa, le coordinate avevano già fatta la loro strada nel mondo come ritrovato cartesiano; e le coincidenze delle vedute ivi esposte con quanto leggesi nella *Géométrie* furono rilevate da molti con indifferenza, come

(1) Ne è parola nella lettera di Fermat al P. Mersenne del 13 gennaio 1643 (*Oeuvres*, tom. II, p. 245).

(2) Non si dimentichi che le quadriche così chiamate sono tutte di rivoluzione.

(3) In generale sarà una quadrica, non rotonda.

semplice oggetto di curiosità, da altri nell'intento di porre in piena luce le benemerenze scientifiche dell'eminente giurisperito; ma, per quanto ci consta, nessuno dei contemporanei trasse, dalle pagine da lui vergate, stimolo o norma per nuove investigazioni.

§ 9. — J. Wallis.

Nel periodo storico di cui attualmente ragioniamo, nel quale la geometria analitica ci si presenta come una trasformata dell'antica geometria, dovuta all'influenza dell'algebra nascente, incontriamo ancora un'opera che vide la luce di là dalla Manica nel 1655: il suo titolo è *De sectionibus conicis nova methodo expositis, tractatus* (1). Ne è autore John Wallis; nato a Ashford (contea di Kant) il 23 novembre 1616, fu studente nell'Emmanuel College di Cambridge, ove ottenne gli ordini religiosi; ebbe grande parte nella fondazione della Royal Society di Londra e nel 1649 fu chiamato ad Oxford in qualità di « Savillan professor ». La sua fama riposa principalmente sull'*Arithmetica infinitorum*, frutto di assiduo studio degli scritti di Torricelli e di Cavalieri; morì il 28 ottobre 1703.

La novità del metodo da lui tenuto per esporre la teoria delle coniche consiste nell'uso costante della simbolica algebrica e delle relative equazioni e trasformazioni: discepolo di Descartes, ne adottò solo in parte le abitudini; chè le coordinate non sono da lui designate con le lettere x, y, ma in varii modi. Che neppure lui avesse vista la necessità di convenzioni per interpretare i valori negativi delle coordinate è dimostrato dall'avere egli, in un'*Appendice* al suo trattato, ritenuto che la parabola $y^3 = l^2 x$ fosse simmetrica rispetto all'asse delle x e nell'averla, quindi, disegnata somigliante alla parabola apolloniana.

CAPITOLO III.

Progressi compiuti dal metodo cartesiano durante la seconda metà del secolo XVII.

§ 1. — Roberval.

Mentre le coordinate ebbero per genitori indipendenti un filosofo ed un magistrato, la conseguente disciplina trovò, nelle sue origini, un oppositore accanito in un geometra di professione, al quale un personale dissenso con Descartes tolse per qualche tempo la facoltà di misurare il mirabile potere del novello istrumento matematico. Alludiamo a Giles Persone, o Personier, nato a Roberval, nei pressi di Beauvais, il 25 agosto 1602. Trasferitosi a Parigi, circa all'età di 25 anni, per insegnare filosofia in una scuola della capitale, potè occupare sino alla sua morte (25 ottobre 1675) la cattedra fondata dal Ramus al Collegio di Francia e che ogni tre anni veniva posta a concorso; legatosi di amicizia al P. Mersenne, finì per riconoscere il proprio torto ed allora non mancò di

(1) Ristampato in *J. Wallis Opera mathematica*, tom. I (Oxoniae 1695), pp. 291–354.

contribuire, se non al perfezionamento, almeno alla diffusione dei metodi recentemente pubblicati [1]. Tale contributo si legge nella sezione della sua memoria *De geometria planarum et cubicarum aequationum resolutione* che reca il titolo: « Propositum locum geometricum ad aequationem analyticam revocare, et qui simpliciores sint loci, aut secus, explicare ». Quali fossero i concetti a cui il Roberval si attenne costantemente nella ricerca dell'equazione di una linea, risulta dalle applicazioni da lui fattene. Al pari di Descartes e discepoli, egli riferisce qualsiasi figura piana ad un asse, la cui scelta viene suggerita dallo esame della figura che si studia; le coordinate (forse in omaggio alla memoria del Viète) sono indicate con le vocali a, e, i, y e le equazioni risultanti sono scritte col secondo membro $= 0$. Servendosi di considerazioni dirette il Roberval ottiene l'equazione del circolo con quattro metodi; quelle della parabola, dell'iperbole e dell'ellisse rispettivamente sotto tre, sette e tre forme; notevole che egli si occupa anche della concoide di Nicomede, ma ne rappresenta i due rami mediante due diverse equazioni, che però non differiscono se non per il segno di un termine. Il lettore non mancherà certamente di rilevare una sorprendente lacuna in questo elenco di linee; cioè la *mancanza della retta.*

§ 2. — De la Hire.

Filippo de la Hire, nato a Parigi il 18 marzo 1640, si fece conoscere come pittore ed architetto; passò poi dall'arte alla scienza ed ottenne la cattedra di matematica al Collegio di Francia; si occupò anche di misure geodetiche e morì a Parigi il 21 aprile 1718. Non è la sua *Théorie des coniques* (Paris 1672) che c'interessa, ma sibbene un'opera pubblicata a Parigi sette anni dopo e composta di tre parti intitolate rispettivamente *Nouveaux éléments des sections coniques*, *Les lieux géométriques* e *La construction des lieux analytiques*, le quali esamineremo separatamente.

Sulla prima saremo brevissimi: essa contiene l'esposizione geometrica delle proposizioni fondamentali sulle coniche definite mediante le loro proprietà focali.

Nella seconda rileviamo anzitutto alcuni simboli diversi dai consueti: uno, simile a ∞, serve (come già fece Descartes) a indicare l'eguaglianza; il segno | significa rapporto e || eguaglianza di due rapporti; in conseguenza la scrittura $a \mid b \parallel xx \mid ab$ equivale a $\frac{a}{b} = \frac{x^2}{ab}$, mentre $aa \parallel xx \parallel ab$ significa $\frac{a^2}{x^2} = \frac{x^2}{ab}$. Il I cap. dell'opera in questione tratta della risoluzione dei problemi, determinati o no; della prima specie sono i due seguenti:

a) Dato un quadrato A B C D, condurre per il vertice A la retta A F E tale che risulti di data lunghezza la porzione F E di essa compresa fra il lato B C ed il prolungamento di C D; *b*) Costruire un triangolo conoscendo la somma di due lati, l'angolo compreso fra essi e la lunghezza della perpendicolare condotta dal vertice al lato opposto.

Come primo esempio dei problemi indeterminati risolti dal de la Hire citiamo il seguente: Dati in un piano due punti A e B, trovarne un terzo tale che la somma

[1] Tutti i suoi scritti, editi ed inediti, vennero raccolti nel T. VI dei *Mémoires de l'Acad. royale des Sciences* (Paris 1730). Quanto c'interessa occupa le pp. 177–98.

P A + P B abbia una lunghezza data d. Condotta P C perpendicolare ad A B e posto AB $= a$, AC $= x$, PC $= y$, si trova che x e y sono legati fra loro dalla relazione

$$x^2 = \frac{1}{4} d^2 - \frac{1}{4} a^2 + ax + \frac{d^2 y^2}{d^2 - a^2}.$$

Le considerazioni del geometra di cui ci occupiamo non sono confinate al piano; valga a provarlo quest'altra questione da lui trattata: « Dati in un piano una retta O B ed un punto O su di essa, determinare fuori del dato piano un punto L tale che, condotta L B perpendicolare alla retta data e detto a un dato segmento rettilineo, risulti OB $+ a =$ OL ». Per risolverlo egli osserva che, per determinare un punto esterno ad un piano rispetto ad una retta tracciata sul medesimo, sono necessarie: 1°) la lunghezza della perpendicolare L A calata da quel punto su quel piano; 2°) la perpendicolare A B condotta da A alla retta A B; 3°) la porzione O B di questa retta compresa fra O e B. Indicando O B con x, A B con y e L A con v, il nostro autore dimostra che, quando siano soddisfatte le condizioni del problema, sussiste la relazione $a^2 + 2\,ax = y^2 + v^2$; siccome questa rappresenta una superficie di second'ordine, così è al de la Hire che spetta il merito di avere introdotti questi notevoli enti nella geometria analitica, ove dovevano occupare più tardi un posto di tanta importanza.

Emerge, da ciò, che il de la Hire, con gli esempi addotti ha voluto mostrare come alle coordinate cartesiane del piano e dello spazio si sia naturalmente condotti dallo studio dei problemi geometrici indeterminati.

Esse vengono poi metodicamente introdotte nel cap. II, che tratta della natura dei luoghi e delle equazioni che li rappresentano. Per luogo geometrico il nostro autore intende qualunque linea, retta o curva, o superficie di cui tutti i punti abbiano la stessa relazione con punti di una stessa retta rispetto ad un punto. Questo punto è detto « origine du lieu »; le coordinate si chiamano (seguendo una ispirazione proveniente senza dubbio da Desargues) una « tige » e l'altra « rameau », mentre il nome di « noeud » viene dato al piede dell'ordinata di un punto. Seguendo Descartes, egli riunisce in un genere (il primo) le linee rappresentabili con equazioni di primo o secondo grado; in un altro (il secondo) quelle che lo sono con equazioni terzo o quarto, ecc. Quelle del primo genere hanno equazioni riducibili, secondo l'autore, alle forme seguenti:

$$\frac{ax}{b} = y\ ,\ ax = y^2\ ,\ xy = a^2\ .\ \frac{ax^2}{b} = \pm (d^2 - y^2)\ .$$

Come si possa effettuare la riduzione a questi tipi di equazioni più complicate, viene esposto dall'autore sugli esempi seguenti:

$$y^2 + \frac{2bxy}{a} - 2cy = dx - x^2 + e^3\ ,\ y^2 - xy = a^2\ ,\ xy + x^2 - bx - ay = ab\ ,$$

di cui la prima appartiene ad un'ellisse e le altre ad iperboli. Il de la Hire affronta poi per primo (senza però esaurirlo) il problema di riconoscere la forma a cui si può ridurre un'equazione di secondo grado fra x e y con la semplice ispezione dei coefficienti. Il III cap. della stessa opera si apre con una dichiarazione concernente l'uso del combinamento degli elementi di riferimento, artificio di cui viene fatto largo uso per costruire una linea (di primo genere) di cui si conosca la equazione.

La terza delle opere di de la Hire, di cui facemmo menzione, si apre con una interessante prefazione nella quale sono ricordati i procedimenti per risolvere graficamente le equazioni esposti da Descartes nella sua *Géométrie* e dal geometra J. Hudde (n. ad Amsterdam nel 1633 o 1640; m. ivi il 16 aprile 1704) nel suo *Mesolabio*; l'autore aggiunge di aver osservati alcuni errori commessi dal primo e di averne fatto parte ad Huygens; avendoli questi comunicati a Fermat, seppe che il grande matematico aveva osservato la stessa cosa. Il de la Hire aggiunge che, prima di pubblicare le proprie osservazioni, si assicurò che Hudde non intendeva di fare altrettanto. L'autore passa poi a risolvere le equazioni di secondo grado algebricamente e quelle di terzo o quarto grado mediante cerchi e sezioni coniche, entrando in molti particolari, ove hanno parte importante le equazioni stabilite nel volume su *Les lieux géométriques*. È in sostanza quanto aveva già fatto Descartes. Passando poi alle equazioni di grado superiore al quarto, l'autore osserva (ed è questo l'appunto mosso alla *Géométrie*) che, imponendosi di adoperare sempre come una delle linee ausiliari una curva di second'ordine, si deve usare come altra una curva di grado più elevato del necessario; così, per risolvere un'equazione di 7° grado seguendo Descartes, si devono usare due linee, una di 2° e l'altra di 4°, mentre in realtà bastano due di 3°. Il de la Hire chiude il suo volume con un elenco delle linee di grado minimo necessario per risolvere le equazioni di un grado non superiore a 64. Osserviamo, finendo, che la soluzione, data nel volume stesso, del problema di « condurre da un punto le normali ad una conica » « suffirait », per usare le parole di un giudice competente, « pour prouver toute la sagacité de La Hire dans l'analyse de Descartes » (1).

Quasi trent'anni più tardi il de la Hire, ritornò sullo stesso tema (2), spintovi da pubblicazioni del Rolle di cui ci occuperemo fra breve (§ 6 del presente cap.), aggiungendo nuove applicazioni delle proprie idee alle equazioni provenienti dalla divisione del cerchio in parti eguali (3).

§ 3. — Giacomo Ozanam.

Giacomo Ozanam nacque nel 1640 a Bouligneux; fu professore di matematica, prima a Lione e poi a Parigi; quivi morì il 3 aprile 1717, avendo acquistata notevole rinomanza per una raccolta di ricreazioni matematiche, che ebbero grande diffusione, specie nella II ed. curatane dal Montucla. Nella storia delle coordinate merita un posto per una trilogia pubblicata nel 1687, i cui costituenti recano i seguenti titoli: *Traité des lignes de premier genre expliquées par une méthode nouvelle et facile*; *Traité de la construction des équations pour la résolution des problèmes déterminés*; *Traité des lieux géométriques, expliqués par une méthode courte et facile* (4). Essi trattano di linee di primo e secondo ordine, con qualche cenno intorno ad alcune speciali di ordine superiore e

(1) M. Chasles, *Aperçu historique* etc., II éd. (Paris 1875), p. 127.

(2) *Remarques sur la construction des lieux géométriques et des équations* (« Hist. de l'Acad. des sciences », année MDCCX: *Mémoires*, pp. 7–45, Paris 1732).

(3) *Méthode générale pour la division des arcs de cercle ou des angles, en eutant de parties égales qu'on voudra* (ibid., pp. 200–208).

(4) Temi analoghi sono stati trattati in un voluminoso ms. esistente a Monaco e attribuito all'Ozanam da P. Tannery (« Ann. intern. d'hist. », Paris 1900, 5e Sect., pp. 297-310).

confermano il fatto, rivelato dagli scritti già esaminati del de la Hire, che i conterranei di Descartes, seguendo le orme di questo grande, studiarono le curve rappresentate da equazioni, non grazie al loro intrinseco valore, ma esclusivamente per servirsene nella risoluzione grafica delle equazioni algebriche.

Il primo dei citati volumi è una derivazione del trattato di Apollonio; le lettere x e y per designare le coordinate e le a, b..., per rappresentare segmenti, sono introdotte come semplici abbreviazioni; e l'Ozanam, al pari di Descartes, rappresenta le curve di second'ordine mediante l'equazione $y^2 = px^2 + qx$, tratta da quella classica opera greca; soltanto verso il termine, prima di esporre l'applicazione delle coniche alla risoluzione dei problemi cubici e biquadratici, egli fa vedere che dette curve si possono ottenere come sezioni piane di un cono circolare retto.

Lo stesso tema viene approfondito nel secondo di quei volumi; nel quale va notato che l'autore fa subire alle equazioni che rappresentano le curve considerate, dei mutamenti, che oggi s'interpretano per trasformazioni di coordinate, ma che egli applica esclusivamente come artificii algebrici semplificatori. Le coniche servono a lui per risolvere le equazioni di terzo e quarto grado; ma per quelle dei due ordini successivi invoca l'aiuto della parabola $(x^3 = a^2y)$ e della iperbole $(x^2y = a^2c)$ solide, che egli disegna esattamente; nè a lui sfugge che l'equazione più complicata $x^3 = a^2y + a^2b$ appartiene essa pure ad una parabola solida. Una fisonomia analoga ha il terzo dei suindicati volumi; ivi l'Ozanam insegna a costruire le curve rappresentate da equazioni di 1° o 2° grado, mostrando di possedere notevole famigliarità con gli artificii equivalenti a trasformazioni di coordinate. Però egli nè dimostra che tutte le equazioni lineari rappresentano rette, nè considera l'equazione generale di secondo grado fra x e y, e tanto meno si propone di classificare gli enti così rappresentati.

§. 4. — De l'Hôpital.

Guglielmo Francesco marchese de l'Hôpital e signore di molte terre nacque a Parigi nel 1661; benchè destinato dalla famiglia alla carriera delle armi, non abbandonò mai la scienza, per la quale da fanciullo aveva manifestato spiccate attitudini; ad essa fece ritorno quando, per un difetto di vista, dovette abbandonare la divisa; prese parte alle gare che contrassegnano le origini dei nuovi calcoli e, sfruttando quanto aveva appreso dal suo maestro Giovanni Bernoulli, scrisse il primo trattato di calcolo differenziale. Morì nel fiore degli anni il 2 febbraio 1704, lasciando un *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant determinés qu'indéterminés*, il quale fu stampato nel 1707 ed a cui arrise un cospicuo e meritato successo [1]; da quanto ora diremo risulta che esso merita una menzione onorevole in ogni storia della geometria analitica.

Dei dieci libri che lo compongono, i cinque primi offrono per noi uno scarso interesse perchè le x, y compaiono ivi soltanto come abbreviazioni utili per ringiovanire la teoria apolloniana delle coniche; notiamo soltanto nel V libro le equazioni $y^{m+n} = a^n x^m$, $x^m y^n = a^{m+n}$ per definire e rappresentare tutte le iperboli e le parabole di gradi superiori. Una particolare importanza presenta invece l'esordio del

[1] A noi stanno sott'occhio un'edizione parigina del 1720 ed una veneziana del 1770.

VI libro [1], onde giova qui riferirlo: « Siano date due rette incognite od indeterminate, AP e PM, formanti fra loro un angolo dato o fissato ad arbitrio; e di cui una AP, che chiamerò sempre x, abbia un'origine fissa A e giaccia sopra una retta data di posizione; mentre l'altra PM, che chiamerò y, varii continuamente, conservandosi sempre parallela a sè stessa. Sia, di più, data un'equazione non contenente se non x e y e delle costanti, ed esprimente la relazione che passa fra ogni indeterminata AP (x) e la sua corrispondente PM (y). La linea, retta o curva, che passa per gli estremi di tutti i valori di y, cioè di tutti i punti M, è detta in generale *luogo*

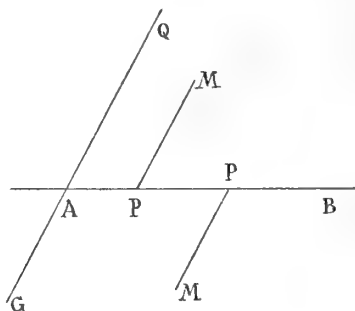



Fig. 5.

geometrico e, in particolare, *luogo* di quest'equazione ». Il nostro autore aggiunge: « Se, dopo avere supposto che le PM siano dirette da una parte della retta A B, p. es. verso Q, si suppone che tendano verso la parte opposta, cioè verso G, i valori di y risulteranno negativi, onde si deve porre P M $= -y$. Similmente, se, dopo di avere supposto che i punti P cadano da una certa parte di A, si suppone poi che vengano nella parte opposta, le A P diverranno negative e si avrà quindi A P $= -x$. I valori positivi di x e y si diranno *veri*, i negativi *falsi*. Ora un luogo geometrico deve passare per gli estremi di tutti i valori delle y, tanto veri quanto falsi ». Curioso però si è che l'autore, quasi spaventato della propria audacia, timidamente soggiunge: « Quando in seguito tratterò di costruire il luogo di un'equazione data, si supporrà sempre che A P (x) e P M (y) siano positive, cioè che tutti i punti M cadano nello stesso angolo B A Q. E si assumerà come luogo dell'equazione data la parte del luogo compresa entro tale angolo »: limitazione arbitraria ed illecita che mostra lo stato d'infanzia in cui la geometria analitica trovavasi ancora settant'anni dopo la pubblicazione della *Géométrie* di Descartes.

Il nostro autore applica queste generalità anzitutto alle equazioni

$$y = \frac{bx}{a} \ , \ y = \frac{bx}{a} \pm c \ , \ y = c - \frac{bx}{a} \ , \ y = x \ , \ y = x \pm c \ , \ y = c - x$$

che tutte rappresentano rette. Passando alle coniche, egli stabilisce per ciascuna una equazione di sufficiente generalità e mostra in quali casi possa ad essa identificarsi l'equazione generale di secondo grado fra x e y, ottenendo così dei criterii discriminatori non diversi da quelli oggi classici; se anche egli non ha risolto completamente il problema di determinare la specie della conica rappresentata da una data equazione,

[1] Questo è intitolato *Dei luoghi geometrici.*

ha però dato alla soluzione contributi di notevole importanza [1]. Dei risultati ottenuti il nostro matematico fa applicazione a buon numero di problemi locali che conducono a linee di 1° o 2° ordine; notiamo fra essi uno proposto da Ruggiero di Ventimiglia («Giornale di Parma», 1693) e contro cui erasi indarno provato il P. Sacheri [2]; inoltre la ricerca del luogo dei piedi delle normali condotte da un punto fisso alle ∞^1 iperboli rappresentate al variare della costante a dalla equazione iperboli $x^m y^n = a^{m+n}$; da ultimo, la determinazione (per usare la nomenclatura moderna) della curva polare reciproca di un cerchio rispetto ad un altro e la prima dimostrazione della generatrice organica delle coniche inventata da Newton.

Gli ultimi due libri presentano per noi un minore interesse perchè si riferiscono ai problemi determinati; nel IX è largamente svolta la risoluzione grafica delle equazioni algebriche e nel X è fatta applicazione ad un grande numero di interessanti problemi, alcuni dei quali difficili e che avevano posto a dura prova distinti geometri ed attorno a cui altri continuarono ad affaticarsi; citiamo ad esempio la questione di dividere un triangolo scaleno in quattro parti equivalenti mediante due rette fra loro perpendicolari [3], la ricerca delle sezioni circolari di un cono quadrico, la multisezione dell'angolo ecc. Poche opere lasciano nel lettore un'impressione più grata di questo bello e buon libro!

§ 5. — Newton.

Il sommo matematico, che ora dobbiamo considerare sotto l'aspetto di seguace di Descartes nacque a Woolsthorpe (contea di Lincoln) il giorno di Natale dell'anno 1642; ammesso (1661) nel Trinity College di Cambridge non tardò a distinguersi; ivi, non solo ottenne (1665, 1667, 1668) tutti i gradi accademici, ma si conquistò l'amicizia e l'ammirazione del suo maestro Isacco Barrow, il quale (ottobre 1669) gli cedette la cattedra da lui occupata di «Lucasian professor». Celebre fra tutte le sue opere è quella intitolata *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), come celebre

(1) Un perfezionamento a quanto ivi è esposto è dovuto ad un discepolo di Giacomo Bernoulli, J. Hermann (n. a Basilea il 16 luglio 1678, m. ivi l'11 luglio 1733); lo si apprende dalla memoria *De locis solidis ad mentem Cartesii concinne construendis* («Commentar. Acad. scient. Petropolitanae», tom. IV, 1729, pp. 15-25). È ivi considerata la curva di equazione

$$\alpha y^2 + 2\beta xy + \gamma x^2 + 2\delta y + 2\varepsilon x + \varphi = 0;$$

ed è provato che, se $\alpha = 0$, la curva è un'iperbola; se $\alpha \neq 0$ è una coppia di rette quando sia

$$\varepsilon = \frac{\beta\delta + \sqrt{\beta^2\delta^2 + \alpha^2\delta\varphi - \alpha\gamma\delta^2 - \alpha\beta^2\varphi}}{\alpha};$$

finalmente ove ciò non accada, la curva è un ellisse, una parabola ed un'iperbola secondochè

$$\beta^2 - \alpha\gamma \lesseqgtr 0.$$

Sono questi i criterii discriminatori tuttora in uso.

(2) *Quaesita geometrica* (Mediolani 1693).

(3) Cfr. le mie *Osservazioni sopra la storia di un problema pseudo-elementare* (Bibl. mathematica, 3ª sez., tom. IV, 1903, pp. 48-51).

fra tutte le questioni di priorità è quella che nacque fra lui e Leibniz per l'invenzione del calcolo infinitesimale. Quando morì in tarda età (2 marzo 1727), furono a lui decretati, dalla patria riconoscente, onori ben meritati da un genio che non ebbe, nè prima nè poi, chi lo superasse.

A noi interessa la più modesta delle sue opere, l'*Aritmetica universale*, compendio di lezioni da lui tenute nel decennio 1673-83 e pubblicata nel 1707 (1). Benchè inspirata dalla *Géométrie* di Descartes (2), ancor più di questa essa si differenzia da un trattato moderno di geometria analitica: chè lo scopo che si propose Newton è quello di porre in grado i proprii ascoltatori di risolvere ogni sorta di questioni, determinate ed indeterminate; e le coordinate, se vengono usate in molti casi per fissare la posizione di un punto, non sono mai presentate sotto l'aspetto di un mezzo regolare e costante. La sola frase di carattere generale da lui scritta è forse la seguente (vol. I, p. 135): « Se si ha una curva ottenuta mediante una costruzione geometrica o secando qualche solido, la sua natura potrà esprimersi mediante un'equazione ». Newton suppone evidentemente nota ai propri lettori la teoria delle coniche e, a somiglianza di Descartes, rappresenta tali curve con l'equazione $y^2 = rx - \frac{1}{q} x^2$, che, nel caso della parabola, si semplifica divenendo $y^2 = rx$; di una retta determina caso per caso l'equazione, senza però rilevare che questa risulta sempre di 1° grado. I luoghi geometrici considerati da Newton sono nella maggioranza circoli e coniche. Fra i passi relativi notiamo quello dedicato al problema delle quattro rette (con cenni dell'estensione ad un numero maggiore), l'altro da cui si apprende la generazione organica delle dette curve, quelli in cui una conica si presenta come sezione piana di un cono retto o di un iperboloide rigato rotondo, e finalmente la descrizione dell'ellisse come trajettoria di un punto appartenente ad un segmento di lunghezza costante i cui estremi percorrono due rette fra loro perpendicolari. Non mancano poi interessanti sviluppi concernenti altre linee; infatti è nell'*Arithmetica universalis* che Newton insegnò la descrizione della cissoide mediante una squadra mobile (3); è in essa che si trova per la prima volta l'equazione della curva « kappa » (4) e che la divisione d'un angolo in parti eguali viene effettuata con le curve chiamate da T. Ceva « cicloidi anomali » (5). Senza spingere ulteriormente quest'analisi, rileveremo, finendo, un progresso teorico dovuto all'opera che ci occupa: mentre per Descartes e suoi discepoli chi usa coordinate deve prendere a prestito dalla geometria elementare soltanto il teorema di Pitagora e la teoria della similitudine, Newton ammette l'uso di qualunque proposizione giudicata utile: è la stessa larghezza di vedute che lo spinse a concedere al geometra di usare altri strumenti all'infuori della riga e del compasso, soli ausiliarii accordati da Euclide.

(1) *Arithmetica universalis, seu de compositione et resolutione arithmetica liber* (Cantabridgiae 1707). Noi ci serviamo dell'ottima versione francese commentata, dovuta al Beaudeux (Paris 1802).

(2) Da certe parole di Newton sembra potersi arguire che i suoi ascoltatori avessero sotto gli occhi quest'opera.

(3) G. Loria, *Spezielle alg. und transs. ebene Kurven*, II Aufl. (I Band. Leipzig 1910), pp. 38-39.

(4) Id., ibid., p. 196.

(5) Id., ibid., p. 388.

§ 6. — Rolle

Ritorniamo ora in Francia per segnalare la comparsa di uno spirito combattivo, che, dopo avere spiegato il vessillo della rivolta contro l'« infinito » asceso allora al governo del regno matematico, diresse a qualche pagina della *Géométrie* alcune critiche non indegne dell'illustre algebrista che risponde al nome di Michele Rolle. Nato a Aubert il 21 aprile 1632, fu scoperto dall'occhio acuto di Colbert, che lo trasse dall'umile posizione in cui si trovava, e morì a Parigi l'8 novembre 1719. Le obbiezioni [1] da lui mosse ai procedimenti cartesiani si trovano sul confine che separa l'algebra dalla geometria, riferendosi ai metodi per risolvere graficamente le equazioni algebriche determinate: è nostro dovere indicarne l'essenza.

È noto che se

$$\varphi(x) = 0 \tag{1}$$

è un'equazione di detta specie, seguendo i dettami di Descartes, per risolverla, si sceglie ad arbitrio una curva algebrica

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

e, tenendo conto della equazione (1), la si trasforma in un'analoga equazione

$$F(x, y) = 0 ; \tag{3}$$

allora il problema algebrico di risolvere l'equazione data è trasformato in quello di determinare i punti comuni alle curve rappresentati dalle equazioni (2) e (3). Ora il Rolle nota che, data la grande arbitrarietà dell'equazione (2), si possono presentare dei fenomeni allarmanti che diminuiscono l'utilità e menomano la portata di tale procedura. Anzitutto si possono così introdurre soluzioni estranee (come quando un'equazione di terzo grado viene risolta servendosi di due coniche); ma può anche accadere che non sia posta in evidenza qualche radice reale. È questo un fatto di cui il Rolle non riesce a darsi ragione, mancando a lui la nozione di punti immaginarii ed ignorando egli che la congiungente di due punti immaginarii può essere reale (nei casi da lui considerati, parallela a Oy) e che coppie di tal fatta possono presentarsi anche in rami di curva totalmente immaginarii.

A meglio chiarire lo stato della scienza, di cui ci occupiamo, in principio del secolo XVIII, notiamo che il Rolle, di fronte all'equazione

$$h^4 y^2 - 4a^2 h^2 xy - 8a^3 h^2 y + 8a^4 x^2 + 32a^6 = 0 ,$$

non riesce a vedere che essa rappresenta una coppia di rette, ma riconosce che la corrispondente linea possiede un unico punto reale, quello di coordinate $2a, \dfrac{8a^3}{h^2}$.

[1] *Eclaircissements sur la construction des egalités* (« Histoire de l'Acad. des sciences », année MDCCVIII, pp. 339-365; MDCCIX, pp. 320-350). In quest'ultimo volume si trova un'altra memoria dello stesso autore che tratta *De l'évanouissement des quantités inconnues dans la géométrie analytique*, che citiamo perchè ivi s'incontra, per la prima volta (salvo errore), la dicitura « geometrica analitica » in senso analogo a quello oggi in uso.

E per lui l'equazione $a^2 x^2 - 2a^3 x + y^4 - 6a^2 y^2 + 10 a^4 = 0$, che per noi rappresenta due parabole immaginarie coniugate, « n'exprime ni courbe ni ligne droite », non essendo soddisfatta se non per $x = a, y = \pm a\sqrt{3}$.

Mentre (come emerge da quello che ora dicemmo), per quànto concerne gli enti immaginarii, il Rolle brancola nel buio, si mostra espertissimo nel tracciamento delle curve e nel distinguere i valori positivi da quelli negativi delle coordinate. Ed è poi suo merito l'avere segnalate le difficoltà in cui si può imbattere chi segua Descartes nel risolvere graficamente le equazioni algebriche, anche se non ha insegnato il modo di vincerle.

CAPITOLO IV.

Le coordinate in istato di simbiosi col calcolo infinitesimale.

Il metodo cartesiano s'introdusse, come vedemmo, nel corpo della matematica quale travestimento dei metodi usati dai geometri greci; d'altra parte esso vide la luce nell'epoca in cui le procedure eudossiane ed archimedee, combinandosi alla simbolica algebrica, omai giunta a maturità, stavano per dare origine alla moderna analisi. Per tali motivi rari sono gli scritti di esclusiva pertinenza della geometria cartesiana propriamente detta e tutti, come dimostrammo nel cap. prec., contengono nuove esposizioni della teoria delle coniche, riguardata come ausiliare della risoluzione grafica delle equazioni di 3° e 4° grado. Per converso numerosi sono i lavori del tempo in cui le coordinate sono semplicemente ospiti, ma ospiti attivi, in quanto prestano un efficace concorso nella investigazione di proprietà riposte delle curve, in particolare nella costruzione delle tangenti e delle normali, problema che (vedi p. 788) stava tanto a cuore a Descartes stesso. È, pertanto, indispensabile che noi ci aggiriamo nella regione che ebbe Leibniz per principale pioniere, per segnalarvi la presenza di coordinate ed i servigi che esse prestarono.

§ 1. — Giacomo Bernoulli.

Questo matematico, che già incontrammo (p. 798) fra i commentatori ed editori di Descartes, merita di venire ora nuovamente citato specialmente per la breve ma succosa sua nota dal titolo: *Nova methodus expedite determinandi radios osculi, seu curvaturae, in curvis quibusvis algebricis* [1]. Ivi l'equazione della curva considerata trovasi scritta sotto la forma

$$fx^m + gy^n + hx^r y^s = 0$$

e dal contesto risulta che il Bernoulli intendeva esprimere in questo modo che il primo membro della equazione considerata è la somma di tanti termini di ciascuno di quei tre tipi; il risultato che egli ottiene può scriversi (a meno del segno)

$$(1)\quad \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}} = \frac{m(m-1)fx^{m-2}y^2 + n(n-1)gy^{-2}z^2 + r(r-1)hx^{r-2}y^{s+2} + s(s-1)hx^r y^{s-2}z^2}{ng\,y^{n+1} + sh\,x^r y^s - z(mf\,x^{m-1} + rh\,x^{r-1}y^s)},$$

(1) « Acta erud. » novembre 1900; J. Bernoulli, *Opera*, p. 888-891; cfr. p. 578-579 e 1088-1108.

ove R è il raggio del cerchio di curvatura in un punto della curva considerata e N la lunghezza della corrispondente normale, purchè s'intenda che si abbia nel numeratore e nel derminatore una somma di termini dell'indicato tipo, e finalmente sia

$$z = -y \frac{mf\,x^{m-1} + rh\,x^{r-1}\,y^s}{ng\,y^{n-1} + sh\,x^r\,y^{s-1}}.$$

La formola (1) conduce spesso a convenienti costruzioni del centro di curvatura, valga a provarlo l'esempio, scelto dal Bernoulli stesso, della parabola $y^n - x = 0$; allora essa dà

$$\frac{N}{(n-1)\,R} = \frac{z}{z + nx},$$

la quale, quando siasi tracciata la normale in un punto della data curva, conduce subito al corrispondente centro di curvatura. La ricerca condotta felicemente a termine dall'eminente geometra di Basilea mette in evidenza il notevole fatto storico che *la geometria infinitesimale delle curve piane ha avvertito, prima della geometria analitica ordinaria, l'opportunità di stabilire formole generali, cioè indipendenti dalla posizione degli assi di riferimento*; cosicchè, in particolare, si è verificato il fenomeno singolare che *nella letteratura matematica s'incontra l'espressione generale del raggio di curvatura prima della formola che dà la distanza di due punti di note coordinate*. Si può aggiungere che Giacomo Bernoulli si è occupato altre volte della ricerca del raggio di curvatura di una curva; ma quello che riferimmo è il più notevole dei risultati da lui conseguiti su tale soggetto.

Altri passi delle sue opere porgono la prova che ai suoi tempi erasi avvertita la necessità di attribuire un segno alle coordinate. Così nella seconda delle dissertazioni di laurea che trattano *De seriebus infinitis* (redatte da suoi discepoli, ma di cui egli assunse la paternità), le equazioni cartesiane $ay^2 = bx^2 + x^3$, $a^2x - x^3 = ay^2$, si trovano anche scritte sotto le forme equivalenti

$$y = \pm x \sqrt{\frac{b+x}{a}}\,, \quad y = \pm \sqrt{\frac{a^2x - x^3}{a}} \text{ (1)}.$$

A conferma della sicurezza con cui egli procedeva nella determinazione della forma di una curva di data equazione cartesiana, riferiremo la frase con cui, in una delle sue più celebri produzioni (2), egli descrisse la forma della lemniscata da lui inventata: « circum axem BG[2 a] constituta formam refert jacentis notis octonarii ∞, seu complicatae in nodo fasciae, sivi lemnisci, *d'un noeud de ruban* Gallis ».

Chiuderemo questo § notando come in altro notevolissimo lavoro (3) il primo dei Bernoulli usi come una coordinata il raggio vettore, non contato da un punto fisso, ma dalla periferia di un cerchio avente per centro il punto donde si dipartono tutte le rette considerate: ciò dimostra che *il concetto di coordinata era fin da allora in istato di evoluzione*.

(1) Bernoulli, *Opera*, pp. 539–540.

(2) *Constructio curvae accessus et recessus aequabilis* (« Acta erud. » 1694; *Opera*, p. 609).

(3) *Specimen calculi differentialis in dimensione parabolae helicoidis* (« Acta erud. » 1691; *Opera*, p. 431).

§ 2. — Giovanni Bernoulli [1].

Giovanni, decimo figlio di Nicola Bernoulli, nacque a Basilea il 27 luglio 1667 e ricevette dai genitori un'educazione accuratissima. Nel patrio ateneo ottenne il grado di « magister artibus »; ma in matematica fu discepolo di suo fratello Giacomo, in unione al quale studiò la fondamentale memoria di calcolo infinitesimale pubblicata nel 1684 da Leibniz negli *Acta eruditorum* e dei nuovi concetti si rese così rapidamente e completamente padrone da venire salutato come creatore del calcolo integrale. A Basilea gli fu conferita anche la laurea in medicina (16 marzo 1694); ma lasciò ben presto e per sempre Ippocrate per Archimede quando (1695) fu chiamato a insegnare matematica nell'Università di Groninga. Alla morte del fratello, fu destinato a succedergli, senza la prova del concorso e sulla cattedra rimase sino al momento della morte (1° gennaio 1748).

Fra i molti lavori da lui scritti ci corre l'obbligo di ricordarne anzitutto uno che risale al 1692, perchè fece adottare il nome di « cartesiana », per la geometria a base di coordinate, o mostra come tale dicitura era già entrata nell'uso comune alla fine del secolo XVII. Che egli fosse ammiratore sincero della *Géométrie* è attestato dalla dichiarazione « nihil esse in tota Mathesis, pro quo communis geometria, a Cartesio aliisque tradita, non sufficit ». La si legge in un importante lavoro [2] inteso a perfezionare il metodo analitico, così da renderlo atto a risolvere le questioni in cui si tratta di « determinare le equazioni di tutte le curve dotate di un'assegnata proprietà ». Il primo problema di siffatto tipo sciolto dal citato geometra consiste nella ricerca delle linee piane che, a somiglianza del cerchio, godono la proprietà che tutte le trasversali uscenti da un dato punto le taglino in punti le cui distanze da quello formino un prodotto costante. Ora il Bernoulli ne enuncia (senza dimostrarla) una soluzione fondata sull'uso di uno speciale sistema di coordinate, che può definirsi come segue: si assumano ad arbitrio nel piano considerato un punto fisso O ed una retta fissa Ox e si scelgano, per determinare la posizione di un punto arbitrario P, le lunghezze ϱ del segmento OP e di quello y condotto da P ad Ox sotto un determinato angolo; allora soddisfano al problema tutte le curve di equazioni

$$y = a\varrho^{\alpha} + a\varrho^{2-\alpha}$$
$$y = a\varrho^{\alpha} + a\varrho^{2-\alpha} + b\varrho^{\beta} + b\varrho^{2-\beta}$$
$$y = a\varrho^{\alpha} + a\varrho^{2-\alpha} + b\varrho^{\beta} + b\varrho^{2-\beta} + c\varrho^{\gamma} + c\varrho^{2-\gamma}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ove (afferma il Bernoulli), non soltanto i coefficienti $a, b, \ldots$, ma anche gli esponenti $\alpha, \beta \ldots$ sono numeri arbitrarii, anche irrazionali [3]. Una seconda questione dello stesso

[1] R. Wolf, *Erinnerungen Johann I Bernoulli aus Basel* (« Arch. f. Math. u. Phys. » tom. XIII, 1849, pp. 692-8).

[2] *Supplementum defectus geometriae cartesianae circa inventionem locorum* (« Acta erud. », 1696; Joh. Bernoulli, *Opera omnia*, tom. I, Lausannae et Genevae 1742, p. 155).

[3] Limitandosi a curve algebriche, la soluzione generale del problema è data dalla seguente equazione cartesiana:

$$u_r(x, y) + u_{r+1}(x, y) + \cdots + u_{n-1}(x, y) + cu_r(x, y)(x^2 + y^2)^{\frac{n-r}{2}} = 0$$

ove c è una costante, n e r interi positivi di eguale parità e le $u_i(x, y)$ sono forme binarie del grado i.

genere, risolta dal Bernoulli, consiste nella ricerca delle curve che condividono con l'iperbole, la proprietà seguente: Una retta di data direzione taglia una delle curve in questione in punti per cui è costante il prodotto delle distanze dall'intersezione di quella retta con una retta fissa. Assunta questa come asse delle ascisse e supposte le ordinate parallele a quella direzione, il citato geometra trova come equazione delle curve risolutrici del problema quelle che riferimmo più sopra (¹).

Un altro perfezionamento che Giovanni Bernoulli fece compiere alla geometria gli è quando, nel corso degli studii che gli diedero fama di inventore del calcolo esponenziale (²), introdusse nella geometria curve non algebriche rappresentate da equazioni del seguente tipo:

$$x^x = y \;,\; x^a = y \;,\; x^y = a \;,\; x^x = a^y \;,\; x^x + x = x^y + y \,.$$

Va da ultimo rilevato come dalle *Lectiones mathematicae*, impartite dal nostro matematico al marchese de l'Hôpital negli anni 1691-'92, si tragga la prova che alla fine del secolo XVII fosse stato ormai tolto il neo che deturpava la geometria cartesiana nel suo primo stadio di sviluppo, per l'assenza di convenzioni conducenti all'interpretazione dei valori negativi delle coordinate; ed invero nella IV di dette *Lezioni* si legge (³) una breve ma conclusiva discussione che conduce all'esatto tracciamento della celebre curva $x^3 + y^3 = a\,xy$.

§ 3 — De l'Hôpital.

Ulteriori conferme di quanto testè osservammo si traggono dalla celebre *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* (⁴) del marchese de l'Hôpital; ivi infatti, benchè alla forma delle linee considerate si attribuisca mediocre importanza, le curve investigate trovansi delineate, talora incompletamente, ma mai in modo erroneo. Va poi rilevato come, per determinare un punto nel piano, vengano ivi considerate non soltanto l'ascissa (*coupée*) e l'ordinata (*appliquée*), non solo il raggio vettore (*appliquée partant du pôle*), ma anche grandezze di definizione più complicata. Così in un certo punto il detto autore suppone dati una curva ed un punto A su di essa; preso un punto arbitrario P sulla data curva e condotta per esso la parallela ad una data direzione, un punto qualunque M di essa parallela (cioè un punto arbitrario del piano) potrà

(¹) Una seconda soluzione del problema è data dalla formola cartesiana

$$u_0\, y^n + u_1\, y^{n-1} + \cdots + u_{n-1}\, y + c\, u_0 = 0 \,,$$

ove u_i è in genere una funzione di grado i della sola x.

(²) *Principia calculi exponentialium, seu percurrentium* («Acta erud.» 1696; *Opera*, tom. I, p. 179).

(³) *Opera*, tom. III, p. 404.

(⁴) La I ed. porta la data Paris 1696; ristampe ne vennero fatte negli anni 1715, 1720, 1768 ecc. È estraneo al nostro còmpito il trattare la questione di determinare quanto a tale opera contribuì Giovanni Bernoulli; limitiamoci a segnalare, come documenti importanti che la concernono la memoria *Johannis* (I) *Bernoulli Lectiones de calculo differentialium, mit einem Vorwort von* P. Schafheitlin («Verh. der naturf. Gesellschaft in Basel», tom. XXXIV, 1922); ed il volumetto, pubblicato pure per cura dello stesso col titolo, *Die Differentialrechung von Johannis Bernoulli aus dem Jahre 1691-92* (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig 1924).

determinarsi mediante le lunghezze dell'arco AP e del segmento PM. Ciò prova che il concetto di coordinata andava continuamente ampliandosi (cfr. la chiusa del § 1).

Non va poi dimenticato che è al marchese de l'Hôpital che si deve la scoperta ed il nome della cuspide di seconda specie (¹); così egli ha iniziate le ricerche sulle singolarità delle curve piane, che furono validamente proseguite da parecchi suoi compatrioti, come ora vedremo.

§ 4. — Saurin e Maupertuis.

Giuseppe Saurin (nato a Courtaison nel 1659, morto a Parigi il 29 dicembre 1737), passato dal protestantesimo al cattolicismo, ottenne da Luigi XIV una pensione e poi un seggio nell'Accademia delle scienze. Nell'*Analyse des infiniment petits* egli notò una lacuna, cioè l'assenza di una spiegazione del fatto che in un punto multiplo di una curva la sotto-tangente si presenta sotto forma indeterminata; a colmarla egli dedicò tre verbose memorie (²) in cui, su parecchi esempii, viene mostrato come si determinino le tangenti in un punto per il quale passano parecchi rami di una linea piana: lavoro utile che caratterizza lo stato d'infanzia in cui trovavasi allora il calcolo differenziale.

Maggiore originalità offre uno scritto del celebre Pietro Luigi Moreau de Maupertuis (³) (nato à Saint-Malò il 17 luglio 1698, morto a Basilea il 27 luglio 1759); ne è autore il matematico che, dopo essersi illustrato con lavori intesi a misurare in Lapponia un grado di meridiano, nel 1741 fu chiamato da Federico II a presiedere la classe matematica dell'Accademia di Berlino, carica che effettivamente occupò nel periodo 1745-1753. Nella memoria che ci interessa egli si è proposto di mostrare come, oltre ai punti d'inflessione ed ai punti di regresso, le curve piane possono presentare altre singolarità (*affections*) più complicate. Tali sono il *point de serpentement*, proveniente dalla presenza di due flessi consecutivi, e il *point de double pointe* che invece ha origine dalla coincidenza di due cuspidi; dal sovrapporsi di una cuspide e di un flesso, trae origine invece la cuspide di seconda specie scoperta dal de l'Hôpital. Al dire del citato geometra, tutti questi punti singolari sono caratterizzati dall'essere $d^3 y = 0$ (⁴).

(¹) *Analyse des infiniment petits* (Paris 1705), p. 102; ivi si parla di « points qu'on peut appeler de rebreussement de le seconde sorte, et que personne, que je sâche, n'a encore consideré ».

(²) *Remarques sur un cas singulier du problème général des tangentes* (Mém. de l'Academie des sciences, 1716, pp. 59–79 e 275–289; 1723, pp. 222–250). Il Saurin si era prima occupato dello stesso argomento nel « Journal des savants » (1703) ed aveva osservato essere una cuspide di prima specie caso speciale del punto doppio.

(³) *Sur quelques affections des courbes* (Mém. de l'Acad. de Paris, 1729, pp. 277–282; vedi anche il relativo commento del Fontenelle nella *Histoire* che fa parte dello stesso volume, pp. 37–50).

(⁴) Secondo il Maupertuis, una curva d'ordine n, che sia tagliata in $n - 2$ punti da ogni retta del suo piano, possiede un punto doppio; se invece è tagliata in $n - 4$ punti, possiede un punto d'ondulazione. L'inesattezza di tali asserzioni venne dimostrata da de Gua in un volume di cui parleremo nel Cap. seguente.

CAPITOLO V.

Costituzione della teoria generale delle curve algebriche piane.

§ 1. — Newton.

Nella *Géométrie* di Descartes le curve algebriche sono considerate e studiate esclusivamente come ausiliarii per la risoluzione delle equazioni pure algebriche; da quanto finora esponemmo risulta però che i geometri posteriori ravvisarono nelle linee piane in generale una miniera ricchissima di nobile metallo; mostreremo ora, senza abbandonare il campo algebrico, come siasi in conseguenza costituita una disciplina, di solida struttura, la quale continua tuttora a dare nuovi frutti e ad ornarsi di nuove frondi.

La corrispondente letteratura si apre con la memoria di Newton intitolata *Enumeratio linearum tertii ordinis* (¹). Quantunque pubblicata soltanto nel 1704, essa sembra essere frutto di indagini che risalgono al 1676 ed essere stata redatta definitivamente nel 1695. Mentre prima le coordinate erano state usate soltanto per dimostrare proprietà note delle coniche, Newton ha offerto il primo esempio di applicazione metodica del calcolo algebrico allo studio ed alla classificazione di un'intera categoria di enti geometrici dianzi ignoti; e per conseguire lo scopo, ha usato il fecondissimo metodo di ridurre l'equazione generale delle curve considerate ad alcune forme tipiche, ricorrendo a trasformazioni di coordinate. Da quanto egli espone nella I sezione del suo lavoro risulta che egli riteneva evidente o già nota l'invariabilità del grado di un'equazione fra x ed y, di fronte ad una trasformazione di coordinate; essa ha per corollario la nozione di *ordine* di una curva algebrica e l'idea di classificare tutte le curve algebriche in base a tale concetto. Di grande importanza è la II sezione, chè Newton si propone ivi di estendere a tutte le curve algebriche alcune proprietà fondamentali delle coniche e giunge così ai seguenti teoremi: *a*) Data una curva algebrica e condotte quantesivogliano trasversali fra loro parallele, se si determina sopra ciascuna il centro delle medie distanze dei punti d'intersezione, si ottengono infiniti punti di una retta (la si chiama *diametro*); *b*) Quando una curva algebrica possiede un numero di asintoti eguale al suo ordine, qualunque trasversale determina sulla curva e sugli asintoti due gruppi egualmente numerosi, aventi il medesimo centro delle medie distanze; *c*) Se da un punto qualunque del piano di una curva algebrica si conducono due trasversali parallele a due direzioni fisse, i prodotti dei segmenti compresi su queste rette fra quel punto e la curva stanno fra di loro in un rapporto che dipende soltanto dalla posizione del punto di partenza. Nella III sezione, non meno importante della II, Newton dimostra che l'equazione di una cubica piana può sempre ridursi ad una forma tale che il suo secondo membro abbia la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$, mentre il primo ha una delle espressioni se-

(¹) I. Newton, *Opuscula mathematica*, tom. I (Lausannae et Genevae 1744), pp. 247-270; cfr. W. Rouse Ball, *On Newton classifications of cubic curves* (« Proc. of the London mathem. Society », tom. XX, 1891, pp. 104-143).

guenti: $xy^2 + ey, xy, y^2, y$ (¹). Una speciale importanza hanno le curve di equazione $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (dette dal sommo geometra « parabole divergenti »), avendo Newton enunciato il seguente elegantissimo risultato: Come tutte le coniche possono ottenersi proiettando (« per umbras ») dal cerchio, così tutte le cubiche piane possono ottenersi proiettando una delle parabole divergenti. Vedremo presto come a stabilire la verità di questa bella proposizione siansi cimentati varii matematici; ma qui vogliamo notare che certamente era in grado di dimostrarla (segando un cono cubico) colui che aveva insegnato nell'*Aritmetica universale* come si ottengano le equazioni cartesiane delle sezioni piane di un cono circolare o d'un iperboloide rotondo (ved. p. 810). Newton non si è arrestato alla surriferita ripartizione in 5 classi di tutte le cubiche piane, ma le ha poi divise in 72 specie (²), offrendo in tal modo un nuovo e significante esempio della potenza e dell'elasticità del nuovo strumento introdotto da Descartes nella geometria. Nè va taciuto che, inserendo nella citata monografia un capitolo dedicato alla risoluzione delle equazioni dei gradi 9-12 col mezzo di curve di terzo e quarto ordine, egli perfezionò notevolmente una sezione dell'opera del grande geometra francese; onde è che, se — come sembra — le più significanti illustrazioni di una procedura matematica consistono in applicazioni di essa, nessuno dei numerosi commentatori della *Géométrie* può accampare titoli di benemerenza superiori a quelli che vanta a ragione l'autore dei *Principia* (³).

§ 2. — J. Stirling.

Al silenzio, serbato da Newton intorno alle dimostrazioni di molti risultati esposti nella sua fondamentale memoria sulla teoria delle cubiche piane, sopperì per primo un suo giovane conterraneo, James Stirling (⁴) (nato in una piccola località della Scozia nel 1692 e morto a Edinburgo nel 1770, avendo sino dal 1726 abbandonata la scienza per una occupazione capace di assicurargli un'onorevole esistenza), nell'opera *Lineae tertii ordinis newtonianae sive illustrior tractatus D. Newtonii de enumeratione linearum tertii ordinis* (Oxfod 1717) (⁵). Delle 128 pagine che lo formano, circa due terzi rappresentano un'introduzione nella quale sono esposti gli strumenti di dimostrazione, il principale dei quali è costituito dalle serie, di cui l'autore si serve con singolare perizia. Della trasformazione delle coordinate egli usa con notevole disinvoltura, ma come artificio analitico, giacchè osserva che la scelta di determinate rette come assi produca certe semplificazioni nelle equazioni delle curve considerate, ma non si arresta a stabilire le formole della corrispondente trasformazione di coordinate. Fra le proposi-

(¹) Questa riduzione venne poi utilizzata per la quadratura delle cubiche piane dal Bougainville (*Traité de calcul intégral*, Paris 1754, p. 266).

(²) Nel catalogo di Newton mancano sei specie, che vennero segnalate più tardi.

(³) A scanso di equivoci, giova rilevare che il frammento postumo intitolato *Artis analyticae specimina vel geometria analytica*, pubblicato da S. Horseley nel tom. I (Londini 1779; pp. 387-518) di Is. Newtoni *Opera quae extant omnia*, non si riferisce alle coordinate.

(⁴) Cfr. C. Tweedie, *James Stirling, a sketch of his life and works, alongwith scientific correspondence* (Oxford 1922).

(⁵) Il nome di Newton s'incontra nell'elenco di coloro che sottoscrissero per rendere possibile la stampa del volume. Una seconda edizione ne fu fatta a Parigi nel 1787.

zioni stabilite da Stirling meritano di essere ricordate le seguenti: un asintoto rettilineo non può incontrare una curva d'ordine n in più di n-2 punti; una curva d'ordine n non può possedere più di n-1 asintoti, fra loro paralleli; se l'asse delle y è parallelo ad un asintoto di una curva d'ordine n, l'equazione di questa non può contenere y^n; per conseguenza l'equazione di una cubica può sempre ridursi alla forma

$$(x + a)\, y^2 = (bx^2 + cx + d)\, y + (ex^3 + fx^2 + gx + h).$$

Altra sezione notevole dell'opera di Stirling è quella dedicata al tracciamento di una curva di cui è data l'equazione. Egli ha, non soltanto muniti di convincenti dimostrazioni i tre teoremi generali di Newton che riferimmo nel § precedente, ma, contemporaneamente all'Hermann (1), scoprì che una curva d'ordine n è in generale determinata da $\frac{n(n+3)}{2}$ de' suoi punti. Scendendo poi a considerare le curve di terzo ordine, lo Stirling stabilì l'esistenza delle 72 specie descritte da Newton e ne aggiunse altre quattro; una quinta gli fu segnalata da Nicola Bernoulli (2); l'ultima della serie venne segnalata dal Nicole, in una memoria di cui parleremo nel § 4 del presente Capitolo. Da tutto ciò emerge che l'operetta dello Stirling rappresenta un notevole contribuo alla teoria delle curve algebriche, allora in formazione, anche se a lui sembri essere sfuggita l'importanza che possiede la considerazione dei punti multipli.

§ 3. — C. Maclaurin.

Colin Maclaurin (3) nacque a Kilmodan (Scozia) nel febbraio 1698; rimasto orfano, grazie all'appoggio d'uno zio paterno potè inscriversi all'Università di Glasgow, ove attrasse l'attenzione di R. Simson; nel 1717, non ancora ventenne, ottenne per concorso la cattedra di matematica nell'Università di Aberdeen, ma presto la perdette in conseguenza di un viaggio in Francia durato un triennio. Con l'appoggio di Newton, con cui era in cordiale relazione sino dal 1719, fu nominato professore nell'Università di Edinburgo, ove rimase sino alla morte (14 giugno 1746). Delle numerose sue pubblicazioni c'interessa soltanto quella intitolata *Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis* (Londini 1720). Ivi, prendendo le mosse dalla generazione organica delle coniche ideata da Newton, egli giunge per gradi (passando, cioè, per le curve di terzo e di quarto ordine) alla seguente descrizione di curve di tutti gli ordini: «Se $OP_1\, P_2 \ldots P_n Q$ è una linea spezzata la quale, deformandosi, conserva costanti gli angoli in $P_1, P_2, \ldots, P_n$ mentre i suoi lati variano; se il primo de' suoi lati passa per un punto fisso O e ciascuno dei suoi vertici $P_1\, P_2 \ldots P_n$ descrive una retta; se finalmente una retta $O'Q$, passante per un secondo punto fisso O′, forma con l'ultimo lato di quella spezzata un angolo esso pure costante, il luogo geometrico del punto Q è una curva dell'ordine $n + 2$ passante $n + 1$ volte per O». Per stabilire questa proposizione (in generale e nei casi speciali dianzi citati) il Maclaurin segue un procedimento che direb-

(1) *Phoronomia* (Amstelod. 1716).

(2) Ved. una lettera in data 1° aprile 1733, pubblicata dal Tweedie, op. cit., p. 159.

(3) Ch. Tweedie, *A study on the life and writings of Colin Maclaurin* («Mathem. Gazette», vol. VIII, october 1915).

besi modellato su quello che trovasi applicato nell'*Aritmetica universale*; si serve cioè di coordinate cartesiane soltanto per esporre con maggiore snellezza le laboriose considerazioni su triangoli simili di cui fa largo uso. Perciò la *Geometria organica* non arreca alcun perfezionamento alla tecnica cartesiana; per converso essa occupa un posto eminente nel gruppo di lavori a cui deve la vita la teoria delle curve piane. Ivi infatti si legge (p. 136, cor. I) la fondamentale proposizione, secondo cui due linee degli ordini m e n si tagliano in mn punti: *è il teorema Bézout sotto veste geometrica*, Inoltre egli ha scoperto (p. 137, cor. IV) che *una curva d'ordine n non degenere non può avere più di* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, *fra punti doppii e cuspidi*, e lo ha dimostrato con un ragionamento che non differisce da quello tuttora in uso (basato sulla considerazione di una curva d'ordine n-2 passante pei punti singolari e per altri n-2 punti della data). Non bastano forse tali risultati a stabilire il valore perenne della *Geometria organica*?

§ 4. — Matematici francesi commentatori di Newton.

Fra le varie memorie sulla teoria delle curve che recano la firma di François Nicole (nato a Parigi il 23 dicembre 1683, morto ivi il 18 gennaio 1758) una ve n'è intitolata *Traité des lignes des troisième ordre ou des courbes du second degré* [1], la quale si propone, al pari del lavoro dello Stirling, di dimostrare le asserzioni indimostrate che leggonsi nell'*Enumeratio* di Newton. A tale scopo egli fa conoscere 31 forme che può assumere l'equazione di una cubica piana e mostra che, cambiando gli elementi di riferimento, esse possono ridursi ai cinque tipi che noi indicammo nel § 1 (p. 818). La prima di tali curve ha per equazione

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ed il Nicole ne fa uno studio accurato, il quale, fra l'altro, lo guida alla delineazione di essa, rimandando ad altra memoria lo studio analogo delle altre quattro. Questo progetto, però, non fu mai effettuato, per un motivo plausibile che è nostro dovere indicare.

Nella seduta del 2 maggio 1731 C. M. de la Condmaine (nato a Parigi il 28 gennaio 1701 e morto ivi il 4 febbraio 1774), noto assai più come viaggiatore e geografo che non come matematico, presentava all'Accademia di Parigi una breve memoria *Sur une nouvelle manière de considerer les sections coniques* (Mém. de l'Acad. des sciences, 1731, pp. 240–245) contenente le soluzioni di queste due questioni: *a*) determinare l'equazione di un cono circolare retto (trova $x^2 + y^2 = n^2 z^2$, n essendo un numero); *b*) dedurne le equazioni delle sue sezioni piane [2]. Ora, di questi problemi si è occupato anche il Nicole in una memoria *Sur les sections coniques* (Mém. de l'Acad. des sciences, 1731, pp. 130-143), la quale fa sistema con l'altra intitolata *Manière d'en-*

[1] Mém. de l'Acad. des sciences, 1729, pp. 194–224; cfr. il cenno relativo scritto dal Fontanelle nell'*Histoire* del medesimo anno, pp. 37–44, notevole per le osservazioni che contiene intorno alla natura ed allo scopo delle coordinate.

[2] Il La Condamine ignorava che questa questione era già stata risoluta, come sappiamo (vedi p. 810), da Newton nella sua *Aritmetica universale*.

gendrer dans un corps solide toutes les lignes du troisième degré (vol. cit., pp. 494-510) e che offre un ben maggiore interesse. Ivi infatti l'autore giunge a stabilire il teorema di Newton sulla generazione « per umbras » di tutte le cubiche piane, segando con piani opportuni il cono proiettante una parabola divergente e determinando le equazioni cartesiane dalle curve risultanti. I calcoli da lui eseguiti sono lunghi e mancanti di eleganza; ciò non ostante, il lavoro del Nicole può ben dirsi una divinazione della ricerca che condusse il grande geometra inglese alla surricordata conclusione.

Da tali lavori un geometra di cui tratteremo per esteso nel seguente capitolo, A. C. Clairaut, fu indotto a porgere un'ulteriore applicazione di quanto aveva esposto in un suo celebratissimo saggio; ed il 12 dicembre 1731 presentò all'Accademia di Parigi una memoria *Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position* (vol. succitato, pp. 483-493), nella quale trovasi risolto in due modi il problema di determinare l'equazione cartesiana della sezione prodotta in una superficie di data equazione da un piano di cui sia pure data l'equazione; da notarsi che il Clairaut scrive l'equazione di un piano sotto la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1$ e che fa uso del fatto (da lui stabilito altrove) che un cono col vertice nell'origine è rappresentato in coordinate cartesiane da un'equazione omogenea. La breve ma importante memoria culmina con una dimostrazione del teorema di Newton sulla generazione di tutte le cubiche « per umbras ». Nel corso del suo lavoro il citato geometra osserva che, se una curva è l'ombra di una seconda, questa di una terza, ecc., l'ultima potrà riguardarsi come ombra della prima; ciò val quanto affermare che due figure piane fra loro proiettive si possono sempre porre in prospettiva [1].

§ 5. — Rabuel.

Mentre, come vedemmo (§ prec.), alcuni matematici francesi, quando ferveva ancora la contesa fra Newton e Leibniz, seguendo le tracce del marchese de l'Hôpital, moltiplicarono le applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, altri, spinti forse da un sentimento di orgoglio nazionale, ritornarono a Descartes, riuscendo così a dimostrare come i metodi esposti nella *Géométrie* bastassero a risolvere la totalità delle questioni concernenti le curve algebriche. Di tale ritorno fa fede la più estesa e particolareggiata illustrazione a noi nota di quell'opera: parliamo del *Commentaire sur la Géométrie de M. Descartes* (Lyon 1730) di Claudio Rabuel. Questi, nato nel 1668, era entrato nella Compagnia di Gesù nel 1685; insegnò nel grande Collegio di Lione e morì il 12 aprile 1728: alla pietà di un confratello si deve se abbia vista la luce l'opera sua, frutto di coscienzioso insegnamento e compilata tenendo conto delle correzioni ed aggiunte alla *Géométrie* che trovansi registrate nel carteggio scientifico di Descartes.

A differenza dello Schooten, che, dice il nostro autore, « semble avoir aspiré lui-même à la gloire d'être commenté », il Rabuel segue passo passo il suo autore per chiarirne il pensiero; ma è evidente che egli subì l'influenza che i nuovi calcoli avevano già esercitata

[1] Il succitato teorema di Newton trovasi anche stabilito nell'opuscolo di P. Murdoch, *Genesis curvarum per umbras* (1740), che non ci fu dato di consultare, e nelle note del P. Jacquier alla sua versione italiana (Roma 1755) della *Prospettiva* di Brook Taylor.

sulla geometria [1]. Un progresso notevole che egli manifesta sul suo autore è nel possedere il concetto di segni delle coordinate cartesiane e nel formulare ottime regole pratiche per delineare una curva di equazione conosciuta; applicandole, egli potè disegnare con esattezza molte linee; egli però non si avvide che i due rami della coincoide di Nicomede formano una medesima curva, epperò, come Roberval (p. 804), le rappresentò con due differenti equazioni. La retta compare come caso speciale delle coniche e nulla vi è detto che dia ad intendere essere ogni retta rappresentabile con un'equazione lineare; ed è degna di nota l'ingenuità che il Rabuel commette asserendo che su una retta, passante per l'origine, non si trovi alcun punto a coordinate fra loro eguali. Sono interessanti alcune frasi che rispecchiano le difficoltà da lui incontrate per la mancanza del concetto generale di funzione. Osserviamo finalmente che quanto egli dice intorno alle figure solide non permette di decidere se egli siasi o meno accorto dell'errore commesso da Descartes (p. 789) riguardo alle normali delle curve sghembe.

§ 6. — Bragelogne.

Con l'eseguire la metodica classificazione delle cubiche piane, Newton non soltanto diede occasione, come vedemmo, a buon numero di lavori intesi a dimostrare le proposizioni da lui semplicemente enunciate [2], ma implicitamente suggerì ai matematici posteriori il problema di distribuire in categorie ben ordinate e distinte le curve di ordine determinato superiore a tre. Il primo ad accettare questo tacito invito fu, per quanto ci consta, un prelato francese, Cristoforo Bernardo de Bragelogne (nato a Parigi nel 1688, morto ivi il 20 febbraio 1744). L'esecuzione di tale disegno lo condusse però a ricerche di tale estensione che l'Accademia delle scienze di Parigi, la quale iniziò la stampa del risultante lavoro nei suoi volumi [3], fu forzata ad abbandonarne l'idea, proponendosi però di dare in luce un volume speciale contenente tutto quanto il Bragelogne scrisse sull'argomento. Ma, anche tale progetto essendo stato abbandonato [4], riguardo alla soluzione dell'enunciato problema data da questo matematico, sappiamo soltanto che egli aveva distinte le quartiche in quattro classi, caratterizzate dal potersi l'equazione della curva ridurre ad una delle forme seguenti:

$$u_{n-r}\, y^r + u_{n-r+1}\, y^{r-1} + \cdots + u_n = 0 \qquad (r = 1, 2, 3, 4),$$

ove le u sono polinomii di quarto grado in x. Tale fondamento di classificazione sembra mediocre, ma non può su di esso pronunciarsi un fondato giudizio, non essendo note nella loro interezza le conclusioni a cui condusse [5]. Ma ciò che assicura alle ricerche del Bragelogne un posto distinto nella storia della matematica è il complesso delle con-

(1) P. es. egli considera il valore infinito dell'ascissa e si occupa dei flessi delle curve.

(2) A quelli già citati se ne può aggiungere un altro pubblicato nel *Journal des savants* del settembre 1708 e dovuto appunto al matematico di cui ci occupiamo nel presente §.

(3) *Examen des lignes du quatrième ordre ou courbes du troisième genre* (Mém. de l'Ac. des sciences 1730, pp. 158–216 e 363–434; 1731, pp. 10–49). Cfr. i riassunti di tali memorie inseriti nell'*Histoire* facente parte degli stessi volumi e scritti del Fontenelle.

(4) Histoire de l'Acad. des sciences 1732, pp. 63–70.

(5) Anche il riassunto che si legge nell'Histoire de l'Ac. des sciences, 1732, non contempla se non le curve di equazione. $u_3\, y + u_4 = 0$.

siderazioni da lui svolte nelle pagine edite del suo lavoro sulle varie specie di punti singolari che possono presentare le curve algebriche, in particolare quelle di quart'ordine (nodi, cuspidi, punti isolati, tacnodi, punti tripi di varie specie) (1). Inoltre egli ha esposti i criterii, basati sulle derivate, per riconoscere la molteplicità di un dato punto. A lui si deve la prima idea di risolvere una singolarità superiore in singolarità ordinarie; a lui l'osservazione che una curva semplice d'ordine n non può avere due punti singolari le cui molteplicità diano una somma superiore a n; ed aggiungeremmo il teorema che dà il massimo del numero dei punti doppii o cuspidi di una curva algebrica, ove il Maclaurin non l'avesse preceduto (ved. p. 820). Dal punto di vista della geometria analitica in senso stretto, è importante notare che Bragelogne ha rappresentata una curva d'ordine n con un punto r-plo nell'origine mediante un'equazione della forma

$$u_r(x, y) + \cdots + u_n(x, y) = 0.$$

Un cospicuo numero di esempii, illustrati da belle figure, nel mentre abilitano il lettore a famigliarizzarsi con i metodi di discussione esposti, porge un chiaro concetto della varietà di forme che può presentare una curva di quart'ordine.

§ 7. — De Gua.

Jean Paul de Gua nacque verso il 1712 a Carcassonne (Linguadoca) da famiglia nobile decaduta; vestì l'abito ecclesiastico, ma alla scienza consacrò il meglio delle sue forze. Quando nel 1740 pubblicò a Parigi la sua opera *Usage de l'ánalyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de touts les ordres*, apparteneva all'Accademia di Bordeaux; quest'opera lo rese degno di essere eletto membro di quella di Parigi e della Società reale di Londra; morì a Parigi il 2 giugno 1786. L'errore da lui commesso negando l'esistenza delle cuspidi di seconda specie, e più ancora il suo stile pesante e farragginoso, tolsero al lavoro del de Gua il successo che meritava (2): la comparsa nel 1750 di un congenere ma assai migliore lavoro del Cramer (ved. § 11) le diede il colpo di grazia!

Gli scopi che si propose l'autore dell'opera di cui imprendiamo l'analisi sono uno polemico e l'altro dottrinale: cioè, mostrare che la geometria cartesiana poteva gareggiare con l'analisi infinitesimale e gettare le basi di una teoria generale delle curve algebriche, quale Newton aveva adombrata nella sua *Enumeratio*. Per conseguirli il de Gua sceglie come suo principale punto d'appoggio un procedimento regolare e costante per discutere il contegno di una curva, di cui si conosca l'equazione cartesiana, nelle vicinanze di un suo punto. Se questo trovasi a distanza finita, egli trasporta ivi l'origine ed allora può servirsi del cosidetto « parallelogramma di Newton » che egli semplifica in un « triangle algébrique » (3). Ove invece il punto considerato si trovi all'infinito, egli,

(1) Notevole che il Bragelogne, come il Saurin, non fissò l'attenzione propria e dei suoi lettori sulle tangenti doppie, che tanta importanza possiedono specialmente nella teoria delle quartiche.

(2) Oggi, invece che all'originale, è consigliabile di ricorrere al commento fattone di P. Sauerbeck nella sua *Einleitung in die analytische Geometrie des höheren algebraischen Kuaven, nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves* (« Abh. zur Geschichte des mathem. Wiss. », XV Heft, Leipzig 1902).

(3) Tale modificazione semplificatrice fu adottata dal Cramer, che preferì però il nome di « triangle analytique ».

ispirandosi ad un concetto che risale pure a Newton, pone $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{u}{z}$ e così è ridotto alla ipotesi precedente; tale artificio analitico equivale evidentemente ad una proiezione centrale ed ha condotto il de Gua ad un teorema fondamentale della teoria delle cubiche piane che va qui ricordato. Newton aveva osservato che, se una curva di terzo ordine ammette due asintoti d'inflessione, ne possiede sempre un terzo; da ciò, facendo una proiezione che muti la retta all'infinito in una retta propria, si deduce che *la congiungente di due flessi di una cubica piana incontra la curva in un terzo flesso*: bellissimo teorema che viene attribuito a torto al Maclaurin (il quale lo pubblicò soltanto nel 1748) e di cui il nostro autore dà anche una dimostrazione analitica diretta.

Nell'opera del De Gua si trovano le formole generali per la trasformazione delle coordinate cartesiane ed è messa in luce l'importanza di tale artificio nella investigazione delle proprietà delle figure piane; ivi per la prima volta s'incontra il nome di «punto singolare» e l'enumerazione delle specie di punti multipli che possono esistere nelle curve dei primi cinque ordini; finalmente per rappresentare qualsivoglia curva algebrica è fatto uso dell'equazione $\sum_{i=r}^{i=n} u_i(x, y) = 0$, che già vedemmo usata dal Bragelogne (ved. p. 823). Fra le curve studiate dal de Gua noteremo le ovali di Cassini, le curve binomie $x^m y^n = \text{cost.}$ e le curve paraboliche $y = a + a_1 x + \cdots + a_n x^n$; e fra le proporzioni generali da lui stabilite il terzo dei teoremi di Newton da noi riferiti (p. 817). Lo spazio ci vieta di aggiungere più minuti particolari su un'opera in cui i pregi della materia debbono fare perdonare l'infelicità della forma.

§ 8. — G. B. Caraccioli.

Nel lavoro di lenta ma incessante elaborazione della teoria delle curve algebriche che andiamo descrivendo, l'Italia è rappresentata dall'opera intitolata *De lineis curvis liber* (Pisis 1740) scritta da Giambattista Caraccioli. Questi, nato a Napoli il 27 dicembre 1695, sin da giovane fu ascritto all'ordine dei Teatini; dopo avere insegnato in patria, passò a Firenze e quindi (1731) all'Università di Pisa come docente di logica e filosofia; ma, dopo un decennio di cattedra, abbandonò l'insegnamento per dedicarsi agli interessi del suo ordine, di cui divenne (1759) generale; due anni appresso fu scelto come vescovo di Aversa, ove morì nel 1765. L'opera, che gli dà diritto ad un posto nella nostra storia, vide la luce l'anno stesso in cui comparve quella del de Gua; mentre questa si riferisce esclusivamente a curve algebriche, quella non dà il bando alle trascendenti; mentre la prima affinò lo strumento uscito ancor rozzo dalle mani di Descartes, nell'altra si ricorre a considerazioni algebriche soltanto nei casi in cui ciò risulta indispensabile; finalmente, a differenza del de Gua, il Caraccioli attribuisce la debita importanza alle curve particolari, giungendo anzi a scoprire nuove categorie di curve in qualche modo specializzate. Di tali categorie i primi esempii erano stati offerti nell'epoca cartesiana dalle parabole ed iperboli di grado superiore; il nostro autore le ricorda, rappresentandole mediante le note equazioni $y^{m+n} = a^m x^n$, $x^m y^n = a^{m+n}$. Ricorrendo ad un congenere procedimento generalizzatore, egli, partendo da note equazioni delle coniche, giunge alle curve aventi per equazioni

$$y^{m+n} = \frac{a^m}{b^m}(b \pm x)^m x^n \quad , \quad y^{m+n} = (a \pm x)^m x^n$$

(ove m ed n sono interi positivi) e ne stabilisce alcune proprietà. Similmente l'equazione della cissoide di Diocle lo induce a considerare le ∞^1 curve d'ordine $n+1$ la cui equazione generale è

$$y^{n+1} = ax^n - x^n y .$$

Altra caratteristica degna di rilievo nell'opera in esame è quella che ivi le coordinate polari sono poste allo stesso livello delle coordinate cartesiane; in omaggio a tale principio il Caraccioli considera le infinite spirali di grado superiore di cui eransi già occupati Fermat e Torricelli; inoltre generalizza la concoide di Nicomede e la quadratrice di Dinostrato e giunge alle curve aventi le seguenti equazioni polari:

$$\varrho^m = \left(\frac{a}{\cos \omega}\right)^m + l^m \;,\; \varrho \frac{\cos \omega}{a} = 1 - \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{m}{n}} .$$

Un'altra considerazione sfruttata dal Caraccioli per dedurre nuove curve è l'analogia che ha luogo fra circolo ed iperbole equilatera; basandosi su di essa, egli sottopone l'iperbole equilatera $z = \sqrt{2ax + x^2}$ alla trasformazione $ax = yz$ che era stata applicata dall'Ozanam al cerchio $z = \sqrt{2ax - x^2}$ ed aveva condotto alla cosiddetta quadratrice geometrica [1]; ottiene così la nuova curva $ax = y\sqrt{2ax + x^2}$, da lui chiamata *quadratrice iperbolica* per distinguerla da quella « circolare » dell'Ozanam. Sopra gli sviluppi relativi a curve trascendenti già note, reputiamo superfluo di fermarci [2].

§ 9. — Eulero.

Nella storia della geometria analitica l'anno 1748 è una data non meno fondamentale di quanto sia il 1637; chè allora, ad un secolo di distanza, la disciplina, a cui Descartes legò il proprio nome, assunse finalmente quella robusta struttura e quell'andamento rigorosamente metodico che le permise di essere, da quel momento, materia d'insegnamento universitario. Tale perfezionamento è dovuto ad un sommo coordinatore d'idee e seminatore di metodi, a colui che seppe dare assetto stabile soddisfacente alle teorie costituenti l'analisi moderna; alludiamo a Leonardo Eulero. Nato a Basilea addì 15 aprile 1707 e compiuti i propri studii nel patrio ateneo, accettò nel 1727 una chiamata ricevuta dall'Accademia di Pietroburgo e ivi rimase sino al 1741; allora, per invito di Federico II, passò a Berlino come direttore della classe di scienze matematiche di quell'Accademia; ma a Pietroburgo tornò nel 1766 per non più ripartirne; morì il 7 settembre 1783, lasciando un immenso numero di memorie e di trattati di cospicuo valore, mirabili documenti di attività e fecondità senza esempio.

(1) Ved. il mio articolo *Pseudo-versiera e Quadratrice geometrica* (Bibl. mathem., III ser., tomo IV, 1902, pp. 127-130).

(2) Il Caraccioli ha anche scritta un'opera didattica in due volumi dal titolo *Geometria algebrica universa quantitatum finitarum et infinita minimarum* (Roma 1755), di cui alcune pagine toccano la geometria analitica; ma, essendo posteriore a quelle congeneri di Eulero e dell'Agnesi di cui stiamo per occuparci, non ha diritto ad una particolare analisi da parte nostra, tanto più che, per la forma, è di gran lunga inferiore a tali opere.

A noi interessa il II volume della sua celebre *Introductio in analysin infinitorum* (Lausannae 1748), ove l'applicazione dell'algebra alla geometria è esposta sotto forma talmente perfetta che (a parte una lacuna che non mancheremo di segnalare), dopo quasi due secoli, non offre il fianco a critiche ragionevoli. La presenza di tale lacuna — che consiste nell'avere Eulero, al pari dei predecessori, omessi tutti i problemi concernenti le figure di pertinenza della geometria elementare — si spiega perfettamente, osservando che dalle prime linee del suo celebre volume risulta che per lui *il metodo delle coordinate* (limitato, per il momento, al piano) *era esclusivamente un ordigno per investigare le proprietà delle curve piane*; a prova di ciò, si può citare il fatto che egli considera sempre i punti, non come a sè, ma come elementi di una linea.

Nelle prime pagine del suo libro Eulero espose chiaramente quanto altri prima di lui aveva confusamente sentito, cioè la necessità: 1°) di fissare un origine (*initium abscissarum*) sopra la retta fissa (*axis* o *directrix*) che funge da colonna vertebrale di qualunque sistema cartesiano; 2°) di distinguere su di questa una parte positiva ed una negativa; 3°) di caratterizzare in modo somigliante le due sezioni in cui tale retta divide il piano indefinito su cui si opera e si ragiona. Sebbene egli usi quasi sempre coordinate ortogonali, non ignora quelle oblique e benchè in principio consideri soltanto l'asse delle ascisse, pure dalle formole per la trasformazione delle coordinate deduce che ascissa ed ordinata sono enti della medesima specie. Dalle stesse relazioni egli trae l'invarianza, rispetto ad un mutamento degli assi, del grado del polinomio che rappresenta una curva algebrica; cosicchè, se le equazioni di due curve riferite a differenti sistemi di coordinate sono di gradi differenti, non possono appartenere alla medesima linea. E finalmente dalle stesse ottiene come corollario il fatto fondamentale che una retta è sempre rappresentata da un'equazione lineare, e viceversa. Eulero stabilisce il concetto di ordine di una curva algebrica interpretando geometricamente il grado del polinomio rappresentatore, e dimostra essere in generale una curva d'ordine n determinata da $\frac{n(n+3)}{2}$ de' suoi punti. Scendendo a più minuti particolari, egli osserva che, essendo rette le linee di primo ordine, lo studio delle curve d'ordine determinato comincia con quelle di second'ordine; e per primo intraprende lo studio delle figure rappresentate dall'equazione generale di 2° grado fra le coordinate cartesiane di un punto; ne stabilisce alcune prerogative e, dalla riduzione di quell'equazione a forme canoniche, deduce che le curve rappresentate altro non sono che le sezioni di un cono circolare retto. Ritornando poi a considerazioni di carattere generale, il grande matematico insegna a determinare gli asintoti di una curva, ottenendo così dati sufficienti per completare il quadro delle qualità di cui godono le curve di secondo ordine. I metodi applicati a queste servono poi ad Eulero per studiare e classificare le cubiche e le quartiche; il criterio di ripartizione da lui scelto è il contegno all'infinito; ma egli non scende a particolari troppo minuti, i quali avrebbero turbata l'euritmia del suo magnifico edificio. Ritornando ancora una volta a considerazioni applicabili a tutte le linee piane e *tenendo fede all'impegno di non ricorrere al calcolo differenziale*, egli insegna come si calcolino la suttangente, la sunnormale e la curvatura in un punto arbitrario di una curva algebrica e come se ne scoprano i punti singolari. Sono, questi, temi svolti nelle trattazioni moderne della geometria differenziale piana. Ma lo stesso *non* può ripe-

tersi riguardo alla ricerca fatta da Eulero dei diametri (ved. l'*Enumeratio* di Newton), alla determinazione delle curve algebriche di assegnate proprietà (cfr. quanto dicemmo a p. 810, parlando di Giovanni Bernoulli) ed alle considerazioni da lui svolte sulla similitudine di due curve. Vanno anche menzionati gli sviluppi relativi alle intersezioni di due curve, i quali costituiscono un preludio ad un capitolo, di sapore prettamente cartesiano, dedicato all'applicazione delle curve alla risoluzione di problemi determinati.

Quantunque Eulero siasi occupato, per nove decimi del suo trattato, di curve algebriche, non è già che egli intendesse bandire le altre dal santuario della geometria; alle curve trascendenti egli ha dedicato buon numero di dette pagine, assicurando così a questi enti, tanto svariati e stravaganti, quel posto stabile nella scienza che Leibniz aveva chiesto da parecchio tempo; e che egli non ammettesse imitazione alcuna al concetto di linea piana è dimostrato dall'avere egli considerato anche lo stranissimo ente rappresentato dall'equazione $y = (-1)^x$ [1].

Riserbandoci di esaminare nel capitolo seguente un'*Appendice* che corona il discorso volume, osserviamo che lo splendore dello stile, l'eleganza dei calcoli, la bellezza dei problemi scelti ad illustrare le teorie generali, mentre fecero chiare a tutti la natura e la potenza del nuovo metodo geometrico, assicurarono all'*Introductio* un'influenza benefica, che non è peranco cessata e che è da augurarsi si prolunghi ancora [2].

§ 10. — Maria Gaetana Agnesi.

Il 1748 va segnato « albo lapillo », oltrechè per la comparsa del trattato di cui nel § precedente, perchè, appunto in quell'anno, vide la luce la prima opera matematica recante firma di donna [3]. Era l'epoca in cui l'Europa si prosternava, compresa di ben giustificata ammirazione, ai piedi dell'imperatrice Maria Teresa; ad essa appunto sono dedicate le *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (Milano 1748) di Maria Gaetana Agnesi. L'autrice, nata nella grande metropoli lombarda il 16 marzo 1718, nel 1750 ottenne una cattedra nell'Università di Bologna, per decreto di papa Benedetto XIV; ma ben presto abbandonò del tutto la scienza per consacrarsi a pratiche religiose; morì nella città sua natale il 9 gennaio 1799. Dei due volumi costituenti le *Instituzioni*, c'interessa il solo I, chè ivi l'analisi finita è applicata allo studio delle curve piane; esso non presenta

(1) *L'Introductio* fu largamente sfruttata dai trattatisti posteriori. Citiamo fra questi due italiani, Vincenzo Riccati (n. a Castelfranco Veneto l'11 gennaio 1707, m. a Treviso il 17 gennaio 1775) e Gerolamo Saladini (n. a Lucca nel 1731, m. a Bologna il 1° giugno 1813), le cui *Institutiones analyticae* (Bononiae 1765) ebbero larga diffusione e ben meritata rinomanza. Gli è nel I vol. di quest'opera che si trova esposto il metodo delle coordinate. Mentre non vi si trova alcun problema relativo alle rette, ben sei Capitoli sono dedicati alle coniche, curve di cui viene posta in luce l'importanza nella risoluzione delle equazioni di 3° e 4° ordine; nè mancano considerazioni relative a curve di ordine superiore, di cui vengono addotti molti esempii.

(2) È stato notato (H. Hahn, *Eulers Methode des Paremeterdarstellung algebraisches Kurven*, « Progr. Berlin » 1889) che, in alcuni passi dei I vol. dell'*Introductio*, Eulero sostituisce ad un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$ altre della forma $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$; è un artificio che equivale a rappresentare una curva mediante un parametro e che venne applicato largamente dal Cramer nell'opera analizzata nel seguente §.

(3) È necessario di ricordare che nulla si è serbato di quanto vuolsi abbia scritto Ipazia Alessandria.

novità degne di speciale menzione, sicchè oggi è consultata soltanto per leggervi le pagine (pp. 380 e 392) dedicate alla « versiera », *curva di cui a torto venne attribuita la maternità* all'Agnesi ([1]), e a qualche altra curva notevole (p. es. alla cubica detta oggi strofoide; p. 378). L'esposizione chiara e generalmente esatta ([2]) non sarebbe sufficiente a far concedere alle *Instituzioni* un posto nella nostra storia; ma quando un'opera didattica fu largamente usata nell'insegnamento e venne onorata da traduzioni in lingue straniere, essa esercitò senza dubbio un'influenza sul progresso della coltura, della quale lo storico deve tenere il debito conto.

§ 11. — G. Cramer.

Ben maggiore importanza possiede l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève 1750). Ne è autore Gabriele Cramer, nato a Ginevra il 31 luglio 1704, dal 1724 professore di matematica e filosofia in quell'Accademia, morto ivi il 4 gennaio 1752, dopo essersi reso benemerito delle scienze esatte, non soltanto grazie a parecchie memorie originali, ma anche per avere curata la stampa delle opere complete di Giacomo e di Giovanni Bernoulli e del carteggio di questo col Leibniz. La sua opera dianzi citata è di poco posteriore all'*Introductio* di Eulero, ma ne è indipendente (l'autore anzi lamenta di averla conosciuta troppo tardi per trarne profitto); al pari di questa, non fa uso di derivate, ma sfrutta largamente la teoria delle serie e segue il de Gua (che l'autore cita a più riprese, con specchiata onestà) nell'applicare il triangolo analitico. Per quanto concerne la tecnica delle coordinate, notiamo l'introduzione, sin dal principio, dei due assi di riferimento; l'uso dei vocaboli « origine », « ordonnée » o « appliquée », « abscisse » o « coupée »; inoltre la diligente distinzione dei segni delle coordinate; finalmente l'*assoluta esclusione delle questioni, oggi classiche, relative a punto e rette*. Come già il de Gua aveva fatto, il Cramer stabilisce con piena generalità le formole per la trasformazione delle coordinate e ne deduce l'equazione della retta sotto le principali forme sotto cui conviene scriverla. A detta trasformazione il nostro autore conferisce una mansione fondamentale, come risulta dalla seguente dichiarazione: « L'analyse des courbes consiste en partie à déterminer la position des axes de telle manière qu'il en résulte, pour exprimer une courbe, l'équation la plus simple et la plus convenable au but qu'on se propose ». Nello studio di una curva piana egli considera i punti di ordinata massima o minima, ma attribuisce, a ragione, una importanza preponderante ai punti all'infinito, ed appunto questi gli servono nella classificazione delle coniche e delle cubiche e nella ricerca delle corrispondenti equazioni canoniche. Anche ai diametri, alla curvatura ed ai flessi egli accordò la debita attenzione e per primo, su molteplici esempii, pose in luce la somma utilità che possiede la rappresentazione parametrica delle linee piane.

([1]) Essa invece venne scoperta e denominata sino dal 1703 da Guido Grandi: vedi la nota di G. Vacca *Sulla versiera* (« Boll. di bibl. e storia », tom. IV, 1901, pp. 33-34).

([2]) Scriviamo « generalmente », perchè a pag. 412 l'autrice discute la curva di equazione $y = \frac{a^2 x^2 + x^4}{a^3 + ax^2}$ senz'accorgersi che i due termini di questa frazione hanno il fattore comune $x^2 + a^2$; la corrispondente figura contiene, come deve, la parabola $x^2 = ay$ ma anche, come non dovrebbe, la parabola $x^2 = -ay$.

Dove poi il Cramer supera i suoi predecessori è nella investigazione delle varie specie di punti singolari che può presentare una curva, alla quale investigazione crescono pregio le numerose figure accuratamente delineate. In omaggio alle vedute di Descartes, Cramer fa cenno dell'applicazione delle curve alla risoluzione delle equazioni dei primi quattro gradi; nè manca di osservare che tale procedura è applicabile anche alle equazioni di gradi superiori; appoggiandosi anzi a Maclaurin, che (come vedemmo a p. 820) intuì la verità del teorema di Bézout, indica (cosa che il de la Hire aveva già fatto sino al 64° grado; vedi p. 806) le curve di ordine minimo a cui devesi ricorrere per risolvere graficamente un problema di un grado non superiore a 10.

L'*Introduction*, opera di un esperto insegnante, dopo quasi due secoli di vita, dà prova di perenne invidiabile giovinezza (1).

§ 12. — Un trattato anonimo.

Della ricca collana di pubblicazioni che andiamo illustrando fa parte ancora una eccellente operetta anonima, il *Traité des courbes algébriques* (Paris 1756). Ne sono autori due magistrati francesi, continuatori delle tradizioni iniziate da Viète e Fermat: Achille Pierre Dénis du Séjour (nato a Parigi l'11 gennaio 1734, morto a Fontainebleau il 22 agosto 1794) e Matthieu Pierre Goudin (nato a Parigi il 14 gennaio 1734, morto a Parigi il 9 maggio 1817) (2).

L'anonimo *Traité* comprende otto capitoli, preceduti da una introduzione che ne abbraccia altri due. Di questi il I ha per iscopo di determinare ciò che muta e ciò che si conserva nell'equazione di una curva piana riferita a coordinate ortogonali quando si cambi l'origine o quando si modifichi soltanto la direzione degli assi; fra le conclusioni dedotte dai relativi risultati notiamo la seguente: una curva tale, che, segandola con un sistema di rette fra loro parallele, non si ottenga nessun punto, è un gruppo di rette parallele. Più umile ma non privo d'interesse è il soggetto trattato nel II capitolo, essendo ivi insegnato come si determini l'angolo formato con l'asse della x da una retta di equazione conosciuta; per quanto elementare, questo problema va segnalato essendo *la prima questione metrica elementare che s'incontri nella letteratura relativa alle coordinate.*

Il I capitolo del *Traité* in esame tratta dei centri (di simmetria) delle curve algebriche e del modo di determinarli mediante una traslazione di assi; gli autori non mancano di osservare che una curva d'ordine superiore al 2° non possiede in generale alcun centro. Il II capitolo è dedicato ai diametri, in particolare agli assi delle curve. Il III si riferisce ai punti multipli ed al modo di determinarli mediante una trasformazione di coordinate; notano gli autori che il numero delle equazioni necessario per determinare un punto t-plo è $\frac{t(t+1)}{2}$. Il capitolo successivo tratta di tangenti e normali e della

(1) In essa è trattata esclusivamente la teoria delle curve algebriche; ma un passo del carteggio scientifico del Cramer mostra che egli studiò anche le trascendenti; infatti in una lettera diretta allo Stirling (vedi Tweedie, l'op. cit. a p. 818, p. 125) egli si occupa della curva $y^x = 1 + x$, osservando che, oltre un ramo continuo, essa ne possiede un secondo punteggiato discontinuo.

(2) La paternità dell'opera in questione è documentata da un passo dell'Histoire de l'Académie des sciences, Paris 1756, p. 79.

loro costruzione mediante le sotto-tangenti e le sotto-normali. Ivi è dimostrato che in un punto t-plo una curva ammette t tangenti e che una curva semplice d'ordine n non può avere punti singolari di molteplicità superiore a $n-1$. Più notevole è la ricerca, compiuta nello stesso capitolo, delle tangenti di una curva algebrica aventi una determinata direzione, la quale porta a concludere che, se la curva è d'ordine n, il numero di queste non può oltrepassare $n(n-1)$: è il risultato a cui nel 1818 il Poncelet giunse per conto suo, mentre il Waring, nell'opera di cui nel § seg., affermò che quel massimo è n^2. Dei flessi si parla nel cap. V; dei punti di ordinata massima o minima, nel VI; dei rami infiniti e degli asintoti, nel VII. Fra i teoremi stabiliti in quest'ultimo notiamo i seguenti: Una curva d'ordine dispari ha almeno un ramo infinito; una curva non può avere un numero di asintoti superiore al suo ordine; il numero dei punti in cui una curva d'ordine n è tagliata da un asintoto non può superare n-2; se una curva d'ordine n possiede n-1 asintoti fra loro paralleli, nessuno di questi può incontrare la curva. Tacendo della rapida classificazione delle cubiche, che forma l'epilogo del cap. VII, rileveremo nell'ultimo (dedicato alla curvatura) la considerazione, non solo dei cerchi osculatori, ma anche delle parabole osculatrici; non solo del luogo dei centri di quelli, ma anche del luogo dei fuochi di queste. Un grande numero di esempii permette al giovane lettore di famigliarizzarsi col maneggio dei metodi esposti [1].

§ 13. — E. Waring.

L'ultimo, in ordine di tempo, dei matematici che contribuirono alla costituzione della teoria delle curve algebriche è colui che occupa il posto più eminente fra i geometri inglesi della seconda metà del secolo XVIII: Edoardo Waring. Nato nel 1734, dal 1753 fu studente a Cambridge, nella cui Università ottenne (1757, 1758) tutti i gradi accademici; nella stessa fu chiamato ad insegnare, a partire dal 24 gennaio 1760, in qualità di « Lucasian professor »; morì il giorno 15 agosto 1798. L'opera che a noi interessa è intitolata *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus* (Cantabridgiae 1762), ma come risulta dal titolo, soltanto una parte (e precisamente il lib. II) va da noi considerata.

Il Waring non cita alcun matematico continentale, onde non si può dire se siano, o non, casuali i punti di contatto esistenti fra alcune opere esaminate nel presente capitolo [2] e le pagine da lui dedicate alla trasformazione delle coordinate, ai diametri, agli asintoti, ecc. Dove egli si stacca dagli autori di cui ci siamo testè occupati è nell'applicazione delle flussioni allo studio delle linee piane; ma i problemi di tale specie non appar-

[1] Del Goudin, lo Chasles (*Aperç. histor.*, 2a éd., Paris 1875, p. 153) cita un *Traité des propriétes communes à toutes les courbes* (I ed. 1778; III ed. 1803) ove sono stabilite le varie forme che può assumere l'equazione cartesiana di una curva algebrica per scelte speciali degli assi e sono interpretati algebricamente i risultati ottenuti.

[2] Così egli applica (p. 82) la trasformazione (omografica) rappresentata dalle equazioni

$$x = \frac{pz + qv + r}{Az + Bv + C}, \; y = \frac{Pz + Qv + R}{Az + Bv + C},$$

senza però dire se ad essa fu condotto estendendo le considerazioni svolte da Eulero sopra l'affinità o la similitudine di due curve.

tengono più al campo che noi stiamo percorrendo. Del quale invece fa parte la materia svolta nell'ultimo capitolo della *Miscellanea*, chè ivi la trasformazione delle coordinate è applicata al problema (già affrontato da Bragelogne ed Eulero) di classificare le curve di quarto ordine. Qui, come in tutto il resto dell'opera, l'autore è assai conciso; chè si limita a distinguere tutte le curve anzidette in 12 classi, che caratterizza mediante le corrispondenti equazioni cartesiane, enumerando i casi che si possono presentare e che sono $1 + 82 + 87 + 193 + 43 + 41 + 77 + 492 + 1450 + 1263 + 8342 + 7248) = 84551$; se avesse scritte le corrispondenti, avrebbe riempite circa altre 2500 pagine, ed alla stampa di tanto non giungeva probabilmente la generosità dei gentiluomini a cui devesi se la *Miscellanea* potè venire alla luce.

Da quanto esponemmo nel presente Capitolo, si desume che nel corso del secolo XVIII. la teoria delle curve algebriche aveva manifestata la propria importanza ed aveva conseguito un notevole grado di perfezione e di sviluppo, incidentalmente procurando notevoli miglioramenti al metodo delle coordinate. Al secolo seguente essa legò buon numero d'importanti questioni che poterono venire risolute grazie al concorso di nuovi metodi geometrici e di più raffinati procedimenti algebrici: basterebbero le formole di Plücker a dimostrare che il secolo XIX si mostrò all'altezza del còmpito ad esso affidato.

CAPITOLO VI.

La geometria analitica dello spazio.

Nel mentre la geometria analitica del piano si avvantaggiava delle migliorìe che descrivemmo nei Capitoli precedenti, i cenni vaghi ed imperfetti rapidamente vergati da Descartes sul modo di applicare l'algebra all'investigazione delle figure a tre dimensioni si trasformavano in metodi di indagine sicuri e potenti grazie ad un manipolo di geometri, i cui scritti ci apprestiamo ad analizzare.

§ 1. — Parent.

All'avere per primo indicata e svolta la rappresentazione di una superficie mediante un'equazione fra le tre coordinate ortogonali di un punto deve la fama di cui gode, Antonio Parent (nato a Parigi il 16 settembre 1666, morto ivi il 26 settembre 1616), autore di buon numero di memorie scientifiche, per la maggior parte inserite nei tre volumetti intitolati *Recherches de mathématiques et de physique* (I éd., Paris 1705; II, ivi 1713). Dalla biografia scrittane dal Fontenelle (¹), per quanto redatta in termini misuratissimi, risulta ad evidenza che il suo carattere non era pregevole quanto la sua intelligenza, il che osserviamo per incidenza e soltanto a giustificazione di Giovanni Bernoulli, che ebbe a definire il Parent come « homo ad carpendum natus » (²).

(¹) *Eloges académiques*, tom. I (La Haye 1740), pp. 416–424.
(²) *Opera omnia*, tom. II, p. 18.

Dei suoi lavori attrae per primo ed in particolar modo l'attenzione nostra quello intitolato *Des affections des surfaces, de leurs plans tangents* letto all'Accademia di Parigi nelle adunanze del 24 luglio e del 23 agosto 1700. Ivi l'autore, per rappresentare analiticamente una superficie, suppone dati un piano, in esso una retta e su questa un punto. Allora ogni punto della superficie viene proiettato ortogonalmente sul piano dato, ed il punto ottenuto, a sua volta, sulla data retta; nascono così tre segmenti rettilinei z, x, y, le coordinate del punto della superficie. Di queste il Parent si serve per trovare l'« équation superficielle » di una sfera determinata dal raggio r e dalle coordinate $z = a$, $y = c$, $x = b$ del centro; con una considerazione diretta egli la ottiene (¹) sotto la forma

$$c^2 + y^2 - 2cy + b^2 + x^2 - 2bx + a^2 + z^2 - 2az = r^2 , \tag{1}$$

senza collegarla in alcun modo al problema di calcolare la distanza fra due punti di note coordinate. Di tale risultato egli si serve per determinare il piano tangente in un punto arbitrario P, piano che egli non definisce ritenendone il concetto abbastanza chiaro intuitivamente: dal contesto emerge che egli lo ritiene individuato dalle tangenti in P a due linee condotte per questo punto sulla superficie. Come linee ausiliari il Parent sceglie le sezioni prodotte nella superficie da piani condotti per P, parallelamente rispettivamente ai piani xz e yz: in conseguenza differenzia l'equazione (1), supponendo una volta $y =$ cost. e l'altra $x =$ cost., e ne deduce elementi sufficienti per completare la determinazione delle tangenti ausiliari, per costruirne cioè le tracce sul piano xy; tali punti, insieme a P, bastano a fissare la posizione del piano richiesto.

Il nostro autore ha ancora studiate le superficie di terzo ordine

$$y = \frac{x^2 z}{a^2 + x^2} \quad , \quad y = \frac{z^3}{x^2 + az} , \tag{2}$$

segandole con piani opportunamente scelti; finalmente, indipendentemente dal Wren, ha dimostrata la generazione mediante il movimento di una retta dell'iperboloide ad una falda di rotazione.

§ 2. — Giovanni Bernoulli.

L'anno stesso in cui vedeva la luce la II ed. delle *Recherches* del Parent e senza averne conoscenza (²), Giovanni Bernoulli scriveva da Basilea al Leibniz, in data 6 febbraio 1715, alcune frasi le quali, dimostrando la cristallina chiarezza delle sue idee relative alla rappresentazione analitica delle superficie, giova qui riferire: « Intendo per superficie curva data una superficie i cui singoli punti (a somiglianza dei punti di una data curva) siano determinati mediante tre coordinate x, y, z legate da una relazione espressa da un'equazione data: dette coordinate poi altro non sono che le tre perpendicolari condotte da un punto qualunque della superficie curva a tre piani dati di posizione e segantisi scambievolmente ad angoli retti. Se, ad esempio, la equazione fra le tre coordinate è $x\,y\,z = a^3$, si può chiedere la dimensione di questa superficie, ovvero la riduzione a qualche figura piana. Per quanto concerne i volumi compresi fra la data superficie ed i dati piani, il loro

(¹) I particolari del calcolo sono riprodotti da M. Cantor, *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, tom. III (II Aufl.; Leipzig 1901), p. 417.

(²) La questione dell'indipendenza del Bernoulli dal Parent trovasi esaminata a fondo del Cantor (op. cit., pp. 418–419), il quale la risolve affermativamente.

calcolo si esegue più facilmente di quello delle aree, benchè non sia esente da difficoltà » (1). Queste parole mostrano, che l'eminente geometra di Basilea, servendosi appunto delle equazioni cartesiane, aveva affrontati i problemi della complanazione e della quadratura di una superficie e li aveva approfonditi abbastanza per poterne valutare la difficoltà relativa. Le stesse equazioni gli servirono poi nel 1728 nel trattare nuovamente il problema delle geodetiche su una superficie qualunque (2), problema che egli aveva già risoluto sino dal 1698 (3).

§ 3. — J. Hermann.

Devesi ritenere che lo studio, mediante coordinate, della geometria dello spazio fosse all'ordine del giorno sino dai primordii del secolo XVIII, chè un geometra di second'ordine, in cui già c'imbattemmo (ved. p. 809), scrisse una memoria che tratta *De superficibus ad aequationes locales revocatis, variisque earum affectionibus* (4), meritevole, da parte nostra, di attenta considerazione.

J. Hermann, autore di questa memoria, definisce le tre coordinate di un punto nel modo adottato dal Parent; ma considera tutti e tre gli assi di riferimento, definendoli come rette, per ognuna delle quali sono nulle due coordinate. Lo scopo principale che egli si propone è di interpretare un certo numero di equazioni fra x, y, z. La prima di esse è la seguente:

$$az + by + cx - e^2 = 0; \tag{1}$$

per dimostrare che rappresenta un piano, il nostro autore ne determina i punti B, C, D situati sugli assi coordinati e soddisfacenti alla (1); considera il piano passante per essi e poi dimostra (ricorrendo a triangoli simili) che le coordinate di tutti i suoi punti soddisfano alla (1); aggiunge che un'analoga rappresentazione analitica si ottiene supponendo che sia obliqua la proiezione eseguita sul piano fisso. Da notarsi che, nel caso di coordinate ortogonali, l'Hermann si occupa anche di questioni metriche relative al piano; dimostra anzitutto che $\sqrt{a^2+c^2} : \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ misura il seno dell'angolo che il piano (1) forma col piano xy, e poi fa vedere come (detta A l'origine) la considerazione del tetraedro A B C D conduca a tutte le relazioni che passano fra gli elementi di un triangolo sferico. Le altre superficie studiate dall'Hermann sono di secondo grado, essendo rappresentate come segue:

$$z^2 - ax - by = 0; \tag{2}$$

$$z^2 - xy = 0; \tag{3}$$

$$z^2 - ax^2 - bxy - cy^2 - ex - fy = 0; \tag{4}$$

$$az^2 + byz + cy^2 - exz + fx^2 + gz - bx = 0; \tag{5}$$

(1) Leibniz, *Mathem. Schriften*, I Absch., tom. III (Halle 1885), p. 938.

(2) Ved. la memoria intitolata *Problema: In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissima* (« Opera omnia », tom. IV, p. 108 e segg.).

(3) P. Stäckel, *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien* (Ber. des K. Sächs. Gesch. der Wiss., seduta del 3 luglio 1893).

(4) « Comment. Acad. scient. imper. Petropolitanae », tom. VI (1732–33); a noi sta sott'occhio la ristampa di tale raccolta fatta a Bologna nel 1743.

esse sono (adottando la nomenclatura dell'autore) ordinatamente un cuneo parabolico-cilindrico, un cono, una conoide ed una conoide ellittica. Assurgendo a considerazioni più generali, l'Hermann studia l'equazione

$$u^2 - x^2 - y^2 = 0\,, \tag{6}$$

ove u designa un'arbitraria funzione di x e y, e dimostra che rappresenta una superficie di rotazione. Per dare un esempio del come si risolva il problema inverso, cioè come si giunga all'equazione di una superficie geometricamente definita, il citato geometra si occupa del cono-cuneo ideato dal Wallis [1] e dimostra che lo si può rappresentare mediante l'equazione

$$(b - z)(a^2 - y^2) = b^2 x^2$$

e poi si serve di questa per la dimostrazione delle più salienti proprietà delle superficie.

L'applicazione dell'equazione di una superficie alla determinazione delle linee geodetiche, fatta dall'Hermann, esorbita dai limiti della presente memoria. Va invece notato che, della superficie rappresentata dalla (2), il citato autore determina il piano tangente senza definirlo, servendosi, come il Parent, delle sezioni prodotte nella superficie da due piani paralleli a due dei piani di riferimento.

§ 4. E. Pitot.

Enrico Pitot (nato ad Aramon il 31 maggio 1695, morto ivi il 27 dicembre 1771) — che, dopo essersi dedicato alla scienza pura, passò ad occuparsi d'importanti lavori di idraulica pratica — ha diritto ad una citazione nella presente storia, grazie alla memoria intitolata *Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs, appellée la compagne de la cycloïde* («Mém. de l'Acad. des sciences», Paris 1724, pp. 107-113). Scopo di essa è la quadratura della sinusoide; per compirla l'autore ricorre all'elica tracciata sul cilindro circolare retto, la quale è «une des courbes à double courbure, ou une des lignes qu'on conçoit tracées sur les surfaces courbes des solides». In questa frase si trova per la prima volta il termine «curva a doppia curvatura» destinato a rimanere nella scienza; e poichè il Pitot aggiunge che siffatte figure «seront un jour l'objet des recherches des géomètres», così egli ha il merito di avere segnalata l'esistenza di un'ubertosa provincia, in cui poco dopo pose coraggiosamente il piede un suo giovane compatriota al quale ora ci volgiamo.

§ 5. — Clairaut.

Alexis Clairaut (nato a Parigi il 13 maggio 1713, morto ivi il 17 maggio 1765), che occupa una posizione cospicua nelle storie della matematica pura, della geodesia e dell'astronomia, presenta un caso di precocità assolutamente unico; chè, appena dodicenne, compì uno studio sopra quattro speciali quartiche piane, che l'Accademia di Berlino giudicò meritevole di venire pubblicato fra le sue memorie. Quattro anni dopo licenziò le *Recherches sur les courbes à double courbure* (Paris 1731), che inizia la letteratura sopra un

[1] *Opera mathematica*, vol. II (Oxoniae 1693), pp. 681-704.

tema della più alta importanza e che è tanto più notevole giacchè, come vedremo, tratta anche alcune fondamentali questioni relative alle superficie, teoria su cui la sua attenzione era stata attirata da una memoria di Giovanni Bernoulli.

L'autore prende le mosse da quanto scrisse Descartes: considera, cioè, le proiezioni ortogonali di una curva su due piani fra loro perpendicolari e le rappresenta mediante equazioni del seguente tipo: $y = f(x)$, $z = \varphi(y)$ e nota subito come da esse segua una terza della forma $z = F(y)$: così è condotto a considerare non due, ma tre piani di proiezione, nonchè le loro scambievoli intersezioni che chiama, come noi, *assi delle* x, *delle* y e *delle* z. In vista di future applicazioni egli stabilisce le equazioni della sfera (il che aveva già fatto il Parent), del cono rotondo, del paraboloide di rivoluzione ed in generale (prima dell'Hermann) delle superficie di rotazione; dimostra poi che ogni cono col vertice nell'origine è rappresentato da una equazione omogenea, e viceversa. Tornando al soggetto principale delle sue ricerche, egli considera l'intersezione di due superficie e, mediante eliminazione, trova le equazioni delle sue proiezioni sui piani di riferimento. Di una di tali proiezioni, p. es. sul piano xy, egli si serve per costruire per punti la curva, portando sulla perpendicolare, condotta da un suo punto qualunque sul piano stesso, una lunghezza eguale al corrispondente valore di z. Ritornando poi alle superficie, egli mostra come si possa costruire il piano tangente in un punto qualunque mediante le curve che si ottengono segandole con piani paralleli a due dei piani di riferimento. Con tale problema egli chiude la I sezione del suo trattato, la quale concerne le generalità su gli enti a tre dimensioni. La II è destinata alle applicazioni del calcolo differenziale colle linee sghembe. La prima questione trattata è la costruzione della tangente in un punto qualunque di una curva ed è risoluta col mezzo della sotto-tangente. Dalla tangente alla normale è breve il passo; la considerazione di questa porta il Clairaut a rettificare (tacitamente) quanto scrisse Descartes, notando che *una curva gobba ammette in ogni suo punto infinite normali*. In seguito l'autore considera il piano tangente ad una superficie, che non definisce, ma di cui tenta dimostrare l'esistenza in generale; dà poi ad intendere come egli conosca la esistenza di una determinata normale in ogni punto di una superficie. La III sezione dell'opera in esame tratta delle applicazioni del calcolo integrale alla teoria delle curve gobbe, cioè della rettificazione di queste e della cubatura di solidi ad essa collegati; abbondano ivi le applicazioni a curve speciali, le quali interessano piuttosto gli analisti; l'attenzione nostra è invece attirata dalle considerazioni relative allo sviluppo, su un piano, delle superficie cilindriche proiettanti una curva sghemba sui piani coordinati ed alle curve luoghi delle tracce sui piani stessi delle tangenti della curva. Nell'ultima sezione si trovano quattro differenti procedimenti per generare una curva gobba; eccoli: 1°) sezione di una superficie con una sfera; 2°) luogo degli estremi dei segmenti di lunghezza costante uscenti dai punti di una curva piana e diretti ad un punto fisso non situato sul piano della curva (concoide di una curva piana); 3°) luogo di un punto appartenente al piano di una curva mobile, con la condizione di toccare costantemente una curva ad essa eguale e mantenere il proprio piano normale al piano di questa; 4°) luogo delle tangenti condotte da un punto fisso ad una superficie (è il contorno apparente di questa visto da quello, che fa qui il suo ingresso nella scienza). I calcoli sono semplici e spesso illuminati da considerazioni geometriche. Non tutti i ragiona-

menti resistono ad un esame minuto; ma di ciò è doveroso assolvere il giovane autore, considerando che le argomentazioni rigorose sono proprie dell'età matura e che, d'altronde, gli è soltanto un secolo dopo che una critica ben intesa bandì dalla matematica le dimostrazioni poco conclusive.

§ 6. — Eulero.

L'ordine logico e cronologico riconduce sotto i nostri occhi un'opera classica che analizzammo nel Cap. prec. (§ 9), l'*Introductio in analysin infinitorum*, il cui II vol. si chiude con un *Appendice* consacrata alla geometria a tre coordinate, nella quale però, giova dichiararlo subito, l'importante argomento non è esaurito. Tuttavia, malgrado i limiti ristretti entro cui è mantenuta la trattazione, malgrado l'omissione di tutte le questioni di pertinenza della geometria elementare, quell'*Appendice* possiede un valore storico e dottrinale indiscutibile e grande. Dall'esordio di essa emerge che, a differenza del Clairaut, Eulero pensò che, nello spazio, come figure analoghe alle curve piane giova considerare le superficie, la cui rappresentazione analitica offra una spiccata analogia con quella delle curve piane. Tale rappresentazione si ottiene estendendo allo spazio il sistema di coordinate adoperato nel piano; ma poichè siffatta considerazione non palesa subito la identità sostanziale dei tre numeri che servono a fissare la posizione di un punto dello spazio, così Eulero si affretta a esporre quanto basta a porre in luce siffatta circostanza essenziale; inutile dire che il grande geometra attribuisce un segno ad ogni coordinata, epperò distingue otto regioni nello spazio in cui esista un triedro di riferimento. Le formole per la trasformazione delle coordinate da lui stabilite non tardarono a divenire classiche. La riduzione a forme canoniche dell'equazione di secondo grado fra le tre coordinate di un punto, avendo per corollario la classificazione delle superficie da essa rappresentate, gettò gran luce sulla struttura e sulle proprietà di figure geometriche che erano prima state considerate soltanto in casi speciali. Un breve capitolo sulle curve gobbe, come intersezioni di superficie, chiude la geniale esposizione dell'importante argomento. Sul quale poi il grande matematico ritornò in pubblicazioni speciali dotate di maggiore originalità ed elevatezza: fra esse limitiamoci a citare le memorie sulle sviluppabili e sulla teoria della curvatura delle superficie, che occupano posti eminenti nella letteratura relativa alla geometria infinitesimale.

§ 7. — Monge.

La geometria analitica, con un miracoloso sbalzo, piantò il proprio vessillo vittorioso sopra regioni sconfinate e di fertilità inesauribile, grazie all'applicazione delle equazioni a derivate parziali. Questa è dovuta a Gaspare Monge (n. a Beaune il 10 maggio 1746, m. a Parigi il 18 luglio 1818) [1], le cui memorie di largo respiro [2] fecero acquistare alla geometria dello spazio quella generalità di vedute e quella disinvoltura

[1] Per maggiori particolari biografici siami lecito di rinviare il lettore alla mia *Storia della geometria descrittiva* (Milano, 1921), pp. 96 e segg.

[2] Sono riassunte nel volume dal titolo *Application de l'analyse à la géométrie* (5ª ed., per cura del Liouville, Paris 1850).

nel procedere che la differenzia dalla geometria degli antichi (cfr. le parole di Descartes che riferimmo nel § 2 del cap. II, p. 785).

Agli storici della geometria infinitesimale è riserbata l'analisi dei lavori di Monge che costituirono la base dell'edificio alla cui elevazione contribuì così efficacemente Gauss. A noi corre l'obbligo di rilevare che nel *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure*, presentato all'Accademia delle scienze nel 1771 (¹), si trovano per la prima volta risolte con piena generalità e perfetta eleganza alcune questioni elementari (²). Tale è il problema di condurre per un punto di date coordinate (x', y', z') il piano perpendicolare alla retta in cui tagliansi i piani

$$(1) \qquad ax + by + cz + d = 0 \quad , \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0 \; ;$$

per risolverlo, il grande geometra osserva che queste equazioni possono venire sostituite da due qualunque delle seguenti:

$$(2) \qquad \gamma y - \beta z + \delta = 0 \; , \; \alpha z - \gamma x + \zeta = 0 \; , \; \beta x - \alpha y + \varepsilon = 0 \; ,$$

ove (usando per brevità il linguaggio moderno) le costanti che vi entrano sono i determinanti estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} ;$$

e trova come equazione richiesta la seguente:

$$(3) \qquad \alpha(x - x') + \beta(y - y) + \gamma(z - z') = 0 \, .$$

Fondandosi sopra questo risultato, Monge determina la distanza di quel punto dalla retta data; usando l'espressione della distanza di due punti (x, y, z), (x', y', z')

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \, ,$$

che *qui finalmente s'incontra per la prima volta nella letteratura matematica*, Monge trova come risultato

$$\sqrt{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$$

ove λ, μ, ν, rappresentano i risultati della sostituzione di x', y', z', in luogo di x, y, z nei primi membri delle equazioni (2). Dall'equazione (3) egli trae l'equazione del piano normale in un punto qualunque di una curva gobba, cancellando così definitivamente l'errore commesso da Descartes (ved. p. 789), con l'ammettere l'esistenza di un'unica normale in un punto d'una curva sghemba. Fra le altre formole stabilite nella medesima memoria, notiamo l'espressione del raggio di curvatura di una curva dello spazio, per trarne una conferma del fatto, altrove rilevato (ved. p. 813), che *la teoria delle curve avvertì, prima della geometria analitica elementare, l'utilità di formole generali, che esonerassero di ripetere in ogni caso il medesimo calcolo.*

(¹) Venne pubblicato soltanto nel 1785 nel tom. X dei « Mém. de mathém. et phys. présentés à l'Académie royale des sciences ».

(²) Osservisi che non erano state risolte neppure le analoghe questioni planimetriche.

§ 8. — Tinseau.

Gli scritti di Monge, oltrechè pel loro intrinseco valore, possiedono somma importanza per l'influenza benefica che esercitarono e di cui troveremo molte prove nel Cap. seguente. Qui (per ragioni cronologiche) vogliamo notare che essa trovasi riconosciuta da C. M. T. L. Tinseau d'Amondas (n. a Besançon nel 1740, m. a Montpellier nel 1822) nella sua memoria intitolata *Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure* (1), ove si trova l'equazione del piano tangente in un punto qualunque di una superficie supposta determinata dando z in funzione di x, y; è la seguente:

$$(x-\pi)\frac{dz}{dx}+(y-\varphi)\frac{dz}{dy}-(z-\omega)=0,$$

ove π, φ, ω sono le coordinate del punto di contatto; da notarsi che neppure il Tinseau definisce il piano tangente, ma lo determina mediante le tangenti a due sezioni piane, perpendicolari una all'asse delle x, l'altra all'asse delle y. Dalla precedente equazione egli poi trae la rappresentazione analitica del contorno apparente della superficie data, completando così un passo della classica memoria di Clairaut (ved. p. 835).

§ 9. — Lagrange.

All'epoca storica in cui visse Monge, appartiene un sommo analista, onore e vanto d'Italia, il quale seppe imprimere alla disciplina di cui ci occupiamo un indirizzo nuovo, che fece ad essa acquistare l'aspetto che deve ritenersi definitivo. Parliamo di Giuseppe Luigi Lagrange. Nato a Torino il 25 gennaio 1736, insegnò da giovane in quella scuola di artiglieria, sino a che (1766) venne chiamato a Berlino da Federico II come successore di Eulero nella direzione della Classe matematica dell'Accademia prussiana delle scienze; ivi rimase sino al 1783 quando, per invito di Luigi XVI, si trasferì a Parigi. Scampato miracolosamente dal turbine rivoluzionario, fu colmato di onori dal primo Napoleone e morì a Parigi, circondato di gloria, il 10 aprile 1813.

La memoria che c'interessa ha per titolo *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (2), ed è strettamente legata (dal punto di vista algoritmico) all'altra di poco precedente ed intitolata *Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force acceleratrice* (3). Per caratterizzarne la natura e lo scopo, nulla di meglio che riferire il seguente squarcio della prefazione: « Ces solutions sont purement analytiques et peuvent même être entendues sans figures; j'y emploie des coordonnées rectangles pour déterminer la position des différents points que j'ai à considérer dans la pyramide, et je n'ai pas même

(1) Presentata nel 1774, fu pubblicata nel tom. IX (Paris 1780) dei « Mém. de math. et de phis. présent. à l'Acad. des sciences ».

(2) Pubblicata nel 1773 fra i « Nouveaux Mémoires de l'Accadémie de Berlin », la si ritrova nel tom. III delle *Oeuvres complètes de Lagrange*.

(3) Id. id.

besoin de donner aux axes de ces coordonnées une position déterminée; je suppose seulement qu'ils se coupent au sommet de la pyramide... Indépendemment de l'utilité directe que ces solutions pourront avoir dans plusieurs occasions, elles serviront principalement à montrer avec combien de facilité et de succès la méthode algébrique peut être employée dans les questions qui paraîssent être le plus de ressort de la géométrie proprement dite, et les moins propres à être traitées par le calcul ». Per svolgere tale programma, Lagrange considera una piramide **L M M′ M″** e ne indica con $\varphi, \varphi', \varphi''$ gli angoli **M′ L M″**, M″ L M, **M L M′**; posto poi

$$\overline{\mathrm{LM}}^2 = a\ ,\ \overline{\mathrm{LM}'}^2 = a'\ ,\ \overline{\mathrm{LM}''}^2 = a''\ ,\ \overline{\mathrm{M}'\mathrm{M}''}^2 = c\ ,\ \overline{\mathrm{M}''\mathrm{M}}^2 = c'\ ,\ \overline{\mathrm{M}\mathrm{M}'}^2 = c''\ ,$$

$$b = \frac{a' + a'' - c}{2}\ ,\ b' = \frac{a'' + a - c'}{2}\ ,\ b'' = \frac{a + a' - c''}{2}\ ,$$

trova

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a'a''}}\ ,\quad \cos\varphi' = \frac{b'}{\sqrt{a''a}}\ ;\quad \cos\varphi'' = \frac{b''}{\sqrt{a\,a'}}\ .$$

Per riferire brevemente altre convenzioni ed altri risultati ottenuti dal nostro matematico, useremo per brevità concetti e simboli moderni. Se il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

ha per elementi le coordinate dei punti M, M′, M″, si trova essere

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}\ ;$$

e se

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}$$

è il determinante reciproco di Δ, Lagrange ne considera il quadrato

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

e trova che le aree delle facce della considerata piramide valgono risp.

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha}\ ,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha'}\ ,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha''}\ ,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''}\ ,$$

mentre l'equazione del piano M M′ M″ è (s, t, u essendo coordinate correnti) $u = l + ms + nt$, avendo posto

$$l = \frac{\Delta}{\zeta + \zeta' + \zeta''}\ ,\ m = -\frac{\xi + \xi' + \xi''}{\zeta + \zeta' + \zeta''}\ ,\ n = -\frac{\eta + \eta' + \eta''}{\zeta + \zeta' + \zeta''}\ .$$

La distanza del punto L dal piano M M′ M″ è espressa come segue:

$$\frac{\Delta}{\sqrt{(\xi+\xi'+\xi'')^2+(\eta+\eta'+\eta'')^2+(\zeta+\zeta'+\zeta'')^2}},$$

ed il volume della piramide considerata lo è nei due modi seguenti:

$$\frac{1}{6}\sqrt{a\,a'a''+2b\,b'b''-ab^2-a'b'^2-a''b''^2}=$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{\alpha\,\alpha'\,\alpha''+2\beta\,\beta'\,\beta''-\alpha\beta^2-\alpha'\,\beta'^2-\alpha''\,\beta''^2}.$$

Delle formole trovate Lagrange fa applicazione alla determinazione della piramide di volume massimo fra quelle le cui facce hanno date aree, riducendo tale problema alla risoluzione di un'equazione di quarto grado. Egli determina ancora raggio e centro dalla sfera circoscritta alla data piramide, le distanze di un punto arbitrario dello spazio delle sue facce, le coordinate del baricentro, ecc. Tratta ancora il problema di dividere una piramide in quattro parti aventi fra loro dati rapporti, anche questo con eleganza e simmetria perfette: chiude facendo cenno di altre questioni che si possono risolvere imitando i ragionamenti ed i calcoli da lui esposti.

Quale e quanta differenza fra questo svelto modo di procedere e le faticose e pesanti argomentazioni, basate sull'uso costante di speciali assi di riferimento e sull'incessante applicazione della teoria della similitudine e del teorema di Pitagora, usate senza eccezione dai troppo fedeli seguaci di Descartes!

CAPITOLO VII.

Assetto definitivo del metodo cartesiano.

§ 1. — Lacroix.

I benefici effetti dei suggerimenti, dati tacitamente con l'esempio di Monge e Lagrange sull'indirizzo da imprimersi all'ulteriore sviluppo del metodo analitico, non tardarono ad avvertirsi. Il più significante sintomo della metamorfosi, che stava per verificarsi nella disciplina abbozzata da Descartes e Fermat, è offerto dal grande *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (Paris 1797) di un matematico francese la cui fama è dovuta, meno a scoperte importanti, che ad una collana di ottimi manuali che gli acquistarono un'autorità indiscussa nel campo della didattica matematica: Sylvestre François Lacroix, il quale nacque a Parigi nel 1765, insegnò in numerose scuole francesi e morì il 25 maggio 1843. Che egli avesse subìto potentemente l'influenza dei grandi sullodati è da lui esplicitamente confessato nella Prefazione del succitato *Traité*, ove si leggono le seguenti parole: « Scartando con cura tutte le costruzioni geometriche, io ho voluto far sentire al lettore che esiste una maniera di concepire la geometria, che si potrebbe chiamare *geometria analitica* [1], e che consiste nel dedurre le proprietà del-

[1] Questo nome, fu evidentemente ispirato dal titolo della *Mécanique analytique* di Lagrange.

l'estensione del minimo numero di principii, coll'aiuto di procedimenti puramente analitici, come Lagrange fece nella sua *Meccanica analitica* rispetto alle proprietà dell'equilibrio e del movimento (¹). Nelle Note alla *Geometria* di Legenche si trova un metodo per dedurne la teoria della similitudine come conseguenza della sovrapposizione; da ciò si è posti in grado di ottenere l'equazione di una retta qualsiasi, combinando quest'equazione con quella del cerchio e di altre curve. Si potrebbe giungere a tutte le proposizioni note sopra le linee, in modo più o meno elegante, in base ai mezzi analitici scelti. Lagrange, nelle Memorie dell'Accademia di Berlino (anno 1773), diede una teoria delle piramidi che è un capolavoro di tal genere; ma io opino che Monge sia stato il primo a presentare sotto questo aspetto l'applicazione dell'algebra alla geometria ».

È nel IV Cap. (« Théorie des lignes courbes ») della sua opera che Lacroix svolge il suindicato concetto. Definite le coordinate, ortogonali od oblique, nel piano mediante due rette fisse A B, A C, egli dimostra che ogni retta è rappresentata da un'equazione lineare; risolve poi le questioni fondamentali su rette e punti, le quali vanno qui enumerate *perchè s'incontrano per la prima volta nella letteratura geometrica*, dove erano destinate ad occupare un posto stabile: retta per due punti, distanza di due punti, retta per un punto e parallela o perpendicolare ad un'altra, intersezione di due rette, distanza di un punto da una retta. Passando poi allo studio delle curve algebriche, il Lacroix ne dà la classificazione in base al loro ordine, insegna a delinearle, servendosi delle loro equazioni, ed enumera le varie specie di punti singolari che possono presentare. Soltanto a questo punto vengono stabilite le formole per la trasformazione delle coordinate; esse vengono largamente applicate all'investigazione delle proprietà delle curve rappresentate dall'equazione $A + 2Bx + 2Cy + Dx^2 + 2Exy + Fy^2 = 0$ ed alla riduzione dell'equazione stessa a forma canonica; segue un cenno dell'indagine analoga concernente l'equazione

$$A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx^3 + Hx^2y + Kxy^2 + Ly^3 = 0 .$$

S'incontrano poi molti sviluppi concernenti centri e diametri, flessi e cuspidi, nonchè i teoremi sul numero dei punti doppi e delle intersezioni di due curve, teoremi che già riferimmo nel Cap. V. Citiamo di sfuggita le pagine sull'osculazione e sugli inviluppi, le quali appartengono alle applicazioni geometriche del calcolo differenziale; notiamo piuttosto quelle relative alle curve trascendenti, chè dimostrano non avere il Lacroix trascurati questi interessanti enti geometrici.

La trattazione della geometria dello spazio, che leggesi nel Cap. V (« Théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure »), procede per una via parallela a quella seguìta pel piano. Definite le coordinate ortogonali nel modo suggerito da Descartes (ved. p. 789), il Lacroix trova che si possono anche considerare come le distanze di un punto dalle facce di un triedro trirettangolo e dà subito l'interpretazione geometrica di un'equazione fra le tre coordinate x, y, z. Dimostra poi che ogni

(¹) Ricordiamo che nella prefazione di quest'opera classica Lagrange scrisse: « On ne trouvera points de figures, dans cet ouvrage. Les méthodes que s'y exposent ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement opérations algébriques, assujéttées à une marche regulière et uniforme ».

piano è rappresentato da una equazione della forma $Ax + By + Cz + D = 0$ e risolve i problemi seguenti: piano per tre punti, condizione per l'incidenza di due rette o per il parallelismo di due piani o per la perpendicolarità di rette e piani; distanza di due punti; angolo di due rette o di due piani; minima distanza di due rette. L'autore passa poi allo studio delle superficie rappresentate dall'equazione generale di secondo grado

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz - L^2 = 0,$$

nel corso del quale egli stabilisce ed applica la trasformazione delle coordinate. Giova rilevare che egli introduce anche le coordinate polari r, φ, ψ, χ mediante le relazioni

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\cos\psi\ ,\ z = r\cos\chi\,,\quad \text{essendo}\quad \cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1.$$

Seguono applicazioni del calcolo differenziale alle superficie ed alle curve, applicazioni su cui non ci arrestiamo perchè estranee al nostro tema.

§ 2. — Biot.

È da credere che il modo di concepire l'applicazione dell'algebra alla geometria, quale testè vedemmo attuato nel *Traité* ora analizzato, abbia informato ben presto l'insegnamento nelle scuole francesi se un giovane scienziato, destinato a illustrarsi più come fisico che non come matematico, Giambattista Biot (n. a Parigi il 21 aprile 1774, m. ivi il 3 febbraio 1862), giudicò opportuno di scriverne un'esposizione [1] avente per cardini, come egli si espresse, «i metodi generali introdotti per primi da Lagrange e Monge e che Lacroix ha diffuso nei suoi trattati». Ci sia lecito di essere brevi intorno a quanto Biot espone riguardo a punto, retta e piano, per non ripetere enumerazioni di problemi già esposte nel § prec.; osserviamo soltanto che, col far succedere a quanto concerne le figure piane ciò che riferisce alle analoghe a tre dimensioni, egli per primo dimostrò col fatto l'opportunità, nel campo analitico, della fusione delle due grandi sezioni della geometria che il Lacroix aveva tenuto separate, adottando criterii ritenuti classici perchè adottati da Euclide. Esaurito così quanto concerne le figure di primo ordine, il nostro autore si volge a quello del secondo, determinando le varie forme sotto cui si può scrivere l'equazione cartesiana della sezione prodotta da un piano in un cono circolare retto, ciascuna delle quali viene poi accuratamente discussa. Che qualunque equazione della forma $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ [2] rappresenti una sezione del cono viene dimostrato dal Biot mediante uno studio accurato di questa equazione. In seguito viene investigata l'equazione

$$Az^2 + A'y^2 + A''x^2 + Byz - B'xz + B''xy + Cz + C'y + C''x + F = 0,$$

[1] La I ed. apparve nel 1802; la nostra analisi si basa sull'VIII (Parigi 1834) intitolata come segue: *Essai de géométrie analytique appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre. Ouvrage destiné à l'enseignement public, par arrête de la Commission de l'instruction publique, en date 22 février 1817.*

[2] La mancanza di coefficienti numerici in quest'equazione stabilisce un'inferiorità del Biot rispetto al Lacroix, la quale è confermata dall'equazione di una quadrica da noi riferita poco dopo nel testo.

con previa riduzione a forme canoniche. L'opera si chiude con la dimostrazione delle formole fondamentali della teoria delle funzioni circolari. Prima di lasciarla, osserviamo che, delle 356 pagine di cui consta, ben 262 sono dedicate alle curve ed alle superficie di second'ordine; tale sviluppo ipertrofico dato all'esame di figure particolari (sistema che venne seguìto dalla maggior parte dei trattati venuti poi) presenta il grave inconveniente di far sorgere nello studente l'idea che scopo della geometria analitica sia l'indagine degli enti di 2º ordine e lo lascia perfettamente disarmato di fronte ai problemi ove non si possono applicare le proprietà della funzione di 2º grado: grave inconveniente pedagogico a cui non va incontro chi segue invece i dettami lasciati da Eulero nella sua ammirabile *Introductio*.

§ 3. — La scuola di Monge.

Malgrado le ottime esposizioni fattene da Lacroix e Biot la geometria analitica dello spazio presentava imperfezioni e lacune. Ad esse si affrettarono a porre rimedio Monge ed altri matematici della sua scuola, i quali pubblicarono le loro osservazioni negli organi della Scuola politecnica.

È specialmente il problema della trasformazione delle coordinate che venne per primo giudicato bisognoso di nuove ricerche. Una prima memoria sull'argomento porta la firma del Livet (¹), il quale applicò poi i risultati ottenuti a stabilire le proprietà delle quadriche che corrispondono nello spazio ai teoremi di Apollonio sulle coniche. Poco dopo, lo stesso argomento veniva studiato dal Français (²) il quale ha anche trattate (³) con singolare perizia le questioni concernenti la retta ed il piano nello spazio in coordinate oblique, mostrando come le formole ottenute dessero la soluzione del seguente problema, proposto dall'Hachette: « dividere con un piano una piramide triangolare in due parti per modo che la risultante sezione abbia area minima ». L'Hachette, il fedele collaboratore di Monge (n. a Mézières il 5 maggio 1769, m. a Parigi il 16 gennaio 1834), ha risolto lo stesso problema (⁴) con altra argomentazione estremamente notevole, perchè basata sulla proposizione, tuttora applicata di frequente: « la proiezione di un lato qualunque di una linea poligonale chiusa è eguale alla somma delle proiezioni di tutti gli altri lati ».

Altro argomento che ebbe notevoli perfezionamenti nella scuola di Monge è la teoria delle quadriche. A queste si riferisce una nota (⁵) di un giovane destinato a divenire un'indiscussa autorità nel campo della meccanica e della fisica matematica, Siméon Dénis Poisson (nato a Pithiviers il 21 giugno 1781, morto a Parigi il 25 aprile 1840); essa ha per oggetto la dimostrazione dei due seguenti teoremi (il

(¹) *Formules pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques* (« Journ. de l'Ec. polyth. », XIII cah., 1906, pp. 270-296).

(²) *Mémoires sur la transformation des coordonnées* (ibid., XIV cah., 1808, pp. 182-190).

(³) *De la ligne droite et du plan rapportés à des coordonnées obliques* (« Corresp. sur l'École polyth. » tom. I, 1808, pp. 337-849).

(⁴) *Sur la transformation des coordonnées* e *Note sur la transformation des coordonnées obliques, en d'autres coordonnées obliques qui ont la même origine* (ibid., tom. II, 1809-'13, pp. 6-13 e 247-249).

(⁵) *Sur les surfaces du second degré* (ibid., tom. I, 1804-08, p. 237).

secondo dei quali è dovuto a Monge): I. La superficie generata dal punto d'intersezione di tre piani rettangolari tangenti a tre sfere concentriche di raggi r, r', r'' è una quarta sfera con lo stesso centro e di raggio $\sqrt{r^2+r'^2+r''^2}$; II. I vertici dei triedri trirettangoli circoscritti ad un elissoide stanno su una sfera concentrica a questa superficie. Le dimostrazioni di esse sono notevoli perchè riposano sull'osservazione seguente: dalle sei relazioni

$$a^2+b^2+c^2=r^2\ ,\ a'^2+b'^2+c'^2=r'^2\ ,\ a''^2+b''^2+c''^2=r''^2$$
$$a'a''+b'b''+c'c''=0\ ,\ a''a+b''b+c''c=0\ ,\ aa'+bb'+cc'=0$$

seguono le altre:

$$\frac{a^2}{r^2}+\frac{a'^2}{r'^2}+\frac{a''^2}{r''^2}=1\ ,\ \frac{b^2}{r^2}+\frac{b'^2}{r'^2}+\frac{b''^2}{r''^2}=1\ ,\ \frac{c^2}{r^2}+\frac{c'^2}{r'^2}+\frac{c''^2}{r''^2}=1$$

$$\frac{bc}{r^2}+\frac{b'c'}{r'^2}+\frac{b''c''}{r''^2}=0\ ,\ \frac{ca}{r^2}+\frac{c'a'}{r'^2}+\frac{c''a''}{r''^2}=0\ ,\ \frac{ab}{r^2}+\frac{a'b'}{r'^2}+\frac{a''b''}{r''^2}=0\,.$$

Alle superficie di second'ordine si riferisce anche un breve articolo recante le due firme di Monge e Hachette [1] e dedicato alla ricerca delle lunghezze degli assi di una quadrica nell'ipotesi che l'origine coincida col centro della superficie.

Tali firme si ritrovano nel programma di un corso d'applicazione dell'algebra alla geometria [2], che vedremo svolto in un'opera di cui parleremo nel § seguente e nel quale rileveremo la totale assenza di considerazioni planimetriche: fatto, questo, che non meraviglierà chi abbia osservato come in tutta la multiforme produzione di Monge non abbia trovato alcun posto la geometria piana.

Questo generale impero di Monge nel campo geometrico non fece porre in completo oblio le benemerenze di Lagrange; chè, nell'anno stesso in cui questo grande scendeva nella tomba, il Binet (n. a Rennes il 2 febbraio 1786, m. a Parigi il 12 maggio 1856) s'inspirava alla scrittura *Sur les pyramides triangulaires*, nello scrivere una notevole memoria [3] per risolvere parecchi problemi metrici relativi a parallelepipedi e piramidi, memoria dalla quale risulta come l'eleganza dei calcoli e la cura dello stile andassero, sino dal principio del sec. XIX, di giorno in giorno diffondendosi ed imponendosi.

§ 4. — Hachette e Cauchy.

Di tutti i perfezionamenti apportati alla geometria analitica a tre coordinate, durante il quarto di secolo che abbraccia la Rivoluzione francese ed il primo Impero, tenne il debito conto l'Hachette scrivendo la *Partie algébrique* dei suoi ben noti *Eléments de géométrie à trois dimensions* (Paris 1817); ove, per dirla in breve, trovasi svolto il programma che (come vedemmo nel § prec.) egli aveva redatto come collaboratore di Monge. Tutta l'opera consta di due lunghi capitoli, dedicati l'uno al punto, alla retta ed al piano,

[1] *Géométrie analytique* (ibd. tom. II, 1809-13, pp. 415-419).

[2] *Application d'algèbre à la géométrie* (« Journal. de l'Éc. polyth. » XI cah., 1811, pp. 143-169).

[3] *Sur un système de formules analytiques, et leurs application à des considérations géométriques* (ibid., XVI cah., 1813, pp. 280-354).

l'altro alle superficie di second'ordine. Notevole il metodo usato per discutere l'equazione generale di 2° grado fra le tre coordinate di un punto, metodo il quale è tratto da una memoria (¹) di Aléxis Thérèse Petit (n. a Vésul il 20 ottobre 1791, m. a Parigi il 21 giugno 1820) (²).

Quest'opera dell'Hachette prova che la geometria analitica dello spazio (e *a fortiori* quella del piano) aveva ormai raggiunto un assetto soddisfacente ed ormai definitivo; tanto vero che il piano svolto nella I parte di essa venne adottato da un sommo matematico, Louis Augustin Cauchy (n. a Parigi il 21 agosto 1789, m. a Sceaux il 23 maggio 1857), in una sua egregia opera didattica (³); onde si può dire che il metodo cartesiano, dopo due secoli, consegue contenuto e forma, in cui il desiderio ragionevolmente si acqueta.

Con l'andare del tempo, con l'ampliarsi ed approfondirsi della ricerca geometrica, il concetto di coordinate subì svariate e radicali metamorfosi. Da un lato il risveglio dello spirito di ricerca nel campo della geometria pura, e la conseguente introduzione della retta e del piano come elementi dello spazio, ebbero per conseguenza la creazione di nuovi sistemi di geometria analitica meglio indicati per esprimere algebricamente molti importanti fenomeni geometrici dianzi inavvertiti, allo sviluppo dei quali prestarono servigi preziosi le più raffinate teorie algebriche maturatesi nel corso del sec. XIX. D'altro lato, alla giusta aspirazione dall'emanciparsi della costante, e talora ingombrante, considerazione degli assi coordinati debbono la vita la geometria intrinseca ed i varii sistemi di calcolo geometrico. Tuttavia le venerabili coordinate cartesiane, reduci da innumerevoli vittorie, dànno ogni giorno prove di un'ammiranda elasticità e di una vigorosa combattività, che possono venire negate soltanto da qualche sistematico denigratore. Cosicchè, ammirando i trofei di cui esse vanno giustamente orgogliose, si è tentati di applicare a questo proposito la seguente acuta osservazione fatta da Descartes: «les grands chemins, qui tournoient entre les montagnes, deviennent peu à peu si unis et si commodes, à force d'être fréquentés, qu'il est beaucoup meilleur de les suivre que d'entreprendre d'aller plus droit en grimpant au dessus des rochers et descendant jusqu'au but des précipices ».

Genova, autunno 1923.

(¹) « Corresp. sur l'École polyth. », tom. II, p. 324.

(²) Riguardo all'analoga ricerca per le coniche va ricordato l'opuscolo del Prony (n. a Chamlet l'11 luglio 1755, m. a Asnières il 29 luglio 1839) intitolato *Exposition d'une méthode pour construire les équations indéterminées qui se rapportent aux sections coniques* (Paris 1791) e la cui sostanza si ritrova nell'articolo intitolato *Cours d'analyse appliquée à la mécanique* (« Journ. de l'École polyth. », I cah., 1794).

(³) *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie* (Paris 1826); veggansi specialmente i *Préliminaires*.

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume I-XXXIII. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII.
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI.

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti delle Adunanze Solenni. Vol. I-III.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. Vol. I-IV.
» » » » » Boll. 1°-3°
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.

Annuario 1882-1924.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXIX.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-III.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia.
Indici degli Atti Accademici (in preparazione).

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1924

Notizie degli Scavi. Vol. XXI, in fascicoli trimestrali (1)	L.	**120,00**
Rendiconti scienze morali. Vol. XXXIII, idem (1, 2, 3)	»	**54,00**
Memorie, » » Vol. XVII, in fascicoli varî (1, 2, 3)		prezzi vari
Monumenti antichi. Vol. XXIX, puntata 1ª (1)	»	**280,00**
Rendiconti scienze fisiche, Vol. XXXIII, in fascicoli bimensili (1, 2, 3) . .	»	**108,00**
Memorie, » » Vol. XIV, in fascicoli varî (1, 2, 3)		prezzi vari
Rendiconto adunanza solenne. Vol. III (fascicolo 10°) (1, 2, 3)	»	**8,00**
Annuario (1, 2, 3)	»	**4,00**

(1) In vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (4).
(2) » » » » » Maglione e Strini, Via Due Macelli 88, Roma (7).
(3) » » » l'Amministrazione dell'Accademia, Via della Lungara 10, Roma (29).

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXX 1923)

Serie quinta — Volume XIV — Fascicolo XIX.

GUSTAVO CUMIN

STUDII GEOLOGICI E PETROGRAFICI SUL MONTE CALVARIO

PRESSO MANZIANA (LAZIO)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RELAZIONE

letta dal Socio **De Stefani**, relatore, a nome anche del Socio **Millosevich**, nella seduta del 3 aprile 1924, sulla Memoria del dott. **Gustavo Cumin**, intitolata: *Studii geologici e petrografici sul Monte Calvario presso Manziana (Lazio)*.

Il dott. Cumin descrive le rocce eruttive del M. Calvario nel Lazio, facente parte di una regione, la quale nel suo complesso fu già convenientemente illustrata da un notevole lavoro geologico di Tommaso Tittoni.

Premessi brevi cenni sui terreni terziarii che formano l'imbasamento, l'A. passa a descrivere la roccia eruttiva principale che è una trachite quarzifera o liparite affine a quella della Montagnola presso Civitavecchia e del vulcano di Campiglia Marittima in Toscana, la quale trachite passa, nella parte più alta, ad una trachite augitica-iperstenica, vicina, per via dell'iperstene, piuttosto frequente, alle trachiti non quarzifere del M. Amiata e dell'isola di Capraia. Tufi e colate di leucitite e di leucotefrite coprono le trachiti.

L'A. descrive i varii componenti, le loro alterazioni, gl'inclusi, e la morfologia del paesaggio, ed aggiunge una cartina geologica e la fotografia di alcune sezioni ingrandite.

Numerose analisi chimiche accompagnano il lavoro e completano le descrizioni di questo tipo di roccia abbastanza diverso da ognuno di quelli dei cinque vulcani settentrionali della finitima Toscana.

Perciò proponiamo la stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia, senza pregiudizio delle facoltà del Consiglio d'amministrazione delle quali all'articolo 26 dello statuto.

Studii geologici e petrografici sul Monte Calvario presso Manziana (Lazio).

Memoria del dott. GUSTAVO CUMIN

presentata nella seduta del 2 marzo 1924

La massa eruttiva del Monte Calvario, noto tra i paesani dei dintorni anche sotto il nome di *Eremo* per il fatto che la sua sommità è occupata dalle tenute del monastero di Monte Virginio, piccolo paese posto alle sue falde settentrionali, s'innalza sino 541 metri sopra il livello del mare. Esso è tutto ricoperto, nella sua parte superiore, da rigogliosa macchia di castagno, mentre che, alle sue falde, si estendono ubertosi vigneti. All'intorno del monte giace una corona di paesi: Manziana, Canale, Monte Virginio ed Oriolo.

Varii furono gli studiosi che s'occuparono, quasi sempre però di sfuggita, di questa regione: così il Breislak (2) nota la presenza del pliocene tra i paesi di Monte Virginio e Canale e riconosce altresì la natura eruttiva della roccia che costituisce il Monte Calvario, che il Brocchi (3) chiama *pietra manziana* e gl'inclusi che vi si osservano *necroliti* traducendo la denominazione locale di « sassimorti ». Il Pareto (8), attraversando la regione, parla della fornace di laterizi presso Canale.

Il Mantovani (15) è il primo che parla di trachiti mioceniche, idea espressa anche dal Ponzi (19, 20, 21) che con la sua autorità diede maggior importanza a quest'ipotesi ed è appunto perciò che ancora oggi si parla di età miocenica delle trachiti dei Monti del Sasso e della Tolfa. Devesi notare che, in quell'epoca, si chiamava trachite tutto ciò che differiva dall'abito delle leucititi e leucotefriti.

Fu il Tittoni (25) a dimostrare erronea l'ipotesi dell'età miocenica delle trachiti, che egli ritiene quaternaria, egli pubblicò pure una carta geologica che è la più esatta sinora pubblicata su questa regione.

Il Bucca (4, 5) studiò i campioni raccolti dal Tittoni e determinò come liparite la massa eruttiva del Monte Calvario e come trachi-andesite i suoi inclusi, mentre che il De Stefani (13) la ascrive alla liparite tipo nevaditico del Rosenbusch e la fà dipendere dalla massa eruttiva della Tolfa. Ultimo il Moderni (17) ritiene miocenica la liparite e parla di cristalli di leucite nei suoi inclusi.

Scarse invece sono le notizie mineralogiche sulla regione; infatti non troviamo se non la nota dello Zambonini (27) sulla wawellite e pochi cenni nella monografia del Demarchi (12) sui giacimenti di solfo del *Fosso Lupo* e della *Conca del Biscione*.

I terreni.

Nella zona studiata appaiono, oltre alla massa liparitica del Monte Calvario, dei terreni vulcanici appartenenti al sistema dei Sabatini e dei terreni sedimentarii eocenici e pliocenici.

I terreni sedimentarii formano l'ossatura fondamentale della regione e la base rocciosa sopra la quale si sono espansi i varii prodotti eruttivi; essi però non sono molto diffusi nella regione studiata.

L'*eocene superiore*, che affiora per breve tratto tra il Fosso delle Crete e la Madonna della Saletta, è costituito da calcari alberesi di vario colore, potenti al massimo un metro ed inclinati, verso S 16° — O, di 26° e con direzione O 16° — NE 16° — S. Il colore e la grana degli alberesi sono varii; così s'incontrano non di rado banchi rosei o chiazzati irregolarmente in rosa e grigio. Pure tra tanta apparente diversità si nota il predominio di due varietà di calcare, delle quali una è di colore grigio-chiaro compatta ed a grana minuta, mentre l'altra è grigio-bruna ed a grana molto più grossa. Queste due varietà differiscono anche per il fatto che la grigia è affatto priva di fossili, mentre che la grigio-bruna contiene numerosi avanzi di *Globigerina* sp., *Rotalia* sp. e *Textularia* sp.

Data la mancanza di resti fossili caratteristici, non è possibile di fare un riferimento esatto di questi terreni ad un qualsiasi piano dell'eocene, ma è d'uopo ascriverli all'eocene superiore analogamente a quanto si fà per i terreni identici dei Monti del Sasso e della Tolfa.

Il *pliocene* è costituito inferiormente da argille che nella parte superiore sono rimpiazzate da conglomerati. Le argille sono di colore azzurro e poverissime di resti organici; esse hanno una potenza varia che in rari casi raggiunge i 70 metri, e poggiano in banchi orizzontali sull'eocene.

Esse sono di pasta uniforme, ricca di concrezioni calcaree; rispetto ai fossili ch'esse racchiudono, il Tittoni (25), in 4 anni di ricerche, riuscì a trovare un solo frammento, di *Ostrea cochlear*, nè le mie indagini sono state, sotto questo riguardo, più fortunate. L'età di queste argille, oltre che dalle analogie petrografiche, si può anche dedurre dai fossili rinvenuti in terreni simili presso i coni trachi-andesitici che sorgono presso il Casale di S. Vito tra Bracciano e Manziana. Quivi il Tittoni raccolse e determinò *Pecten histrix Dod. Meli* ed *Ostrea cochlear*, abbastanza frequenti; così che si possono ascrivere le argille azzurre al pliocene inferiore e medio.

Le argille racchiudono spesso dei cristalli di gesso: così presso il ponte sul Mignone sotto il paese di Monterano diruto e lungo la strada rotabile Manziana-Canale, poco prima di quest'ultimo paese. I cristalli sono spesso geminati a ferro di lancia e sono di piccole dimensioni, non raggiungendo se non raramente 5-6 cm. di lunghezza.

Sopra le argille, ed in concordanza con esse, si trovano qua e là dei conglomerati di rocce eoceniche che formano una fascia spesso interrotta che gira intorno alla massa eruttiva del Monte Calvario. Gli elementi di questi conglomerati sono costi-

tuiti da calcari alberesi (predominanti), calcari nummulitici ed arenarie; la loro grandezza è molto varia: così lungo la strada Canale-Mte Virginio si notano ciottoli arrotondati, del diametro massimo di 10 sino a 15 cm. mentre che alla Madonna della Saletta ed alla fornace della Fontaccia essi sono di piccolissime dimensioni e misti a tritumi di conchiglie sì da assumere l'aspetto della tipica panchina. Nelle due ultime località potei raccogliere dei fossili, molto male conservati, così che pochi potei determinarne. Osservai:

Chlamys flexuosa *Chl. varia* *Ostrea* sp. *Pectunculus* sp. *Dentalium* sp.

Nè i conglomerati nè la panchina mostrano elementi vulcanici, per quanto io abbia esteso in questo senso le mie ricerche. Nella panchina il microscopio mostra, in una massa fondamentale calcitica a grana assai grossolana, numerosi resti di *Rotalia*, ciottoli di calcari alberesi, calcari numulitici ed arenarie. Si notano inoltre lamine di *muscovite*, granuli irregolari di *quarzo* con marcata estinzione ondulata e molte inclusioni gassose; inoltre dei *feldspati*, tra i quali più frequenti sono l'*ortose*, spesso molto decomposto, ed il *microclino* che presenta la caratteristica struttura a graticcio. In complesso mancano gli elementi di origine vulcanica; e quei minerali, che, come vedremo, si trovano nella liparite, si presentano nella panchina con l'*habitus* caratteristico che essi hanno nelle arenarie eoceniche, dal disfacimento delle quali essi indubbiamente derivano.

La liparite. La roccia eruttiva, che costituisce la massa del M.te Calvario e che appare anche in spuntoni isolati tra le argille plioceniche, è una liparite; essa è abbastanza varia, principalmente rispetto al suo colore ed alla maggior o minor frequenza di fenocristalli, ed è ricca di inclusi omeogeni a rapporto mediato.

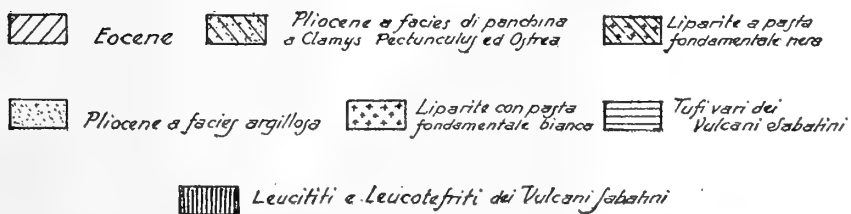
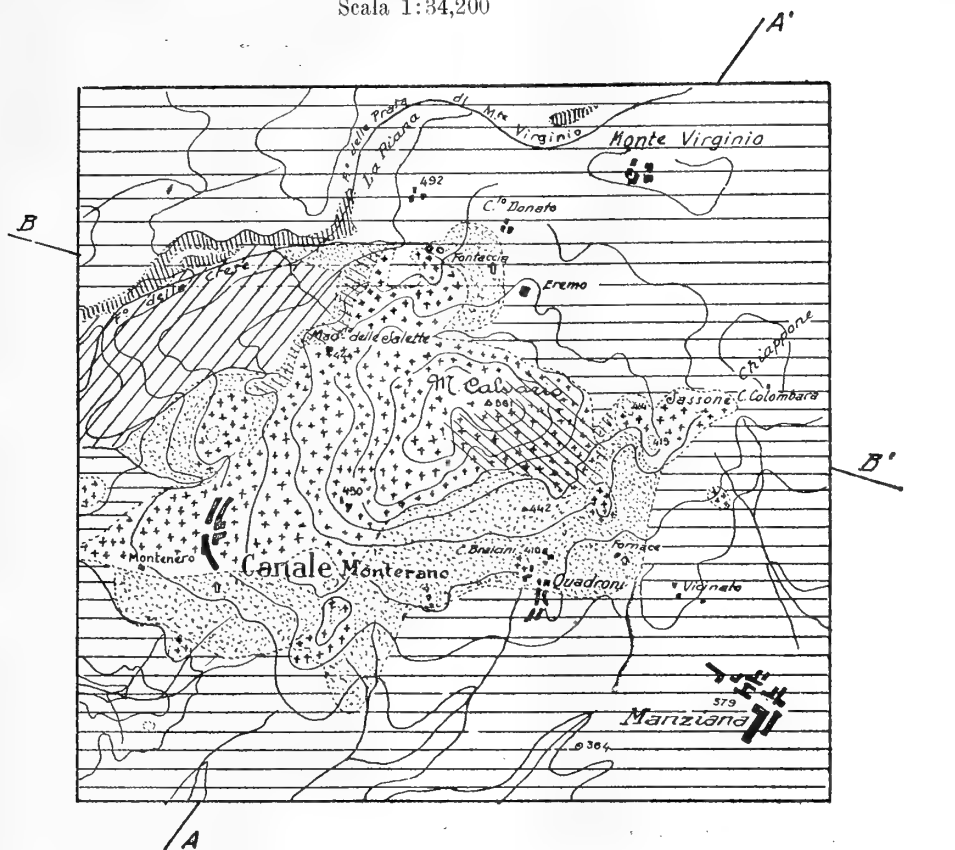
Il colore predominante è il biancastro, dato dalla pasta fondamentale compatta di aspetto porcellanico e nella quale si osservano sparsi cristalli di sanidino grossi sino 1.5 cm. e lamelle esagonali di biotite. Questa è la varietà di roccia più diffusa, così essa si rinviene nelle cave del Sassone tra Manziana ed Oriolo, alla Madonna della Saletta, tra quest'ultima località ed il paese di Canale e lungo un buon tratto della carrareccia Canale–Quadroni.

Tale varietà è conosciuta sotto il nome di *pietra manziana* ed è nota nell'alto Lazio per la sua refrattarietà che la fa atta a pietra da forni. Essa assume, sotto l'influenza degli agenti atmosferici, un colore grigio e talvolta, per profonda alterazione della biotite, gialliccio; la pasta fondamentale perde la coerenza, così che la roccia si sgretola facilmente.

La seconda varietà è molto meno diffusa ed occupa la più alta parte del M.te Calvario: così presso Vigna Bucci, vicino a Quadroni, ecc., essa è a pasta fondamentale nera, vetrosa con interclusi feldspatici in forma di listerelle allungate; per idratazione dei composti ferrosi della pasta fondamentale la roccia assume spesso un colore rosso cupo.

Tutte e due le varietà mostrano uno spiccato clivaggio parallelopipedo e presentano spesso una struttura fluidale più o meno marcata, sia a causa del predominio, in certe parti della roccia, di lamine biotitiche, sia per la varietà di grana, o, seconda-

Schizzo e profili geologici.

Scala 1:34,200

riamente, per infiltrazioni limonitiche. Nelle numerose cave aperte nella massa rocciosa si possono ben osservare tutte queste particolarità, come pure i numerosi e talora grossi inclusi che si rinvengono però a preferenza nella varietà bianca.

La roccia a pasta fondamentale bianca mostra al microscopio numerosi fenocristalli di sanidino, feldspati calco-sodici, quarzo e biotite.

La massa fondamentale presenta una struttura microfelsitica con azione incerta a luce polarizzata; tale struttura è probabilmente di origine secondaria, prodotta dalla devitrificazione della base vetrosa. Nella massa fondamentale si notano microliti allungati di sanidino.

Il *sanidino* è, tra i feldspati, di gran lunga il più frequente; esso è di solito ben idiomorfo, d'aspetto vitreo ed inalterato. Le tracce di sfaldatura si osservano nettamente in tutte e due le direzioni. Qualche volta si notano individui con gli spigoli arrotondati per azioni di riassorbimento magmatico, ed allora essi assumono di solito una forma ovoidale. Solo pochi cristalli mostrano uno sviluppo di forme più vario; così potei identificare le seguenti forme:

$$\{001\}, \{010\}, \{110\}, \{\bar{2}01\}.$$

Le inclusioni sono frequenti: tra esse predominano quelle vetrose, sia di forma rotondeggiante, sia a clava od a bastoncello. Il vetro è, di solito, incolore o gialliccio; raramente verdastro. In un cristallo osservai nel suo centro un cumulo di inclusioni vetrose così da simularne un nucleo centrale, ed in un altro un'inclusione sferica a zone concentriche ed alternanti incolori e gialle. Tra le inclusioni minerali notansi scarsi aghetti di *apatite* e qualche cristallo ben idiomorfo di *zircone*. Infine in un cristallo osservai un aggregato ventagliforme di *muscovite* di origine secondaria.

Il sanidino presenta la solita estinzione di 5-7° rispetto alle tracce di sfaldatura secondo $\{001\}$ sulla faccia $\{010\}$. Solo qualche raro cristallo ne ha una di 9-10°, ciò che fa supporre trattarsi di sanidino baritico. I singoli cristalli sono raramente geminati secondo la legge di Carlsbad.

I *feldspati calco-sodici* sono abbastanza frequenti: si presentano inalterati e con un grado di idiomorfismo superiore a quello del sanidino; sono quasi tutti geminati secondo la legge dell'albite, sola o combinata a quella di Carlsbad. In un unico individuo notai un geminato secondo la legge del periclino, unita a quella dell'albite. I singoli cristalli sono, per lo più, tabulari e contengono spesso inclusioni di vetro giallastro, aghetti di *apatite* e qualche raro cristallino di *zircone*.

Quanto alla loro determinazione, il valore dell'estinzione rispetto alla zona simmetrica è:

+ 15° . . . . $Ab_{68}\,An_{32}$ oligoclasio
+ 16° . . . . $Ab_{66}\,An_{34}$ »
+ 19° . . . . $Ab_{61}\,An_{39}$ andesina
+ 21° . . . . $Ab_{60}\,An_{40}$ »
+ 23° . . . . $Ab_{57}\,An_{43}$ »
+ 24° . . . . $Ab_{55}\,An_{45}$ »
+ 33° . . . . $Ab_{41}\,An_{59}$ labradorite
+ 37° . . . . $Ab_{35}\,An_{65}$ »

L'angolo ω nei geminati di Carlsbad è:

66°	$Ab_{75} An_{25}$	oligoclasio
75°	$Ab_{65} An_{35}$	andesina
78°	$Ab_{62} An_{38}$	»
79°	$Ab_{61} An_{39}$	»
80°	$Ab_{60} An_{40}$	»
87°	$Ab_{53} An_{47}$	»
100°	$Ab_{43} An_{57}$	labradorite
107°	$Ab_{38} An_{62}$	»

Trattasi quindi di *andesina* predominante, con poco *oligoclasio* e più frequente *labradorite.*

Il *quarzo* si presenta anch'esso idiomorfo ma in minor grado del sanidino; esso si osserva anche in granuli ed in frammenti irregolari a spigoli vivi. Cristallograficamente il quarzo presenta il prisma esagonale ed i due romboedri coniugati; talvolta il prisma manca, ed allora abbiamo i due romboedri soli, che dànno ai cristalli l'aspetto di bipiramidi esagonali.

I singoli cristalli si presentano di solito attraversati da numerose fratture e mostrano abbondanti inclusioni vetrose, gassose e liquide; queste ultime assumono spesso una forma simile a quella del minerale includente, e non di rado possiedono delle libelle gassose mobili. Intorno a qualche cristallo si notano degli aloni di minuti granuli di quarzo. Non di rado, e specialmente nei cristalli più grandi, si nota un'estinzione ondulata.

I minerali femici non sono rappresentati se non dalla *biotite* che si trova in lamine nettamente esagonali di segregazione intratellurica e sempre pleocroica con

$\mathfrak{a}$ = giallo bruno chiaro

$\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ = giallo bruno scuro.

Le lamine biotitiche sono di solito tozze e mostrano non rare inclusioni di *magnetite* ed *apatite.* La biotite è di frequente alterata, e tale alterazione è, in certi tratti della roccia, così avanzata che il minerale è totalmente trasformato in prodotti ferruginosi; talvolta si osserva qualche brandello di minerale intatto tra i prodotti di alterazione che si diffondono anche nella massa fondamentale.

L'esame dell'orientazione degli assi ottici ha dimostrato che la biotite è in parte *merosseno* ed in parte *anomite*, e senza che si possa osservare una speciale distribuzione delle due varietà.

Minerali accessorii, e sempre presenti con maggior o minor frequenza, sono: l'*apatite* idiomorfa in prismi aghiformi, che si trova inclusa tanto nei varii minerali di segregazione posteriore quanto nella massa fondamentale; lo *zircone*, idiomorfo anche esso; ed infine, rara, la *magnetite.*

L'esame chimico di questo tipo di roccia, che, seguendo il Rosenbusch, è una *liparite microfelsitica*, ha dato:

SiO_2	71,08
TiO_2	traccie
Al_2O_3	14,46
Fe_2O_3	2,26
FeO	0,94
MgO	0,17
CaO	2,04
Na_2O	2,19
K_2O	6,97
P_2O_5	0,78
SO_3	0,74
H_2O a 110°	0,16
Totale	101,79

formula magmatica secondo Osann: S77 , 9A7 , 3C2 , 1F3 , 3K1 , 5;
valori di proiezione: $s_{77,9}$, $a_{11,5}$, $c_{3,3}$, $f_{5,2}$, $n_{3,3}$;
formula magmatica secondo Loewingson-Lessing:

$$1,5\overline{RO}\cdot R_2O_3\cdot 7,19SiO_2;\ R_2O:RO = 1:0,49;\ Na_2O:K_2O = 1:2,01;$$
$$\alpha = 3,55;\ \beta = 28,4.$$

Un tipo un po' differente, e che forma il passaggio tra la varietà testè descritta e quella a massa fondamentale nera, si rinviene per breve tratto lungo la strada che da Canale va alla frazione di Quadroni. Ad occhio nudo la massa fondamentale appare grigiastra e di lucentezza vitrea; al microscopio essa si mostra costituita da vetro incolore, qua e là chiazzato di bruno; in essa si notano microliti feldspatici riferibili al sanidino.

Tra i fenocristalli compaiono tutti i minerali precedentemente descritti, più taluni cristalli di un *pirosseno trimetrico* facilmente identificabile come *iperstene*. I cristalli sono allungati secondo l'asse c e presentano un'estinzione retta rispetto all'allungamento ed un pleocroismo abbastanza marcato con

$\mathfrak{a}$ = bruno rossiccio tendente al violaceo
$\mathfrak{b}$ = giallo bruno
$\mathfrak{c}$ = verde

Le forme cristallografiche più frequenti sono:

$$\{100\}\ \{010\}\ \{110\}\ \{hkl\}$$

L'iperstene è ben idiomorfo e di segregazione contemporanea alla biotite.

La varietà a pasta fondamentale nera occupa la vetta del M.te Calvario e la parte superiore dei suoi fianchi orientali.

Al microscopio si osserva la pasta fondamentale vetrosa, di colore bruno oscuro e percorsa da numerose fratture perlitiche che spesso includono dei fenocristalli costituiti da *sanidino*, *feldspati calco-sodici*, *quarzo*, *biotite*, *iperstene*, più un *pirosseno monoclino*.

Il *sanidino* è un po' meno frequente che non nella varietà a massa fondamentale bianca, mentre che all'incontro sono più comuni i feldspati calco-sodici con abito cristallografico allungato, che si possono, dati i loro caratteri ottici, riferire in maggior quantità ad un'*andesina basica* ed in minor quantità alla *labradorite*; manca l'*oligoclasio*.

Il *quarzo* è meno comune che non nella varietà bianca ed è sempre ben idiomorfo.

Tra i minerali colorati la *biotite* è la più scarsa, e predominano invece i *pirosseni*: quello monoclino è di colore verde bottiglia senza sensibile pleocroismo e mostra, rispetto all'asse c, un'estinzione di 35–40°, così da farlo ascrivere all'*augite*. Questa si trova ben idiomorfa, ma non nello stesso grado che l'iperstene, si che essa devesi ritenere di segregazione posteriore. Le inclusioni dell'augite sono rare e constano principalmente di magnetite e di scarsa apatite. Le forme cristallografiche più frequenti sono:

$$\{100\}\ \{010\}\ \{001\}\ \{110\}$$

L'iperstene, che presenta i caratteri già notati, si osserva pure in piccoli microliti nella massa fondamentale.

Minerali accessorii sono l'*apatite*, lo *zircone*, e la *magnetite*; quest'ultima è più frequente che non nella varietà bianca.

L'analisi chimica di questa roccia ha dato:

SiO_2	71,10
TiO_2	tracce
Al_2O_3	13,82
Fe_2O_3	1,84
FeO	1,84
MgO	0,70
CaO	3,52
Na_2O	1,76
K_2O	5,31
P_2O_5	0,53
H_2O a 110°	1,22
H_2O + 110°	1,12
Totale	101,76

formula magmatica secondo Ossan: S77 , 9A5 , 4C3 , 6F4 , 1K1 , 8;

falori di proiezione: $s_{77,9}$, $a_{8,2}$, $c_{5,5}$, $f_{6,3}$, $n_{3,5}$;

vormula magmatica secondo Loewingson-Lessing:

$1,35\overline{RO}\cdot R_2O_3\cdot 8,02SiO_2$; $R_2O:RO = 1:1,15$; $Na_2O:K_2O:K_2O = 1:1,56$;

$$\alpha = 3,68\ ,\ \beta = 29,0\ .$$

Tutte e due le rocce contengono degli inclusi omeogeni a rapporto mediato e delle segregazioni minerali; queste ultime sono costituite principalmente da aggregati di minerali femici con feldspati calco-sodici ed elementi accessorii di primissima cristallizzazione.

Le segregazioni più frequenti nella roccia a pasta bianca sono costituite da feldspati calco-sodici appartenenti alla *labradorite*, che sono tanto idiomorfi quanto allo-

triomorfi e sempre geminati secondo la legge dell'albite, e di grosse e tozze lamine di biotite pleocroica e magnetite in plaghe più o meno grandi.

Tanto i feldspati quanto la biotite contengono abbondanti inclusioni irregolari di vetro gialliccio ed aghetti di *apatite*. Nella varietà a pasta nera e nei tipi di passaggio, al posto della biotite subentrano principalmente l'*iperstene* e l'*augite*. In queste ultime segregazioni si osserva spesso una struttura intersertale, dove l'impalcatura è data dai cristalli d'iperstene che raggiungono notevoli dimensioni ed hanno un pleocroismo che va fino al violaceo spiccato.

I feldspati sono dello stesso tipo che nelle segregazioni precedentemente descritte; hanno però un idiomorfismo meno marcato; non mancano, sempre però subordinatamente, delle piccole lamine di *biotite* e qualche granulo di *zircone*.

Gl'inclusi omeogeni a rapporto mediato sono rappresentati da un gran numero di frammenti lavici di tipo trachi-andesitico che assumono dimensioni diversissime varianti da granuli microscopici sino a dei blocchi del diametro di 50 e più cm.; questi inclusi, che menomano notevolmente il valore tecnico della liparite, vengono chiamati localmente « sassi morti », donde il Brocchi (3) trasse il nome di « necroliti ».

Gl'inclusi sono di colore grigio ed hanno una struttura macroscopica vacuolare; nelle cavità si rinvengono spesso esili aghi di *breislakite*; in quasi tutti si osservano dei grossi cristalli di sanidino che raggiungono talvolta una lunghezza massima di 2-3 cm. I cristalli sono di solito a spigoli vivi ma talvolta si presentano arrotondati così da trarre in inganno alcuni osservatori che li scambiarono per della leucite.

Al microscopio si osserva una massa fondamentale costituita da microliti feldspatici. Le misurazioni eseguite hanno dato i seguenti risultati:

Estinzione su (010):

— 8°	$Ab_{61} An_{39}$	andesina
— 13°	$Ab_{55} An_{45}$	»
— 22°	$Ab_{42} An_{58}$	labradorite
— 23°	$Ab_{40} An_{60}$	»
— 24°	$Ab_{37} An_{63}$	»
— 32°	$Ab_{15} An_{85}$	anortite

Estinzione su (001):

— 3°	$Ab_{56} An_{44}$	andesina
— 7°	$Ab_{44} An_{56}$	labradorite
— 10°	$Ab_{27} An_{73}$	»
— 12°	$Ab_{25} An_{75}$	»
— 24°	$Ab_{14} An_{86}$	anortite
— 27°	$Ab_{10} An_{90}$	»

Trattasi perciò di *labradorite* basica (predominante), scarsa *andesina* ed *anortite*. I microliti sono di solito individui semplici e solo raramente si osservano dei geminati di Carlsbad.

Tra gli spazi lasciati liberi dai microliti si osserva del vetro incoloro.

Le segregazioni di primo tempo, se si fa eccezione per i grossi cristalli di sanidino già menzionati, sono scarse. Raramente si osserva qualche feldspato calco-sodico

geminato secondo la legge dell'albite e riferibile, per i suoi caratteri ottici, principalmente alla *labradorite* ed in molto minor quantità alla *bytownite* ed all'*anortite*.

Tra gli elementi femici il più frequente è l'*iperstene* con le solite forme cristallografiche; più scarsa è l'*augite* e rara la *biotite* che si rinviene solo qua e là in piccole lamine.

I cristalli di segregazione intratellurica devono esser stati in gran parte riassorbiti; infatti molti di essi presentano notevoli corrosioni. Come elementi secondarii si notano: granuli di *magnetite* frequenti, rari cristalli di *apatite* e di *zircone*.

La zona di contatto tra gl'inclusi e la liparite non presenta nessuna alterazione, tranne un piccolo bordo di sostanza limonitica largo da 2 a 3 mm. e dovuto al fatto che tra le due rocce esiste una specie d'interstizio dove l'acqua si può raccogliere ed agire sopra di esse.

Gl'inclusi trachi-andesitici presentano pur essi delle segregazioni che sono analoghe a quelle che si trovano nella liparite a base fondamentale nera. Sono cioè costituite da *iperstene*, *augite*, *magnetite* e rara *biotite*, con feldspati calco-sodici, tanto idio- quanto allotriomorfi e riferibili alla *labradorite* ed alla *bytownite*.

L'analisi chimica, eseguita su di un incluso proveniente dalla cava del Sassone ha dato:

SiO_2	57,76
TiO_2	0,23
Al_2O_3	18,40
Fe_2O_3	1,18
FeO	4,06
MgO	1,16
CaO	9,78
Na_2O	3,21
K_2O	4,97
P_2O_5	0,22
H_2O a 110°	0,16
Totale	101,13

formula magmatica secondo Osann: S62 , 5A6 , 8C5 , OF13 , 9M6 , 3KO , 9;

valori di proiezione: $s_{62,5}$, $a_{5,3}$, $c_{3,9}$, $f_{10,8}$, $n_{5,0}$;

formula magmatica secondo Loewingson-Lessing:

$$1,94\overline{RO} \cdot R_2O_3 \cdot 5,11SiO_2 \; ; \; R_2O : RO = 1:2,49 \; ; \; Na_2O : K_2O = 1:1,02 \; ;$$

$$\alpha = 2,10 \; , \; \beta = 57 \; .$$

Dall'analisi chimica e dall'esame microscopico gl'inclusi risultano essere del tipo della *trachite-andesitica augitica iperstenica*.

Tanto la liparite quanto i suoi inclusi sono in alcune plaghe profondamente alterati, con formazione di abbondanti prodotti secondarii. Due sono le cause di queste alterazioni: e cioè gli agenti atmosferici e le emanazioni post-vulcaniche costituite principalmente da H_2S ed SO_2.

Gli agenti atmosferici agiscono in maniera da alterare principalmente gli elementi ferro-magnesiaci; i prodotti da essi derivati (materiali ferruginosi) si diffon-

dono nella massa fondamentale e si insinuano lungo i clivaggi, così da mettere questi ultimi ben in evidenza. Se, come accade di sovente, i cristalli degli elementi colorati sono disposti in maniera da imitare in grande la struttura fluidale, allora questa viene ancor meglio posta in evidenza dall'alterazione di tali elementi.

La pasta fondamentale si decompone, così che i fenocristalli feldspatici e quarzosi cadono dalla roccia dando ad essa una struttura alveolare (9,11).

Nella roccia a pasta fondamentale nera, l'andamento del fenomeno è un po' diverso: la pasta fondamentale assume un colore rosso mattone ed i fenocristalli non cadono dalla roccia.

Al microscopio si notano, nella roccia alterata, frequenti veli limonitici che rendono poco visibile la struttura originaria di essa; alterazione parziale, e talvolta totale, dei minerali colorati, in prodotti ferruginosi ed intorbidamento dei feldspati.

Ad uno speciale processo di alterazione soggiace la liparite, là dove il terreno vegetale è molto potente, e ricco di acidi umici. Quivi la roccia si altera in modo da trasformarsi in una massa terrosa che mantiene ancora la struttura microscopica originaria.

I fenocristalli si osservano ancora, ma non più vitrei bensì argillosi e friabili. Tale tipo di alterazione si osserva presso la Fontaccia, dove il materiale così ridotto viene escavato ed usato come materiale idraulico, a somiglianza della pozzolana.

Al microscopio non si osserva se non una massa torbida, con azione incerta sulla luce polarizzata, e sparsi qua e là si notano piccoli frammenti irregolari di materiale ancora inalterato.

Un'analisi chimica di questo materiale, proveniente dalla varietà a pasta fondamentale bianca, ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	70,56
TiO_2	traccie
Al_2O_3	17,47
Fe_2O_3	1,06
FeO	1,50
MgO	0,97
CaO	2,57
Na_2O	1,69
K_2O	4,25
P_2O_5	0,31
H_2O a 110°	0,18
H_2O + 110°	0,42
SO_3	0,30
Totale	101,27

Come si vede, confrontando questi risultati con quelli ottenuti dall'esame della roccia inalterata, si ha una perdita abbastanza alta negli alcali, ed un acquisto di Al_2O_3, mentre che gli altri elementi subiscono solo piccole modificazioni. La roccia, oltre che alterata, è anche disgregata. Ma quello che è più importante è la presenza di SiO_2 solubile, che manca totalmente nella roccia fresca; è ad essa che si deve l'attività idraulica del materiale alterato.

Il secondo processo di alterazione è dovuto a delle emanazioni solforose di origine post-vulcanica che si trovano principalmente nel « Fosso Lupo » e più a valle

nella « Conca del Biscione » dove sono più copiose, e sgorgano in bacini ripieni di acqua di temperatura variante, a seconda delle stagioni, da 12 a 20° centigradi. Le emanazioni gassose sono costituite da H_2S ed SO_2, le quali, reagendo tra di loro e con l'ossigeno dell'aria, hanno dato luogo a depositi di solfo e ad acido solforico che ha intaccato la roccia.

I depositi di solfo che ancora oggi si formano vennero nei tempi passati escavati (12) mediante gallerie.

La roccia alterata si è scolorita, e là, dove l'alterazione è completa, essa è bianca e farinosa così che il Tittoni la scambiò per tufi trachitici, e come tale la segnò nella sua carta geologica.

Tra la roccia fresca e quella alterata si notano tutti gli stadii di passaggio.

L'alterazione comincia ad intaccare la pasta fondamentale che diviene torbida e che solo qua e là lascia trasparire la struttura microfelsitica. La biotite si trasforma in prodotti limonitici, che si diffondono nella roccia dando così ad essa un colore rossastro.

Il sanidino rimane, in questo primo stadio, inalterato mentre che i feldspati calcosodici si trasformano in sostanza opaca, con azione incerta a nicols incrociati; tale sostanza si forma in principio lungo i piani di contatto dei geminati e lungo i piani di sfaldatura.

In uno stadio successivo tutta la massa fondamentale diviene opaca e per asportazione di alcune parti di essa, assume un aspetto vacuolare. I feldspati sono totalmente alterati, salvo qualche plaga nell'interno dei cristalli. L'unico elemento inalterato è il quarzo. Un'analisi chimica, eseguita sul materiale più alterato, mi ha dato il seguente risultato:

SiO_2	80,83
TiO_2	traccie
Al_2O_3	6,67
Fe_2O_3	0,88
FeO	1,90
MgO	0,24
CaO	1,56
Na_2O	0,68
K_2O	5,34
H_2Oa 110°	0,15
H_2O + 110°	0,35
SO_3	2,66
P_2O_5	0,28
Totale	101,54

Dai risultati esposti si osserva una notevole diminuzione di Al_2O_3 e di Fe_2O_3 ed una, minore, degli alcali, mentre al contrario cresce il tenore del silice. Il prodotto di alterazione tende verso una sabbia silicea.

La forte diminuzione di Al_2O_3 e Fe_2O_3, e quella di K_2O, si spiegano con la formazione di allumogeno e di solfato di ferro, prodotti che, essendo solubili vengono asportati dalle acque. Infatti si osserva, specialmente durante i periodi di siccità, la formazione di allumogeno sulle pareti rocciose, e le acque del « Fosso Lupo » contengono Al_2O_3; Fe_2O ed SO_3 in quantità notevole.

Ho riscontrato la presenza, nella roccia alterata, di Al_2O_3 e FeO solubili in H_2O, in ragione di

Al_2O_3 . . . . 0,66 %
FeO . . . . 0,57 %

In complesso l'alterazione, prodotta dalle emanazioni post-vulcaniche, ha disgregato gli edifizi molecolari che costituivano gli elementi minerali della roccia, con formazione di solfati di Al_2O_3, FeO e K_2O che vennero asportati dalle acque, arricchendo nel contempo il prodotto d'alterazione di quelle sostanze che non entrano in combinazione, o che costituiscono composti insolubili in acqua.

Nella « Conca del Biscione » vi sono alcune brevi gallerie abbandonate che la credenza popolare vuole attribuire a delle antiche miniere d'argento: infatti la località viene detta « Cava dell'argento », nome e credenza derivati dal rinvenimento di noduli di *marcasite* di formazione secondaria, analoga a quella descritta per Castelnuovo di Porto dal Sirovich (25).

Se confrontiamo le rocce testè descritte con quelle già note e studiate della regione limitrofa, non abbiamo, a dir vero, una grande quantità di materiale di confronto, dato che non è grande il numero delle rocce analizzate.

Riguardo alla composizione mineralogica, la liparite microfelsitica è quasi identica a quella della liparite della Montagnola presso Civitavecchia (8), salvo che in quest'ultima i feldspati calco-sodici sono più acidi (prevalentemente andesina). Dal punto di vista chimico la liparite del M.te Calvario ha un maggior tenore in CaO, in ferro, ed il rapporto tra gli alcali è abbastanza diverso e si avvicina a quello di quel tipo di trachiti andesitiche, dette dall'Washington « toscaniti », alle quali appartiene la varietà a pasta fondamentale nera, che contiene l'iperstene associato alla biotite ed ha feldspati calco-sodici più basici della liparite e minor quantità di quarzo. Essa è un termine tra i più acidi tra le « toscaniti » che, contenendo quarzo, si potrebbero chiamare *toscaniti quarzifere.* La « toscanite » è posteriore alla liparite ed indica un'evoluzione del magma verso tipi più basici.

Per facilitare il confronto, riporto qui sotto le analisi eseguite e quelle già esistenti [1]:

[1] I numeri, che sono gli stessi anche per le proiezioni secondo l'Osann, indicano:

1) liparite microfelsitica-Cava del Sassone; Cumin anal.
2) toscanite quarzifera-Vigna Bucci (Quadroni); Cumin anal.
3) toscanite M. S. Vito (Bracciano); Washington anal. (27).
4) toscanite M. S. Vito (Bracciano; Röhrig anal. (24).
5) toscanite M. Cucco (Cerveteri), Washington anal. (22).
6) toscanite paese della Tolfa; Washington anal.
7) liparite Montagnola presso Civitavecchia; Cumin anal. (8).
8) toscanite Tolfa; von Rath; anal. (22).
9) trachite andesitica, cava del Sassone; Cumin anal.
10) Media delle sette seguenti ciminiti:

Fontana Fiesole-Viterbo; Washington anal.
Mont'Alfina - Bolsena; Ricciardi anal. in Klein (14).
Sassara - Bolsena; Ricciardi anal. in Klein (14)l
Monte Rado - Bolsena; Ricciardi anal. in Klein (14).
Radicofani - Bolsena; Ricciardi anal. in Klein (14).
Radicovani - Bolsena; Ricciardi anal. in Mercalli (16).
Radicofani - Bolsena; Ricciardi anal. in Mercalli (16).

	1	2	3	4	5	6	7	8
SiO_2	71,08	71,10	64,57	64,04	66,24	65,19	76,41	67,61
TiO_2	traccie	traccie	—	0,28	—	—	traccie	—
Al_2O_3	14,46	13,82	16,80	14,48	15,64	16,04	13,94	14,04
Fe_2O_3	2 26	1,84	0,97	1,73	1,16	1,16	—	—
FeO	0,94	1,84	3,02	4,35	2,19	2,48	1,01	5,40
MgO	0,17	0,70	1,69	1,03	0,89	0,99	0,25	0,65
CaO	2,04	3,52	3,53	4,00	2,17	2,92	0,66	3,71
NaO_2	2,19	1,76	3,81	4,14	2,05	2,26	0,56	5,50
K_2O	6,97	5,31	4,01	3,65	6,60	6,11	6,89	2,41
P_2O_5	0,78	0,53	—	—	—	—	—	—
SO_3	0,74	—	—	—	—	—	—	—
H_2O a 110°	0,16	0,22	1,28	2,06	3,25	1,85	0,16	2,28
$H_2O + 110°$	—	1,12					—	
Totale	101,79	101,76	99,66	99,76	100,29	99,00	99,93	101,60
P. spec.	—	—	2,542	2,542	2,455	—	2,53	—

Formule magmatiche e valori di proiezioni secondo Osann.

	S	A	C	F	T	K	s	a	c	f	n
1	77,9	7,3	2,1	3,3	0	1,5	77,9	11,5	3,3	5,2	3,3
2	77,9	5,4	3,6	4,1	0	1,8	77,9	8,2	5,5	6,3	3,5
3	72,1	7,2	3,9	6,6	0,1	1,3	72,1	8,1	4,4	7,5	5,8
4	71,4	7,0	2,5	8,5	0	1,3	71,4	7,8	2,8	9,4	6,4
5	75,2	7,1	2 7	4,5	0,7	1,4	75,2	9,9	3,8	6,3	3,3
6	74,3	6,8	3,6	4,9	0	1,3	74,3	8,9	4,7	6,4	3,8
7	83,5	5,4	0,6	1,3	3,0	2,1	83,5	14,8	1,7	3,5	1,2
8	73,3	7,5	1,5	8,7	0	1,1	73,3	8,5	1,7	9,8	7,7

Formule magmatiche seoondo Loewingson-Lessing:

1) $1{,}05\overline{RO} \cdot R_2O_3 \cdot 7{,}19SiO_2$; $R_2O : RO = 1 : 0{,}49$; $Na_2O : K_2O = 1 : 2{,}01$; $\alpha = 3{,}55$; $\beta = 28{,}4$
2) $1{,}35\overline{RO} \cdot R_2O_3 \cdot 8{,}02SiO_2$; $R_2O : RO = 1 : 1{,}15$; $Na_2O : K_2O = 1 : 1{,}56$; $\alpha = 3{,}68$; $\beta = 29{,}0$
3) $1{,}49\overline{RO} \cdot R_2O_3 \cdot 6{,}31SiO_2$; $R_2O : RO = 1 : 1{,}40$; $Na_2O : K_2O = 1 : 0{,}70$; $\alpha = 2{,}80$; $\beta = 39{,}0$
4) $1{,}65\overline{RO} \cdot R_2O_3 \cdot 6{,}84SiO_2$; $R_2O : RO = 1 : 1{,}56$; $Na_2O : K_2O = 1 : 0{,}50$; $\alpha = 2{,}95$; $\beta = 39{,}0$
5) $1{,}10\overline{RO} \cdot R_2O_3 \cdot 6{,}30SiO_2$: $R_2O : RO = 1 : 0{,}89$; $Na_2O : K_2O = 1 : 2{,}06$; $\alpha = 3{,}12$; $\beta = 33{,}0$
6) $1{,}30\overline{RO} \cdot R_2O_3 \cdot 6{,}58SiO_2$; $R_2O : RO = 1 : 1{,}07$; $Na_2O : K_2O = 1 : 1{,}74$; $\alpha = 3{,}06$; $\beta = 35{,}0$.

Differenti dalle due rocce che costituiscono la massa del Monte Calvario sono gli inclusi. Trattasi di trachiti andesitiche che sono intermedie tra le ciminiti e le vulsiniti dell'Washington, avendo dei caratteri chimici di ambedue, e mineralogici che si avvicinano alle vulsiniti. È questo un tipo che non si è sinora riscontrato nei monti del Sasso e della Tolfa, seppure qualcuno dei campioni descritti dal Riva (23) sembra avvicinarsi ad esso. Gli inclusi ci dànno la possibilità di constatare uno stadio anteriore del magma che si dimostra più basico dei prodotti posteriori.

Riporto qui sotto l'analisi, già citata, di un incluso e la media di sette analisi di ciminiti e di vulsiniti [1]:

[1] Media delle seguenti vulsiniti:
Bolsena ; Washington anal. (27).
Vetralla ; Washington anal. (27).
S. Magno-Latera Ricciardi in Klein (14).
Torre Alfina Ricciardi in Klein (14).
M. S. Croce-Roccamonfina; Wäshington anal. (27).

	9	10	11
SiO_2	57,78	55,50	59,38
TiO_2	0,23	—	—
Al_2O_3	18,40	16,44	17,98
Fe_2O_3	1,18	2,70	2,19
FeO	4,06	6,17	4,01
MgO	1,16	3,96	1,62
CaO	9,78	6,94	5,23
Na_2O	3,21	1,85	2,36
K_2O	4,97	3,84	5,76
P_2O_5	0,22	—	—
H_2O a 110°	0,16	1,70	1,17
K_2O + 110°	—		
Totale	101.13	99,10	99,70
Peso specif.	—	—	—

Formule e valori di proiezione secondo Osann:

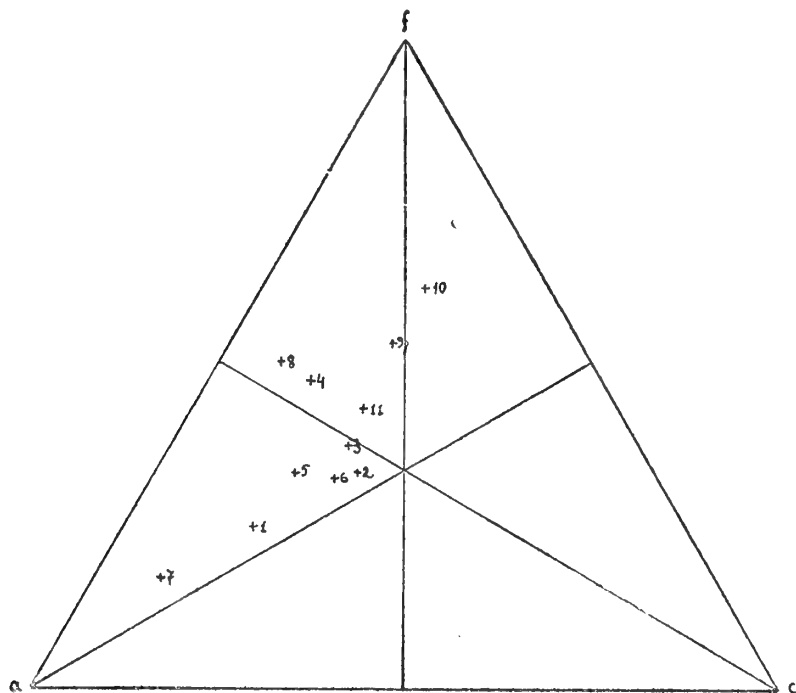
	Formula magmatica					Valori di proiezione				
	S	A	C	F	K	s	a	c	f	n
9	62,5	6,8	5,0	13,9	0,9	62 5	5,3	3,9	10,8	5,0
10	61,7	4,7	5,9	17,1	1,08	61,7	3,4	4,3	12,3	4,3
11	66,5	6,9	5,0	9,7	1,09	66,5	6,4	4,6	9,0	3,9

Formule magmatiche secondo Loencingson-Lessing:

9) $1{,}94\overline{RO} \cdot R_2O_3\, 5{,}11SiO_2 ; R_2O : RO = 1 : 2{,}49 ; Na_2O : K_2O = 1 : 1{,}02 ; \alpha = 2{,}10 ; \beta = 57$

10) $2{,}12\overline{RO} \cdot R_2O_3\, 5{,}18SiO_2 ; R_2O : RO = 1 : 4{,}39 : Na_2O : K_2O = 1 : 1{,}37 ; \alpha = 1{,}96 ; \beta = 99$

11) $1{,}52\overline{RO} \cdot R_2O_3\, 5{,}19SiO_2 ; R_2O : RO = 1 : 1{,}92 ; Na_2O : K_2O = 1 : 1{,}65 ; \alpha = 2{,}27 ; \beta = 49.$

Diagramma di proiezione secondo Osann.

I prodotti eruttivi posteriori che hanno in parte ricoperto il Monte Calvario, provengono sia dalla bocca centrale, sia dagli apparecchi avventizi dei vulcani Sabatini e sono costituiti da tufi litoidi, semi-litoidi e terrosi, tra i quali appaiono brevi colate laviche. Oltre ai materiali autoctoni, si osservano, ai piedi della massa del M.te Calvario, dei tufi di deposito secondario, provenienti dalle pendici superiori del monte.

Il complesso dei tufi è identico a quello che si osserva a sud del paese di Manziana, da me già descritto in altra nota (10).

Dall'alto in basso troviamo un banco di tufo giallo-bruno semilitoide ricco di inclusi leucitici, leucotefritici e calcarei più o meno metamorfosati; esso contiene qua e là dei nidi di pozzolana ed è potente in media dai 10 ai 15 metri.

A questo tufo segue un gruppo di straterelli di tufi argillosi, grosso nel suo totale dai due ai tre metri; in esso si nota per la sua costanza un banco di caolino di mezzo metro di spessore circa.

Sotto ai tufi argillosi giace un tufo litoide, compatto grigiastro e con inclusi lavici e calcarei molto più minuti di quelli che si osservano nel tufo semi-litoide. Il

tufo litoide affiora nel fondo dei fossi che scendono verso i Monti del Sasso e ne costituisce le pareti strapiombanti.

I tufi di giacitura secondaria, che si notano presso la massa eruttiva del Monte Calvario, sono tutti dei tufi terrosi ed argillosi.

Tra i varii tufi si notano alcune colate laviche, che non sono tanto numerose quanto lo dimostra la carta pubblicata dal Tittoni, dove si trovano segnate due colate, che in realtà non esistono, e cioè quella presso il Casale De-Angelis di fronte alle cave del Sassone e quella posta lungo la carrereccia che congiunge la rotabile Manziana-Oriolo con quella Canale-Monte Virginio. In tutti e due i casi si tratta di grossi inclusi lavici, che, sparsi sul pendìo, imitano l'aspetto di colate; se però si osserva più dettagliatamente, si vede che i singoli blocchi sono differenti uno dall'altro, sia per il loro colore, sia per la diversa frequenza dei fenocristalli; per di più si notano dei grossi blocchi, sino 2-3 m^3 inclusi nel tufo e che da lontano sembrano costituire degli spuntoni di corrente lavica.

La grossezza di questi inclusi fa supporre l'esistenza, nelle vicinanze, di una bocca avventizia dei Sabatini.

Le colate laviche che si trovano nei pressi della massa eruttiva del M.te Calvario sono tre, e precisamente: una presso il paese di Monte Virginio e le altre due nel fondo del Fosso delle Crete sotto la Madonna delle Salette; queste due ultime sono sovrapposte una all'altra. La colata di Monte Virginio è una *leucitite*, e così pure la colata inferiore del Fosso delle Crete, mentre che quella superiore è una *leucotefrite*.

Le due leucititi mostrano al microscopio una composizione mineralogica identica, pur differenziandosi per il diverso rapporto della fenocristalli e per lo stato di alterazione, più avanzato in quella delle Crete. Macroscopicamente la lava di Monte Virginio ha un colore grigio-oscuro e vi si osservano scarsi fenocristalli di *augite* e di *leucite*; quest'ultimo minerale è il più frequente, ciò che è tutto l'opposto in quella delle Crete, dove i fenocristalli augitici sono abbondanti e gli unici che vi si osservano; essi ci sono in tale numero che le parti della roccia esposte all'azione degli agenti atmosferici sono bitorzolute in seguito al loro emergere dalla massa fondamentale.

Osservate in sezione, le due rocce presentano la stessa struttura e cioè una massa fondamentale costituita da microliti di *augite* cristalli arrotondati di *leucite* e granuli di *magnetite*. In essa sparsi si osservano fenocristalli di augite e di leucite.

La *leucite* appare di tutti e due i tempi, e tanto in sezione di cristalli ben idiomorfi quanto in granuli e frammenti irregolari. La geminazione polisintetica è ben visibile nei fenocristalli, mentre che non si osserva nei cristalli del secondo tempo. Frequenti sono le inclusioni, disposte di solito senza regola, costituite principalmente da *augite*, *magnetite* e più raramente da frammenti vetrosi di varia forma, che talvolta assumono la sezione ottagonale del loro ospite. La leucite del primo tempo è molto più abbondante nella roccia di Monte Virginio che non in quella delle Crete, dove è torbida per incipiente alterazione.

L'*augite* è molto abbondante e presenta le solite forme cristallografiche; si notano di frequente in ambedue le rocce aggruppamenti di cristalli compenetrati. Spesso si osserva il nucleo più colorato del bordo e con una differenza d'estinzione, rispetto all'allungamento, di 5 sino a 10° in meno. Frequenti sono le inclusioni costituite da

magnetite, apatite e qualche rara lamella di *biotite*. Non di rado i fenocristalli presentano un pleocroismo abbastanza sensibile con

$\mathfrak{a}$ = giallo bruno chiaro
$\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ = giallo bruno oscuro

I microliti sono allungati secondo l'asse *c* e presentano gli stessi caratteri dei fenocristalli.

La *magnetite* idiomorfa ed in granuli è frequente; meno lo è *l'apatite* in aghetti e rara è la *biotite* che si osserva tanto inclusa quanto sparsa nella massa fondamentale, in piccole lamine pleocroiche.

Nella colata delle Crete si osserva pure, sebbene molto scarsa, l'*olivina* in granuli del secondo tempo.

La leucitite di Monte Virginio è inalterata mentre lo è abbastanza quella delle Crete la cui massa fondamentale è torbida e la magnetite è spesso alterata in limonite.

La leucotefrite del Fosso delle Crete è separata dalla leucitite, che è ad essa sottostante, da un banco di tufo terroso potente dai due ai tre metri. Essa è grigio-oscura, inalterata e ad occhio nudo si osservano abbondanti fenocristalli di *leucite* e scarsi di *augite*. Del resto essa è identica, per struttura e composizione mineralogica, alle leucititi, salvo che nella massa fondamentale si notano frequenti microliti di feldspati calco-sodici in forma di bastoncelli, mai geminati. Le misure di estinzione mi hanno dato:

su (001)

— 2°	$Ab_{58}An_{42}$	andesina
— 5°	$Ab_{50}An_{50}$	labradorite
— 9°	$Ab_{40}An_{60}$	id.
— 11°	$Ab_{36}An_{64}$	id.
— 12°	$Ab_{34}An_{66}$	id.
— 14°	$Ab_{26}An_{74}$	bytownite

e su (010)

— 7°	$Ab_{61}An_{39}$	andesina
— 18°	$Ab_{46}An_{54}$	labradorite
— 23°	$Ab_{40}An_{60}$	id.
— 30°	$Ab_{21}An_{71}$	bytownite

Trattasi di *labradorite* predominante, con poca *andesina* basica e *bytownite*.

La leucite è vitrea, inalterata: non si può perciò far derivare i feldspati stessi dall'alterazione di questo minerale.

Nella leucotefrite manca l'olivina, ma è, sebbene rara, presente la *biotite*.

Rispetto alla posizione stratigrafica, devesi osservare che la leucitite delle Crete è la più antica, mentre che la più recente è quella di Monte Virginio.

In confronto alle altre lave dei vulcani Sabatini, le lave descritte, non differiscono per la loro composizione mineralogica e per la loro struttura da quelle già note e studiate da altri autori. (4, 10, 17, 27).

Tectonica e morfologia.

Il rapporto tra i varii terreni che affiorano nei dintorni del Monte Calvario non è molto complicato. La formazione eocenica, che costituisce l'ossatura profonda di tutta la regione, mostra gli strati inclinati di 26° verso sud-ovest e con direzione NO-SE. Sopra l'eocene ed in banchi orizzontali appaiono i depositi pliocenici, inferiormente costituiti dalle argille azzurre del piacenziano, potenti al massimo 100 metri, le quali sono ricoperte alla loro volta, e non sempre, dalle panchine o dai conglomerati. Questi sono costituiti, come già si disse, di elementi che variano di grandezza a seconda delle località, ed in alcuni tratti sono rimpiazzati da banchi di ciottoli sciolti, misti ad argilla, come per esempio dietro le cave del Sassone e presso la fornace di Quadroni; tali formazioni si devono ritenere sincrone a quelle che si rinvengono nei Monti del Sasso, per la loro posizione e per i pochi fossili che si trovano nelle panchine, esse devono venir riferite al piacenziano di *facies* litoranea.

Il contatto tra la massa eruttiva liparitica ed i conglomerati e le argille plioceniche non è ben visibile: in qualche tratto (così presso la fornace dell'Eremo, presso il Sassone ed altrove) essa appare sovrapposta ai sedimenti pliocenici; ma il contatto netto non è osservabile, essendo ricoperto da vegetazione. Vi sono però due fatti importanti, che avvalorano questa apparenza in modo decisivo.

Il primo fatto è la presenza di sorgenti lungo il contatto tra il pliocene, impermeabile, e la liparite, permeabile per fratture; queste sorgenti scaturiscono intorno alla massa eruttiva alla «Fontaccia», alla Madonna della Saletta, a Canale, a Quadroni ecc.; ciò non potrebbe avvenire, per ragioni troppo chiare, se la liparite fosse ricoperta dal pliocene, vale a dire fosse ad esso sottostante.

Il secondo fatto è l'assoluta mancanza di ciottoli liparitici, ed in genere vulcanici, nei conglomerati pliocenici, ciottoli che si dovrebbero trovare — ed abbondanti — se la massa eruttiva fosse di età anteriore.

Per questi fatti ritengo di età quaternaria la liparite. È noto che l'età di tutte le cosidette «manifestazioni trachitiche» della campagna Romana (Monti del Sasso e Tolfa) è stata, ed è ancora oggi, in parte discussa; da taluni studiosi essa è ritenuta e giustamente, quaternaria (8, 13, 15, 27) mentre che altri, e primo fra questi il Ponzi, la ritengono miocenica (16, 18, 20, 21, 22).

Tanto più erronea si dimostra l'idea del Ponzi, per il fatto ch'egli supponeva l'esistenza di un arcipelago costituito da rocce eoceniche ed eruttive mioceniche durante il pliocene, al posto della attuale Tuscia, ma che in realtà non era costituito se non da rocce eoceniche come lo dimostrano i componenti dei conglomerati.

È interessante notare il fatto, messo in luce dal rilevamento, che intorno al Monte Calvario si trovano degli spuntoni di liparite circondati tutto all'intorno dal pliocene; tali spuntoni, come si può ben vedere nell'annesso schizzo geologico, sono frequenti sul versante meridionale del monte, dove il mantello tufaceo è stato asportato. Sulla loro morfologia, che esclude trattarsi di frammenti di colate spezzate dall'erosione, riferirò più sotto.

I prodotti eruttivi dei Sabatini sono più recenti di tutti gli altri terreni già citati: essi poggiano tanto sulla liparite quanto sul pliocene e sull'eocene, a seconda che i terreni erano o no denudati dall'erosione.

Delle correnti laviche studiate, quella del Monte Virginio giace sul tufo semilitoide; la leucotefrite del Fosso delle Crete trovasi alla base di esso, mentre che la leucitite si trova racchiusa nel tufo litoide ed è perciò la più antica.

I diversi terreni, sia per essere stati più o meno a lungo sotto l'azione degli agenti atmosferici, sia per la loro diversa origine e consistenza hanno assunto un differente aspetto morfologico.

Dei terreni eocenici emergono le testate degli strati i cui detriti ingombrano il pendìo ripido e sterile; le argille plioceniche invece hanno un pendìo dolce, senza asprezza e che rassomiglia a quello che assumono i tufi terrosi. Le panchine ed i conglomerati formano, se abbastanza potenti, delle piccole pareti verticali, e cadono in blocchi che scendono sul pendìo argilloso ad essi sottostante.

La massa liparitica costituisce un rilievo aspro, con contorni rugosi, sparsi di blocchi grossi sino due o tre metri cubi e che assumono, per smussamento degli angoli, forme di sacco, come si osserva benissimo sul versante sud di Monte Calvario; i fianchi sono sempre ripidi, ed al contatto con il pliocene si nota una marcata rottura di pendìo. Gli spuntoni isolati hanno poi il caratteristico profilo conico, talvolta perfetto. Grande è la quantità di blocchi liparitici rotolati sui terreni sottostanti, anche a molta distanza dalla roccia in posto: così se ne osservano nella macchia della Manziana sotto la strada Manziana-Tolfa, e presso la fontana della Fontaccia. Tali blocchi sono forse crollati in seguito a movimenti tellurici e sono stati la causa che alcuni autori estendessero di più i limiti della massa eruttiva.

La liparite mostra una struttura cavernosa per la fuoruscita degli inclusi trachiandesitici e conseguente formazione di cavità che vengono allargate dagli agenti atmosferici; è questo un fenomeno analogo a quello descritto dal Dainelli per il Monte Amiata (11). Si osservano inoltre delle strutture alveolari dovute all'asportazione di fenocristalli feldspatici alterati dalla roccia.

I tufi terrosi costituiscono pendii dolci, tutti eguali, mentre che il tufo litoide e quello semilitoide formano talvolta delle pareti verticali; come per esempio nel Fosso Lupo sotto il paese di Canale dove sulle pareti, alte 10-50 metri, si osservano dei solchi erosivi dai 10 ai 30 metri sopra l'attuale letto del corso d'acqua e che dimostrano la rapidità con la quale agisce l'erosione in questi terreni friabili.

Le lave appaiono sui fianchi delle valli e ne coprono il pendìo con numerosi blocchi che da esse si staccano per mancanza di sostegno. Questo fenomeno è ben marcato nelle colate del Fosso delle Crete dove l'erosione del loro letto è viva, esercitata come è da un corso d'acqua; quivi i blocchi caduti sono sparsi a mo' di pecore pascolanti sul pendìo e sono visibili anche a grande distanza.

Conclusioni.

La manifestazione eruttiva del Monte Calvario è data da un magma acido, poco fluido e povero di gaz, che ha generato un ammasso lavico, non monogenico, ma complesso come si può arguire dal fatto che la base dell'ammasso è tipicamente liparitica, mentre che la parte superiore è toscanitica. Contemporaneamente all'ammasso principale si formarono delle cupole monogeniche molto più piccole e che si possono in certo qual modo paragonare ai coni avventizî degli strati-vulcani poligenici. Che queste cupole si siano formate tanto nella prima fase (liparitica) quanto nella seconda (toscanitica), lo dimostra il fatto che esse sono tanto liparitiche quanto toscanitiche.

La presenza degli inclusi vulsinitici ci lascia intravedere l'evoluzione del magma che da vulsinitico è divenuto liparitico, per volgere poi al toscanitico.

La manifestazione eruttiva presenta un carattere tale da non poter venir messa in rapporto, nè con i Monti del Sasso, nè son quelli della Tolfa, ma da costituire una manifestazione a sè.

L'età della manifestazione è riferibile al quaternario inferiore, cioè anteriormente alla formazione degli strati-vulcani complessi a magma leucitico, i prodotti dei quali coprirono un dì tutto il M.te Calvario, susseguentemente in parte denudato.

Gl'inclusi vulsinitici sono forse i più antichi prodotti eruttivi del Lazio; e sono probabilmente rocce ad essi coeve le trachiti-andesitiche che si rinvengono nelle ghiaie presso Boccea e descritte dal Clerici (6).

Bibliografia.

1) Abbate. — *Guida della provincia di Roma*, Roma 1896.

2) Breislak Sc. — *Saggi di osservazioni mineralogiche sulla Tolfa, Oriolo e Latera*, Roma 1786.

3) Brocchi G. B. — *Catalogo ragionato di una raccolta di rocce disposte con ordine geognostico per servire alla geognosia d'Italia*, Milano 1817.

4) Bucca L. — *Contribuzioni allo studio petrografico dell'Agro Sabatino e Cerite (prov. di Roma)* Boll. r. com. geol. d'It., vol. 27°, fasc. 5-6, Roma 1896.

5) Id. — *Gl'inclusi della trachite di Monte Virginio*. Boll. r. com. geol. d'It. vol. 27°, fas. 9-10, Roma 1896,

6) Clerici, in Boll. Soc. geol. it., Roma 1910.

7) Corsi. — *Delle pietre antiche*, Roma 1833.

8) Cumin G. — *La liparite della Montagnola presso Civitavecchia*. Rend. R. Acc. Linc., Cl. fis. nat., vol. 27°, ser. V, fasc. 5°, pp. 126-130, Roma 1918.

9) Id. — *Fenomeni d'erosione alveolare nelle rocce vulcaniche dei dintorni di Canale* (Lazio). Boll. R. Soc. geogr. it., Roma.

10) Id. — *Di due colate laviche dei dintorni di Manziana (Lazio)* Rend. Acc. Linc., vol. 31°, serie V, fasc. 3-4, pp. 43 e 47, Roma 1922.

11) Dainelli G. — *Di alcune forme di disfacimento nella trachite di Monte Amiata*, Riv. geogr. ital., Firenze 1910.

12) Demarchi L. — *I prodotti minerali della provincia di Roma*. Annali di agricoltura, Roma 1882.

13) De Stefani C. — *I vulcani spenti dell'Appennino settentrionale*. Boll. soc. geol., it., vol. X, fasc. 3°, pp. 443, Roma 1891.

14) Klein, in Neues Jahrb. für Min. u. Geol. ect. Beilage, Band VI. Stuttgart 1889.

15) Lotti., in Bollettino R. com. geol. d'Italia, Roma 1910.

16) Mantovani. — *Descrizione geologica della Càmpagna Romana*, Roma 1875.

17) Mercalli. — *Osservazioni petrografico geologiche sui Vulcani Cimini*, Rend. R. Istituto lombardo. Milano 188?.

18) Moderni P. — *Le bocche eruttive dei Vulcani Sabatini.* Boll. R. com. geol. d'It., vol. 27°, Roma 1896.

19) Pareto L. — *Osservazioni geologiche dal Monte Amiata a Roma.* Giornale arcadico, Roma. 1844.

20) Ponzi G. — *La Tuscia romana e la Tolfa.* Mem. R. Acc. Linc. Cl. fis. nat., vol. 1°, ser, III. Roma 1877.

21) Id. — *I monti della Tolfa e la regione circostante.* Boll. R. com. geol. d'It., vol. IX, fasc. 1–2, pp. 34–83, Roma 1878.

22) Id. — *I tufi vulcanici della Tuscia Romana. loro origine diffusione ed età.* Mem. R. Acc. Linc. Cl. fis. mat., vol. 9°, ser. II., Roma 1881.

23) Rath (von). — *Mineralogisch-geognostische Fragmente aus Italien–Zeitschr der deutschen Geol. Gesell.*, Berlin 1876–77.

24) Riva C. — *Osservazioni sulle trachiti–andesitiche della Tolfa.* Atti Soc. it. Sc. Nat., vol. 37°, fasc. 3, pp. 269–283, Milano 1898.

25) Rörrigh, in Journ. of. geol., vol. V, pp. 83, Chicago 1837.

26) Sirovich. — *La marcasite di Castelnuovo di Porto.* Rend. R. Acc. Linc., Cl. fis. mat., Roma 1912.

27) Tittoni T. — *La regione trachitica dell'agro Sabatino e Cerrite* Boll. Soc. geol. it., vol. 4°, pag. 337, Roma 1885.

28) Washington H. S. — *Italian petrological sketches II, III, and V.* The journ. of geology, vol. 5°, Chicago 1897.

29) Zambonini F. — *Wawellite di Manziana (provincia di Roma.)*, Rend. R. Acc. Linc., vol. II°, ser. V., fasc. 3°, Roma 1902.

Spiegazione della tavola.

N. 1. — Incluso omogeneo a rapporto immediato nella liparite ; labradorite idiomorfa ed iperstene allotriomorfo.

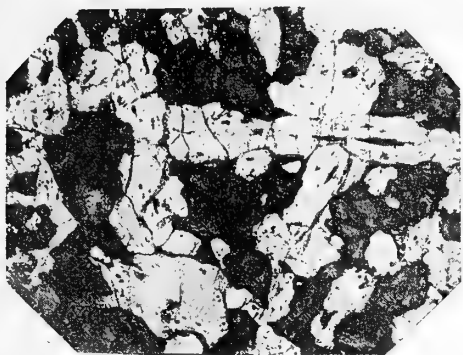
N. 2. — Liparite del Fosso Lupo, alterata per emanazioni solforose ; pasta fondamentale opaca, fenocristalli feldspatici inalterati.

N. 3. — Liparite della cava del Sassone.

N. 4. — Leucitite del Fosso delle Crete.

N. 5. — Toscanite quarzifera a pasta fondamentale perlitica (Vigna Bucci).

N. 6. — Incluso omeogeno a rapporto mediato nella liparite, trachi–andesite, della cava del Sassone.

Ingrandimento 28 diam.; tutte le fotografie a luce naturale, eccetto il n. 6 che è a nicols incrociati.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume I-XXXIII. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII.
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI.

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti delle Adunanze Solenni. Vol. I-III.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. Vol. I-IV.
» » » » » Boll. 1°-3°
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.

Annuario 1882-1924.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXIX.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-III.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia.
Indici degli Atti Accademici (in preparazione).

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1924

Notizie degli Scavi. Vol. XXI, in fascicoli trimestrali (1) . . . . . . L. **120,00**
Rendiconti scienze morali. Vol. XXXIII, idem (1, 2, 3) . . . . . » **54,00**
Memorie, » » Vol. XVII, in fascicoli vari (1, 2, 3) . . . . prezzi vari
Monumenti antichi. Vol. XXIX, puntata 1ª (1) . . . . » **280,00**
Rendiconti scienze fisiche, Vol. XXXIII, in fascicoli bimensili (1, 2, 3) . . » **108,00**
Memorie, » » Vol. XIV, in fascicoli vari (1, 2, 3) . . . . prezzi vari
Rendiconto adunanza solenne. Vol. III (fascicolo 10°) (1, 2, 3) . . . . . » **8,00**
Annuario (1, 2, 3) . . . . » **4,00**

(1) In vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (4).
(2) » » » » » Maglione e Strini, Via Due Macelli 88, Roma (7).
(3) » » » l'Amministrazione dell'Accademia, Via della Lungara 10, Roma (29).

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO XX.

ARNALDO PIUTTI e E. BOGGIO-LERA

SUI GAS NOBILI DELLE ESALAZIONI VULCANICHE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Sui gas nobili delle esalazioni vulcaniche.

Memoria del Socio A. PIUTTI e del dott. E. BOGGIO-LERA [1]

presentata nella seduta del 10 dicembre 1924.

Mentre i gas nobili delle sorgenti termali, dei carboni fossili, dei grisous, delle miniere petrolifere, dei sali potassici, e di alcuni minerali e rocce, hanno formato oggetto di numerose ricerche per parte di molti sperimentatori (fra i quali citiamo lord Rayleigh, Ramsay, R. Kayser, Bouchard e Troost, Moureu, Moureu e Lepape, A. Kellas e Ramsay, Bouchard e Desgrez, Ramsay e Travers, Bamberger, Nasini, Anderlini e Salvadori, Bamberger e Landsiehl, Parmentier e Hurion, Liveing e Dewar, Moissan, Strutt, Piutti, ecc.), i gas nobili di origine vulcanica sono stati scarsamente studiati, anzi possiamo dire che un esame rigoroso dei loro spettri, fatta eccezione di quelli descritti dal Nasini, anche per le difficoltà di diverso genere che presentano tali ricerche, è stato trascurato.

A tale deficienza abbiamo procurato di rimediare compiendo, in questi due ultimi anni, una serie di determinazioni dell'argon, elio e neon, contenuti in alcune fumarole della regione vesuviana, delle isole Eolie, nei gas della solfatara di Pozzuoli, e del bacino termale di Agnano; e, sebbene queste ricerche non abbiano raggiunto la desiderata estensione, la circostanza del nuovo indirizzo che hanno assunto i lavori in questo Istituto, per il passaggio di uno di noi alla cattedra di chimica organica, ci induce a pubblicare il lavoro al punto nel quale si trova, confidando che altri vorrà con maggiore ampiezza continuare lo studio dell'interessante argomento.

Ricerche preliminari.

Per la determinazione quantitativa dei gas nobili essendo necessario conoscere quali erano gli ordinarii componenti dei gas in esame, e anche con una certa approssimazione le loro percentuali, allo scopo di stabilire le modalità più convenienti per la loro successiva eliminazione, apparve necessario di procedere all'analisi preliminare di tali componenti.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica organica e farmaceutica della R. Università di Napoli.

A tal fine abbiamo ideato, e costruito con la collaborazione del dott. E. Salvatore, l'apparecchio rappresentato nella fig. 1, il quale può essere riferito all'apparecchio di Orsat, con qualche aggiunta e modificazione, e di cui descriviamo brevemente l'impiego, visti i buoni risultati che con esso si sono ottenuti.

Il tubo 1, nel quale è contenuto il gas da analizzare, viene collegato alla conduttura 3, nella quale si fa successivamente il vuoto mediante una pompa ad olio di Geryk (che lo spinge fino a 1/100 di mm.): il robinetto 4, che stabilisce la comunicazione con tale pompa, viene poi chiuso, si apre il robinetto 2 del tubo contenente il gas, e, mano-

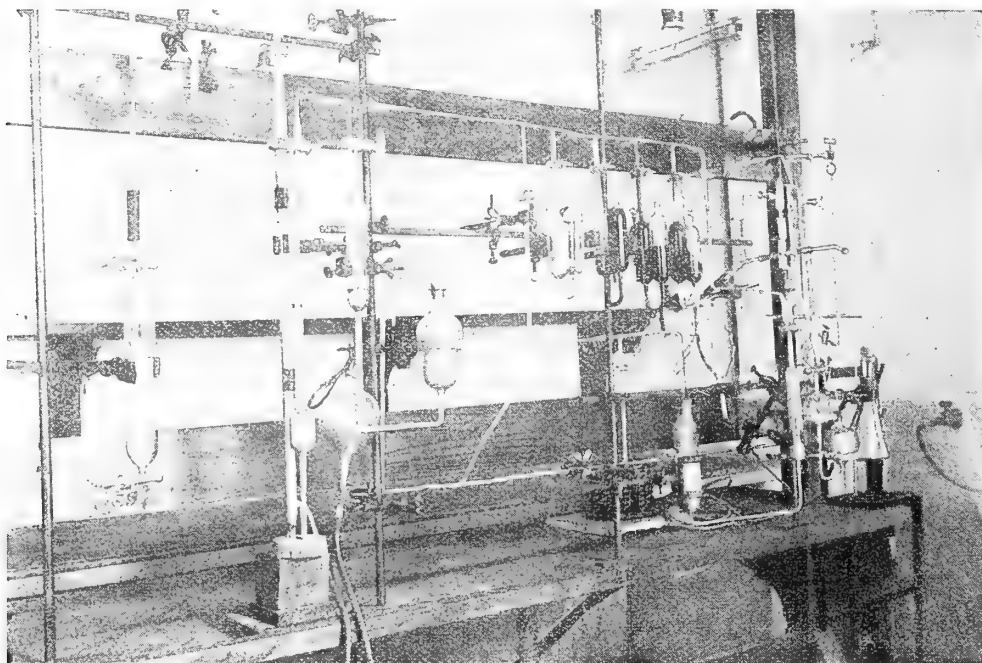



Fig 1.

vrando opportunamente i robinetti a due vie 5 e 7, e il serbatoio di mercurio 12, si fa pervenire il gas nella buretta 8, fornita di una canna di livello 10 di ugual diametro; chiuso poi il robinetto 7, si solleva il serbatoio 12 finchè il mercurio si dispone ad uguale livello nei tubi 8 e 10 attendendo qualche tempo affinchè il gas in 8 riprenda la temperatura dell'ambiente, che è indicata da un termometro in contatto con essa, e se ne legge il volume. Il gas viene successivamente travasato in 14 (¹) e da qui inviato nel tubo 23 (²) contenente solfato sodico cristallizzato, che assorbe l'HCl gassoso che eventualmente contiene.

Si fa poi scendere e risalire parecchie volte il mercurio nel corpo cilindrico 14, che rimane sempre in comunicazione con 23; in tal modo la frazione del gas che non

(¹) La conduttura capillare, che collega 8 con 14, viene riempita con mercurio prima di iniziare l'analisi.

(²) S'intende che queste, come anche i tubi 21 e 22 e la conduttura 16, vengono accuratamente vuotati e degasati prima di iniziare l'analisi.

era in questo pervenuto, perchè la prima volta occupava la conduttura capillare 16, viene intieramente in contatto col solfato.

Il gas, ora raccolto in 14, si travasa in 8, poi si fa il vuoto in 23 e nella conduttura 16 per mezzo del sistema 14-15, che si fa funzionare come una pompa di Geissler, inviando ogni volta in 8 il gas richiamato in 14 ; dopo di che si chiude il robinetto 29 del tubo 23 e si legge, nel modo precedentemente indicato, il volume del gas riportato in 8.

Se questo risulta minore del volume iniziale, si porta in 21, contenente solfato sodico crist. fresco, allo scopo di assicurarsi che più non contiene HCl.

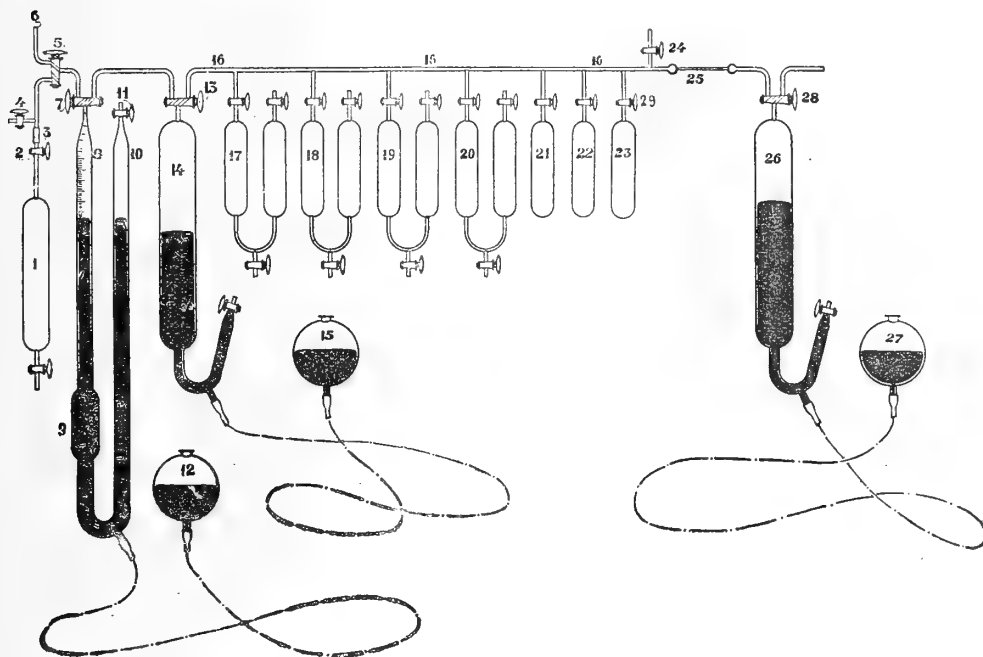



Fig. 1.

Le operazioni descritte si ripetono col tubo 22, il quale contiene PbO_2, destinato ad assorbire il gas solforoso, e con le pipette di Hempel 17-18-19-20, contenenti rispettivamente idrato potassico al 30 %, soluzione alcalina di pirogallolo, soluzione ammoniacale di cloruro ramoso, acido solforico fumante, i quali assorbono successivamente l'anidride carbonica, l'ossigeno, l'ossido di carbonio, e gli idrocarburi non saturi ; però, prima di inviare il gas in tali pipette, bisogna trasportarlo da 8 in 14, allo scopo di togliere il tubo 1 ed introdurre per 3 una piccola quantità di acqua acidulata con H_2SO_4, necessaria tanto per effettuare le letture dei volumi gassosi sempre alla stessa tensione di vapor acqueo, quanto per assorbire l'NH^3 e l'SO^3 sviluppati rispettivamente da 19 e 20.

L'eventuale eccesso dell'acqua acidulata, insieme con l'aria che può essere insieme trasportata, si elimina sollevando il serbatoio 12 e manovrando opportunamente il robinetto 7; si misura nuovamente il volume che occupa il gas in 8. Dedotto, dalle successive diminuzioni del volume gassoso, le quantità di HCl, SO_2, CO_2, O, CO,

idrocarburi non saturi, che il gas contiene, lo si porta nuovamente in 14, e si introduce in 8, per la conduttura 6 (che è collegata a un piccolo gassometro in vetro, contenente ossigeno puro preparato dal permanganato potassico), un certo volume di ossigeno che viene misurato esattamente e poi trasportato in 14, ove viene a mescolarsi con il gas in esame.

Si scalda allora al calor rosso, mediante una piccola spirale di nichel-cromo attraversata da una corrente elettrica regolabile, il capillare 25 di platino, che è intercalato, mediante giunti di smalto, nella conduttura in vetro, saldata al robinetto 28.

Il riscaldamento non viene effettuato col becco Bunsen, per evitare la eventuale introduzione di piccole quantità di H

Quando il capillare di platino ha raggiunto il color rosso chiaro, il miscuglio gassoso che trovasi in 14 si fa passare lentamente nell'altro corpo di pompa 26, dal quale ritorna poi in 14; e così si fa passare parecchie volte il miscuglio gassoso attraverso il capillare rovente, per raggiungere sicuramente la combustione completa dell'idrogeno e del metano [1] eventualmente presenti.

Alla fine, tutto il miscuglio gassoso si fa passare in 8, sempre utilizzando il sistema di pompa 14–15, e se ne legge il volume; quindi lo si invia nella pipetta di Hempel 17, che contiene idrato di potassio, allo scopo di assorbire la CO_2 che può essersi prodotta nella combustione degli idrocarburi; infine lo si riporta in 8, seguendo le modalità già indicate, e se ne legge il volume. Si viene così a determinare:

1) la diminuzione di volume prodottasi nella combustione;

2) la quantità di CO_2 che si è formata nella combustione;

Questi dati permettono di calcolare le quantità di idrogeno e di metano contenute inizialmente nel gas

Infatti indicando:

con a il volume gassoso restante dopo la eliminazione dell'HCl, SO_2, CO_2, O, CO, H, idrocarburi saturi;

con b la contrazione osservata in seguito alla combustione;

con c il volume di CO_2 prodottasi nella combustione;

osservando che la contrazione b è la somma di due contrazioni p e q determinate rispettivamente dalla presenza, nel gas, di un certo volume X di idrogeno e un volume Y di metano,

poniamo dunque

$$p + q = b; \tag{1}$$

e sapendo d'altra parte che la contrazione determinata da un dato volume di idrogeno è eguale a 3/2 del volume stesso, mentre la contrazione determinata dal metano è eguale al volume del metano medesimo, possiamo scrivere

$$p = {}^3/_2\,\mathrm{X} \quad \text{e} \quad q = \mathrm{Y};$$

e poichè da un volume di metano si forma un volume eguale di CO_2, abbiamo anche

$$\mathrm{Y} = c$$

[1] Non ci risulta che siano stati trovati altri idrocarburi saturi nei gas di origine vulcanica.

ma c è stato determinato precedentemente, e risultano perciò determinati immediatamente Y e q:

$$Y = c = q$$

Servendosi della (1) e della (2), si ricava facilmente X:

$$p = b - q, \quad \text{e} \quad X = {}^2/_3 (b - q)$$

Raccolta dei gas.

Per la raccolta dei gas e per la esecuzione delle analisi preliminari con l'apparecchio sopra descritto, abbiamo stretto opportuni accordi con il dott. E. Friedländer, direttore dell'Istituto vulcanologico Friedländer in Napoli; egli, oltre a darci il valido ausilio della sua competenza e lunga esperienza nel campo vulcanologico, fece costruire nella solfatara di Pozzuoli un piccolo osservatorio espressamente arredato per la raccolta dei gas, e incaricò il suo assistente dott. E. Salvatore, di procedere alle operazioni necessarie per tale prelevamento ed a quelle determinazioni che bisognava effettuare sul posto (H_2S), mentre analogo incarico venne dato alla dott^{ssa} Clara Olita ed al laur. A. Vitale rispettivamente per i gas del bacino termale di Agnano e di alcune fumarole vesuviane.

I dottori E. Salvatore e C. Olita, avendo constatato che i gas da essi raccolti erano costituiti quasi intieramente da CO_2, ritennero più conveniente eseguire la determinazione di essa e dell'H_2S, con un metodo da essi esposto nella «Zeitschrift fürV ulcanologie», B. VII, Heft 3, pp. 149 e 155, e poi inviarono notevoli quantità di gas in apparecchi (uno dei quali è raffigurato in 1, fig. 2) contenenti soluzione concentrata di potassa così da ottenerlo privo di CO_2.

Il gas inassorbito venne analizzato nell'apparecchio della fig. 1, che abbiamo precedentemente descritto, e si misero a nostra disposizione altri campioni di altri gas raccolti nello stesso modo, sui quali noi abbiamo eseguito la separazione e determinazione dell'argon, elio e neon.

Il dott. O. De Fiore analizzò i gas delle fumarole di Vulcano (isole Eolie), e i risultati avuti li espose nel volume di supplemento n. III della «Rivista vulcanologica» di Friedländer.

Egli raccolse l'azoto, separato da detti gas, in quattro tubi, che mise a nostra disposizione per l'analisi.

Separazione e determinazione dei gas nobili.

La separazione e determinazione quantitativa dei gas nobili vennero effettuate coll'apparecchio riprodotto nella fig. 2, e che descriviamo:

Il gas in esame è contenuto in 1; 8 è un cilindro destinato a misurarne il volume; 12 e 45 sono due pompe di Geissler di discreta capacità; i tubi 18, 39, 23 sono costruiti in vetro di Jena e raccordati con giunti a smeriglio a 16-17, 22-25, 37-38; essi sono pro-

tetti da manicotti di rame 18, 40, 24; i primi due tubi contengono ossido di rame in granuli, il terzo trucioli di calcio metallico misti a pochi trucioli di magnesio, miscela da cui l'azoto viene più rapidamente assorbito che non dal calcio solo.

Le bolle 19 e 28 contengono anidride fosforica; della quale si rinnova facilmente la superficie facendo ruotare le bolle 19 e 28 sui loro giunti a smeriglio 20,21, 27,29.

Il tubo 35 contiene idrato potassico in frammenti; le anse 30, 32, 41 conferiscono al sistema una certa elasticità, che è necessaria specialmente pel fatto che i tubi 18, 23, 39, dovendo essere portati al calor rosso, vengono a subire dilatazioni che raggiungono parecchi millimetri.

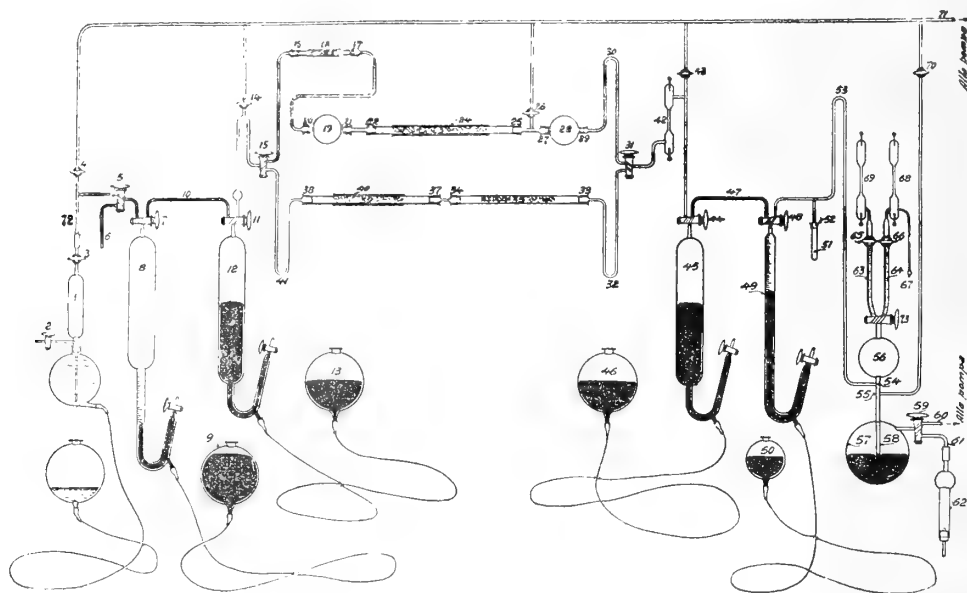



Fig. 2.

In 42 si ha un tubo di Geissler che permette di controllare lo svuotamento preliminare dell'apparecchio, nonchè la composizione dei gas durante le successive operazioni; la buretta 49, nella quale si può apprezzare il centesimo di cm³, viene impiegata per misurare il volume complessivo dei gas nobili; il tubo 51 è costruito in vetro di Jena, e contiene gr. 0,3 di carbone di nocciuoli di ciliegio; è raccordato, mediante il giunto a smeriglio 52, al resto dell'apparecchio.

Il sistema 56-57 funziona da pompa di Geissler, poichè, come vedremo in seguito, la pressione dei gas che possono pervenire nella bolla 56 è assai piccola, e quindi gli spostamenti del mercurio dal corpo di pompa 56 verso il serbatoio 57, e viceversa, possono ottenersi estraendo l'aria da 57 per la via 60 del robinetto 59, e lasciandola poi rientrare per il tubo 62 contenente cloruro di calcio.

Il mercurio viene preventivamente scaldato, nel vuoto, fino all'ebollizione, nel serbatoio 57 stesso, per evitare l'inconveniente delle tracce di umidità che il mercurio apporta nelle pompe di Geissler del modello ordinario, e che darebbero luogo ad errori non trascurabili nell'apprezzamento di piccolissimi volumi gassosi.

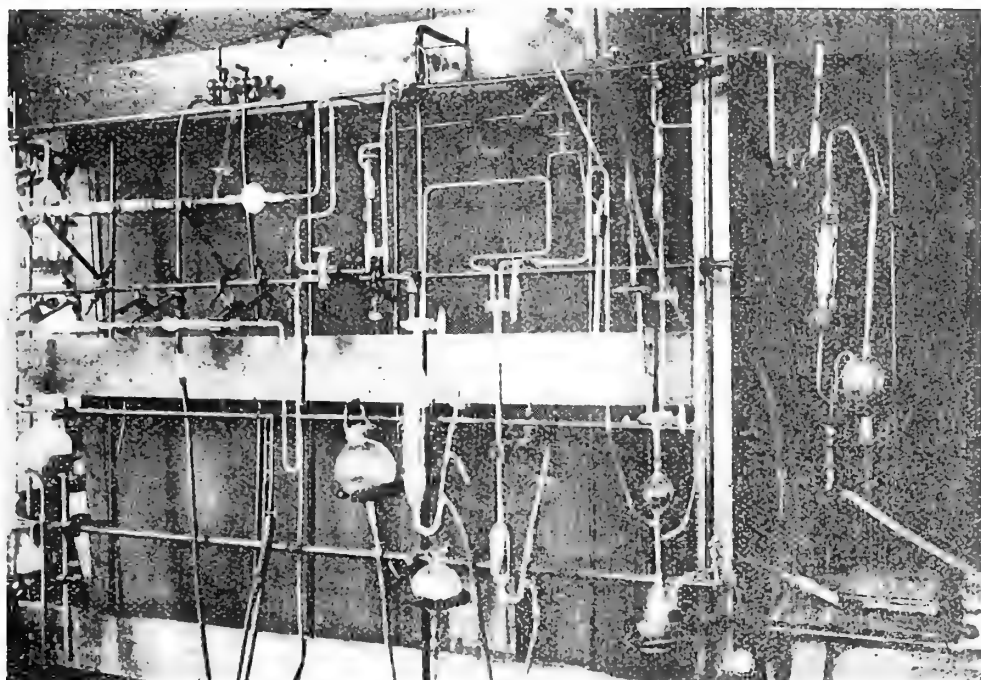



Fig. 2. — Parte sinistra dell'apparecchio.

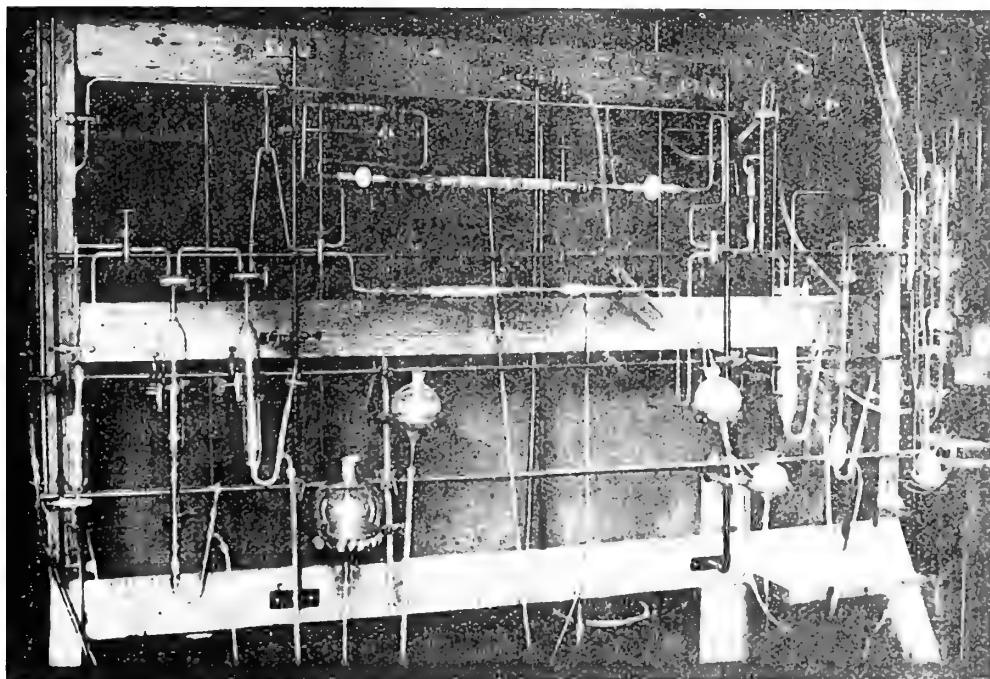



Fig. 2. — Parte destra dell'apparecchio.

In 63 e 64 si hanno due capillari graduati; in 68 e 69, due piccoli Plücker appositamente costruiti, il secondo è munito di una appendice 67 che contiene una piccolissima quantità di nocciuoli di carbone di ciliegio (gr. 0,02).

I robinetti 4, 14, 15, 26, 31, 43, 70 permettono di mettere le diverse parti dell'apparecchio in comunicazione con la conduttura 71 che è collegata con un'ottima pompa a diffusione.

Preparazione dell'apparecchio per l'analisi.

Prima di adoprare l'apparecchio per l'analisi, è necessario di riempire di mercurio i corpi 12, 45, 8, 49, nonchè le condutture capillari 6, 10, 47 ; si vuotano con la pompa a diffusione le rimanenti parti dell'apparecchio; si degasano il carbone contenuto in 51 e 67, l'ossido di rame in 18 e 30, nonchè il calcio contenuto in 23, scaldandoli lungamente al calor rosso ; dal calcio si svolgono per lungo tempo notevoli quantità di idrogeno, cosicchè è necessario di scaldarlo al calor rosso nel vuoto per sei ore almeno.

Quando tutto l'apparecchio è degasato, si chiudono i robinetti 4, 14, 15, 26, 31.

Gli elettrodi dei tubi di Plücker 69, 68 e 42 vengono liberati dalle traccie di gas (specialmente H) che sempre occludono, sottoponendo i tubi stessi a scariche intense e prolungate.

Analisi del gas.

Si aspira il gas in esame, contenuto in 1, nel corpo graduato 8 ; si chiude il robinetto 7, e, dopo qualche tempo, si misura il volume del gas prelevato, prendendo naturalmente nota della temperatura ambiente, del valore della pressione atmosferica, e della eventuale differenza di livello del mercurio in 8 e in 9, la quale viene apprezzata mediante un catetometro ; poi si trasporta il gas in 12 e si fa fuoruscire per la conduttura capillare 6 una piccola quantità del mercurio che adesso riempie il corpo graduato 8 (ciò che si ottiene sollevando sufficientemente il serbatoio 9 e manovrando opportunamente i robinetti 5 e 7); la conduttura 6 resta così riempita di mercurio ; si porta sotto di essa un recipiente contenente soluzione alcalina di pirogallolo preparata al momento, disponendolo in modo che l'estremità del tubo 6 sia immersa nella soluzione. Abbassando il serbatoio 9, la soluzione di pirogallol viene aspirata in 8 e, quando ve ne è pervenuta una quantità sufficiente, si inverte la posizione del robinetto 7 e si solleva il serbatoio 13, rinviando così in 8 il gas che era stato portato in 12 ; si lascia che il mercurio, dopo aver riempito il corpo di pompa 12, si spinga anche nella conduttura capillare 10 fino al robinetto 7, poi si chiude quest'ultimo e si lascia in contatto il gas con la soluzione alcalina di pirogallol per una mezz'ora. Si riporta quindi il gas in 12, chiudendo il robinetto 7 non appena esso è raggiunto dalla soluzione alcalina ; questa viene poi espulsa per la stessa via per la quale è stata introdotta: si risciacqua il corpo 8, prima con acqua, poi con soluzione di idrato potassico al 50 %, e infine si riporta il gas in 8 e, dopo qualche tempo, se ne misura il volume: la differenza

fra questa lettura e quella precedente esprime il volume di ossigeno contenuto nel gas; questo viene poi rinviato nuovamente in 12, e, dopo aver scaldato al calor rosso mediante una ribalta di becchi Bunsen il tubo 39, si solleva il serbatoio 13, si abbassa l'altro 46, e si dispongono i robinetti 11, 15, 31, 44 in modo che il gas possa passare da 12 in 45, attraversando i tubi 39 e 35; poi gli si fa percorrere il cammino inverso, abbassando 13 e sollevando 47, e si ripetono parecchie volte queste operazioni; si comprende facilmente che l'idrogeno, il metano, l'ossido di carbonio, eventualmente contenuti nel gas, bruciano passando sull'ossido di rame rovente in 39, e i prodotti della combustione CO_2 ed H_2O vengono assorbiti dalla potassa in 35.

Alla fine il gas, da 12, viene inviato in 8 e poi si fa il vuoto in 39, 35, 42, mediante il sistema 12-13, che si fa funzionare come una pompa di Geissler, inviando ogni volta in 8 il gas aspirato in 12; poi si misura il volume del gas che si è riunito in 8 e che adesso è costituito da azoto e gas nobili; quindi si scaldano al calor rosso i tubi 18 e 23, si riporta il gas in 12 e poi lo si fa passare, nel modo già detto, da 12 in 45 e viceversa, disponendo però i robinetti a due vie 15 e 31 in modo che il gas attraversi 18, 19, 23, 28; l'azoto viene così assorbito dal calcio in 23; le piccole quantità di idrogeno, che potessero svolgersi dal calcio, vengono bruciate dall'ossido di rame contenuto in 18, e l'acqua prodottasi viene trattenuta dalla P_2O_5 in 19; questa trattiene anche le traccie di umidità che potessero provenire da 12 mentre la P_2O_5 contenuta in 28 trattiene quella che potesse provenire da 45, e che darebbero luogo a produzione di idrogeno se raggiungessero il calcio in 23.

L'assorbimento dell'azoto procede in modo facile e rapido; e anzi, se si ha cura di scaldare bene il tubo 23 e di inviarvi gradatamente il gas (manovrando cioè con cautela il robinetto 11 che darà via libera al gas contenuto in 12 verso lo spazio vuoto 18, 19..., osservando in pari tempo il tubo di Geissler 42 nel quale si invia la scarica di un rocchetto d'induzione), si vede il tubo stesso illuminarsi di luce azzurrognola ben diversa da quella che fornisce l'azoto, e mediante uno spettroscopio si osserva lo spettro dell'argon esente di azoto.

In ogni caso la eliminazione completa dell'azoto si consegue facilmente con ripetuti passaggi del gas sul calcio rovente.

Il gas residuo viene estratto mediante la pompa di Geissler 45-46 e inviato nella buretta 49, ove se ne determina il volume, tenendo conto, oltre che della temperatura ambiente e della pressione atmosferica, anche della depressione capillare del mercurio e della eventuale differenza di livello del mercurio fra 49 e 50, la quale viene determinata mediante un catetometro.

Essendo chiusi i robinetti 73, 65, 67, si lascia ora entrare cautamente l'aria per la via 61 del robinetto 59, finchè il mercurio del serbatoio 57, salendo pel tubo 58, giunge fin presso la curva 53; poi si raffredda con aria liquida il tubo 51 che, come già si è detto, contiene carbone di nocciuoli di ciliegio, e vi si invia il miscuglio di gas nobili raccolti in 49. Dopo una decina di minuti, si estrae l'aria da 57 per la via 60 del robinetto 59, servendosi di una pompa rotativa ad olio, finchè il mercurio, che era salito presso 53, si abbassa fino al livello 54, lasciando in comunicazione 56 con 51: il residuo gassoso, rimasto inassorbito dal carbone, passa allora in buona parte nella bolla 56 e può essere inviato nel capillare graduato 64, lasciando nuovamente entrare l'aria in 57,

così da far risalire il mercurio fin presso 53 e manovrando poi opportunamente il robinetto 73.

Ripetendo alcune volte queste operazioni, si riunisce la totalità del gas, rimasto inassorbito dal carbone, nel capillare 64 ; se ne misura il volume e se ne determina la pressione misurando al catetometro, la differenza fra i livelli del mercurio in 74 e 64, tenuto conto naturalmente delle rispettive depressioni capillari.

S'invia poi il gas nel piccolo Plucker 68 e se ne controlla la natura e la purezza confrontandone lo spettro con quello fornito da tubi contenenti He, Ne, ecc. puri ; occorrendo, si raffredda con aria liquida il piccolo bulbo 67 contenente gr. 0,02 di carbone di nocciuoli di ciliegio e si determina la eventuale diminuzione di volume del gas estraendolo da 68 e portandolo nell'altro capillare graduato 63 e si utilizza a tal uopo nuovamente il sistema 56-58 che, come già si è detto, equivale a una pompa di Geissler ; alla fine il gas è inviato nel piccolo Plucker 59 che può essere asportato fondendo a la lampada il tratto affilato 75, allo scopo di conservare il gas per ulteriori esami e per fotografare lo spettro.

I varii volumi gassosi misurati nel corso del procedimento si sono naturalmente ridotti a 0° e 760^{mm} all'intento di poterli mettere in relazione fra di loro.

Controllo dell'apparecchio e del metodo.

L'apparecchio ed il metodo vennero controllati eseguendo la separazione e la determinazione dell'Ar, Ne ed He nell'aria atmosferica. Secondo le indicazioni date da S. W. Ramsay nei « Proc. Roy. Soc., » 76, p. 111 (1905), si possono separare l'Ar, Ne ed He fra di loro mediante il carbone di noci di cocco, il quale alla temperatura di solidificazione dell'etere (—100°) assorbe l'Ar lasciando liberi l'He ed il Ne, mentre alla temperatura dell'aria liquida (—190°) assorbe anche il Ne lasciando isolato l'He.

Dopo numerose esperienze fatte con varie qualità e quantità di carbone, abbiamo dovuto convincerci che una separazione quantitativa dei tre gas col metodo indicato dal Ramsay non è realizzabile, poichè il carbone di noci di cocco come quello di noccioli di ciliegio, alla temperatura di —100° assorbono bensì l'Ar ma non quantitativamente, cosicchè quantità abbastanza sensibili rimangono mescolate all'He ed al Ne.

Soltanto operando a temperature più basse si riesce ad avere questi due gas privi di esso. Abbiamo inoltre constatato che lo spettro fornito da un miscuglio di He e di Ne non si modifica sensibilmente, anche se è posto in contatto con carbone raffreddato con aria liquida ; se la quantità di carbone è considerevole, le righe del Ne si attenuano ; ma lo stesso avviene anche per quelle dell'He.

Impiegando piccole quantità di carbone raffreddato con aria liquida bollente nel vuoto, le righe del Ne si attenuano fino a scomparire, ma contemporaneamente scompaiono anche quelle dell'He.

Ponendo il miscuglio Ar–Ne–He in contatto con una quantità di carbone raffreddata con aria liquida (gr. 0,3 per 2-3 cc. di miscuglio gassoso), il gas residuo diede solamente le righe dell'He e quelle del Ne ; dalla misura del suo volume si ottenne il valore 0,0022 quale somma delle percentuali dell'He e del Ne nell'aria atmosferica ;

questo valore è in discreto accordo con quello trovato da G. Claude (5), che è 0,0020 (e cioè He 0,0005 %; Ne 0,0015 %: (He + Ne) = 0,0020 % (6).

Abbiamo dovuto quindi concludere che, mediante l'impiego del carbone, non si può conseguire che la separazione quantitativa dell'Ar da una parte, e della somma dell'He e del Ne dall'altra; anche ad analoghe conclusioni era giunto Moureu (« Journal de chimie physique, 1913 », p. 63).

Risultati ottenuti.

I dati ottenuti, che riuniamo nella tabella I, si riferiscono a 100 parti in volume dei gas quali ci furono rimessi dai sigg. dott. O. E De Fiore, E. Salvatore e C. Olita, e cioè privati, come già si è detto, di alcuni dei loro costituenti iniziali (CO_2, ecc.).

Tabella I.

Gas determinati	Solf. di Pozzuoli	Terme di Agnano	Fumar. di Vulc. t. 350° Frat. N-S	Fumar. di Vulc. t. 145° Batt. N.	Fumar. di Vulc. t. 100° Pietre Cotte	Fum. di Vulc. t. 8° Pietre Cotte
$H_2 + CH_4$ . .	9,72	tracce	—	—	—	—
O_2	9,65	tracce	7,14	12,75	0,00	4,48
N_2	79,72	99,0	91,84	86,4	99,52	94,49
Ar	0,89	0,904	1,00	0,815	0,453	1,00
He + Ne . . .	0,01703	0,0826	0,00389	0,00583	0,0200	0,0300
	99,99703	99,9866	99,98389	99,97083	99,973	99,93000

In questi gas furono riscontrate solamente tracce di neon, cosicchè le cifre indicate pnr la somma He + Ne potrebbero assumersi come percentuali dell'He, senza commettere errori sensibili.

La presenza dell'ossigeno nei gàs della solfatara di Pozzuoli e delle fumarole di Vulcano dipende verosimilmente da accidentali penetrazioni di aria, non sempre evitabili; dalla quantità di ossigeno riscontrata si può tuttavia calcolare con una certa approssimazione la quantità di aria penetrata e, sottraendone i componenti da quelli risultanti all'analisi, si può risalire alla composizione reale dei gas vulcanici, ammettendo beninteso, che tali siano dall'origine privi di O.

Assumendo infatti come composizione centesimale dell'aria.

$$\begin{aligned} O_2 &= 20{,}9 \\ N_2 &= 78{,}1 \\ Ar &= 0{,}935 \\ He + Ne &= 0{,}002 \\ \hline & \quad 99{,}937 \end{aligned}$$

possiamo dire che se in 100 parti (in volume) del gas della solfatara di Pozzuoli erano contenute 9,65 parti di ossigeno atmosferico, dovevano esservi contenute anche:

20,9 : 78,1 = 9,65 : X	36,0	parti di azoto
20,9 : 0,935 = 9,65 : Y	0,37	» » argon
20,9 : 0,002 = 9,65 : Z	0,000924	» » He e Ne

atmosferici; sottraendo queste quantità da quelle che figurano nella composizione centesimale del gas della solfatara data precedentemente, cioè:

$H_2 + CH_4$	9,72
O_2	9,65
N_2	79,72
Ar	0,89
He + Ne	0,01703
	99,99703

avremo

$H_2 + CH_4$ =	9,72		= 9,72
O_2 =	9,65	— 9,65	= 0,00
N_2 =	79,72	— 36,0	= 43,72
Ar =	0,89	— 0,37	= 0,52
He + Ne =	0,01703	— 0,000924	= 0,016116
			53,976116

e infine riportando a 100, si ottiene la composizione centesimale del gas della solfatara di Pozzuoli quale sarebbe risultato nel caso che si fosse potuta escludere completamente l'aria atmosferica dagli apparecchi di raccolta:

53,9761 : 9,72 = 100 : *a*	$H_2 + CH_4$	= 18,0
53,9761 : 43,72 = 100 : *b*	N_2	= 81,0
53,9761 : 0,52 = 100 : *c*	Ar	= 0,9679
53,9761 : 0,016116 = 100 : *d*	He + Ne	= 0,02986
		99,99776

Applicando analoghe correzioni per quei gas che dai dati analitici della tabella I non risultano privi di aria, otteniamo i valori della seguente tabella:

TABELLA II.

Gas determinati	Solf. di Pozzuoli	Terme di Agnano	Fumar. di Vulc. t. 350°	Fumar. di Vulc. t. 145°	Fumar. di Vulc. t. 100°	Fumar. di Vulc. t. 98°
$H_2 + CH_4$ . . .	18,0	tracce	—	—	—	—
N_2	81,0	99,0	99,05	99,36	99,52	98,95
Ar	0,9679	0.904	0,9371	0,6264	0,453	1,015
He + Ne . . .	0,02986	0,0826	0,00783	0,0118	0,0200	0,0287
	99,99776	99,9866	99,99493	99,9982	99,9930	99,9937

La interpretazione delle cifre relative ai gas nobili è facilitata dall'esame dei rapporti Ar/N, He + Ne/Ar, ricavati dalle rispettive percentuali contenute nei gas analizzati e dal loro confronto con gli analoghi rapporti che intercedono fra le percentuali degli stessi elementi contenuti nell'aria; tali rapporti sono riuniti nella seguente tabella:

TABELLA III.

GAS ESAMINATI	Ar/N_2	$He + Ne/N_2$	$He + Ne/Ar$
Aria atmosferica	$1{,}195 \times 10^{-2}$	$2{,}56 \times 10^{-5}$	$2{,}14 \times 10^{-3}$
Solfatara di Pozzuoli.	1.194 »	36,9 »	30,9 »
Terme di Agnano	0,913 »	83,5 »	91,4 »
Fumarola di Vulcano t. 350°	1,089 »	4,24 »	3,89 »
» » » t. 145°	0,944 »	6,95 »	7,15 »
» » » t. 100°	0,455 »	20,50 »	44,2 »
» » » t. 98°	1,052 »	24,35 »	23,0 »

Dividendo questi rapporti per i corrispondenti dell'aria atmosferica,

$$Ar/N_2 = 1{,}195 \times 10^{-2}\,; \qquad He + Ne/N_2 = 2{,}56 \times 10^{-5}\,;$$
$$He + Ne/Ar = 2{,}14 \times 10^{-3}\,,$$

si ottengono i dati della seguente tabella:

TABELLA IV.

GAS ESAMINATI	$\frac{(Ar/N)\ gas}{(Ar/N_2)\ aria}$	$\frac{(He + Ne/N_2)\ gas}{(He + Ne/N_2)\ aria}$	$\frac{(He + Ne/Ar)\ gas}{(He + Ne/Ar)\ aria}$
Aria atmosferica	1,00	1,00	1,00
Solfatara di Pozzuoli.	0,99	13.8	14,4
Terme di Agnano.	0,763	32,6	42,7
Fumarola di Vulcano t. 350°	0,912	1,655	1,815
» » » t. 145°	0,799	2,637	3,34
» » » t. 100°	0,381	8,02	20,64
» » » t. 98°	0,881	9,52	10,74

Dai valori riportati risulta che nei gas vulcanici esaminati:

I) Il rapporto argon/azoto è costantemente inferiore a quello dell'aria; anzi, nel caso delle fumarole Pietre Cotte (ovest di Vulcano) questo rapporto scende a 0,381. Un valore anche più basso (0,26) è stato riscontrato dal Moureu nei gas delle sorgenti termali di Pougues (S. St. Leon) (1); ma, nella maggior parte dei gas esaminati dallo stesso Moureu, detto rapporto è superiore a quello relativo all'aria, come ad es. nella sorgente della Grande Grille (Vichy) che è di 3,89.

II) Invece i rapporti He + Ne/Ar variano entro limiti molto più estesi, ma sono in ogni caso maggiori di quelli relativi dell'aria atmosferica, come avviene in grado assai più alto nei gas di alcune sorgenti termali, dei grisous analizzati dal Moureu ed in quelli, più copiosi, di Neuengamm in Austria-Ungheria e del Canadà e degli Stati Uniti, ecc.

La continuazione di queste ricerche nelle località indicate e la loro estensione ad altre regioni vulcaniche, unite alla determinazione, anche approssimativa, dei volumi gassosi erogati, permetterebbero forse di stabilire se anche in questo caso sia accettabile la interpretazione data dal Moureu (loc. cit.) alla presenza dell'elio in emanazioni terrestri di altra origine: se cioè esso si debba considerare come un *elio fossile* formatosi in epoche remotissime nell'interno della terra, oppure come *elio giovane*, vale a dire da attuali disintegrazioni radioattive, le quali potrebbero essere in qualche relazione con i fenomeni ancora così oscuri del vulcanismo.

III) Dall'esame delle percentuali di elio e neon nelle tabelle I e III e dei rapporti He + Ne/Ar nella tabella III, risulta anche che per i gaz di una stessa regione vulcanica il contenuto di Ne + He è maggiore per i gas *che presentano la temperatura più bassa*; ciò si verifica tanto per i gas della solfatara di Pozzuoli (140°) e delle Terme di Agnano (65°-70°), i quali appartengono alla regione dei Campi Flegrei, quanto per le quattro fumarole dell'isola di Vulcano da noi esaminate (350°-145°-100°-95°).

IV) I miscugli di elio e neon, separati dai gas vulcanici che abbiamo esaminato, contengono solo traccie di Ne (nell'aria il rapporto è di 3 a 1); cosicchè i valori dati come somma delle percentuali dell'elio e del neon possono assumersi come percentuali dell'elio, senza commettere errore sensibile.

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXX 1923)

SERIE QUINTA — VOLUME XIV — FASCICOLO XXI.

dott.ssa MAGDA LUCIANO

RICERCHE CRISTALLOGRAFICHE

SUL

DIOPSIDE DI SAULERA (VAL D'ALA)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

N. B. — Questo fascicolo contiene il frontespizio separato dell'intero volume XIV.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXX

1923

SERIE QUINTA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME XIV.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RELAZIONE

presentata dal Socio F. ZAMBONINI, relatore, a nome anche del Socio MILLOSEVICH, nella seduta del 13 aprile 1924, sulla Memoria della dottoressa MAGDA LUCIANO avente per titolo: *Ricerche cristallografiche sul diopside di Saulera (Val d'Ala).*

Il compianto Socio prof. Giovanni Strüver dedicò, come è noto, una parte cospicua della sua mirabile attività scientifica allo studio degli interessanti giacimenti minerali della Valle di Ala, in Piemonte. Personalmente, e con l'ausilio del prof. G. La Valle, illustrò il diopside e l'idocrasio della Testa Ciarva, l'epidoto del Colle del Paschietto e di Saulera, il diopside delle Borne de' Brous.

Molti ancora, però, sono i giacimenti di Val d'Ala che meritano di essere illustrati. Un particolare interesse offre il diopside di Saulera, fatto conoscere sommariamente dallo Strüver e da uno di noi. La dott. Luciano, nella Memoria presentata al giudizio dell'Accademia, espone i risultati delle indagini cristallografiche eseguite su un numero considerevole di cristalli di Saulera. Le ricerche della dott. Luciano dimostrano che il diopside di Saulera è ricco di forme cristalline, tanto da restare inferiore soltanto a quello della Testa Ciarva.

Interessante è anche il fatto che il diopside di Saulera risulta possedere alcune caratteristiche particolari, il che è tanto più notevole, se si pensa che i giacimenti di Saulera e della Testa Ciarva sono molto vicini, non solo, ma fanno parte di una stessa formazione.

La breve Memoria della dott. Luciano porta un valido contributo allo studio dei giacimenti minerali di Val d'Ala, e la vostra Commissione vi propone, perciò, di volerla inserire integralmente nelle Memorie, insieme coi pochi disegni da intercalare nel testo.

Ricerche cristallografiche sul diopside di Saulera (Val d'Ala).

Memoria della dott. MAGDA LUCIANO

Tra i numerosi giacimenti di minerali ben cristallizzati, che rendono così interessante la Val d'Ala, uno assai notevole è quello di Saulera, che fu sommariamente illustrato, or sono molti anni, dal compianto prof. G. Strüver (1). Una descrizione più recente del giacimento è dovuta al prof. Repossi (2).

Il giacimento di Saulera fu scoperto nel 1872 dalla famosa guida alpina Antonio Castagneri di Balme e si trova, come dice esattamente il Repossi, ad una cinquantina di metri sotto al limitare del gradino che precipita verso il Pian della Mussa, sulla riva destra della Stura di Ala. Il giacimento è facilmente accessibile, grazie al sentiero che conduce all'Alpe Saulera.

Il prof. Strüver, nei campioni di Saulera, riconobbe l'epidoto, il diopside, il granato, il clinocloro, l'apatite, la titanite, la calcite spatica, la calcopirite: il prof. Repossi aggiunse recentemente a questa lista la magnetite e l'aragonite. Come ben dice il Repossi, il giacimento di Saulera « ha dato molto e promette molto ». Presenta anche un notevole interesse, per il fatto di differenziarsi nettamente dal giacimento famoso della Testa Ciarva, che gli si trova quasi di faccia (più precisamente, un poco ad ovest) sulla sinistra della Stura di Ala.

Mentre infatti a Testa Ciarva l'epidoto è eccessivamente raro, tanto che soltanto il prof. Repossi ve lo ha rinvenuto di recente, dopo che era rimasto per tanto tempo ignoto a tutti i numerosi studiosi di quella classica località, a Saulera l'epidoto è frequente, fino a costituire da solo il banco da cui provengono i minerali cristallizzati, sicchè l'associazione dell'epidoto al diopside costituisce la caratteristica più saliente di quest'ultimo giacimento, che appare, perciò, particolarmente interessante. Ad onta di ciò, i minerali di Saulera hanno richiamato finora ben poco l'attenzione. Il prof. La Valle, nella sua bella monografia sull'epidoto di Val d'Ala, dedicata quasi esclusivamente all'epidoto del Colle del Paschietto, descrisse anche brevemente alcuni cristalli, poveri di faccie, di Saulera. Per quel che riguarda il diop-

(1) *I giacimenti minerali di Saulera e della Rocca Nera alla Mussa in Val d'Ala*, Rend. R. Accad. Lincei, 1899.

(2) *La Val d'Ala ed i suoi minerali*. Rivista di Scienze naturali « Natura », 1919, X, 110.

side, non si hanno, fino ad oggi, altre notizie che quelle pubblicate nel 1909 dal prof. Zambonini [1], il quale, in alcuni cristallini da lui stesso raccolti a Saulera in una fugace escursione dell'agosto 1907, riscontrò le forme: $a\{100\}$, $b\{010\}$, $c\{001\}$, $m\{110\}$, $\chi\{510\}$, $l\{310\}$, $p\{\bar{1}01\}$, $\pi\{041\}$, $z\{021\}$, $u\{111\}$, $v\{221\}$, $w\{331\}$, $s\{\bar{1}11\}$, $o\{\bar{2}21\}$, $\lambda\{\bar{3}31\}$, $N\{132\}$, $V\{\bar{1}33\}$.

Lo Strüver, nella sua descrizione, aveva asserito che i cristalli di diopside di Saulera erano perfettamente identici a quelli di Testa Ciarva. I risultati ottenuti dallo Zambonini, benchè non si riferissero che ad un materiale scarso, mostravano, invece, senza possibilità di dubbio, che l'asserzione dello Strüver non era fondata, e che, in realtà, i cristalli di Saulera si differenziavano nettamente da quelli della Testa Ciarva. Basta pensare alla nuova forma $\{\bar{1}33\}$, caratteristica per i primi, e trovata dallo stesso Zambonini in un unico cristallo di Testa Ciarva, ed al prisma $\{132\}$ rinvenuto a Saulera, ma mai a Testa Ciarva.

Nuovi studî cristallografici sul diopside di Saulera apparivano, perciò, opportuni, e promettevano di riuscire interessanti. Negli anni trascorsi in Torino, il prof. Zambonini dedicò alla raccolta ed allo studio dei minerali di Val d'Ala una parte non trascurabile della sua attività, riunendo così un materiale prezioso per l'illustrazione scientifica di quella nostra bella valle. Distratto, però, da altre ricerche, lo studio completo di quel materiale fu rimandato a miglior tempo, e delle indagini eseguite non videro la luce che alcune, pubblicate sotto forma di note o memorie preventive, che fecero conoscere l'interessantissimo giacimento di clinozoisite di Chiampernotto, stabilirono, dopo più di mezzo secolo di controversie, la vera natura della titanolivina, ed illustrarono il primo giacimento italiano di ardennite. Così, rimasero tra gli altri negletti i numerosi cristalli di diopside di Saulera, che erano stati riuniti, appunto, con lo scopo di farne oggetto di uno studio cristallografico approfondito, che permettesse un efficace confronto con i cristalli di Testa Ciarva e della Corbassera (Borne de Brous), descritti, questi ultimi, dal La Valle, e con quelli di Monte Tovo, che lo stesso Zambonini aveva misurato, senza, per altro, pubblicare i risultati ottenuti. Negli ultimi tempi della sua permanenza in Torino, il prof. Zambonini volle affidare a me lo studio dei cristalli di diopside di Saulera appartenenti al Museo di Mineralogia di Torino.

Nelle pagine seguenti riferirò brevemente sui risultati ottenuti, ma prima devo esprimere i miei ringraziamenti al prof. Zambonini, che mi fu prodigo di consigli, ed al dott. V. Perez, per l'intelligente assistenza con la quale vigilò il mio lavoro.

Nei campioni da me studiati di Saulera, il diopside si presenta sia sotto forma di mussite, con la caratteristica striatura sulle faccie del prisma $\{110\}$, dovuta alla geminazione polisintetica secondo la base, sia di bei cristalli di dimensioni molte

[1] *Die morphotropischen Beziehungen zwischen Enstatit, Diopsid, Hedenbergit, Ägirin und Spodumen*, Zeitsch. für Kryst., 1909, XLVI, 1.

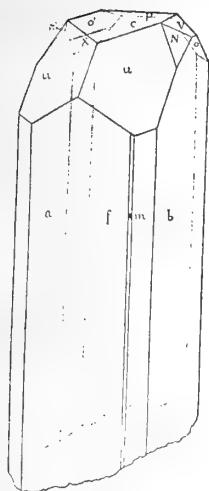
variabili, ma che, almeno per quanto mi consta, non raggiungono mai le dimensioni riscontrate frequentemente nei grandi cristalli di Testa Ciarva. Di solito, infatti, sono molto piccoli: quelli da me esaminati misuravano, nella direzione dell'asse *c*, secondo il quale sono allungati, da meno di 1 mm. fino a 15 ed eccezionalmente a 20 mm. Anche il colore è variabile: vi sono dei cristallini pressochè incolori, ed altri invece, nettamente verdastri: questi ultimi sono i più frequenti, e mi sembra, dal confronto del materiale di Saulera con quello della Testa Ciarva, esistente nel Museo di Torino, di poter affermare che i diopsidi di Saulera più diffusi (almeno fra quelli raccolti negli ultimi anni) sono sensibilmente più ferriferi di quelli più comuni a Testa Ciarva. Come vedremo in seguito, allo stesso risultato conducono le determinazioni del peso specifico da me eseguite.

I cristalli di diopside di Saulera sono, quasi senza eccezione, impiantati per una delle estremità dell'asse verticale: essi sono, per lo più, trasparenti soltanto alla estremità libera di questo asse, che è anche quella con colorazione più intensa, mentre l'altro estremo, per il quale sono impiantati, appare lattiginoso ed opaco. Sotto questo punto di vista si ha corrispondenza perfetta con i cristalli di Testa Ciarva. Mentre, però, in quest'ultima località sono frequentissimi i cristalli, anche grandi, unici, nel materiale di Saulera a mia disposizione si trovano, per lo più, cristalli costituiti da più individui, riuniti in posizione parallela o quasi, ovvero anche addirittura in modo irregolare, sviluppati più o meno distintamente e variamente. In alcuni gruppi i singoli individui sono ben distinti, tanto che è possibile misurarli come cristalli isolati; ma, più spesso, cristalli, apparentemente unici ad un esame grossolano, risultano al goniometro formati da molti individui assai esili, compenetrati in maniere svariate, e non sempre in associazione rigorosamente parallela, sicchè le faccie terminali vengono ad essere costituite da tante piccole faccettine, non complanari. Si ottiene così una serie di immagini del collimatore, fatto che rende talvolta le misure difficili e soltanto approssimative. È da osservare, però, che queste irregolarità non si manifestano in tutti i cristalli di Saulera. Quelli piccoli, studiati a suo tempo dal prof. Zambonini, apparivano, per lo più, unici. È perciò probabile che, nelle varie zone del banco di Saulera, i cristalli di diopside presentino (come appare, del resto, naturale) delle differenze, sia nella composizione, sia nell'*habitus*. È certo, ad ogni modo, che le complesse associazioni alle quali ho accennato, sono una caratteristica dei diopsidi di Saulera da me esaminati. Caratteristica generale dei cristalli di questo giacimento è quella di presentare, quasi costantemente, un aspetto dissimmetrico, inteso nel senso che di una data forma non sono presenti tutte le faccie che dovrebbero effettivamente coesistere per la simmetria della classe cristallina cui appartiene il diopside, o, se presenti, con sviluppo notevolmente differente dall'una e dall'altra parte del piano di simmetria.

In base alle ricerche da me eseguite su un gran numero di cristalli, io ho potuto aumentare notevolmente il numero delle forme semplici constatate da Zambonini nel diopside di Saulera. Mentre, come abbiamo veduto, quest'autore non ne rinvenne (a prescindere da alcune vicinali ed incerte) che appena 17, io ho potuto determinare le 29 seguenti: *a*}100{, *b*}010{, *c*}001{, *m*}110{, *g*}210{, *f*}310{, χ}510{, $\mathfrak{G}$}540{, $\mathfrak{M}$}160{, $\boldsymbol{\Delta}$}150{, *i*}130{, ω}120{, *p*}$\bar{1}$01{, p_1}$\bar{4}$01{, ψ}501{, *z*}021{, π}041{,

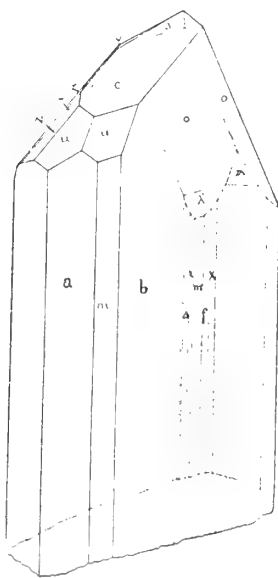
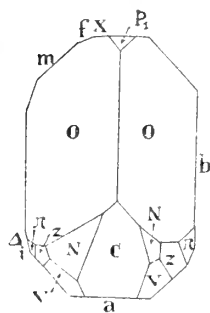
u {111} v {221}, w {331}, r {552}, N {132}, η {421}, λ {$\bar{3}$31}, o {$\bar{2}$21}, s {$\bar{1}$11}, ϱ {$\bar{3}$32}, τ {$\bar{1}$12}, V {$\bar{1}$33}.

Di queste forme, sono nuove per la località {130}, {150}, {120}, {210}, {160}, {501}, {421}, {552}, {$\bar{1}$12} e {$\bar{3}$32}: nuove per il pirosseno, almeno in base alla letteratura che ho potuto consultare, sarebbero {540} e {$\bar{4}$01}.

Nelle righe che seguono, descriverò brevemente i caratteri delle forme osservate:

Pinacoidi fondamentali. — I pinacoidi {100} e {010 sono sempre presenti e ben sviluppati, a volte egualmente estesi, a volte molto differentemente, cosicchè i cristalli sono tabulari ora secondo l'una or secondo l'altra forma. Le loro faccie sono in generale splendenti, ma scabre e striate secondo l'asse verticale e frequentemente non perfettamente parallele oppure a 90°. Caratteristiche sono le bellissime e nette figure di corrosione naturali limitate, molto probabilmente, da faccie di prisma {$0kl$} ed osservate sulla faccia {010} di un cristallo tabulare secondo questa stessa forma.

Il pinacoide {001}, sempre opaco, è poco sviluppato; a volte fornisce immagine pallida, ma netta.

Prismi verticali. — I cristalli di Saulera sono molto ricchi di forme nella zona verticale. I prismi finora noti per tale località sono m {110}, χ {510}, f {310}. Queste tre forme le ho riscontrate pure nei miei cristalli: presente sempre {110}, quasi costante pure {310} e frequente {510}. I primi due si presentano con faccie relativamente ampie e splendenti, mentre {510} ha tavolta faccette lineari. Di solito la {110} è presente nei quattro quadranti, non così gli altri due prismi.

Oltre a queste forme, ho osservato ancora i {130}, $\varDelta$ {150}, ω {120}, g {210}, 𝔐 {160}, frequente la prima, rara la seconda, riscontrate una volta la terza e la quarta e due sole volte la quinta. A queste forme, nuove per la località, devo aggiungere la 𝔊 {540}, nuova per il pirosseno, rinvenuta in un solo cristallo, ma sicu ramente determinata. Questi prismi verticali si presentano con faccie molto esili e solo in qualche quadrante: {130}, {120} e {210} sono già note nei cristalli di diopside della Testa Ciarva, nei quali, invece, finora non si è trovata nè {150}, nè {160}: {150}, scoperta da Flink nei cristalli hedenbergitici di Nordmarken (tipo I), fu ritrovata nel diopside tipico dell'Alpe Schwarzenstein da A. Schmidt ed in quello di Taberg da G. Nordenskjold. Quanto a {160}, si tratta di un prisma osservato la prima volta da A. Schmidt in un cristallo di Nordmarken, ma Zambonini dimostrò che le misure dello Schmidt non vanno d'accordo con i valori teorici richiesti dal simbolo, tanto che non ritenne di collocare quella forma tra le determinate con certezza. Anche a Saulera la differenza tra il valore

misurato e quello calcolato per (010) : (160) è un po' considerevole (19'), non tale, tuttavia, da infirmare il simbolo.

Pinacoidi $\{h\,o\,l\}$ e $\{\bar{h}\,o\,l\}$. — Di tali forme lo Zambonini aveva osservato soltanto $p\,\{\bar{1}01\}$, forma comunissima nel diopside e frequentissima nei miei cristalli, con faccie di solito abbastanza sviluppate, sempre opache, però, o pochissimo splendenti. Io ho osservata, inoltre, $\psi\,\{\bar{5}01\}$ e $p_1\,\{\bar{4}01\}$. La prima, nuova per il giacimento, osservato in un solo cristallo nella zona [100 : 001] si presenta come faccia grande e con immagine abbastanza buona, sì che ne sono state possibili le misure colle faccie adiacenti. La $p_1\,\{\bar{4}01\}$ invece, osservata in due cristalli, non troppo sviluppata, in forma di triangoletto quasi opaco, ma che fornisce un'immagine pallida, è nuova per il pirosseno. Fu riscontrata nelle due zone : [100 : 001], [$\bar{2}$21 : 110].

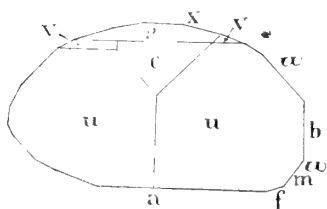
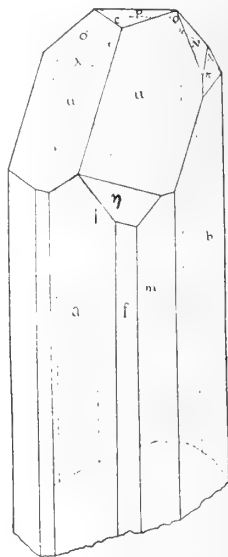
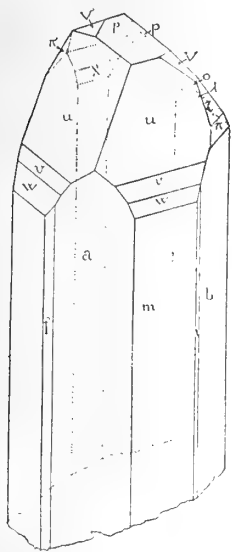
È degno di nota osservare come i cristalli, in cui è presente tale forma, sono tabularissimi secondo (010) e la parte posteriore, specialmente il prisma $\{\bar{2}21\}$, è molto più sviluppata che non la anteriore sì da fare scomparire financo la $\{111\}$ presente in tutti i cristalli, meno uno, in cui è presente la $p_1\,\{\bar{4}01\}$.

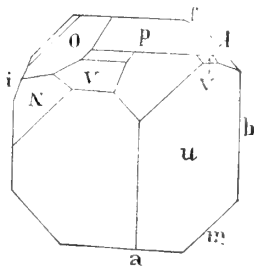
Il rinvenimento di $\{\bar{5}01\}$ nel diopside di Saulera è interessante, perchè si tratta di una forma molto frequente nei cristalli della Testa Ciarva, e speciale, finora, ai giacimenti di Val d'Ala.

Prismi $\{o\,k\,l\}$. — Trovai spesso $\{041\}$ e $\{021\}$, che Zambonini nella descrizione dei suoi cristalli indica come forme poco frequenti. Essi sono sempre splendenti e danno ottime immagini, sebbene non troppo sviluppati: anzi la $\{041\}$ di solito si presenta quasi lineare.

Prismi $\{h\,k\,l\}$. — Di questi, di gran lunga il più importante, il più frequente ed il più sviluppato è $\{111\}$, sempre presente e che termina quasi completamente i cristalli. Le due faccie superiori hanno, di solito, uguale grande sviluppo; però

capita pure, sebbene molto più di rado, che una si riduca lineare, quasi fino a sparire del tutto.

Di solito sono piane e splendenti; a volte hanno come una struttura a scala, già osservata da Zambonini.

I due prismi $\{221\}$ e $\{331\}$ furono osservati da Zambonini una sola volta : anche nei miei cristalli sono molto rari, come in generale, specialmente l'ultimo, nei giacimenti di diopside in genere. Si hanno specialmente in quei cristalli che presentano la $\{111\}$ degradante a gradinata e ne formano, per così dire, gli ultimi gradini. Di essi non furono possibili misure esatte, fornendo tutta una serie di immagini o presentandosi con faccie curve che arrotondano lo spigolo che $\{111\}$ forma con $\{110\}$.

Nuova per la località è la }552{ osservata in due soli cristalli nella zona [110 : 001], con faccie grandi, ma non piane, che non fu riscontrata finora nè a Testa Ciarva nè a Borne de' Brous ed è, del resto, rarissima nel diopside: non si conosce, infatti, che nei cristalli bianchi di Achmatowsk, nei quali fu scoperta da Kokscharow (1) e ritrovata, poi, molti anni più tardi, da A. Schmidt (2).

Frequente abbastanza il prisma }132{ discretamente sviluppato, al contrario di quanto si osserva nei cristalli studiati da Zambonini. Nuova pure per il giacimento di Saulera, ho osservato nei miei cristalli la forma }421{ così frequente a Testa Ciarva. Qui è estremamente rara e si ha solo là dove è presente la }221{. Si presenta con faccie curve che partecipano della curvatura della precedente: ne sono impossibili quindi le misure goniometriche.

Prismi }$\bar{h}kl${. Di questi, }$\bar{2}$21{ è, senza dubbio, il più importante e fu osservato in tutti i cristalli con faccie grandi e splendenti. In un cristallo, tra quelle terminali, è la forma predominante, così estesa che la }111{ è molto ridotta ed in un cristallo addirittura assente. È di solito limitata, nella parte inferiore, dalla }$\bar{3}$31{, anch'essa piana e splendente, molto ridotta rispetto alla precedente e talvolta lineare. Inoltre, mentre il primo prisma si presenta, quasi costantemente, con le sue due faccie, la }$\bar{3}$31{ spesso ne ha una sola. Frequente pure la ($\bar{1}$33), forma nuova per il pirosseno, trovata da Zambonini nel diopside di Saulera, di dimensioni variabili, ma in generale ben sviluppata, di solito opaca o pochissimo splendente, mentre Zambonini nei suoi cristalli la trovò sempre ben splendente. Più rara la }$\bar{1}$11{, quasi costantemente con faccie opache o appena splendenti, per cui riesce difficile, talvolta, stabilirne la presenza. Essa è di dimensioni variabili e si presenta a volte con una, a volte con due faccie. Forme nuove per il giacimento sono la }$\bar{1}$12{ e la }$\bar{3}$32{, ambedue note a Testa Ciarva ed osservate entrambe una sol volta; }$\bar{3}$32{ è notevole perchè osservata finora, oltre che a Testa Ciarva, soltanto nel diopside del Fleegletscher ed in quello di Achmatowsk.

Tutte le forme osservate si riuniscono nelle seguenti combinazioni:

Combinazioni di 4 forme.

a b m u

Combinazioni di 5 forme

a b c m u
a b m p u
a b m ***u o***

(1) *Materialien zur Mineralogie Russlands*, IV, 258.
(2) Zeitschrift für Kryst., 1893, XXI, 12.

Combinazioni di 6 forme

a b m f u o
a b c m u v
a b c m u o
a b c m f u
a b m u o r

Combinazioni di 7 forme.

a b m f u o λ
a b m f u r o
a b c m p o V
a b c m f u o
a b c m p u o

Combinazioni di 8 forme.

a b m g f χ i ω
a b m p u o λ V
a b m f p u o V
a b m f χ p u o
a b c m p π u o
a b c m f p u o
a b m f u o λ s
a b c m p u o s
a b c m π u o s
a b c m z π u o
a b c m p u o V

Combinazioni di 9 forme.

a b c m f p u o λ
a b c m f p π u o
a b c m p z π u o
a b c m f p u o V
a b c m f π u o V

Combinazioni di 10 forme.

a b c m g f ω p u V
a b m f z π u N o V
a b c m f p u N o V
a b c m f χ p u o V
a b c m f χ p u N o
a b c m f χ p u o V

Combinazioni di 11 forme.

a b c m f χ ω *p u* λ *V*
a b c f p π *u N* η *o* λ
a b c m p z u o s τ *V*
a b c m z π *u N o* τ *V*

Combinazioni di 12 forme.

a b c m f χ *p z* π *u o V*
a b c m f ω *p z u N o V*
a b c m χ Δ *i z u o* λ *V*

Combinazioni di 13 forme.

a b c m f χ *p* π *u N o* λ *V*

Combinazioni di 14 forme.

a b c m f 𝔐 *i p N* η *o* λ *s V*
a b c m p ψ *z* π *u N o* λ *s V*
a b m f χ *i* ω p_1 *z* π *u N o V*

Combinazioni di 15 forme.

a b c m f i z π *u v w o* λ ϱ *V*

Combinazioni di 16 forme.

a b c m f χ *p z* π *u N* η *v o* λ *V*

Combinazioni di 19 forme.

a b c m f χ 𝔊 𝔐 Δ *i* p_1 *z* π *u N o* λ *s V*

Ho creduto opportuno, servendomi dei valori angolari più precisi e misurati molte volte, di calcolare le costanti per il diopside di Saulera. Io ho ottenuto il seguente rapporto parametrico:

$$a : b : c = 1,0931 : 1 : 0,5892 \qquad \beta = 105^\circ 47 \, {}^1/_2{}'$$

molto vicino ai valori trovati da La Valle, da A. Schmidt e da Ledoux per il diopside della Testa Ciarva:

$a:b:c = 1{,}0912577:1:0{,}5894907$ $\beta = 105^\circ 51' 7''$ La Valle
$a:b:c = 1{,}089500:1:0{,}589400$ $\beta = 105\ 44\ 13$ Schmidt
$a:b:c = 1{,}091373:1:0{,}590278$ $\beta = 105\ 48\ 46$ Ledoux

e praticamente coincidente con quelli proposti da F. Zambonini per il diopside poco ferrifero in generale:

$$a:b:c = 1{,}0916:1:0{,}5894 \qquad \beta = 105^\circ 48' 30''$$

Notevole è soltanto il valore un po' più elevato da me trovato nei cristalli di Saulera per $a:b$.

Nella seguente tabella sono riuniti gli angoli misurati, confrontati con i valori calcolati in base alle costanti speciali per il diopside di Saulera.

	N.° delle misure	Misurato	Calcolato	Differenza
110 : 010	13	43° 33′	43° 33′	*
310 : 010	11	70 44 3/4	70 46 3/4	— 2
510 : 010	7	78 10	78 8 1/4	+ 1 3/4
111 : 010	6	65 45 1/2	65 45	+ 1/2
111 : $1\bar{1}1$	6	48 30	48 30	*
111 : 001	3	33 46	33 49 1/2	— 3 1/2
111 : 132	3	16 13	16 12	+ 1
111 : 110	4	45 22	45 22	*
111 : $\bar{1}33$	4	31 12 1/4	31 15 1/2	— 3 1/4
132 : 010	10	52 22	52 24	— 2
132 : 001	2	39 40	39 38	+ 2
132 : 021	1	14 45	14 45 1/2	— 1/2
132 : 041	2	29 36	29 39 1/4	— 3 1/4
$\bar{2}21$: 001	4	65 22 1/2	65 18 1/2	+ 4
$\bar{2}21$: 110	5	35 26 1/2	35 30	— 3 1/2
$\bar{3}31$: 001	2	76 19 1/2	76 20 3/4	— 1 1/4
$\bar{3}31$: $\bar{1}10$	4	24 24	24 27 3/4	+ 3 3/4
$\bar{1}33$: 100	9	85 20	85 16	+ 4
$\bar{1}33$: 010	7	59 37 3/4	59 36 1/2	— 1 1/4
$\bar{1}33$: 001	3	31 54	31 55 3/4	— 1 3/4
$\bar{1}33$: $\bar{1}\bar{3}3$	3	60 44 1/2	60 46 3/4	— 2 1/4
041 : 010	5	23 47	23 47 3/4	— 3/4
021 : 010	8	41 25 1/2	41 24 1/2	+ 1
160 : 010	1	9 19	9 1/4	+ 18 3/4
150 : 010	3	10 40 3/4	10 46	— 5 1/4
130 : 010	8	17 33 1/4	17 35	— 1 3/4
120 : 010	2	25 20	25 25 1/2	— 5 1/2
210 : 010	2	62 20	62 15 1/2	+ 4 1/2

	N.° delle misure	Misurato	Calcolato	Differenza
540 : 010	1	50° 1′	49° 55 1/4	+ 5 3/4
111 : 110	2	96 12	96 9 1/2	+ 2 1/2
111 : 021	1	31 0	30 57	+ 3
021 : $\bar{2}$21	6	38 45	38 49 1/2	— 4 1/2
021 : $\bar{3}$31	1	46 10	46 4	+ 6
021 : $\bar{1}$33	1	19 55	19 49	+ 6
021 : $\bar{4}$01	1	82 36	82 34 1/2	+ 1 1/2
021 : 041	4	17 35	17 36 3/4	— 1 3/4
021 : 100	6	79 41 1/4	79 37 3/4	+ 3 1/2
021 : $\bar{1}$10	1	65 15	65 11 3/4	+ 3 1/4
021 : 0$\bar{2}$1	1	97 12	97 10 3/4	+ 1 1/4
$\bar{1}$01 : 001	1	31 15	31 17 1/2	— 2 1/2
$\bar{1}$01 : $\bar{1}$00	2	74 33	74 30	+ 3
041 : 100	2	83 37 1/2	83 41 3/4	— 4 1/4
041 : $\bar{1}$10	2	54 4	54 1 1/2	+ 2 1/2
041 : $\bar{1}$30	1	33 4	32 57 1/2	+ 6 1/2
041 : $\bar{3}$10	2	78 36	78 31	+ 5
041 : $\bar{5}$10	1	85 31	85 21 1/2	+ 9 1/2
041 : 0$\bar{4}$1	1	132 25	132 24 1/2	+ 1/2
041 : $\bar{4}$01	1	85 36	85 28 3/4	+ 7 1/4
041 : $\bar{1}$33	2	36 25 1/2	36 21 1/2	+ 4
041 : $\bar{3}$32	1	38 28	38 15 1/2	+ 12 1/2
041 : $\bar{3}$31	2	41 22 1/2	41 18	+ 4 1/2
041 : $\bar{2}$21	1	38 35	38 33 3/4	+ 1 1/4
041 : 111	1	44 40	44 41	— 1
$\bar{4}$01 : 100	2	27 7 1/2	27 3 1/2	+ 4
$\bar{4}$01 : $\bar{1}$10	1	52 12	52 9	+ 3
$\bar{4}$01 : 310	1	33 0	32 49	+ 11
$\bar{4}$01 : $\bar{1}$33	1	71 34	71 30 3/4	+ 3 1/4
$\bar{4}$01 : $\bar{3}$31	1	46 23	46 25	— 2
$\bar{4}$01 : $\bar{2}$21	1	46 53	46 55	— 2
$\bar{4}$01 : 132	1	91 51	91 50 1/4	+ 3/4
$\bar{4}$01 : 111	1	101 59	101 54 1/4	+ 4 3/4
501 : 100	1	17 49	17 58	— 9
501 : $\bar{1}$01	1	87 19	87 32	— 13
501 : 132	1	55 49	55 42 1/2	+ 6 1/2
501 : 111	1	39 29	39 17	+ 12
501 : $\bar{1}$33	1	70 10	69 55	+ 15
501 : $\bar{2}$21	1	105 53	106 7 1/2	— 10 1/2
$\bar{1}$01 : $\bar{1}$33	1	36 28	36 21 1/4	+ 6 3/4
$\bar{1}$01 : $\bar{1}$11	2	29 50	29 35	+ 15
$\bar{1}$01 : $\bar{2}$21	1	47 43	47 30 1/4	+ 12 3/4

	N.° delle misure	Misurato	Calcolato	Differenza
$\bar{1}01:132$	1	$56^{\circ}\,1'$	$55^{\circ}\,50\,^{3}/_{4}$	$+\,10\,^{1}/_{4}$
$\bar{1}01:111$	1	59 5	$59\ 1\,^{1}/_{4}$	$+\,3\,^{3}/_{4}$
$552:100$	1	46 50	$46\ 36\,^{1}/_{4}$	$+\,13\,^{3}/_{4}$
$552:010$	1	53 18	$53\ 2\,^{3}/_{4}$	$+\,15\,^{1}/_{4}$
$552:110$	1	24 21	$24\ 37\,^{1}/_{2}$	$-\,16\,^{1}/_{2}$
$552:\bar{2}21$	1	120 2	$119\ 52\,^{1}/_{2}$	$+\,9\,^{1}/_{2}$
$552:\bar{1}11$	1	63 53	$63\ 48\,^{3}/_{4}$	$+\,4\,^{1}/_{4}$
$552:111$	1	20 30	$20\ 44\,^{1}/_{2}$	$-\,14\,^{1}/_{2}$
$132:100$	6	$67\ 4\,^{3}/_{4}$	$67\ 7\,^{3}/_{4}$	$-\,3$
$132:010$	7	52 22	52 24	$-\,2$
$132:001$	2	39 43	39 38	$+\,5$
$132:110$	1	44 47	44 46	$+\,1$
$132:\bar{1}10$	2	80 2	$79\ 57\,^{1}/_{4}$	$+\,4\,^{3}/_{4}$
$132:\bar{2}21$	1	51 54	$51\ 55\,^{3}/_{4}$	$-\,1\,^{3}/_{4}$
$132:\bar{3}31$	1	60 13	$60\ 11\,^{1}/_{4}$	$+\,1\,^{3}/_{4}$
$132:\bar{1}33$	1	21 0	$21\ 0\,^{1}/_{4}$	$-\,^{1}/_{4}$
$132:\bar{1}\bar{3}3$	1	71 32	71 34	$-\,2$
$\bar{1}12:100$	1	89 58	$89\ 54\,^{3}/_{4}$	$+\,3\,^{1}/_{4}$
$\bar{1}12:010$	1	73 46	$73\ 35\,^{1}/_{4}$	$+\,10\,^{3}/_{4}$
$\bar{1}12:001$	1	22 20	$22\ 31\,^{1}/_{4}$	$-\,11\,^{1}/_{4}$
$\bar{1}12:\bar{1}10$	1	78 35	$78\ 17\,^{1}/_{2}$	$+\,17\,^{1}/_{2}$
$\bar{1}12:1\bar{1}1$	1	56 11	$56\ 20\,^{3}/_{4}$	$-\,9\,^{3}/_{4}$
$\bar{3}32:100$	1	67 14	67 20	$-\,6$
$\bar{3}32:010$	1	52 22	52 20	$+\,2$
$\bar{3}32:\bar{1}10$	1	45 2	$44\ 53\,^{3}/_{4}$	$+\,8\,^{1}/_{4}$
$\bar{3}32:111$	1	59 40	$59\ 34\,^{1}/_{4}$	$+\,5\,^{3}/_{4}$
$\bar{3}32:1\bar{1}1$	1	89 55	$89\ 44\,^{1}/_{4}$	$+\,10\,^{3}/_{4}$
$\bar{3}32.\bar{2}21$	1	9 21	$9\ 23\,^{1}/_{2}$	$-\,2\,^{1}/_{2}$
$\bar{3}32:\bar{3}31$	1	20 17	20 26	$-\,9$
$\bar{1}33:\bar{3}10$	1	85 44	85 52	$-\,8$
$\bar{1}33:110$	1	64 52	$64\ 56\,^{3}/_{4}$	$-\,4\,^{3}/_{4}$
$\bar{1}33:\bar{1}10$	2	72 2	$71\ 57\,^{1}/_{4}$	$+\,4\,^{3}/_{4}$
$\bar{1}33:\bar{3}31$	2	48 23	$48\ 27\,^{1}/_{2}$	$-\,4\,^{1}/_{2}$
$\bar{1}33:\bar{2}21$	3	38 4	$37\ 58\,^{1}/_{2}$	$+\,5\,^{1}/_{2}$
$\bar{1}11:010$	2	$60\ 29\,^{1}/_{4}$	$60\ 24\,^{3}/_{4}$	$+\,4\,^{1}/_{2}$
$\bar{1}11:\bar{1}30$	1	57 9	$56\ 15\,^{1}/_{2}$	$-\,6\,^{1}/_{2}$
$\bar{1}11:\bar{3}31$	1	34 28	$34\ 20\,^{3}/_{4}$	$+\,7\,^{1}/_{4}$
$\bar{1}11:\bar{2}21$	1	23 24	$23\ 18\,^{1}/_{4}$	$+\,5\,^{3}/_{4}$
$\bar{1}11:1\bar{1}1$	1	75 40	$75\ 49\,^{3}/_{4}$	$-\,9\,^{3}/_{4}$
$\bar{3}31:\bar{1}00$	2	$55\ 30\,^{1}/_{2}$	$55\ 27\,^{3}/_{4}$	$+\,2\,^{3}/_{4}$
$\bar{3}31:010$	3	44 11	$44\ 11\,^{3}/_{4}$	$-\,^{3}/_{4}$
$\bar{3}31:110$	1	82 30	$82\ 35\,^{1}/_{2}$	$-\,5\,^{1}/_{2}$

	N.° delle misure	Misurato	Calcolato	Differenza
$\bar{3}31:\bar{3}10$	1	39° 29′	39° 26 $^3/_4$	+ 2 $^1/_4$
$\bar{3}31:111$	2	75 56 $^1/_2$	75 52 $^1/_4$	+ 4 $^1/_4$
$\bar{3}31:1\bar{1}1$	5	110 11 $^1/_2$	110 10 $^1/_4$	+ 1 $^1/_4$
$\bar{2}21:\bar{1}00$	8	61 34 $^1/_4$	61 32 $^3/_4$	+ 1 $^1/_2$
$\bar{2}21:010$	7	47 55 $^3/_4$	47 54 $^1/_4$	+ 1 $^1/_2$
$\bar{2}21:110$	1	80 56	80 56 $^1/_4$	— $^1/_4$
$\bar{2}21:\bar{5}10$	1	52 46	52 49 $^3/_4$	— 3 $^3/_4$
$\bar{2}21:\bar{1}50$	1	41 35	41 37 $^1/_4$	— 2 $^1/_4$
$\bar{2}21:\bar{1}30$	1	38 30	38 28	+ 2
$\bar{2}21:\bar{3}10$	1	47 42	47 49 $^1/_2$	— 7 $^1/_2$
$\bar{2}21:111$	3	66 57 $^1/_4$	66 55 $^1/_2$	+ 1 $^3/_4$

Peso specifico. — Il peso specifico varia da località a località col variare della composizione chimica, e precisamente si ha che, coll'aumentare del tenore in ferro, cresce il valore del peso specifico. I precedenti lavori danno dei valori che oscillano tra 3,25 e 3,285 : recentemente Zambonini, col metodo dei liquidi pesanti, trovò per il diopside incoloro di Val d'Ala $d = 3,275$ ed esattamente lo stesso valore hanno trovato Day e Allen per il diopside sintetico puro. Ho determinato anch'io, con il metodo della sospensione (ioduro di metilene), il peso specifico per i cristalli di Saulera verdastri, dopo averli scelti opportunamente, ed ho ottenuto dei valori nettamente più alti. La media è $d = 3,289$. Ciò denota che il diopside di Saulera è più ricco in ferro che non quello più comune della Testa Ciarva, al quale si riferiscono le determinazioni di Zambonini e con ciò sta d'accordo anche la differente colorazione.

In base alle ricerche da me eseguite, che completano quelle preliminari di Zambonini, le quali avevano, però, già indicato le caratteristiche morfologiche essenziali del diopside di Saulera, è possibile procedere ad un confronto efficace fra i tre giacimenti di diopside di Val d'Ala finora studiati cristallograficamente con una certa ampiezza: Borne de' Brous, Testa Ciarva e Saulera.

Di Borne de' Brous, il La Valle non potè misurare che pochi cristalli, relativamente poveri di forme, tra le quali è notevole $N\{132\}$, ignota a Testa Ciarva, frequente, invece, a Saulera. Insuperato, come ricchezza di forme e di combinazioni, rimane sempre il diopside di Testa Ciarva, al quale, però, quello di Saulera comincia ad avvicinarsi.

I diopsidi di Saulera e della Testa Ciarva hanno lo stesso *habitus* fondamentale, determinato dal predominio dei due pinacoidi $\{100\}$ e $\{010\}$ nella zona [001] e da quello, pressochè costante, del prisma $\{111\}$ tra le forme terminali. Non mancano, però, differenze notevoli. Caratteristica, sopratutto, è la mancanza, a Saulera, di quelle numerose forme, alcune tipiche, altre vicinali, esistenti nella zona [100:111] dei cristalli di diopside di Testa Ciarva : richiama pure l'attenzione la grande rarità, a Saulera, di $\{421\}$, così frequente a Testa Ciarva. Viceversa, caratteristiche per Saulera sono $\{\bar{1}33\}$ e $\{132\}$ le quali si rinvengono spessissimo, per poco che i cristalli non siano eccessivamente poveri di forme. Ora, di quei due prismi, $\{\bar{1}33\}$ è stato osservato da Zambonini in un solo cristallo di Testa Ciarva, mentre $\{132\}$ è finora ignoto, come

abbiamo detto, nel diopside di quest'ultima località. La contemporanea presenza dei due prismi {$\bar{1}$33} e {132} in un cristallo sciolto di diopside di Val d'Ala di dimensioni non molto cospicue può servire, almeno in base alle nostre cognizioni odierne, a renderne come molto probabile la provenienza da Saulera. Anche interessante è il fatto che nel diopside di Saulera è frequente il prisma {130} ignoto a Testa Ciarva.

Tutte queste differenze e molte altre, che si potrebbero aggiungere, dimostrano che le condizioni di formazione dei cristalli di diopside di Saulera e della Testa Ciarva sono state sensibilmente diverse, com'è facile, del resto, a prevedere già dal fatto che, mentre a Testa Ciarva il diopside si rinviene in un banco di granato, a Saulera il banco è formato da granato e da epidoto.

INDICE DEL VOL. XIV. — SERIE V.

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume I-XXXIII. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV.
Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII. Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII.
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI.

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti delle Adunanze Solenni. Vol. I-III.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. Vol. I-IV.
» » » » Boll. 1°-3°
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.

Annuario 1882-1924.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXIX.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-III.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia.
Indici degli Atti Accademici (in preparazione).

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1924

Notizie degli Scavi. Vol. XXI, in fascicoli trimestrali (1)	L.	**120,00**
Rendiconti scienze morali. Vol. XXXIII, idem (1, 2, 3)	»	**54,00**
Memorie, » » Vol. XVII, in fascicoli varî (1, 2, 3)		prezzi varî
Monumenti antichi. Vol. XXIX, puntata 1ª (1)	»	**280,00**
Rendiconti scienze fisiche, Vol. XXXIII, in fascicoli bimensili (1, 2, 3) . .	»	**108,00**
Memorie, » » Vol. XIV, in fascicoli varî (1, 2, 3)		prezzi varî
Rendiconto adunanza solenne. Vol. III (fascicolo 10°) (1, 2, 3)	»	**8,00**
Annuario (1, 2, 3)	»	**4,00**

(1) In vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (4).
(2) » » » » » Maglione e Strini, Via Due Macelli 88, Roma (7).
(3) » » » l'Amministrazione dell'Accademia, Via della Lungara 10, Roma (29).